NOMBRE:____

1º) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} a & a+1 & a+2 \\ a & a+3 & a+4 \\ a & a+5 & a+6 \end{pmatrix}$

a) Discutir el rango en función del parámetro "a" (1´5 p.)
b) Para a = 1 resolver la ecuación : $A^t \cdot X = 0$ (1p.)

2º)

a) Resolver la ecuación $X \cdot A = B - C$ siendo $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

(1´5 p)

b) Si A es la matriz $(F_1 \quad F_2 \quad F_3)$ y tiene determinante igual a 5 , ¿ cuál es el determinante de la matriz $(3F_1 - F_3 \quad F_2 \quad 2F_3)$? (1 p.)

3º) Si $A = \begin{pmatrix} a & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$ se pide:

a) Calcular A^{-1} . (0´5 p.)
b) Estudiar el rango de A. (0´5 p.)
c) ¿ Cuánto debe valer "a" para que se cumpla que $A^{-1} = \frac{1}{4} \cdot A$? (1´5 p.)

4º) Dado el sistema de ecuaciones: $\begin{cases} 3x - y + mz = 0 \\ x + y = m \\ mx - 3y + mz = -2m \end{cases}$

a) Discutirlo en función de "m". (2 p.)
b) Resolverlo para m=0 (0´5 p.)

3º)

a) $\begin{vmatrix} a & a+1 & a+2 \\ a & a+3 & a+4 \\ a & a+5 & a+6 \end{vmatrix} \overset{E_3-E_1 \text{ y } E_2-E_1}{=} \begin{vmatrix} a & 1 & 2 \\ a & 3 & 4 \\ a & 5 & 6 \end{vmatrix} = a \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 6 \end{vmatrix} = a \cdot 0 = 0$

$\Rightarrow rg\, A \leq 2.$ $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 6 \end{vmatrix} \overset{F_3-F_1 \text{ y } F_2-F_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 4 \end{vmatrix} \overset{F_3-F_2\cdot(-2)}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$

Luego $rg\, A = 2$ con independencia de a

b) Si $a=1 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 5 \\ 1 & 6 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow A^t \cdot X = 0 \Rightarrow$ Si $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$: $\left.\begin{matrix} x+y+z=0 \\ 2x+4y+6z=0 \\ 3x+5y+7z=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Como $rg\, A = rg\, A^t$ y el sistema es homogéneo $\Rightarrow$

$rg\, A^t = rg\, A^* = 2 \Rightarrow$ S.C.I. Como $E_3 = E_1 + E_2 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ el sistema queda $\left.\begin{matrix} x+y+z=0 \\ 2x+4y+6z=0 \end{matrix}\right\}$ Si $\boxed{z=\lambda} \Rightarrow$

$\Rightarrow \left.\begin{matrix} x+y=-\lambda \\ 2x+4y=-6\lambda \end{matrix}\right\} \underset{E_2+E_1(-2)}{\Rightarrow} 2y=-4\lambda \Rightarrow \boxed{y=-2\lambda} \Rightarrow$

$\Rightarrow x = -\lambda - y \Rightarrow \boxed{x=\lambda}$

2°

a) $X \cdot A = B - C \Rightarrow X \cdot A \cdot A^{-1} = (B-C) \cdot A^{-1} \Rightarrow X = (B-C) \cdot A^{-1}$

$|A| = -1$; $(\text{Adj } A) = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$; $B - C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 5 & -8 \\ -14 & 24 \end{pmatrix}}$

b) Si $|F_1 F_2 F_3| = 5 \Rightarrow |3F_1 - F_3 \quad F_2 \quad 2F_3| = 2 \cdot |3F_1 - F_3 \quad F_2 \quad F_3| =$

$\underset{1^a + 3^a}{=} 2 \cdot |3F_1 \quad F_2 \quad F_3| = 2 \cdot 3 \cdot |F_1 \, F_2 \, F_3| = 2 \cdot 3 \cdot 5 = \underline{\underline{30}}$

3°

a) $A = \begin{vmatrix} a & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & a \end{vmatrix} = -2a^2 \Rightarrow$ Si $a = 0 \Rightarrow$ no existe inversa.

Pero si $a \neq 0$ sí existe A^{-1}: $(\text{Adj } A)^t = \begin{pmatrix} -2a & 2a & 0 \\ 0 & a^2 & 0 \\ 0 & -a & -2a \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow A^{-1} = -\frac{1}{2a^2} \cdot \begin{pmatrix} -2a & 2a & 0 \\ 0 & a^2 & 0 \\ 0 & -a & -2a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & -\frac{1}{a} & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1/2a & 1/a \end{pmatrix}$

b) rg A: Si $a \neq 0 \Rightarrow$ rg $A = 3$

Si $a = 0 \Rightarrow$ rg $A =$ rg $\begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 1$

3º c) $A^{-1} = \frac{1}{4}A \Rightarrow A^{-1}\cdot A = \frac{1}{4}\cdot A\cdot A \Rightarrow I = \frac{1}{4}\cdot A^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 4I = A^2$. $\quad A^2 = \begin{pmatrix} a & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix} =$

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 4-2a & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & a-2 & a^2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$a^2 = 4, \quad 4-2a = 0, \quad a-2=0 \Rightarrow \boxed{a=2}$

4º

a) $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & m \\ 1 & 1 & 0 \\ m & -3 & m \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = -m^2+m = m\cdot(-m+1)$

Si $m \neq 0, 1 \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow rg\, A = 3 = rg\, A^* \Rightarrow$ S.C.D.

Si $m=0 \Rightarrow |A| = 0 \Rightarrow rg \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix} = 2 = rg \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$ S.C.I.

Si $m = 1 \Rightarrow |A| = 0 \Rightarrow rg \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} = 2 \,;\; rg \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & -2 \end{pmatrix} = rg \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix} = 3$

$C_1 = C_2 + 4C_3$ $\quad$ pues $|\,|-1 \neq 0$.

Luego S.I.

b) Si $m=0 \Rightarrow$ SCI. Como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \left.\begin{matrix} x+y=0 \\ -3y=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \boxed{\begin{matrix} x=0 \\ y=0 \\ z=\lambda \end{matrix}}$