

## Límites. Regla de L'Hôpital

1. Calcular  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg} x - 8}{\sec x + 10}$

(Septiembre 1999)

**Solución:**

$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg} x - 8}{\sec x + 10}$  da lugar a una indeterminación del tipo  $\frac{\infty}{\infty}$ . Llamemos  $f(x) = \operatorname{tg} x - 8$  y

$g(x) = \sec x + 10 = \frac{1}{\cos x} + 10$ . Entonces  $f$  y  $g$  son derivables en su dominio de definición

(en particular en  $\frac{\pi}{2}$  y en un entorno suyo):

$$f'(x) = \sec^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \quad \text{y} \quad g'(x) = \frac{-1}{\cos^2 x} \cdot (-\operatorname{sen} x) = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x}$$

$$\text{De este modo, } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{\frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x \cdot \operatorname{sen} x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1}{\operatorname{sen} x} = 1$$

Al ser  $f$  y  $g$  son derivables en un entorno de  $\frac{\pi}{2}$  podemos aplicar la regla de L'Hôpital y se

$$\text{tiene que } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{f'(x)}{g'(x)} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg} x - 8}{\sec x + 10} = 1. \dagger$$

2. Calcular  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{sen} x}{\operatorname{tg} x - \operatorname{sen} x}$

(Septiembre 2000)

**Solución:**

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{sen} x}{\operatorname{tg} x - \operatorname{sen} x}$  es una indeterminación del tipo  $\frac{0}{0}$ . Llamemos  $f(x) = x - \operatorname{sen} x$  y

$g(x) = \operatorname{tg} x - \operatorname{sen} x$ . Entonces  $f$  y  $g$  son derivables en su dominio de definición (en particular en 0 y en un entorno suyo):

$$f'(x) = 1 - \cos x \quad \text{y} \quad g'(x) = \sec^2 x - \cos x = \frac{1}{\cos^2 x} - \cos x = \frac{1 - \cos^3 x}{\cos^2 x}$$

Por tanto  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\frac{1 - \cos^3 x}{\cos^2 x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x (1 - \cos x)}{1 - \cos^3 x}$  **(1)**, que vuelve a ser una

indeterminación del tipo  $\frac{0}{0}$ .

Llamemos  $\cos x = z$ . Entonces  $1 - \cos^3 x = 1 - z^3$ . Pero, aplicando la regla de Ruffini,  $1 - z^3 = -z^3 + 1 = (z - 1)(-z^2 - z - 1) = (1 - z)(z^2 + z + 1)$ . Por tanto se tiene que  $1 - \cos^3 x = (1 - \cos x)(\cos^2 x + \cos x + 1)$ . Luego la expresión **(1)** es igual a

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x (1 - \cos x)}{(1 - \cos x)(\cos^2 x + \cos x + 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x + \cos x + 1} = \frac{1}{3}.$$

Como  $f$  y  $g$  son derivables en un entorno de 0 podemos aplicar la regla de L'Hôpital y se

tiene que  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} x - \operatorname{sen} x} = \frac{1}{3}$

Se puede aplicar otra vez la regla de L'Hôpital pues la derivada de  $f(x)$ ,  $f'(x) = \cos^2 x (1 - \cos x) = \cos^2 x - \cos^3 x$ , y la derivada de  $g(x)$ ,  $g'(x) = 1 - \cos^3 x$ , vuelven a ser derivables en un entorno de 0:

$$f''(x) = 2 \cos x (-\operatorname{sen} x) - 3 \cos^2 x (-\operatorname{sen} x) = \operatorname{sen} x (3 \cos^2 x - 2 \cos x)$$

$$g''(x) = -3 \cos^2 x (-\operatorname{sen} x) = 3 \operatorname{sen} x \cos^2 x$$

Entonces  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f''(x)}{g''(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x (3 \cos^2 x - 2 \cos x)}{3 \operatorname{sen} x \cos^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \cos^2 x - 2 \cos x}{3 \cos^2 x} = \frac{3 - 2}{3} = \frac{1}{3}$

Por tanto  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f''(x)}{g''(x)} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} x - \operatorname{sen} x} = \frac{1}{3}$ .

3. Calcula  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{(e^x - 1)^2}$  *(Junio 2001)*

**Solución:**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{(e^x - 1)^2} = [\text{Indeterminación del tipo } \frac{0}{0}]. \text{ Procediendo como en los dos ejercicios}$$

anteriores, aplicamos la regla de L'Hôpital, pues tanto  $f(x) = 1 - \cos x$  como  $g(x) = (e^x - 1)^2$  son funciones derivable en todo  $\mathbb{R}$ :

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-(-\text{sen } x)}{2(e^x - 1)e^x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x}{2(e^{2x} - e^x)}$ , que vuelve a ser una indeterminación del tipo  $\frac{0}{0}$ . Aplicamos pues la regla de L'Hôpital a  $f'(x)$  y a  $g'(x)$ , que son también derivables

en todo  $i$  :  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f''(x)}{g''(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{2(2e^{2x} - e^x)} = \frac{1}{2(2-1)} = \frac{1}{6}$

Por tanto  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f''(x)}{g''(x)} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{(e^x - 1)^2} = \frac{1}{6}$ .

4. Enuncia la regla de L'Hôpital y calcula el siguiente límite:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4(x - \ln(1+x))}{x \ln(1+x)}$   
*(Septiembre 2001)*

**Solución:**

**Regla de L'Hôpital**

Si  $f$  y  $g$  son funciones continuas y derivables en un intervalo abierto que contiene a un punto  $x_0$  verificando:

- a)  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$
- b)  $g'(x) \neq 0$  en cualquier  $x \neq x_0$  del intervalo
- c) Existe  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

Entonces existe  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$  y  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4(x - \ln(1+x))}{x \ln(1+x)}$  [Indeterminación del tipo  $\frac{0}{0}$ ]. Tanto  $f(x) = 4(x - \ln(1+x))$  como

$g(x) = x \ln(1+x)$  son funciones derivables en sus respectivos dominios de definición (que en ambos casos es  $(-1, +\infty)$ , pues el logaritmo está definido para todo  $x > -1$ ), en particular son derivables en un entorno de cero. Aplicando la regla de L'Hôpital tendremos que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

$$f'(x) = 4 \left( 1 - \frac{1}{1+x} \right) = 4 \left( \frac{x}{1+x} \right) = \frac{4x}{1+x}$$

$$g'(x) = \ln(1+x) + \frac{x}{1+x} = \frac{(1+x)\ln(1+x) + x}{1+x}$$

Por tanto  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{4x}{1+x}}{\frac{(1+x)\ln(1+x)+x}{1+x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x}{(1+x)\ln(1+x)+x}$ , que vuelve a ser

una indeterminación del tipo  $\frac{0}{0}$ . Aplicamos ahora la regla de L'Hôpital a las funciones  $f'(x)$

y  $g'(x)$ , pues estas vuelven a ser derivables en un entorno de cero, con lo que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f''(x)}{g''(x)}.$$

$$f''(x) = 4$$

$$g''(x) = \ln(1+x) + (1+x) \frac{1}{1+x} + 1 = \ln(1+x) + 2$$

$$\text{Así: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f''(x)}{g''(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4}{\ln(1+x)+2} = \frac{4}{0+2} = 2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4(x - \ln(1+x))}{x \ln(1+x)} = 2.$$

5. Enuncia la regla de L'Hôpital. Calcula el siguiente límite:  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{L(1+x)} - \frac{1}{x} \right)$

(L = logaritmo neperiano)

(Junio 2003)

**Solución:**

El enunciado de la regla de L'Hôpital se encuentra en el ejercicio anterior.

$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{L(1+x)} - \frac{1}{x} \right)$  es una indeterminación del tipo  $\infty - \infty$ . Operando tenemos

$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{L(1+x)} - \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - L(1+x)}{x \cdot L(1+x)}$ , que es una indeterminación del tipo  $\frac{0}{0}$ . Llamemos

$f(x) = x - L(1+x)$  y  $g(x) = x \cdot L(1+x)$ , que son funciones derivables en sus respectivos dominios de definición (en ambos casos es  $(-1, +\infty)$ , pues el logaritmo está definido para todo  $x > 0$ ), y en particular son derivables en un entorno de cero. Aplicando la regla de

L'Hôpital tendremos que  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ .

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x}, \quad g'(x) = L(1+x) + \frac{x}{1+x} = \frac{(1+x) \cdot L(1+x) + x}{1+x}$$

Por tanto  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x}{1+x}}{(1+x) \cdot L(1+x) + x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{(1+x) \cdot L(1+x) + x}$ , que vuelve a

ser una indeterminación del tipo  $\frac{0}{0}$ . Aplicamos ahora la regla de L'Hôpital a las funciones  $f'(x)$  y  $g'(x)$ , pues estas vuelven a ser derivables en un entorno de cero, con lo que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f''(x)}{g''(x)}.$$

$$f''(x) = 1$$

$$g''(x) = L(1+x) + (1+x) \frac{1}{1+x} + 1 = L(1+x) + 2$$

$$\text{Así: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f''(x)}{g''(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{L(1+x) + 2} = \frac{1}{0+2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4(x - \ln(1+x))}{x \ln(1+x)} = \frac{1}{2}.$$

6. Enuncia la regla de L'Hôpital. Resuelve el límite siguiente:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{sen} x}{\operatorname{tg} x - \operatorname{sen} x}$

(Junio 2005)

**Solución:**

El enunciado de la regla de L'Hôpital se encuentra en el ejercicio 4.

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{sen} x}{\operatorname{tg} x - \operatorname{sen} x}$  [Indeterminación del tipo  $\frac{0}{0}$ ]. Tanto  $f(x) = x - \operatorname{sen} x$  como

$g(x) = \operatorname{tg} x - \operatorname{sen} x$  son funciones derivables en sus respectivos dominios de definición ( $f$  es derivable en todo  $\mathbb{R}$  y  $g$  es derivable en  $\mathbb{R} - \{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \}$ ), en particular son derivables en un entorno de cero. Aplicando la regla de L'Hôpital tendremos que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

$$f'(x) = 1 - \cos x, \quad g'(x) = \sec^2 x - \cos x = \frac{1}{\cos^2 x} - \cos x = \frac{1 - \cos^3 x}{\cos^2 x}$$

Por tanto  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\frac{1 - \cos^3 x}{\cos^2 x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x - \cos^3 x}{1 - \cos^3 x}$ , que vuelve a ser una

indeterminación del tipo  $\frac{0}{0}$ . Aplicamos ahora la regla de L'Hôpital a las funciones

$f'(x)$  y  $g'(x)$ , pues estas son también derivables en un entorno de cero, con lo que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f''(x)}{g''(x)}.$$

$$f''(x) = 2 \cos x (-\sin x) - 3 \cos^2 x (-\sin x) = 3 \cos^2 x \cdot \sin x - 2 \cos x \cdot \sin x$$

$$g''(x) = 3 \cos^2 x (-\sin x) = -3 \cos^2 x \cdot \sin x$$

$$\text{Así: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f''(x)}{g''(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \cos^2 x \cdot \sin x - 2 \cos x \cdot \sin x}{-3 \cos^2 x \cdot \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left( -1 + \frac{2}{3 \cos x} \right) = -1 + \frac{2}{3} = -\frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{\operatorname{tg} x - \sin x} = -\frac{1}{3}$$

7. Calcula los siguientes límites:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - 8x^2 + 7x}{x^2 - x} \quad ; \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left( \frac{2x}{\pi} + \cos x \right)^{\frac{1}{\cos x}}$$

(Junio 2008)

**Solución:**

a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - 8x^2 + 7x}{x^2 - x}$  [Indeterminación del tipo  $\frac{0}{0}$ ]. Tanto  $f(x) = x^3 - 8x^2 + 7x$  como  $g(x) = x^2 - x$  son funciones derivables en todo  $\mathbb{R}$ , en particular son derivables en un entorno de cero. Aplicando la regla de L'Hôpital tendremos que  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ .

$$f'(x) = 3x^2 - 16x + 7, \quad g'(x) = 2x - 1$$

$$\text{Por tanto } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 - 16x + 7}{2x - 1} = -7 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - 8x^2 + 7x}{x^2 - x} = -7$$

b)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left( \frac{2x}{\pi} + \cos x \right)^{\frac{1}{\cos x}}$  da lugar a una indeterminación del tipo  $1^\infty$ . Supongamos que

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left( \frac{2x}{\pi} + \cos x \right)^{\frac{1}{\cos x}} = L, \text{ entonces } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \ln \left[ \left( \frac{2x}{\pi} + \cos x \right)^{\frac{1}{\cos x}} \right] = \ln L \text{ (el logaritmo}$$

neperiano es una función continua, por tanto el logaritmo del límite coincide con el

$$\text{límite del logaritmo). Entonces } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \ln \left[ \left( \frac{2x}{\pi} + \cos x \right)^{\frac{1}{\cos x}} \right] =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos x} \ln \left( \frac{2x}{\pi} + \cos x \right) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\ln \left( \frac{2x}{\pi} + \cos x \right)}{\cos x}, \text{ que es una indeterminación del}$$

tipo  $\frac{0}{0}$ . Las funciones  $f(x) = \ln \left( \frac{2x}{\pi} + \cos x \right)$  y  $g(x) = \cos x$  son derivables en todo

i , en particular lo son en un entorno de  $\frac{\pi}{2}$  y podemos aplicar la regla de L'Hôpital:

$$f'(x) = \frac{1}{\left(\frac{2x}{\pi} + \cos x\right)} \cdot \left(\frac{2}{\pi} - \operatorname{sen} x\right) = \frac{\frac{2 - \pi \operatorname{sen} x}{\pi}}{\frac{2x + \pi \cos x}{\pi}} = \frac{2 - \pi \operatorname{sen} x}{2x - \pi \cos x} ; g'(x) = -\operatorname{sen} x .$$

Entonces:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\frac{2 - \pi \operatorname{sen} x}{2x - \pi \cos x}}{-\operatorname{sen} x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{2 - \pi \operatorname{sen} x}{-\operatorname{sen} x (2x - \pi \cos x)} = \frac{2 - \pi}{-2 \frac{\pi}{2}} = \frac{2 - \pi}{-\pi} = 1 - \frac{2}{\pi} .$$

$$\text{Por tanto } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \ln \left[ \left( \frac{2x}{\pi} + \cos x \right)^{\frac{1}{\cos x}} \right] = 1 - \frac{2}{\pi} .$$

$$\text{De este modo, } \ln L = 1 - \frac{2}{\pi} \Rightarrow L = e^{1 - \frac{2}{\pi}} \text{ y entonces } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left( \frac{2x}{\pi} + \cos x \right)^{\frac{1}{\cos x}} = e^{1 - \frac{2}{\pi}} .$$