

ECUACIONES TRIGONÓMICAS

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Hallar los valores de x que verifiquen: $\operatorname{sen}^2 x - \operatorname{cos}^2 x = 0$

2. Resuelve la ecuación:

$$\operatorname{cos} 2x + 5\operatorname{cos} x = -3$$

3. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\operatorname{sen}^2 x - 2 \operatorname{cos}^2 x = 1$

b) $2 \operatorname{cos} x = 3 \operatorname{tg} x$

c) $\operatorname{sen} x + \operatorname{cosec} x = \frac{5}{2}$

d) $\operatorname{sen} x = \operatorname{cos} x$

4. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $2 \operatorname{sen} x + 1 = 0$

b) $\operatorname{cos} x = \operatorname{cos}^2 x$

c) $3 \operatorname{tg} x = 2 \operatorname{cos} x$

5. Determina todos los posibles valores de x :

a) $\operatorname{cos}\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

b) $2 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = \sqrt{2}$

6. Resolver las siguientes ecuaciones:

a) $3 \operatorname{tg}^2 x = 1 + 2 \operatorname{tg} x$

b) $\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x - 2 = 0$

c) $\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{sec} x = \sqrt{2}$

1. Hallar los valores de x que verifiquen: $\text{sen}^2 x - \text{cos}^2 x = 0$

Solución:

$$\text{sen}^2 x - \text{cos}^2 x = 0 \rightarrow \text{sen}^2 x = \text{cos}^2 x \rightarrow \text{sen } x = \pm \text{cos } x$$

$$\text{sen } x = \text{cos } x \rightarrow x = 45^\circ + 180^\circ k$$

$$\text{sen } x = -\text{cos } x \rightarrow x = 135^\circ + 180^\circ k$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{sen } x = \text{cos } x \rightarrow x = 45^\circ + 180^\circ k \\ \text{sen } x = -\text{cos } x \rightarrow x = 135^\circ + 180^\circ k \end{array} \right\} \rightarrow x = 45^\circ + 90^\circ k \quad \forall x \in \mathbb{Z}$$

2. Resuelve la ecuación:

$$\text{cos } 2x + 5\text{cos } x = -3$$

Solución:

$$\text{cos}^2 x - \text{sen}^2 x + 5 \text{cos } x = -3 \rightarrow \text{cos}^2 x - 1 + \text{cos}^2 x + 5 \text{cos } x = -3 \rightarrow 2\text{cos}^2 x + 5 \text{cos } x + 2 = 0$$

Resolvemos la ecuación de segundo grado donde la incógnita es $\text{cos } x$:

$$\text{cos } x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2}}{2 \cdot 2} = \frac{-5 \pm 3}{4} \rightarrow \begin{cases} \text{cos } x = -2 \text{ Imposible} \\ \text{cos } x = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\text{cos } x = -\frac{1}{2} \text{ si } x = 120^\circ + 360^\circ k \text{ ó } x = 240^\circ + 360^\circ k$$

3. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\text{sen}^2 x - 2 \text{cos}^2 x = 1$

$$\text{sen}^2 x - 2\text{cos}^2 x = 1 - \text{cos}^2 x - 2\text{cos}^2 x = 1 - 3 \text{cos}^2 x$$

$$1 - 3 \text{cos}^2 x = 1 \rightarrow 3 \text{cos}^2 x = 0 \rightarrow \text{cos } x = 0 \rightarrow x = 90^\circ + 180^\circ k$$

b) $2 \text{cos } x = 3 \text{tg } x$

$$2 \text{cos } x = 3 \frac{\text{sen } x}{\text{cos } x} \rightarrow 2 \text{cos}^2 x = 3 \text{sen } x \rightarrow 2(1 - \text{sen}^2 x) = 3 \text{sen } x \rightarrow 2 \text{sen}^2 x - 3 \text{sen } x + 2 = 0$$

$$\text{sen } x = \frac{-3 \pm 5}{4} = \begin{cases} \text{sen } x = -2!!! \\ \text{sen } x = \frac{1}{2} \rightarrow x = \arcsen\left(\frac{1}{2}\right) \rightarrow \begin{cases} x = 30^\circ + 360^\circ k \\ x = 150^\circ + 360^\circ k \end{cases} \end{cases}$$

c) $\text{sen } x + \text{cosec } x = \frac{5}{2}$

$$\text{sen } x + \frac{1}{\text{sen } x} = \frac{5}{2} \rightarrow 2\text{sen}^2 x + 2 = 5\text{sen } x \rightarrow 2\text{sen}^2 x - 5\text{sen } x + 2 = 0$$

$$\text{sen } x = \frac{5 \pm 3}{4} = \begin{cases} \text{sen } x = 2!!! \\ \text{sen } x = \frac{1}{2} \rightarrow x = \arcsen\left(\frac{1}{2}\right) \rightarrow \begin{cases} x = 30^\circ + 360^\circ k \\ x = 150^\circ + 360^\circ k \end{cases} \end{cases}$$

d) $\text{sen } x = \text{cos } x$

$$x = 45^\circ + 180^\circ k$$

4. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $2 \text{sen } x + 1 = 0$

$$\text{sen } x = -\frac{1}{2} \rightarrow \begin{cases} x = 210^\circ + 360^\circ k \\ x = 330^\circ + 360^\circ k \end{cases}$$

b) $\text{cos } x = \text{cos}^2 x$

$$\text{cos } x = 0 \rightarrow x = 90^\circ + 180^\circ k$$

$$\text{cos } x = 1 \rightarrow x = 360^\circ$$

c) $3 \text{tg } x = 2 \text{cos } x$

$$3 \text{sen } x = 2 \text{cos}^2 x \rightarrow 3 \text{sen } x = 2(1 - \text{sen}^2 x) \rightarrow 2\text{sen}^2 x + 3\text{sen} x - 2 = 0$$

$$\text{sen } x = \frac{-3 \pm 5}{4} = \begin{cases} \text{sen } x = -2!!! \\ \text{sen } x = \frac{1}{2} \rightarrow x = \arcsen\left(\frac{1}{2}\right) \rightarrow \begin{cases} x = 30^\circ + 360^\circ k \\ x = 150^\circ + 360^\circ k \end{cases} \end{cases}$$

5. Determina todos los posibles valores de x:

a) $\text{cos}\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\text{cos}\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow \begin{cases} \frac{\pi}{2} + x = 30^\circ \rightarrow x = -60^\circ \rightarrow x = 330^\circ + 360^\circ k \\ \frac{\pi}{2} + x = 330^\circ \rightarrow x = 240^\circ \rightarrow x = 240^\circ + 360^\circ k \end{cases}$$

b) $2 \text{sen}\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = \sqrt{2}$

$$2 \text{sen}\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = \sqrt{2} \rightarrow \text{sen}\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow \begin{cases} \frac{\pi}{3} - x = 45^\circ \rightarrow x = 15^\circ \rightarrow x = 15^\circ + 360^\circ k \\ \frac{\pi}{3} - x = 225^\circ \rightarrow x = 285^\circ \rightarrow x = 285^\circ + 360^\circ k \end{cases}$$

6. Resolver las siguientes ecuaciones:

a) $3 \operatorname{tg}^2 x = 1 + 2 \operatorname{tg} x$

Tenemos una ecuación de segundo grado donde la variable es $\operatorname{tg} x$. Para verlo más claro, podéis realizar el cambio de variable: $y = \operatorname{tg} x$

La ecuación que obtenemos es:

$$3y^2 - 2y + 1 = 0.$$

Resolviendo la ecuación:

$$y = \frac{2 \pm 4}{6} = \begin{cases} \operatorname{tg} x = 1 \rightarrow x = 45^\circ + 180^\circ k \\ \operatorname{tg} x = -\frac{1}{3} \rightarrow x = 161,56^\circ + 180^\circ k \end{cases}$$

b) $\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x - 2 = 0$

Tenemos una ecuación de segundo grado donde la variable es $\operatorname{sen} x$. Para verlo más claro, podéis realizar el cambio de variable: $y = \operatorname{sen} x$

La ecuación que obtenemos es:

$$y^2 + y - 2 = 0.$$

Resolviendo:

$$y = \frac{-1 \pm 3}{2} = \begin{cases} \operatorname{sen} x = -2!!! \\ \operatorname{sen} x = 1 \rightarrow x = 90^\circ + 360^\circ k \end{cases}$$

c) $\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{sec} x = \sqrt{2}$

$$\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \cdot \frac{1}{\cos x} = \sqrt{2} \rightarrow \operatorname{sen} x = \sqrt{2} \cos^2 x \rightarrow \operatorname{sen} x = \sqrt{2}(1 - \operatorname{sen}^2 x) \rightarrow \sqrt{2} \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x - \sqrt{2} = 0$$

Tenemos una ecuación de segundo grado donde la variable es $\operatorname{sen} x$. Para verlo más claro, podéis realizar el cambio de variable: $y = \operatorname{sen} x$

La ecuación que obtenemos es: $\sqrt{2} y^2 + y - \sqrt{2} = 0$

$$y = \frac{-1 \pm 3}{2\sqrt{2}} = \begin{cases} \operatorname{sen} x = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow \begin{cases} x = 45^\circ + 360^\circ k \\ x = 135^\circ + 360^\circ k \end{cases} \\ \operatorname{sen} x = -\frac{2}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2} < -1!!! \end{cases}$$