

Ecuaciones trigonométricas resueltas

1.- Resolver las siguientes ecuaciones:

a) $\text{sen} 2x = 0$

$$\text{sen} 2x = 0 \rightarrow \begin{cases} 2x = 0 + 2k\pi \\ 2x = \pi + 2k\pi \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 + k\pi \\ x_2 = \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

b) $\cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = 1$

$$\cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = 1 \rightarrow \frac{\pi}{3} - x = 0 + 2k\pi \rightarrow x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

c) $\text{sen} 2x - \text{sen} x = 0$

$$\text{sen} 2x - \text{sen} x = 0 \rightarrow 2\text{sen} x \cos x - \text{sen} x = 0 \rightarrow \text{sen} x (2\cos x - 1) = 0 \text{ por tanto: } \begin{cases} \text{sen} x = 0 \\ 2\cos x - 1 = 0 \end{cases}$$

• Si $\text{sen} x = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 + 2k\pi \\ x_2 = \pi + 2k\pi \end{cases} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$

• Si $2\cos x - 1 = 0 \rightarrow \cos x = \frac{1}{2} \rightarrow \begin{cases} x_3 = \pi/3 + 2k\pi \\ x_4 = 5\pi/3 + 2k\pi \end{cases} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$

d) $\cos 2x - \text{sen}^2 x - 1 = 0$

$$\begin{aligned} \cos 2x - \text{sen}^2 x - 1 &= 0 \rightarrow \cos^2 x - \text{sen}^2 x - \text{sen}^2 x - 1 = 0 \rightarrow 1 - \text{sen}^2 x - \text{sen}^2 x - \text{sen}^2 x - 1 = 0 \rightarrow \\ &\rightarrow -3\text{sen}^2 x = 0 \rightarrow \text{sen}^2 x = 0 \rightarrow \text{sen} x = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 + 2k\pi \\ x_2 = \pi + 2k\pi \end{cases} \text{ con } k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

e) $\cos 2x = -1/2$

$$\cos 2x = -1/2 \rightarrow \begin{cases} 2x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \\ 2x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{\pi}{3} + k\pi \\ x_2 = \frac{2\pi}{3} + k\pi \end{cases} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

f) $\text{sen} x - \cos x = 0$

$\text{sen} x - \cos x = 0 \rightarrow \text{sen} x = \cos x$; es decir busco aquellos ángulos donde el seno y el coseno tienen el mismo valor. Esto sólo pasa en 45° y en 225° .

Por tanto, pasando a radianes: $x_1 = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$; $x_2 = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$.

g) $\text{sen} 2x + \cos x = 0$

$$\text{sen} 2x + \cos x = 0 \rightarrow 2\text{sen} x \cos x + \cos x = 0 \rightarrow \cos x(2\text{sen} x + 1) = 0 \text{ por tanto } \begin{cases} \cos x = 0 \\ 2\text{sen} x + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\bullet \cos x = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ x_2 = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \end{cases} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

$$\bullet 2\text{sen} x + 1 = 0 \rightarrow \text{sen} x = -\frac{1}{2} \rightarrow \begin{cases} x_3 = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \\ x_4 = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi \end{cases} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

h) $\text{tg} x + 2\text{sen} x = 0$

$$\text{tg} x + 2\text{sen} x = 0 \rightarrow \frac{\text{sen} x}{\cos x} + 2\text{sen} x = 0 \rightarrow \frac{\text{sen} x + 2\text{sen} x \cos x}{\cos x} = 0 \rightarrow \text{sen} x + 2\text{sen} x \cos x = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \text{sen} x(1 + 2\cos x) = 0 \text{ por tanto } \begin{cases} \text{sen} x = 0 \\ 1 + 2\cos x = 0 \end{cases}$$

$$\bullet \text{sen} x = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 + 2k\pi \\ x_2 = \pi + 2k\pi \end{cases} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

$$\bullet 1 + 2\cos x = 0 \rightarrow \cos x = -\frac{1}{2} \rightarrow \begin{cases} x_3 = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \\ x_4 = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi \end{cases} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

i) $\cos^2 x = 3\text{sen}^2 x$

$$\cos^2 x = 3\text{sen}^2 x \rightarrow 1 - \text{sen}^2 x = 3\text{sen}^2 x \rightarrow 4\text{sen}^2 x = 1 \rightarrow \text{sen}^2 x = \frac{1}{4} \rightarrow \text{sen} x = \pm \frac{1}{2}$$

Por tanto :

$$\bullet \text{sen} x = \frac{1}{2} \rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ x_2 = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \end{cases} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

$$\bullet \text{sen} x = -\frac{1}{2} \rightarrow \begin{cases} x_3 = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \\ x_4 = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi \end{cases} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

j) $\cos 2x = 1 + 4\text{sen} x$

$$\cos 2x = 1 + 4\text{sen} x = 0 \rightarrow \cos^2 x - \text{sen}^2 x = 1 + 4\text{sen} x \rightarrow 1 - \text{sen}^2 x - \text{sen}^2 x = 1 + 4\text{sen} x \rightarrow$$

$$\rightarrow 2\text{sen}^2 x + 4\text{sen} x = 0 \rightarrow \text{sen}^2 x + 2\text{sen} x = 0 \rightarrow \text{sen} x(\text{sen} x + 2) = 0 \rightarrow \begin{cases} \text{sen} x = 0 \\ \text{sen} x + 2 = 0 \end{cases}$$

$$\bullet \text{sen} x = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 + 2k\pi \\ x_2 = \pi + 2k\pi \end{cases} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

$$\bullet \text{sen} x + 2 = 0 \rightarrow \text{sen} x = -2 \rightarrow \text{No tiene soluci3n pues el seno solo puede tomar valores comprendidos entre } -1 \text{ y } 1.$$

k) $\cos 5x - \cos x = 0$

$$\cos 5x - \cos x = 0 \rightarrow -2\sin \frac{5x+x}{2} \cdot \sin \frac{5x-x}{2} = 0 \rightarrow -2\sin 3x \cdot \sin 2x = 0 \rightarrow \begin{cases} \sin 3x = 0 \\ \sin 2x = 0 \end{cases}$$

- $\sin 3x = 0 \rightarrow \begin{cases} 3x_1 = 0 + 2k\pi \\ 3x_2 = \pi + 2k\pi \end{cases} \text{ con } k \in \mathbb{Z} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 + \frac{2k\pi}{3} \\ x_2 = \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3} \end{cases} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$
- $\sin 2x = 0 \rightarrow \begin{cases} 2x_3 = 0 + 2k\pi \\ 2x_4 = \pi + 2k\pi \end{cases} \text{ con } k \in \mathbb{Z} \rightarrow \begin{cases} x_3 = 0 + k\pi \\ x_4 = \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$

l) $2\operatorname{tg}^2 x - 3\operatorname{tg} x + 1 = 0$

$$2\operatorname{tg}^2 x - 3\operatorname{tg} x + 1 = 0 \rightarrow \text{Podemos resolver la ecuación de segundo grado} \rightarrow$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{4} \rightarrow \operatorname{tg} x = \frac{3 \pm 1}{4} \rightarrow \begin{cases} \operatorname{tg} x = 1 \\ \operatorname{tg} x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

- $\operatorname{tg} x = 1 \rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ x_2 = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi \end{cases} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$
- $\operatorname{tg} x = \frac{1}{2} \rightarrow \begin{cases} x_3 = 26.565^\circ + 360k^\circ \\ x_4 = 180^\circ + 26.565^\circ + 360k^\circ \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_3 = 26.565^\circ + 360k^\circ \\ x_4 = 206.565^\circ + 360k^\circ \end{cases} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$

(Ayudándonos de la calculadora)

2.- Hallar las soluciones de las siguientes ecuaciones en el intervalo $[0, 2\pi)$.

a) $\cos 2x = 1 + 4\sin x$

$$\cos 2x = 1 + 4\sin x \rightarrow \cos^2 x - \sin^2 x = 1 + 4\sin x \rightarrow 1 - \sin^2 x - \sin^2 x = 1 + 4\sin x \rightarrow$$

$$\rightarrow 2\sin^2 x + 4\sin x = 0 \rightarrow 2\sin x(\sin x + 2) = 0 \rightarrow \begin{cases} 2\sin x = 0 \\ \sin x + 2 = 0 \end{cases}$$

- $2\sin x = 0 \rightarrow \sin x = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = \pi \end{cases}$
- $\sin x + 2 = 0 \rightarrow \sin x = -2 \rightarrow \text{No tiene solución pues el valor del seno está comprendido entre } -1 \text{ y } 1.$

b) $4\sin^2 x = 3$

$$4\sin^2 x = 3 \rightarrow \sin^2 x = \frac{3}{4} \rightarrow \sin x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

- $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{\pi}{3} \\ x_2 = \frac{2\pi}{3} \end{cases}$
- $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow \begin{cases} x_3 = \frac{4\pi}{3} \\ x_4 = \frac{5\pi}{3} \end{cases}$

c) $\text{sen}^2 x + \cos x - 1 = 0$

$$\text{sen}^2 x + \cos x - 1 = 0 \rightarrow 1 - \cos^2 x + \cos x - 1 = 0 \rightarrow \cos^2 x - \cos x = 0 \rightarrow \cos x (\cos x - 1) = 0$$

$$\begin{aligned} \bullet \text{ sen } x = 0 &\rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{\pi}{2} \\ x_2 = \frac{3\pi}{2} \end{cases} \\ \bullet \cos x - 1 = 0 &\rightarrow \cos x = 1 \rightarrow x_3 = 0 \end{aligned}$$

d) $\text{sen}^2 x + \text{sen } x - 6 = 0$

$$\text{sen}^2 x + \text{sen } x - 6 = 0 \rightarrow \text{La resuelvo como una ecuación de segundo grado donde } \text{sen } x = z$$

$$\text{Por tanto } z^2 + z - 6 = 0 \rightarrow z = \frac{-1 \pm 5}{2} \rightarrow \begin{cases} z_1 = 2 \\ z_2 = -3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \text{sen } x = 2 \\ \text{sen } x = -3 \end{cases} \rightarrow$$

$\rightarrow$ ambas ecuaciones no tienen solución.

e) $2(\cos^2 x - \text{sen}^2 x) = 1$

$$\begin{aligned} 2(\cos^2 x - \text{sen}^2 x) = 1 &\rightarrow 2(1 - \text{sen}^2 x - \text{sen}^2 x) = 1 \rightarrow 2(1 - 2\text{sen}^2 x) = 1 \rightarrow 2 - 4\text{sen}^2 x = 1 \rightarrow \\ &\rightarrow 4\text{sen}^2 x = 1 \rightarrow \text{sen}^2 x = \frac{1}{4} \rightarrow \text{sen } x = \pm \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \text{ sen } x = \frac{1}{2} &\rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{\pi}{6} \\ x_2 = \frac{5\pi}{6} \end{cases} \\ \bullet \text{ sen } x = -\frac{1}{2} &\rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{7\pi}{6} \\ x_2 = \frac{11\pi}{6} \end{cases} \end{aligned}$$

f) $\cos x + \cos 3x = 0$

$$\cos x + \cos 3x = 0; \text{ aplico que } \cos A + \cos B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} \text{ y obtenemos :}$$

$$2 \cos 2x \cos x = 0 \rightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ \cos 2x = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \bullet \cos x = 0 &\rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{\pi}{2} \\ x_2 = \frac{3\pi}{2} \end{cases} \\ \bullet \cos 2x = 0 &\rightarrow \begin{cases} 2x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ 2x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \frac{3\pi}{4} + k\pi \end{cases} \end{aligned}$$

con lo que restringiéndonos a ángulos del intervalo $[0, 2\pi)$ obtenemos las soluciones :

$$x_3 = \frac{\pi}{4}; x_4 = \frac{5\pi}{4}; x_5 = \frac{3\pi}{4}; x_6 = \frac{7\pi}{4}$$