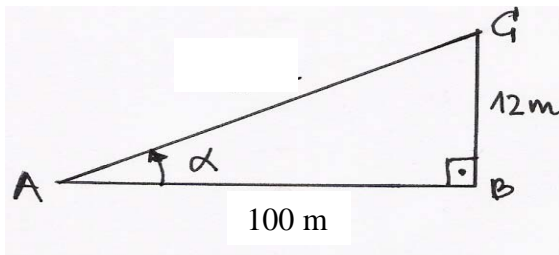


PROBLEMAS DE TRIGONOMETRÍA. RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS.

1º Una señal de carretera indica que la pendiente de ese tramo es del 12%, lo que quiere decir que por cada 100 metros que recorre en horizontal asciende 12 metros. ¿Qué ángulo forma la carretera con la horizontal? ¿Y si fuera del 24%? Obtén la fórmula general que relaciona la pendiente de una carretera, p (expresada en %) con el ángulo α que forma la carretera con la horizontal.



AC carretera, AB horizontal, BC vertical

Caso 12%

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{12}{100} \Rightarrow \alpha = \operatorname{arctg} 0,12 \approx 5^{\circ} 42' 38''$$

Caso 24%

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{24}{100} \Rightarrow \alpha = \operatorname{arctg} 0,24 \approx 13^{\circ} 29' 44''$$

Caso $p\%$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{p}{100} \Rightarrow \alpha = \operatorname{arctg} \frac{p}{100}$$

2º Calcula el ángulo que forma la diagonal de una cara con la diagonal del cubo.

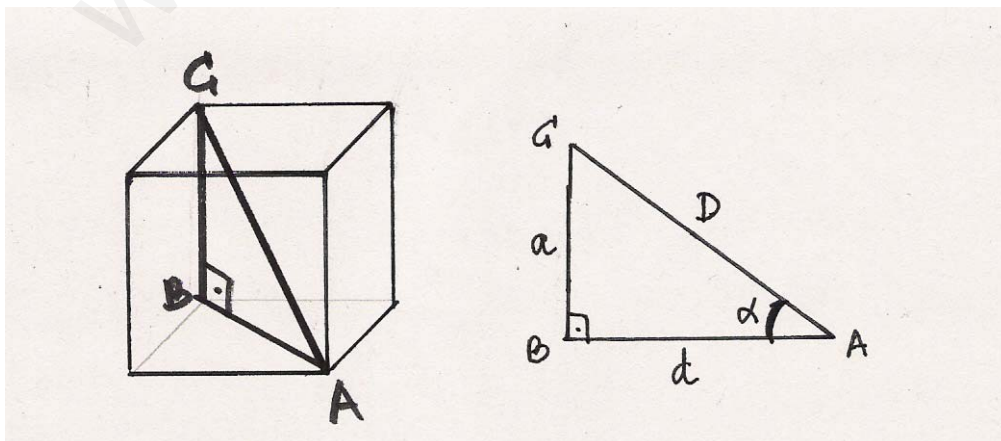
Sean a la medida de la arista, d la de la diagonal de la cara y D la de la diagonal del cubo.

$$d^2 = a^2 + a^2 = 2a^2 \Rightarrow d = a\sqrt{2}$$

$$D^2 = a^2 + a^2 + a^2 = 3a^2 \Rightarrow D = a\sqrt{3}$$

Considera el triángulo rectángulo

$$\cos \alpha = \frac{d}{D} = \frac{a\sqrt{2}}{a\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \Rightarrow \alpha = \arccos \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \approx 35^{\circ} 15' 51'' = 0,6154 \text{ rad}$$



3º Resuelve el triángulo del cual se conoce su perímetro: 30 cm y la medida de dos de sus ángulos: 40° y 80°.

$$\text{Sea } A=40^\circ \text{ y } B=80^\circ \text{ } C=180^\circ-A-B=60^\circ$$

Aplicamos el teorema del seno

$$\frac{a}{\text{sen}A} = \frac{b}{\text{sen}B}$$

$\frac{a}{\text{sen}A} = \frac{c}{\text{sen}C} \Leftrightarrow \frac{a}{\text{sen}A} = \frac{30-(a+b)}{\text{sen}C}$, pues , y tenemos un sistema de dos ecuaciones con 2 incógnitas: ay b.

$$\begin{cases} a \cdot \text{sen}80^\circ = b \cdot \text{sen}40^\circ \Rightarrow b = \frac{a \cdot \text{sen}80^\circ}{\text{sen}40^\circ} \Rightarrow a \cdot \text{sen}60^\circ = (30 - a - \frac{a \cdot \text{sen}80^\circ}{\text{sen}40^\circ}) \cdot \text{sen}40^\circ \Rightarrow \\ a \cdot \text{sen}60^\circ = (30 - a - b) \cdot \text{sen}40^\circ \end{cases}$$

$$a(\text{sen}60^\circ + \text{sen}40^\circ + \text{sen}80^\circ) = 30 \cdot \text{sen}40^\circ \Rightarrow a = \frac{30 \cdot \text{sen}40^\circ}{\text{sen}60^\circ + \text{sen}40^\circ + \text{sen}80^\circ} \approx 7,73\text{cm}$$

$$b = \frac{a \cdot \text{sen}80^\circ}{\text{sen}40^\circ} \approx \frac{7,73 \cdot \text{sen}80^\circ}{\text{sen}40^\circ} \approx 11,84\text{cm} \Rightarrow c = 30 - a - b \approx 10,43\text{cm}$$

4º Indica en cada uno de los siguientes casos, si el triángulo correspondiente es acutángulo, rectángulo u obtusángulo.

- a) a=97, b=72, c=65
- b) a=90, b=72, c=65
- c) a=100, b=72, c=65

(Observación: no es necesario resolver el triángulo)

Estudiaremos el ángulo mayor, que está asociado al lado mayor.

El teorema del coseno establece que

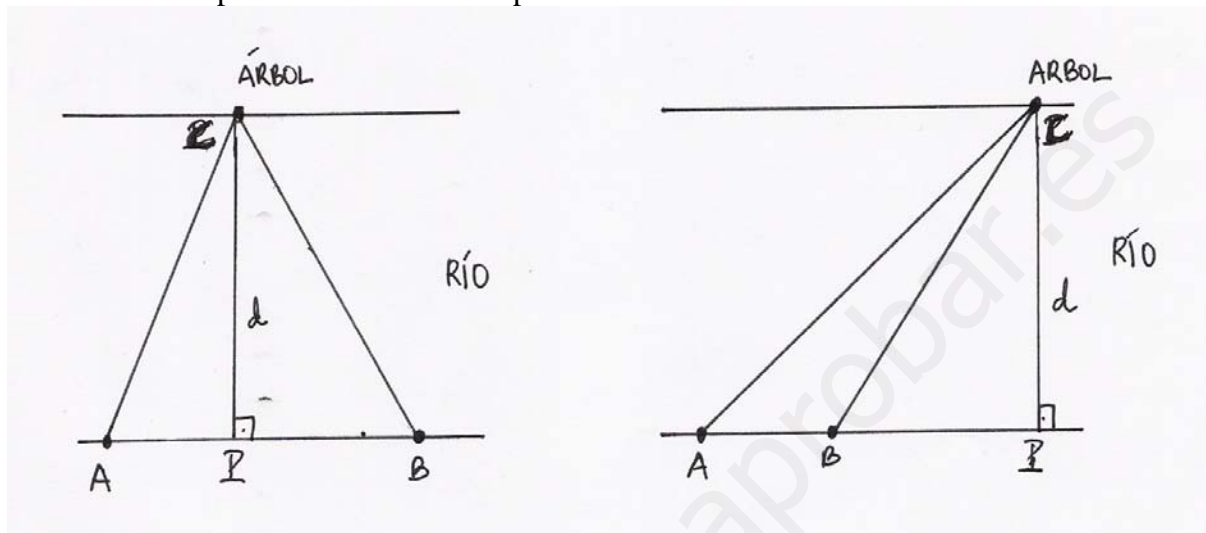
$$\text{a) } \cos A = \frac{72^2 + 65^2 - 97^2}{2 \cdot 72 \cdot 65} = 0 \Rightarrow A = 90^\circ .$$

$$\text{b) } \cos A = \frac{72^2 + 65^2 - 90^2}{2 \cdot 72 \cdot 65} = \frac{1309}{9360} > 0 \Rightarrow A < 90^\circ \Rightarrow \text{es un triángulo acutángulo.}$$

$$\text{c) } \cos A = \frac{72^2 + 65^2 - 100^2}{2 \cdot 72 \cdot 65} = \frac{-591}{9360} < 0 \Rightarrow A > 90^\circ \Rightarrow \text{es un triángulo obtusángulo.}$$

5° Para calcular la anchura de un río fijamos dos puntos A y B, ambos situados en nuestra orilla distantes 5 metros uno de otro. Observamos un árbol cuya base está situada en la orilla opuesta. Las visuales al árbol con la línea que une A y B forman ángulos de 55° y 65° respectivamente. Calcula la anchura del río.

Observación: el problema admite DOS planteamientos.



Caso 1: El árbol está entre A y B.

En el triángulo ABC: $A = 55^\circ$, $B = 65^\circ$, $C = 180^\circ - A - B = 60^\circ$, $c = 5\text{m}$. Sea **C** la base del árbol, **d** la distancia de la orilla al árbol (altura del lado AB en el triángulo ABC) y **P** la proyección de C sobre AB.

Planteamiento:

Triángulo APC (rectángulo en P): $\text{sen}A = \frac{d}{b} \Rightarrow d = b\text{sen}A = b\text{sen}55^\circ$

Triángulo ABC: teorema del seno $\frac{c}{\text{sen}C} = \frac{b}{\text{sen}B} \Rightarrow \frac{5}{\text{sen}60^\circ} = \frac{b}{\text{sen}65^\circ} \Rightarrow b = \frac{5\text{sen}65^\circ}{\text{sen}60^\circ} \approx 5,23\text{m}$

$\Rightarrow d \approx 5,23\text{sen}55^\circ \approx 4,28\text{m}$

Caso 2: El árbol NO está entre A y B.

En el triángulo ABC: $A = 55^\circ$, $B = 180^\circ - 65^\circ = 115^\circ$, $C = 180^\circ - A - B = 10^\circ$, $c = 5\text{m}$. Sea **C** la base del árbol, **d** la distancia de la orilla al árbol (altura del lado AB en el triángulo ABC) y **P** la proyección de C sobre la recta que contiene a AB.

Planteamiento:

Triángulo APC (rectángulo en P): $\text{sen}A = \frac{d}{b} \Rightarrow d = b\text{sen}A = b\text{sen}55^\circ$

Triángulo ABC: teorema del seno

$\frac{c}{\text{sen}C} = \frac{b}{\text{sen}B} \Rightarrow \frac{5}{\text{sen}10^\circ} = \frac{b}{\text{sen}115^\circ} \Rightarrow b = \frac{5\text{sen}115^\circ}{\text{sen}10^\circ} \approx 26,09\text{m}$

$\Rightarrow d \approx 26,09\text{sen}55^\circ \approx 21,37\text{m}$

Observación: la posición relativa es la del dibujo pues la visual de A es menor que la visual de B

6° Resuelve los triángulos:

a) $A=45^\circ$, $a=8$ cm, $b=10$ cm.

¿B? Teorema del seno:

$$\frac{a}{\operatorname{sen}A} = \frac{b}{\operatorname{sen}B} \Rightarrow \frac{8}{\operatorname{sen}45^\circ} = \frac{10}{\operatorname{sen}B} \Rightarrow \operatorname{sen}B = \frac{10\operatorname{sen}45^\circ}{8} \approx 0,88\text{cm} \Rightarrow \begin{cases} B \approx 62,11^\circ = 62^\circ 6' 36'' \\ B' = 180 - B \approx 117,89^\circ = 117^\circ 53' 24'' \end{cases}$$

Veamos si las dos soluciones son válidas:

Si $B=62.11^\circ$ $C=180^\circ-A-B \approx 17.11^\circ$ y c se obtiene aplicando el teorema del seno

$$\frac{c}{\operatorname{sen}C} = \frac{a}{\operatorname{sen}A} \Rightarrow c = \frac{a\operatorname{sen}C}{\operatorname{sen}A} = \frac{8\operatorname{sen}17.11}{\operatorname{sen}45} \approx 3.32\text{cm}$$

Si $B'=117.89^\circ$ $C'=180^\circ-A-B' \approx 72.89^\circ$ y c' se obtiene aplicando el teorema del seno

$$\frac{c'}{\operatorname{sen}C'} = \frac{a}{\operatorname{sen}A} \Rightarrow c' = \frac{a\operatorname{sen}C'}{\operatorname{sen}A} = \frac{8\operatorname{sen}72.89}{\operatorname{sen}45} \approx 10.81\text{cm}$$

b) $a=23$ cm, $B=53^\circ$, $C=84^\circ$.

¿A? $A=180^\circ-B-C=43^\circ$

¿b? Teorema del seno $\frac{b}{\operatorname{sen}B} = \frac{a}{\operatorname{sen}A} \Rightarrow b = \frac{a\operatorname{sen}B}{\operatorname{sen}A} = \frac{23\operatorname{sen}53^\circ}{\operatorname{sen}43^\circ} \approx 26.93\text{cm}$

¿c? Teorema del seno $\frac{c}{\operatorname{sen}C} = \frac{a}{\operatorname{sen}A} \Rightarrow c = \frac{a\operatorname{sen}C}{\operatorname{sen}A} = \frac{23\operatorname{sen}84^\circ}{\operatorname{sen}43^\circ} \approx 33.53\text{cm}$

c) $a=5$ cm, $b=4$ cm, $C=47^\circ$.

¿c? Teorema del coseno

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos C \Rightarrow c^2 = 5^2 + 4^2 - 2 \cdot 5 \cdot 4 \cdot \cos 47^\circ \Rightarrow c \approx 3,70\text{cm}$$

¿B? Teorema del seno

$$\frac{b}{\operatorname{sen}B} = \frac{c}{\operatorname{sen}C} \Rightarrow \operatorname{sen}B = \frac{b\operatorname{sen}C}{c} = \frac{4\operatorname{sen}47^\circ}{3.70} \approx 0.79 \Rightarrow \begin{cases} B \approx 52,24^\circ = 52^\circ 14' 24'' \\ B' = 180 - B \approx 127,76^\circ \end{cases}$$

La 2° solución, B' , no es posible pues $A=180^\circ-B'-C=5.24^\circ$ con $A < B$ y $a > b$.

¿A? $A=180-B-C=80.76^\circ=80^\circ 45' 36''$

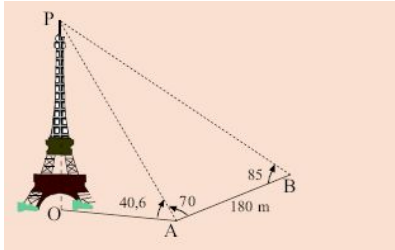
d) $a=5$ cm, $b=4$ cm, $c=11$ cm.

No es posible pues $a + b < c$

e) $a=2$ cm, $b=9$ cm, $A=125^\circ$.

¿B? Teorema del seno: $\frac{b}{\operatorname{sen}B} = \frac{a}{\operatorname{sen}A} \Rightarrow \operatorname{sen}B = \frac{b\operatorname{sen}A}{a} = \frac{9\operatorname{sen}125^\circ}{2} \approx 3,68 > 1 \Rightarrow$ no es posible.

7° Para calcular la altura de la torre Eiffel sin acceder hasta su base, una persona efectúa las medidas de los ángulos del dibujo en dos puntos A y B separados 180 m. ¿Cuánto mide la altura OP de la torre Eiffel?



Se consideran los triángulos AOP, recto en O y ABP. Sea OP la altura de la torre.

$$\text{En AOP } \operatorname{sen}40,6^\circ = \frac{OP}{b} \Rightarrow OP = b\operatorname{sen}40,6^\circ$$

En ABP $P = 180^\circ - A - B = 25^\circ$, $p = 180\text{m}$ y aplicando el teorema del seno

$$\frac{b}{\operatorname{sen}B} = \frac{p}{\operatorname{sen}P} \Rightarrow b = \frac{p\operatorname{sen}B}{\operatorname{sen}P} = \frac{180\operatorname{sen}85^\circ}{\operatorname{sen}25^\circ} \approx 424,29\text{m}$$

$$\Rightarrow OP \approx 424,29\operatorname{sen}40,6^\circ \approx 276,12\text{m}$$