Simplifica las siguientes expresiones:

a) $\text{sen}\ \alpha \cdot \cos\alpha\ (\text{tg}\ \alpha + \text{ctg}\ \alpha)$

b) $\text{sen}\ 3\alpha + \text{sen}\ \alpha \cdot \cos^2\alpha$

c) $\text{sen}^4\alpha - \cos^4\alpha$

d) $\cos^3\alpha + \cos^2\alpha \cdot \text{sen}\ \alpha + \cos\alpha \cdot \text{sen}^2\alpha + \text{sen}^3\alpha$

Demuestra si son verdaderas o falsas las siguientes expresiones:

a) $\text{sen}\ \alpha \cdot \cos\alpha \cdot \text{tg}\ \alpha \cdot \text{ctg}\ \alpha \cdot \sec\alpha \cdot \text{cosec}\ \alpha = 1$

b) $\text{tg}\ \alpha + \text{ctg}\ \alpha = \sec\alpha \cdot \text{cosec}\ \alpha$

c) $\text{ctg}^2\alpha - \cos^2\alpha = \text{ctg}^2\alpha \cdot \cos^2\alpha$

d) $(\text{tg}\ \alpha + \text{tg}\ \beta)/(\text{ctg}\ \alpha + \text{ctg}\ \beta) = \text{tg}\ \alpha \cdot \text{tg}\ \beta$

Soluciones

Simplifica las siguientes expresiones:

a) sen α · cos α (tg α + ctg α)

Vamos a cambiar las tangentes y cotangentes por sus correspondientes senos y cosenos:

$$\text{sen } \alpha \cdot \cos \alpha \, (\text{sen } \alpha/\cos \alpha + \cos \alpha/\text{sen } \alpha)$$

Multiplicamos lo de fuera del paréntesis por cada uno de los otros dos términos, y simplificamos:

$$(\text{sen } \alpha \cdot \cos \alpha \cdot \text{sen } \alpha)/\cos \alpha + (\text{sen } \alpha \cdot \cos \alpha \cdot \cos \alpha)/\text{sen } \alpha$$
$$\text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

¡Ya no se puede simplificar más, obviamente!

b) sen 3α + sen α · cos² α

Vamos a calcular aparte cuánto vale sen3α. Para ello convertimos sen 3α en sen (α + 2α), y aplicamos tanto la fórmula del ángulo suma como la del ángulo doble:

$$\text{sen } (\alpha + 2\alpha) = \text{sen } 2\alpha \cdot \cos \alpha + \cos 2\alpha \cdot \text{sen } \alpha$$
$$2\text{sen } \alpha \cdot \cos \alpha \cdot \cos \alpha + (\cos^2 \alpha - \text{sen}^2 \alpha)\cdot\text{sen } \alpha$$
$$2\text{sen } \alpha \cdot \cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha \cdot\text{sen } \alpha - \text{sen}^3 \alpha$$

Sustituimos lo que nos ha salido para sen 3α en la expresión original, y de paso cambiamos el (1 - sen² α) por cos² α

$$2\text{sen } \alpha \cdot \cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha \cdot\text{sen } \alpha - \text{sen}^3 \alpha + \text{sen } \alpha \cdot \cos^2 \alpha$$
$$4\text{sen } \alpha \cdot \cos^2 \alpha - \text{sen}^3 \alpha$$

c) sen⁴ α - cos⁴ α

La clave para simplificar esta expresión está en darse cuenta de que se trata de una igualdad notable (suma por diferencia igual a diferencia de cuadrados):

$$\text{sen}^4 \alpha - \cos^4 \alpha$$
$$(\text{sen}^2 \alpha)^2 - (\cos^2 \alpha)^2$$
$$(\text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha) \cdot (\text{sen}^2 \alpha - \cos^2 \alpha)$$

La primera mitad es la relación fundamental. La segunda se corresponde con el coseno del ángulo doble:

$$(\text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha) \cdot (\text{sen}^2 \alpha - \cos^2 \alpha)$$
$$1 \cdot \cos 2\alpha = \cos 2\alpha$$

d) $\cos^3 \alpha + \cos^2 \alpha \cdot \text{sen}\, \alpha + \cos \alpha \cdot \text{sen}^2 \alpha + \text{sen}^3 \alpha$

Ordenemos primero la expresión. No estamos calculando ni aplicando nada, es solo para ver mejor el siguiente paso:

$$\cos^3 \alpha + \cos \alpha \cdot \text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha \cdot \text{sen}\, \alpha + \text{sen}^3 \alpha$$

Ahora sacamos factor común, pero no en toda la expresión a la vez, sino un factor común en la primera mitad y otro en la segunda (¡Sí, esto puede hacerse!)

$$\cos \alpha \,(\cos^2 \alpha + \text{sen}^2 \alpha) + \text{sen}\, \alpha \,(\cos^2 \alpha + \text{sen}^2 \alpha)$$

¿Ves ya por qué hemos hecho este paso? Ahora lo que nos queda en los paréntesis es la relación fundamental:

$$\cos \alpha \cdot 1 + \text{sen}\, \alpha \cdot 1$$
$$\cos \alpha + \text{sen}\, \alpha$$

Demuestra si son verdaderas o falsas las siguientes expresiones:

a) $\text{sen}\, \alpha \cdot \cos \alpha \cdot \text{tg}\, \alpha \cdot \text{ctg}\, \alpha \cdot \sec \alpha \cdot \text{cosec}\, \alpha = 1$

Esta es fácil, pero nos servirá para calentar motores. En los ejercicios que consistan en demostrar si una expresión es verdadera o falsa, normalmente se utilizan dos técnicas (juntas o por separado): dejar un lado de la igualdad sin tocar e intentar que el otro sea igual que ese, y convertir todas las razones trigonométricas a un mismo tipo. Aquí, obviamente, operaremos solo en el lado izquierdo, aunque no hay mucho que operar. Si te fijas, lo que tenemos es el producto de cada razón trigonométrica por su inversa:

$$\text{sen}\, \alpha \cdot \cos \alpha \cdot \text{tg}\, \alpha \cdot 1/\text{tg}\, \alpha \cdot 1/\cos \alpha \cdot 1/\text{sen}\, \alpha = 1$$
$$\cancel{\text{sen}\, \alpha} \cdot \cancel{\cos \alpha} \cdot \cancel{\text{tg}\, \alpha} \cdot \cancel{1/\text{tg}\, \alpha} \cdot \cancel{1/\cos \alpha} \cdot \cancel{1/\text{sen}\, \alpha} = 1$$
$$1 = 1$$

b) $\text{tg}\, \alpha + \text{ctg}\, \alpha = \sec \alpha \cdot \text{cosec}\, \alpha$

Cambiamos todo a senos y cosenos, y luego operamos:

$$\text{sen}\, \alpha/\cos \alpha + \cos \alpha/\text{sen}\, \alpha = 1/\cos \alpha \cdot 1/\text{sen}\, \alpha$$
$$\text{sen}^2 \alpha/(\text{sen}\, \alpha \cdot \cos \alpha) + \cos^2 \alpha/(\text{sen}\, \alpha \cdot \cos \alpha) = 1/(\cos \alpha \cdot \text{sen}\, \alpha)$$
$$(\text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha)/(\text{sen}\, \alpha \cdot \cos \alpha) = 1/(\cos \alpha \cdot \text{sen}\, \alpha)$$
$$1/(\cos \alpha \cdot \text{sen}\, \alpha) = 1/(\cos \alpha \cdot \text{sen}\, \alpha)$$

c) $ctg^2\ \alpha - cos^2\ \alpha = ctg^2\ \alpha \cdot cos^2\ \alpha$

Vamos a dejar el segundo lado de la igualdad sin tocar, y operaremos solo en el primer lado hasta que consigamos que sea igual que el de la derecha (suponiendo que la igualdad se cumpla).

$$\text{ctg}^2\ \alpha - \cos^2 \alpha$$
$$\cos^2 \alpha/ \text{sen}^2\ \alpha - \cos^2 \alpha$$

Sacamos común denominador:

$$\cos^2 \alpha/ \text{sen}^2\ \alpha - (\text{sen}^2\ \alpha \cdot \cos^2 \alpha)/ \text{sen}^2\ \alpha$$
$$(\cos^2 \alpha - \text{sen}^2\ \alpha \cdot \cos^2 \alpha)/ \text{sen}^2\ \alpha$$

Sacamos factor común en el numerador:

$$(\cos^2 \alpha\ (1- \text{sen}^2\ \alpha))/ \text{sen}^2\ \alpha$$

Como $(1- \text{sen}^2\ \alpha) = \cos^2 \alpha$, nos queda:

$$\cos^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha\ / \text{sen}^2\ \alpha = \cos^2 \alpha \cdot \text{cotg}^2\ \alpha$$

Que era lo que queríamos demostrar.

d) $g\ \alpha + tg\ \beta)/(ctg\ \alpha + ctg\ \beta) = tg\ \alpha \cdot tg\ \beta$

Vamos a dejar el lado derecho de la igualdad sin tocar, y como ahí solo hay tangentes, cambiamos las cotangentes del lado izquierdo a sus respectivas tangentes:

$$(\text{tg}\ \alpha + \text{tg}\ \beta)/(1/ \text{tg}\ \alpha + 1/ \text{tg}\ \beta)$$

En la expresión del denominador, sacamos común denominador:

$$(\text{tg}\ \alpha + \text{tg}\ \beta)/(\text{tg}\ \beta / \text{tg}\ \alpha \cdot \text{tg}\ \beta + \text{tg}\ \alpha / \text{tg}\ \alpha \cdot \text{tg}\ \beta)$$
$$(\text{tg}\ \alpha + \text{tg}\ \beta)/((\text{tg}\ \beta + \text{tg}\ \alpha) / \text{tg}\ \alpha \cdot \text{tg}\ \beta)$$

El denominador del denominador pasa multiplicando al numerador:

$$\text{tg}\ \alpha \cdot \text{tg}\ \beta \cdot (\text{tg}\ \alpha + \text{tg}\ \beta)/(\text{tg}\ \beta + \text{tg}\ \alpha)$$
$$\text{tg}\ \alpha \cdot \text{tg}\ \beta \cdot 1$$
$$\text{tg}\ \alpha \cdot \text{tg}\ \beta$$

Que era lo que queríamos demostrar.