

Vectores de \mathbb{R}^3 en exámenes BI-NS

Nov 01 (b) Find the vector $v = (i + 3j - 2k) \times (2i + j + 3k)$.

(c) If $a = i + 3j - 2k$, $b = 2i + j + 3k$ and $u = ma + nb$ where m, n are scalars, and $u \neq 0$, show that v is perpendicular to u for all m and n .

$$b) \vec{v} = (\vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k}) \times (2\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \boxed{11\vec{i} - 7\vec{j} - 5\vec{k}} = (11, -7, -5)$$

$$c) \begin{cases} \vec{u} = m\vec{a} + n\vec{b} \\ \vec{v} = \vec{a} \times \vec{b} \end{cases} \quad \vec{u} \cdot \vec{v} = (m\vec{a} + n\vec{b}) \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = m\vec{a} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) + n\vec{b} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = m \cdot 0 + n \cdot 0 = \boxed{0} \text{ . Esto es, que } \vec{u} \perp \vec{v} \text{ .}$$

Mayo 02 Halle el ángulo entre los vectores $v = i + j + 2k$ y $w = 2i + 3j + k$. Indique su respuesta en radianes.

$$\cos \alpha = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{|\vec{v}| |\vec{w}|} = \frac{(1, 1, 2) \cdot (2, 3, 1)}{\sqrt{1+1+4} \sqrt{4+9+1}} = \frac{2+3+2}{\sqrt{6} \sqrt{14}} = \frac{7}{\sqrt{84}} \Rightarrow \alpha = \boxed{0.7017 \text{ rad}}$$

Mayo 02 Los puntos A, B, C y D tienen las siguientes coordenadas:

A : (1, 3, 1) B : (1, 2, 4) C : (2, 3, 6) D : (5, -2, 1).

(a) (i) Calcule el producto vectorial $\vec{AB} \times \vec{AC}$, exprese su respuesta en función de los vectores unitarios i, j, k .

(ii) Halle el área del triángulo ABC.

$$\begin{aligned} \vec{AB} &= (0, -1, 3) \\ \vec{AC} &= (1, 0, 5) \end{aligned} \quad \vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 5 \end{vmatrix} = \boxed{-5\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}}$$

$$\text{Área } \triangle ABC = \frac{|\vec{AB} \times \vec{AC}|}{2} = \frac{\sqrt{25+9+1}}{2} = \boxed{\frac{\sqrt{35}}{2}}$$

Mayo 03 Dados $a = i + 2j - k$, $b = -3i + 2j + 2k$ y $c = 2i - 3j + 4k$, halle $(a \times b) \cdot c$

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & -1 \\ -3 & 2 & 2 \end{vmatrix} \cdot (2, -3, 4) = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 1 & 2 & -1 \\ -3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 8+8-9+24+6+4 = \boxed{41}$$

Nov 03 Considere los puntos A(1, 2, -4), B(1, 5, 0) y C(6, 5, -12). Halle el área de $\triangle ABC$

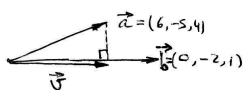
$$\begin{aligned} \vec{AB} &= (0, 3, 4) \\ \vec{AC} &= (5, 3, -8) \end{aligned} \quad \vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 3 & 4 \\ 5 & 3 & -8 \end{vmatrix} = (-36, 20, -15)$$

$$\text{Área } \triangle ABC = \frac{|\vec{AB} \times \vec{AC}|}{2} = \frac{\sqrt{(-36)^2 + 20^2 + (-15)^2}}{2} = \boxed{\frac{\sqrt{1921}}{2}}$$

Mayo 04 Suponiendo que $a = (i + 2j + k) \times (-2i + 3k)$,

(a) halle a ;

(b) halle la proyección vectorial de a sobre el vector $-2j + k$

$$\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = \boxed{6\vec{i} - 5\vec{j} + 4\vec{k}} = (6, -5, 4)$$


$$\vec{u} \parallel \vec{b} \Rightarrow \vec{u} = r \cdot (0, -2, 1) = (0, -2r, r)$$

$$|\vec{u}| = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|} \Rightarrow \sqrt{0^2 + (-2r)^2 + r^2} = \frac{(6, -5, 4) \cdot (0, -2, 1)}{\sqrt{0^2 + (-2)^2 + 1^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{4r^2 + r^2} = \frac{0 + 10 + 4}{\sqrt{5}} ; \sqrt{5r^2} = \frac{14}{\sqrt{5}} ; 5r = 14 \Rightarrow r = \frac{14}{5} \Rightarrow \boxed{\vec{u} = (0, -\frac{28}{5}, \frac{14}{5})}$$

Mayo 04 Given that $a = (i + 2j + k)$, $b = (i - 3j + 2k)$ and $c = (2i + j - 2k)$, calculate $(a - b) \cdot (b \times c)$

$$(\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = (0, 5, -1) \cdot \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 5 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -1 + 20 - 6 + 10 = \boxed{23}$$

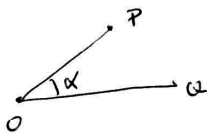
También: $(\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) - \vec{b} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) - 0 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 6 + 1 + 8 + 6 + 4 - 2 = 23 \checkmark$

Mayo 05

Los vectores de posición de los puntos P y Q son $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$ respectivamente. El origen está en O.

Halle

- (a) el ángulo POQ;
(b) el área del triángulo OPQ.



$$\begin{aligned} \vec{OP} &= (2, -3, 1) \\ \vec{OQ} &= (2, 2, -4) \end{aligned} \quad \left| \cos \alpha = \frac{(2, -3, 1) \cdot (2, 2, -4)}{\sqrt{4+9+1} \cdot \sqrt{4+4+16}} = \frac{4-6-4}{\sqrt{14} \sqrt{24}} = \frac{-6}{\sqrt{336}} \Rightarrow \alpha = 121,23^\circ \right.$$

$$\vec{OP} \times \vec{OQ} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -3 & 1 \\ 2 & 2 & -4 \end{vmatrix} = (10, 10, 10)$$

$$\text{Área} = \frac{|\vec{OP} \times \vec{OQ}|}{2} = \frac{\sqrt{100+100+100}}{2} = \frac{10\sqrt{3}}{2} = \boxed{5\sqrt{3}}$$

Mayo 05

The vectors a , b and c are defined by $a = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$, and $c = \begin{pmatrix} 2 \\ y \\ 3 \end{pmatrix}$.

Given that c is perpendicular to $2a - b$, find the value of y .

$$2\vec{a} - \vec{b} = (5, -1, -4)$$

$$\vec{c} \perp (2\vec{a} - \vec{b}) \Rightarrow \vec{c} \cdot (2\vec{a} - \vec{b}) = 0 \Rightarrow 10 - y - 12 = 0 \Rightarrow \boxed{y = -2}$$

Nov 05

The parallelogram ABCD has vertices A(3, 2, 0), B(7, -1, -1), C(10, -3, 0) and D(6, 0, 1). Calculate the area of the parallelogram.

$$\begin{aligned} \vec{AB} &= (4, -3, -1) & \vec{DC} &= (4, -3, 1) \\ \vec{AD} &= (3, -2, 1) & \vec{BC} &= (3, -2, 1) \end{aligned}$$

$$\vec{AB} \times \vec{AD} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & -3 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = (-5, -7, 1)$$

$$\text{Área } \overline{ABCD} = |\vec{AB} \times \vec{AD}| = \sqrt{25+49+1} = \boxed{\sqrt{75}}$$



Esta es la buena posición del paralelogramo, ya fue $\vec{AB} = \vec{DC}$; $\vec{AD} = \vec{BC}$

Muestra
06 = 08

A triangle has its vertices at $A(-1, 3, 2)$, $B(3, 6, 1)$ and $C(-4, 4, 3)$.

- (a) Show that $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = -10$.
- (b) Show that, to three significant figures, $\cos \hat{BAC} = -0.591$.

$$\begin{array}{l} \vec{AB} = (4, 3, -1) \\ \vec{AC} = (-3, 1, 1) \end{array} \quad \left| \quad \vec{AB} \cdot \vec{AC} = -12 + 3 - 1 = -10 \quad \checkmark \right.$$

$$\cos \hat{BAC} = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}{|\vec{AB}| \cdot |\vec{AC}|} = \frac{-10}{\sqrt{16+9+1} \sqrt{9+1+1}} = \frac{-10}{\sqrt{286}} = -0.591 \quad \checkmark$$

Mayo 06

Let A be the point $(2, -1, 0)$, B the point $(3, 0, 1)$ and C the point $(1, m, 2)$, where $m \in \mathbb{Z}$, $m < 0$.

- (a) (i) Find the scalar product $\vec{BA} \cdot \vec{BC}$.
- (ii) Hence, given that $\hat{ABC} = \arccos \frac{\sqrt{2}}{3}$, show that $m = -1$.

$$\begin{array}{l} \vec{BA} = (-1, -1, -1) \\ \vec{BC} = (-2, m, 1) \end{array} \quad \left| \quad \vec{BA} \cdot \vec{BC} = 2 - m - 1 = 1 - m \right.$$

$$\cos \hat{ABC} = \frac{\vec{BA} \cdot \vec{BC}}{|\vec{BA}| |\vec{BC}|} = \frac{1-m}{\sqrt{1+1+1} \sqrt{4+m^2+1}} = \frac{1-m}{\sqrt{3} \sqrt{m^2+5}} = \frac{1-m}{\sqrt{3m^2+15}}$$

$$\cos \hat{ABC} = \frac{\sqrt{2}}{3} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{3} = \frac{1-m}{\sqrt{3m^2+15}} \quad ; \quad \frac{2}{9} = \frac{1-2m+m^2}{3m^2+15} \quad ; \quad 6m^2+30 = 9-18m+9m^2 \quad ;$$

$$0 = 3m^2 - 18m - 21 \quad ; \quad 0 = m^2 - 6m - 7 \quad ; \quad m = \begin{cases} \times \\ -1 \end{cases} \quad (\text{dice que } m < 0) \quad \checkmark$$

Mayo 06

Let $a = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} -1 \\ p \\ 6 \end{pmatrix}$ and $c = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$.

- (a) Find $a \times b$.
- (b) Find the value of p , given that $a \times b$ is parallel to c .

$$a \times b = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & p & 6 \end{vmatrix} = (6, -12, 2p+1)$$

$$c \parallel a \times b \Rightarrow \frac{6}{2} = \frac{-12}{-4} = \frac{2p+1}{3} \Rightarrow \frac{2p+1}{3} = 3 \Rightarrow \boxed{p = 4}$$

Mayo 07 Consider the vectors a, b, c, d

$$a = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ \lambda \end{pmatrix}, d = \begin{pmatrix} \mu \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Let $s = (a \cdot b)c + d$, where s is perpendicular to a .

Find an expression for λ in terms of μ .

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 + 6 - 5 = 3$$

$$\vec{s} = (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c} + \vec{d} = 3(3, 1, \lambda) + (\mu, -2, 1) = (9 + \mu, 1, 3\lambda + 1)$$

$$\vec{s} \perp \vec{a} \Rightarrow \vec{s} \cdot \vec{a} = 0 \rightarrow (9 + \mu) \cdot 2 + 1 \cdot 3 + (3\lambda + 1) \cdot (-1) = 0 \quad ; \quad 18 + 2\mu + 3 - 3\lambda - 1 = 0 \quad ;$$

$$20 + 2\mu - 3\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{20 + 2\mu}{3}$$

Mayo 07 Considere los vectores $a = i - j + k$, $b = i + 2j + 4k$ y $c = 2i - 5j - k$.

(a) Sabiendo que $c = ma + nb$, donde $m, n \in \mathbb{Z}$, halle el valor de m y de n .

(b) Halle un vector unitario u que sea normal a a y también a b .

a)

$$\vec{c} = m\vec{a} + n\vec{b} \Rightarrow (2, -5, -1) = (m, -m, m) + (n, 2n, 4n) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2 = m + n \\ -5 = -m + 2n \\ -1 = m + 4n \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \Rightarrow r(A) = 2$$

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & -5 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & -5 \\ 1 & 4 & -1 \end{vmatrix} = -2 - 8 - 5 - 4 - 1 + 20 = 0 \Rightarrow r(A^*) = 2$$

$m = 2$ \rightarrow S. Complet. Determin.

$$\begin{cases} m + n = 2 \\ -m + 2n = -5 \\ m + 4n = -1 \end{cases} \rightarrow m = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -5 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{9}{3} = 3 \quad n = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -5 \end{vmatrix}}{3} = \frac{-3}{3} = -1$$

b)

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = (-6, -3, 3)$$

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{36 + 9 + 9} = \sqrt{54} = 3\sqrt{6}$$

$$\Rightarrow \vec{u} = \frac{1}{3\sqrt{6}}(-6, -3, 3) = \left(\frac{-2}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}} \right)$$

Mayo 07 Sabiendo que $a = 2i - j - k$, $b = 2i + j - 2k$ y $c = -i + j - k$ son los vectores de posición de los puntos A, B y C respectivamente, calcule el área del triángulo ABC.

$$\vec{AB} = (0, 2, -1) \quad \vec{AC} = (-3, 2, 0) \quad \vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 2 & -1 \\ -3 & 2 & 0 \end{vmatrix} = (2, 3, 6)$$

$$\text{Área } \triangle ABC = \frac{\sqrt{4 + 9 + 36}}{2} = \frac{7}{2}$$

Muestra
08

Consider the points A(1, 2, 1), B(0, -1, 2), C(1, 0, 2) and D(2, -1, -6).

- (a) Find the vectors \vec{AB} and \vec{BC} .
- (b) Calculate $\vec{AB} \times \vec{BC}$.
- (c) Hence, or otherwise find the area of triangle ABC.

$$\vec{AB} = (-1, -3, 1) \quad \vec{BC} = (1, 1, 0) \quad \left| \begin{array}{ccc} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array} \right| = (-1, 1, 2)$$

$$\text{Area } \triangle ABC = \frac{\sqrt{1+1+4}}{2} = \boxed{\frac{\sqrt{6}}{2}}$$

Mayo 08

Given any two non-zero vectors \mathbf{a} and \mathbf{b} , show that $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2$.

$$\begin{aligned} |\vec{a} \times \vec{b}| &= |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \alpha \rightarrow |\vec{a} \times \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 \sin^2 \alpha \\ \vec{a} \cdot \vec{b} &= |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \alpha \rightarrow (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 = |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 \cos^2 \alpha \\ \hline |\vec{a} \times \vec{b}|^2 + (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 &= |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) \\ |\vec{a} \times \vec{b}|^2 + (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 &= |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow |\vec{a} \times \vec{b}|^2 &= |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 \quad \checkmark \end{aligned}$$

Nov 08

The angle between the vector $\mathbf{a} = i - 2j + 3k$ and the vector $\mathbf{b} = 3i - 2j + mk$ is 30° .Find the values of m .

$$\cos 30^\circ = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{(1, -2, 3) \cdot (3, -2, m)}{\sqrt{1+4+9} \sqrt{9+4+m^2}} \quad ; \quad \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3+4+3m}{\sqrt{14} \sqrt{m^2+13}} \quad ;$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3m+7}{\sqrt{14m^2+182}} \quad ; \quad \frac{3}{4} = \frac{9m^2+42m+49}{14m^2+182} \quad ; \quad 42m^2+546 = 36m^2+168m+196 \quad ;$$

$$6m^2 - 168m + 350 = 0 \quad ; \quad 3m^2 - 84m + 175 = 0 \quad ; \quad \boxed{m = \begin{cases} 25,73 \\ 2,27 \end{cases}}$$

Mayo 16
TZ2
P2#9

OACB es un paralelogramo en el que $\vec{OA} = \mathbf{a}$ y $\vec{OB} = \mathbf{b}$, donde \mathbf{a} y \mathbf{b} son vectores no nulos.

(a) Muestre que

$$(i) \quad |\vec{OC}|^2 = |\mathbf{a}|^2 + 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + |\mathbf{b}|^2;$$

$$(ii) \quad |\vec{AB}|^2 = |\mathbf{a}|^2 - 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + |\mathbf{b}|^2.$$

(b) Sabiendo que $|\vec{OC}| = |\vec{AB}|$, demuestre que OACB es un rectángulo.

Mayo 09
TZ1
P1#8

A triangle has vertices A (1, -1, 1), B(1, 1, 0) and C(-1, 1, -1).

Show that the area of the triangle is $\sqrt{6}$.

$$\begin{array}{l} \vec{AB} = (0, 2, -1) \\ \vec{AC} = (-2, 2, -2) \end{array} \quad \left| \begin{array}{ccc} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 2 & -1 \\ -2 & 2 & -2 \end{array} \right| = (-2, 2, 4)$$

$$\text{Area } \triangle ABC = \frac{\sqrt{4+4+16}}{2} = \frac{\sqrt{24}}{2} = \frac{2\sqrt{6}}{2} = \sqrt{6} \quad \checkmark$$

Mayo 10
TZ2
P1#3

Los tres vectores \mathbf{a} , \mathbf{b} y \mathbf{c} vienen dados por

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 2y \\ -3x \\ 2x \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 4x \\ y \\ 3-x \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \text{donde } x, y \in \mathbb{R}.$$

(a) Si $\mathbf{a} + 2\mathbf{b} - \mathbf{c} = \mathbf{0}$, halle el valor de x y de y .

(b) Halle el valor exacto de $|\mathbf{a} + 2\mathbf{b}|$.

$$\vec{a} + 2\vec{b} - \vec{c} = \mathbf{0} \Rightarrow \begin{cases} 2y + 8x - 4 = 0 \\ -3x + 2y + 7 = 0 \\ 2x + 6 - 2x - 6 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 8x + 2y = 4 \\ -3x + 2y = -7 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -7 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 8 & 2 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{8+14}{16+6} = \frac{22}{22} = \boxed{1} \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 8 & 4 \\ -3 & -7 \end{vmatrix}}{22} = \frac{-56+12}{22} = \boxed{-2}$$

$$|\vec{a} + 2\vec{b}| = |\vec{c}| = \sqrt{16+49+36} = \sqrt{101}$$

Mayo 10
TZ2
P1#12

- (a) Considere los vectores $a = 6i + 3j + 2k$, $b = -3j + 4k$.
- (i) Halle el coseno del ángulo que forman los vectores a y b .
- (ii) Halle $a \times b$.

$$\cos \alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{(6, 3, 2) \cdot (0, -3, 4)}{\sqrt{36+9+4} \sqrt{0+9+16}} = \frac{-9+8}{35} = \boxed{\frac{-1}{35}}$$

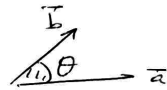
$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 6 & 3 & 2 \\ 0 & -3 & 4 \end{vmatrix} = (18, -24, -18) = \boxed{18\vec{i} - 24\vec{j} - 18\vec{k}}$$

Nov 10
P2 #9

Considere los vectores $a = \sin(2\alpha)i - \cos(2\alpha)j + k$ y $b = \cos \alpha i - \sin \alpha j - k$, donde $0 < \alpha < 2\pi$.

Sea θ el ángulo que forman los vectores a y b .

- (a) Exprese $\cos \theta$ en función de α .
- (b) Halle el ángulo agudo α para el cual los dos vectores son perpendiculares.
- (c) Para $\alpha = \frac{7\pi}{6}$, determine el producto vectorial de a y b y comente el significado geométrico de este resultado.

$$\vec{a} = (\sin(2\alpha), -\cos(2\alpha), 1) \quad \vec{b} = (\cos \alpha, -\sin \alpha, -1)$$


$$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{\sin(2\alpha)\cos \alpha + \cos(2\alpha)\sin \alpha - 1}{\sqrt{\sin^2(2\alpha) + \cos^2(2\alpha) + 1} \sqrt{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha + 1}} =$$

$$= \frac{\sin(2\alpha + \alpha) - 1}{\sqrt{2} \sqrt{2}} = \boxed{\frac{\sin(3\alpha) - 1}{2}}$$

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Rightarrow \cos \theta = 0 \Rightarrow \frac{\sin(3\alpha) - 1}{2} = 0 \rightarrow \sin(3\alpha) = 1$$

$$\sin(3\alpha) = 1 \Rightarrow 3\alpha = \frac{\pi}{2} + 2\pi N \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3} N \rightarrow \boxed{\alpha = \pi/6}$$

$$\alpha = \frac{7\pi}{6} \rightarrow \cos \theta = \frac{\sin(3 \cdot \frac{7\pi}{6}) - 1}{2} = \frac{\sin(\frac{7\pi}{2}) - 1}{2} = \frac{-1 - 1}{2} = -1$$

$\cos \theta = -1 \Rightarrow \vec{a}$ y \vec{b} son paralelos de sentido opuesto.

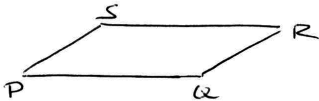
Por lo tanto $\boxed{\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}}$

Mayo 11
TZ2
P2#11

Los puntos $P(-1, 2, -3)$, $Q(-2, 1, 0)$, $R(0, 5, 1)$ y S forman un paralelogramo, siendo S diagonalmente opuesto a Q .

- (a) Halle las coordenadas de S .
- (b) El producto vectorial $\vec{PQ} \times \vec{PS} = \begin{pmatrix} -13 \\ 7 \\ m \end{pmatrix}$. Halle el valor de m .
- (c) A partir de lo anterior, calcule el área del paralelogramo PQRS.

$\vec{QR} = (2, 4, 1)$
 $S = P + (2, 4, 1) = (1, 6, -2)$



$P\vec{Q} = (-1, -1, 3)$
 $P\vec{S} = (2, 4, 1)$

$$P\vec{Q} \times P\vec{S} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = (-13, 7, -2) \Rightarrow \boxed{m = -2}$$

Área $\widehat{PQRS} = |P\vec{Q} \times P\vec{S}| = \sqrt{169 + 49 + 4} = \boxed{\sqrt{222}}$

Nov 11
P1#12

- (a) Compruebe que, para vectores no nulos a y b ,
- (i) si $|a - b| = |a + b|$, entonces a y b son perpendiculares;
 - (ii) $|a \times b|^2 = |a|^2 |b|^2 - (a \cdot b)^2$.
- (b) Los puntos A, B y C tienen vectores de posición a , b y c .
- (i) Compruebe que el área del triángulo ABC es $\frac{1}{2} |a \times b + b \times c + c \times a|$.
 - (ii) A partir de lo anterior, compruebe que la distancia más corta entre B y AC es

$$\frac{|a \times b + b \times c + c \times a|}{|c - a|}$$

a) (i) idéntico a Nov 02
(ii) " " Mayo 08

b)

$$\vec{AB} = \vec{b} - \vec{a} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3)$$

$$\vec{AC} = \vec{c} - \vec{a} = (c_1 - a_1, c_2 - a_2, c_3 - a_3)$$

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ b_1 - a_1 & b_2 - a_2 & b_3 - a_3 \\ c_1 - a_1 & c_2 - a_2 & c_3 - a_3 \end{vmatrix} = \text{(Aplicando propiedades de los determinantes de)}$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{b} \times \vec{c} - \vec{a} \times \vec{c} - \vec{b} \times \vec{a} + \vec{a} \times \vec{b} =$$

$$= \vec{b} \times \vec{c} + \vec{c} \times \vec{a} + \vec{a} \times \vec{b}$$

Área $\widehat{ABC} = \frac{|\vec{AB} \times \vec{AC}|}{2} = \frac{|\vec{b} \times \vec{c} + \vec{c} \times \vec{a} + \vec{a} \times \vec{b}|}{2}$ ✓

Área $\widehat{ABC} = \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2} = \frac{|\vec{AC}| \cdot d}{2} = \frac{|\vec{c} - \vec{a}| \cdot d}{2}$

$$\frac{d \cdot |\vec{c} - \vec{a}|}{2} = \frac{|\vec{a} \times \vec{b} + \vec{b} \times \vec{c} + \vec{c} \times \vec{a}|}{2}$$

$$d = \frac{|\vec{a} \times \vec{b} + \vec{b} \times \vec{c} + \vec{c} \times \vec{a}|}{|\vec{c} - \vec{a}|}$$
 ✓

Mayo 12
TZ2
P1#2

Halle los valores de x para los cuales los vectores $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \cos x \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \sin x \\ 1 \end{pmatrix}$ son perpendiculares, siendo $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.

$$(1, 2\sin x, 0) \perp (-1, 2\sin x, 1) \Rightarrow -1 + 4\sin^2 x - 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4\sin^2 x - 2 = 0 \Rightarrow 2\sin^2 x = 1 \Rightarrow \sin^2 x = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin(2x) = \frac{1}{2}$$

$$\sin(2x) = \frac{1}{2} \Rightarrow 2x = \begin{cases} 30^\circ + 360^\circ N \\ 150^\circ + 360^\circ N \end{cases} \Rightarrow x = \begin{cases} 15^\circ + 180^\circ N \\ 75^\circ + 180^\circ N \end{cases} = \begin{cases} \frac{\pi}{12} + \pi N \\ \frac{5\pi}{12} + \pi N \end{cases}$$

$$0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow \boxed{x = \begin{cases} \pi/12 \\ 5\pi/12 \end{cases}}$$

Muestra

14 The vectors a, b, c satisfy the equation $a + b + c = 0$. Show that $a \times b = b \times c = c \times a$.
P1#8

$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$$

- $\vec{a} \times (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{0} \Rightarrow \vec{a} \times \vec{a} + \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c} = \vec{0} ; \vec{0} + \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c} = \vec{0} ;$
 $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{a} \times \vec{c} ; \vec{a} \times \vec{b} = \vec{c} \times \vec{a} \quad \checkmark$
- $\vec{b} \times (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) = \vec{b} \times \vec{0} \Rightarrow \vec{b} \times \vec{a} + \vec{b} \times \vec{b} + \vec{b} \times \vec{c} = \vec{0} ; \vec{b} \times \vec{a} + \vec{0} + \vec{b} \times \vec{c} = \vec{0} ;$
 $\vec{b} \times \vec{c} = -\vec{b} \times \vec{a} ; \vec{b} \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} \quad \checkmark$

Mayo 15

TZ1

P2#8

Let $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ and $w = \begin{pmatrix} 4 \\ \lambda \\ 10 \end{pmatrix}$.

- (a) Find the value of λ for v and w to be parallel.
- (b) Find the value of λ for v and w to be perpendicular.
- (c) Find the two values of λ if the angle between v and w is 10° .

Mayo 16

TZ1

P1#8

O, A, B and C are distinct points such that $\vec{OA} = a$, $\vec{OB} = b$ and $\vec{OC} = c$.
It is given that c is perpendicular to \vec{AB} and b is perpendicular to \vec{AC} .

Prove that a is perpendicular to \vec{BC} .

Mayo 16

TZ2

P2#9

OACB es un paralelogramo en el que $\vec{OA} = a$ y $\vec{OB} = b$, donde a y b son vectores no nulos.

(a) Muestre que

(i) $|\vec{OC}|^2 = |a|^2 + 2a \cdot b + |b|^2 ;$

(ii) $|\vec{AB}|^2 = |a|^2 - 2a \cdot b + |b|^2 .$

(b) Sabiendo que $|\vec{OC}| = |\vec{AB}|$, demuestre que OACB es un rectángulo.