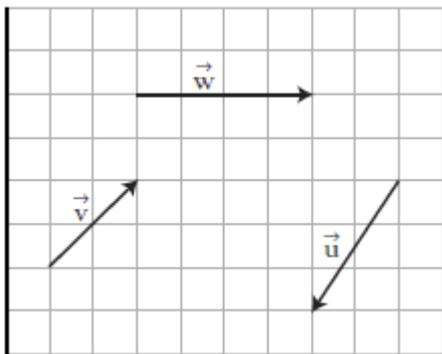


## VECTORES

1. Considera los vectores representados en la siguiente figura:



1.1. Representa:

a)  $-\vec{v} - 2\vec{u}$       b)  $\vec{v} + 3\vec{w}$       c)  $-\vec{w} + 2\vec{v} + \vec{u}$

1.2. Determina las coordenadas de  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  y  $\vec{w}$  y calcula las coordenadas de estos vectores:

a)  $2\vec{v} + \frac{3}{4}\vec{u}$       b)  $-\vec{v} - 2\vec{u} + \frac{3}{2}\vec{w}$

1.3. Razona si  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  forman una base y expresa  $\vec{w}$  como combinación lineal de  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$ .

2. Las coordenadas de dos vectores son  $\vec{u} \left( -\frac{2}{3}, \frac{1}{2} \right)$  y  $\vec{v} \left( 2, -\frac{3}{2} \right)$ . Calcula:

- El producto escalar de ambos vectores.
- El módulo de cada uno.
- El ángulo que forman.

3. Los módulos de dos vectores  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$ , que forman un ángulo de  $60^\circ$ , son  $|\vec{u}| = 2$  y  $|\vec{v}| = 5$ . Calcula:

a)  $3\vec{v} \cdot (-2\vec{u})$       b)  $\vec{v} \cdot (\vec{v} + \vec{u})$

4. Calcula el valor de  $m$  para que los vectores  $\vec{u}(1, 0)$  y  $\vec{v}(m, 1)$  formen un ángulo de  $120^\circ$ .

5. Dado el vector  $\vec{u}(3, 4)$ , determinar:

- Un vector unitario de la misma dirección que  $\vec{u}$ .
- Un vector ortogonal a  $\vec{u}$ .
- Un vector ortonormal a  $\vec{u}$ .

6. Calcula  $m$  y  $n$  para que los vectores  $\vec{u}(-3, n)$  y  $\vec{v}(m, 6)$  sean ortogonales y  $|\vec{u}| = 5$ .

7. Dado el vector  $\vec{u}(-5, k)$  calcular  $k$  de modo que:

- $\vec{u}$  sea ortogonal a  $\vec{v}(4, -2)$
- El módulo de  $\vec{u}$  sea igual a  $\sqrt{34}$

8. Dados los vectores  $\vec{u}(2, 1)$  y  $\vec{v}(6, 2)$ , hallar un vector  $\vec{w}$  tal que  $\vec{w} \cdot \vec{u} = 1$  y  $\vec{v} \perp \vec{w}$

9. Dado los siguientes puntos  $A(4, -2)$ ,  $B(1, 7)$ ,  $C(2, 4)$

- Hallar el simétrico del punto  $A$  respecto de  $C$ .
- Calcular el punto medio,  $M$ , del segmento  $AB$ .
- ¿Están alineados los tres puntos  $A$ ,  $B$  y  $C$ ? Razona tu respuesta.

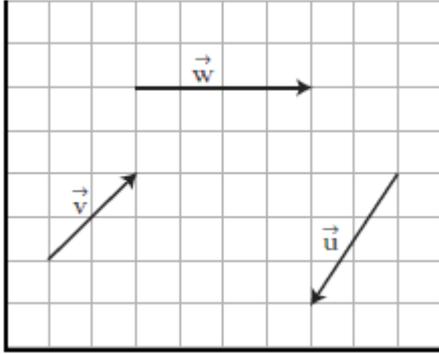
d) Calcular las coordenadas de un punto  $D$  de manera que se verifique  $\frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} = \frac{1}{2}$

10. Dado el triángulo de vértices  $A(1, 1)$ ,  $B(5, 4)$  y  $C(-5, 9)$ , se pide:

- Demostrar que es rectángulo en  $A$
- Calcular los otros dos ángulos.
- Calcular su área.

## SOLUCIONES

1. Considera los vectores representados en la siguiente figura:



1.1. Representa:

a)  $-\vec{v} - 2\vec{u}$       b)  $\vec{v} + 3\vec{w}$       c)  $-\vec{w} + 2\vec{v} + \vec{u}$

1.2. Determina las coordenadas de  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  y  $\vec{w}$  y calcula las coordenadas de estos vectores:

a)  $2\vec{v} + \frac{3}{4}\vec{u}$       b)  $-\vec{v} - 2\vec{u} + \frac{3}{2}\vec{w}$

1.3. Razona si  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  forman una base y expresa  $\vec{w}$  como combinación lineal de  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$ .

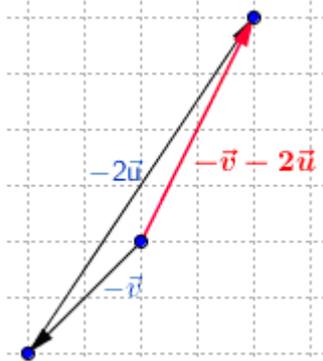
1.1. Representa:

a)  $-\vec{v} - 2\vec{u}$

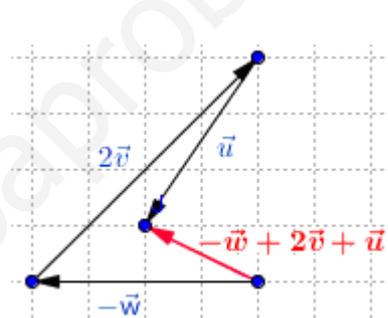
b)  $\vec{v} + 3\vec{w}$

c)  $-\vec{w} + 2\vec{v} + \vec{u}$

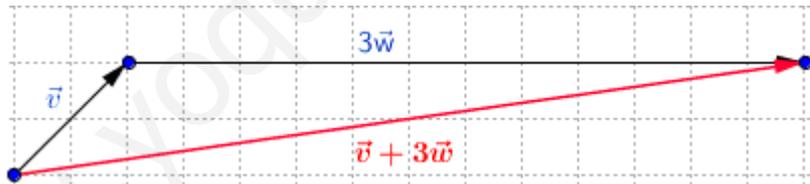
a)



c)



b)



1.2.) Se consideran los vectores  $\vec{v}(2,2)$ ,  $\vec{u}(-2,-3)$  y  $\vec{w}(4,0)$ .

Calcula las coordenadas de estos vectores:

$$\text{I) } 2\vec{v} + \frac{3}{4}\vec{u} = 2 \cdot (2,2) + \frac{3}{4}(-2,-3) = \left(\frac{10}{4}, \frac{7}{4}\right)$$

$$\text{II) } -\vec{v} - 2\vec{u} + \frac{3}{2}\vec{w} = -(2,2) - 2 \cdot (-2,-3) + \frac{3}{2}(4,0) = (8, 4)$$

1.3. Los vectores  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$  forman una base porque son linealmente independientes ya que sus coordenadas no son proporcionales.

$$\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v} \rightarrow (4,0) = a(-2,-3) + b(2,2) \rightarrow \begin{cases} 4 = -2a + 2b \\ 0 = -3a + 2b \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = 6 \end{cases} \rightarrow \vec{w} = 4\vec{u} + 6\vec{v}$$

2. Las coordenadas de dos vectores son  $\vec{u} \left( -\frac{2}{3}, \frac{1}{2} \right)$  y  $\vec{v} \left( 2, -\frac{3}{2} \right)$ . Calcula:

a) El producto escalar de ambos vectores.

Aplicando la expresión analítica del producto escalar:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = -\frac{2}{3} \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot \left( -\frac{3}{2} \right) = -\frac{4}{3} - \frac{3}{4} = -\frac{25}{12}$$

b) El módulo de cada uno.

$$|\vec{u}| = \sqrt{\left( -\frac{2}{3} \right)^2 + \left( \frac{1}{2} \right)^2} = \sqrt{\frac{4}{9} + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{25}{36}} = \frac{5}{6}$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{2^2 + \left( \frac{3}{2} \right)^2} = \sqrt{4 + \frac{9}{4}} = \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2}$$

c) El ángulo que forman.

$$\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{-\frac{25}{12}}{\frac{5}{6} \cdot \frac{5}{2}} = -\frac{\frac{25}{12}}{\frac{25}{12}} = -1 \rightarrow (\vec{u}, \vec{v}) = 180^\circ$$

3. Los módulos de dos vectores  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$ , que forman un ángulo de  $60^\circ$ , son  $|\vec{u}| = 2$  y  $|\vec{v}| = 5$ .

Calcula:

a)  $3\vec{v} \cdot (-2\vec{u})$

b)  $\vec{v} \cdot (\vec{v} + \vec{u})$

En este ejercicio se aplica las propiedades del producto escalar:

a)  $3\vec{v} \cdot (-2\vec{u}) = \underset{(1)}{\equiv} -6 \cdot (\vec{v} \cdot \vec{u}) = -6 \cdot |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos 60^\circ = -6 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 0,5 = -30$

(1) Hemos aplicado la propiedad asociativa:  $k(\vec{u} \cdot \vec{v}) = (k\vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (k\vec{v})$

b)  $\vec{v} \cdot (\vec{v} + \vec{u}) = \underset{(1)}{\equiv} \vec{v} \cdot \vec{v} + \underset{(2)}{\equiv} \vec{v} \cdot \vec{u} \underset{(2)}{\equiv} |\vec{v}|^2 + |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos 60^\circ = 25 + 5 = 30$

(1) Por la propiedad distributiva:  $\vec{w} \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \vec{w} \cdot \vec{u} + \vec{w} \cdot \vec{v}$

(2) Para cualquier vector  $\vec{v}$  se verifica:  $\vec{v} \cdot \vec{v} = |\vec{v}|^2$

4. Calcula el valor de m para que los vectores  $\vec{u}(1, 0)$  y  $\vec{v}(m, 1)$  formen un ángulo de  $120^\circ$ .

$$\cos 120^\circ = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} \rightarrow -\frac{1}{2} \underset{(1)}{\equiv} \frac{m}{1 \cdot \sqrt{m^2 + 1}} \rightarrow -2m = \sqrt{m^2 + 1} \rightarrow 4m^2 = m^2 + 1 \rightarrow 3m^2 = 1 \rightarrow m = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$$

(1)  $\vec{u} \cdot \vec{v} = (1, 0) \cdot (m, 1) = m$        $|\vec{u}| = \sqrt{1} = 1$        $|\vec{v}| = \sqrt{m^2 + 1}$

Si  $m = \frac{\sqrt{3}}{3} \rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{\sqrt{3}}{3} \rightarrow$  los dos ángulos no pueden formar un ángulo obtuso.

Luego  $m = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ .

5. Dado el vector  $\vec{u}(3,4)$ , determinar:

a) Un vector unitario de la misma dirección que  $\vec{u}$ .

A partir de cualquier vector, podemos obtener uno con la misma dirección que tenga módulo 1, simplemente dividiendo sus componentes por el módulo de dicho vector. Es decir:

Si  $\vec{u} = (u_1, u_2) \rightarrow$  es un vector unitario que tiene la misma dirección que  $\vec{u}$ .

$$|\vec{u}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = 5 \rightarrow \vec{v} = \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} = \frac{1}{5}(3,4) = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$$

b) Un vector ortogonal a  $\vec{u}$ .

Si  $\vec{v}$  es un vector ortogonal a  $\vec{u}$ , se verifica que  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ . Para conseguir uno basta permutar sus componentes y cambiar una de las dos de signo.

Si  $\vec{u} = (u_1, u_2) \rightarrow \vec{v} = (-u_2, u_1)$  ó  $\vec{v} = (u_2, -u_1)$  es ortogonal a  $\vec{u}$ .

Luego dos vectores ortogonales a  $\vec{u}$  son  $\vec{v} = (-4, 3)$  ó  $\vec{v} = (4, -3)$

c) Un vector ortonormal a  $\vec{u}$ .

Para obtenerlo basta dividir el vector ortogonal por su módulo.

$$\text{Si } \vec{v} = (-4, 3) \rightarrow \vec{w} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{1}{5}(-4, 3) = \left(-\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$$

$$\text{Si } \vec{v} = (4, -3) \rightarrow \vec{w} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{1}{5}(4, -3) = \left(\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right)$$

6. Calcula m y n para que los vectores  $\vec{u}(-3, n)$  y  $\vec{v}(m, 6)$  sean ortogonales y  $|\vec{u}| = 5$ .

- Si  $\vec{u} \perp \vec{v} \rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \rightarrow -3m + 6n = 0 \rightarrow m = 2n$
- Si  $|\vec{u}| = 5 \rightarrow |\vec{u}| = \sqrt{3^2 + n^2} = 5 \rightarrow 9 + n^2 = 25 \rightarrow n^2 = 16 \rightarrow n = \pm 4$
- Si  $n = 4 \rightarrow m = 8$
- Si  $n = -4 \rightarrow m = -8$
- Hay dos soluciones:  $\vec{u}(-3, 4)$  y  $\vec{v}(8, 6)$  y  $\vec{u}(-3, -4)$  y  $\vec{v}(-8, 6)$

7. Dado el vector  $\vec{u}(-5, k)$  calcular k de modo que:

a)  $\vec{u}$  sea ortogonal a  $\vec{v}(4, -2)$

- Si  $\vec{u} \perp \vec{v} \rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \rightarrow (-5, k) \cdot (4, -2) = 0 \rightarrow -20 - 2k = 0 \rightarrow k = -10$

b) El módulo de  $\vec{u}$  sea igual a  $\sqrt{34}$

- Si  $|\vec{u}| = \sqrt{34} \rightarrow |\vec{u}|^2 = 34 \rightarrow 5^2 + k^2 = 34 \rightarrow k^2 = 9 \rightarrow k = \pm 3$

8. Dados los vectores  $\vec{u}(2, 1)$  y  $\vec{v}(6, 2)$ , hallar un vector  $\vec{w}$  tal que  $\vec{w} \cdot \vec{u} = 1$  y  $\vec{v} \perp \vec{w}$ .

- Sea  $\vec{w} = (x, y)$
- $\vec{w} \cdot \vec{u} = 1 \rightarrow (x, y) \cdot (2, 1) = 1 \rightarrow 2x + y = 1$
- Si  $\vec{v} \perp \vec{w} \rightarrow \vec{v} \cdot \vec{w} = 0 \rightarrow (x, y) \cdot (6, 2) = 0 \rightarrow 6x + 2y = 0 \rightarrow 3x + y = 0$
- Resolviendo el sistema formado por las dos ecuaciones:

$$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ 3x + y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -2x - y = -1 \\ 3x + y = 0 \end{cases} \\ x = -1 \rightarrow y = 3$$

- Por tanto:  $\vec{w} = (-1, 3)$

9. Dado los siguientes puntos A(4, -2), B(1, 7), C(2, 4)

a) Hallar el simétrico del punto A respecto de C.

Buscamos un punto A'(x, y) que verifique:  $\overline{AC} = \overline{CA'}$

$$\overline{AC} = \overline{CA'} \rightarrow (-2, 6) = (x - 2, y - 4)$$

Igualando coordenadas, obtenemos el sistema:

$$\begin{cases} -2 = x - 2 \\ 6 = y - 4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 10 \end{cases} \rightarrow A'(0, 10)$$

b) Calcular el punto medio, M, del segmento AB.

$$M = \left( \frac{4+1}{2}, \frac{-2+7}{2} \right) = \left( \frac{5}{2}, \frac{5}{2} \right)$$

c) ¿Están alineados los tres puntos A, B y C? Razona tu respuesta.

Si tres puntos, A, B y C están alineados si  $\overline{AC} = \overline{BC} = \overline{AB}$ :

$$\overline{AC} = \overline{BC} \rightarrow (-2, 6) = (1, -3) \rightarrow \text{Son proporcionales: } \overline{AC} = -2 \cdot \overline{BC}$$

d) Calcular las coordenadas de un punto D de manera que se verifique  $\frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} = \frac{1}{2}$

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} = \frac{1}{2} \rightarrow 2 \overline{AB} = \overline{AD} \rightarrow 2(-3, 9) = (x - 4, y + 2) \rightarrow (-6, 18) = (x - 4, y + 2)$$

- Resolviendo el sistema formado por las dos ecuaciones:

$$\begin{cases} -6 = x - 4 \\ 18 = y + 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 16 \end{cases} \rightarrow P(-2, 16)$$

10. Dado el triángulo de vértices A(1,1), B(5,4) y C(-5,9), se pide:

- Dibujarlo y demostrar analíticamente que es rectángulo en A
- Calcular los otros dos ángulos.
- Calcular su área.

a)  $\overline{AC} = (-6,8)$   $\overline{AB} = (4,3)$

$$\overline{AC} \cdot \overline{BC} = -24 + 24 = 0 \rightarrow \overline{AC} \perp \overline{BC}$$

b)  $\overline{BC} = (-10,5) \rightarrow \overline{BA} \cdot \overline{BC} = 40 - 15 = 25$

$$\cos B = \frac{25}{5 \cdot 5\sqrt{5}} = 0,4472 \rightarrow B = 63,43^\circ$$

Por tanto,  $C = 90^\circ - 63,43^\circ = 26,57^\circ$

c) Área =  $\frac{|\overline{AB}| \cdot |\overline{AC}|}{2} = \frac{5 \cdot 10}{2} = 25$

