

FUNCIONES: LIMITES Y CONTINUIDAD

1. Calcula el límite cuando $x \rightarrow \infty$ de las siguientes funciones:

$$\begin{array}{lll} a) f(x) = \frac{3x^2 - 4x - 9}{2x + 3} & b) g(x) = \frac{\sqrt{3x^2 + 6x}}{2x + 1} & c) h(x) = \sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 + 7} \\ d) i(x) = \left(\frac{x^2 - 5x}{x + 1} - \frac{3x}{2} \right) & e) j(x) = \left(\frac{1}{2} \right)^{2x} & f) k(x) = e^{-x} + 3 \\ g) l(x) = \sqrt{x^2 - 4} - x & h) m(x) = \sqrt{x^2 + x} - x & \end{array}$$

2. Calcula el límite cuando $x \rightarrow -\infty$ de las funciones:

$$\begin{array}{lll} a) f(x) = \frac{3x^2 - 4x - 9}{2x + 3} & b) g(x) = \frac{5x^4 - 6x + 2}{3x^4 + x - 1} & c) h(x) = \frac{-2x^3 + 5x^2 + 3}{2x^2 + x - 8} \\ d) i(x) = \frac{6x^2 + 3x - 5}{x^5 + x^3} & e) j(x) = 3^{2x+3} & \end{array}$$

3. Calcula los siguientes límites, en caso de que existan:

$$\begin{array}{lll} a) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 4}{x^3 + 2x^2 + 5x + 10} & b) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 3}{x^2 - 5x + 4} & c) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 2x^2 + 2x + 5}{x^2 - 6x - 7} \\ d) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{2x^2 - 2x} & e) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - x^2}{x^2 - 3x} & f) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x + 3}{(x + 2)^2} \\ g) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4 - x^3 + 3x}{x^2 - x} & h) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-1}{x - 2} & i) \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 4x - 5}{x^2 - 25} \\ j) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x + 2} - 2}{x - 2} & k) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + x} - \sqrt{1 - x}}{3x} & \end{array}$$

4. Halla las asíntotas de las siguientes funciones:

$$\begin{array}{lll} a) f(x) = \frac{1 - x}{x + 2} & b) f(x) = \frac{x^2}{x + 1} & c) f(x) = \frac{2x^2}{x^2 - 4} \\ e) f(x) = \frac{2x^2}{x^2 - 9} & f) f(x) = \frac{3x + 1}{2x - 4} & g) f(x) = \frac{4x^2}{x - 1} \\ d) f(x) = \frac{5x}{x - 1} & h) f(x) = \frac{3x^2}{x^2 + 2} & \end{array}$$

5. Estudia la continuidad de las siguientes funciones y representa gráficamente

$$\begin{array}{ll} a) f(x) = \frac{5x}{x - 1} & b) f(x) = \begin{cases} x + 3 & \text{si } x < 0 \\ x - 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \\ c) f(x) = \begin{cases} 2 - x^2 & \text{si } x < 1 \\ x^2 - x + 1 & \text{si } 1 \leq x < 3 \\ x^2 - 4 & \text{si } x \geq 3 \end{cases} & d) f(x) = \begin{cases} x^2 - 2 & \text{si } x < 2 \\ \sqrt{x + 2} & \text{si } x \geq 2 \end{cases} \\ e) f(x) = \begin{cases} 3x - x^2 & \text{si } x \leq 3 \\ x - 3 & \text{si } 3 < x < 6 \\ 1 & \text{si } x \geq 6 \end{cases} & f) f(x) = \begin{cases} x^4 - 16 & \text{si } x \neq 2 \\ \frac{x - 2}{-4} & \text{si } x = 2 \end{cases} \end{array}$$

6. ¿Cómo elegirías el valor de $f(1)$ para que la función $f(x)$ fuese continua en $x=1$?

$$f(x) = \frac{x^2 - x}{x - 1}, \quad \text{si } x \neq 1$$

7. Calcula el valor del parámetro a en cada caso para que las siguientes funciones sean continuas:

$$\begin{array}{ll} a) f(x) = \begin{cases} x^2 + ax & \text{si } x \leq 2 \\ a - x^2 & \text{si } x > 2 \end{cases} & b) f(x) = \begin{cases} x^2 - a & \text{si } x < 3 \\ 4x + 1 & \text{si } x \geq 3 \end{cases} \end{array}$$

$$1. a) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 - 4x - 9}{2x + 3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2}{2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{2}x = +\infty$$

$$b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{3x^2 + 6x}}{2x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{3}x^2}{2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{3}x}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 + 7}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 + 7})(\sqrt{x^2 + x} + \sqrt{x^2 + 7})}{(\sqrt{x^2 + x} + \sqrt{x^2 + 7})} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x^2 + x) - (x^2 + 7)}{\sqrt{x^2 + x} + \sqrt{x^2 + 7}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - 7}{\sqrt{x^2 + x} + \sqrt{x^2 + 7}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + x} + \sqrt{x^2}} = \frac{1}{2}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 - 5x}{x + 1} - \frac{3x}{2} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2(x^2 - 5x)}{2(x + 1)} - \frac{3x(x + 1)}{2(x + 1)} \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - 10x - 3x^2 - 3x}{2x + 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^2 - 13x}{2x + 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^2}{2x} = -\infty$$

$$e) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^{2x} = 0$$

$$f) \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} + 3 = 0 + 3 = 3$$

$$g) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - 4} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 - 4} - x)(\sqrt{x^2 - 4} + x)}{\sqrt{x^2 - 4} + x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 4 - x^2}{\sqrt{x^2 - 4} + x} = 0$$

$$h) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + x} - x)(\sqrt{x^2 + x} + x)}{\sqrt{x^2 + x} + x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x - x^2}{\sqrt{x^2 + x} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + x} + x} = \frac{1}{2}$$

$$2. a) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2 - 4x - 9}{2x + 3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2}{2x} = -\infty$$

$$b) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x^4 - 6x + 2}{3x^4 + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x^4}{3x^4} = \frac{5}{3}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x^3 + 5x^2 + 3}{2x^2 + x - 8} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x^3}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x}{2} = +\infty$$

$$d) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{6x^2 + 3x - 5}{x^5 + x^3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{6x^2}{x^5} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{6}{x^3} = 0$$

$$e) \lim_{x \rightarrow \infty} 3^{2x+3} = (3^{\infty}) = 0$$

$$3. a) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 4}{x^3 + 2x^2 + 5x + 10} = (\text{indet } 0/0) = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+2)(x-2)}{(x+2)(x^2+5)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x-2}{x^2+5} = \frac{-4}{9}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+3}{x^2-5x+4} = (\text{indet } \frac{4}{0}) \text{ Calculamos límites laterales:}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2+3}{x^2-5x+4} = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2+3}{x^2-5x+4} = -\infty$$

$$c) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 2x^2 + 2x + 5}{x^2 - 6x - 7} = (\text{indet } \frac{0}{0}) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x^2-3x+5)}{(x+1)(x-7)} = -\frac{9}{8}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+x-2}{2x^2-2x} = (\text{indet } 0/0) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+2)(x-1)}{2x(x-1)} = \frac{3}{2}$$

$$e) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - x^2}{x^2 - 3x} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - x^2}{x^2 - 3x} = -\infty$$

$$(\text{indet } 18/0) \quad \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^3 - x^2}{x^2 - 3x} = +\infty$$

$$f) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x+3}{(x+2)^2} = (\text{indet } 1/0) \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x+3}{(x+2)^2} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x+3}{(x+2)^2} = -\infty \end{cases}$$

$$g) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4 - x^3 + 3x}{x^2 - x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x^3 - x^2 + 3)}{x(x-1)} = -3$$

$$h) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-1}{x-2} = (\text{indet } -1/0) \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-1}{x-2} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{-1}{x-2} = -\infty \end{cases}$$

$$i) \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 4x - 5}{x^2 - 25} \text{ "0/0"} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{(x-5)(x+1)}{(x-5)(x+5)} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

$$j) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} - 2}{x-2} \underset{\text{indet } 0/0}{=} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\sqrt{x+2} - 2)(\sqrt{x+2} + 2)}{(x-2)(\sqrt{x+2} + 2)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+2-4}{(x+2)(\sqrt{x+2} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{(x+2)(\sqrt{x+2} + 2)} = \frac{1}{\sqrt{2+2} + 2} = \frac{1}{4}$$

$$k) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{3x} = \text{indet } 0/0 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x})(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})}{3x(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+x - (1-x)}{3x(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{3x(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})} = \frac{2}{3 \cdot 2} = \frac{1}{3}$$

4.- a) $f(x) = \frac{1-x}{x+2}$ Dom = $\mathbb{R} - \{-2\}$.

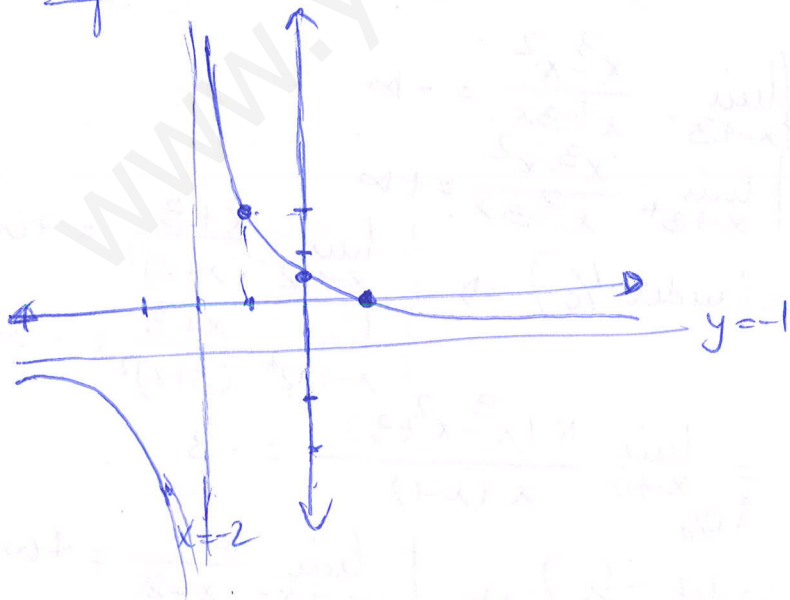
$$\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{1-x}{x+2} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{1-x}{x+2} = +\infty$$

Existe una asíntota vertical de ecuación $\boxed{x = -2}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1-x}{x+2} = -1 \Rightarrow \boxed{y = -1} \text{ Asíntota horizontal.}$$

Representación Gráfica



b) $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$ Dom = $\mathbb{R} - \{-1\}$

- Asíntota vertical: $x = -1$ puesto que
- No hay asíntota horizontal:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^2}{x+1} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2}{x+1} = +\infty \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x} = +\infty ; \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$$

- Presenta una asíntota oblicua:

$$m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{x^2+x} = 1 \Rightarrow m=1$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x^2}{x+1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 - x^2 - x}{x+1} = -1 \Rightarrow n=-1$$

Por tanto $y = x - 1$, Ecuación de la asíntota oblicua.

c) $f(x) = \frac{2x^2}{x^2-4}$ Dom = $\mathbb{R} - \{-2, 2\}$

- Asíntotas VERTICALES:

$$\boxed{x=-2} \quad \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{2x^2}{x^2-4} = +\infty ; \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{2x^2}{x^2-4} = -\infty$$

$$\boxed{x=2} \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2x^2}{x^2-4} = -\infty ; \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2x^2}{x^2-4} = +\infty$$

- Asíntota horizontal: $\boxed{y=2}$ puesto que $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^2}{x^2-4} = 2$

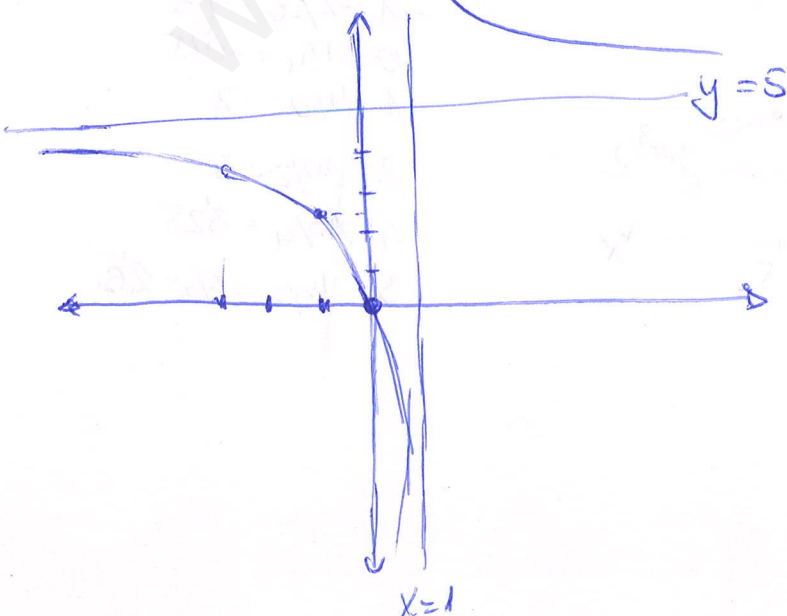
d) $f(x) = \frac{5x}{x-1}$ Dom = $\mathbb{R} - \{1\}$

As. VERTICAL: $\boxed{x=1}$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{5x}{x-1} = -\infty ; \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{5x}{x-1} = +\infty$$

As. HORIZONTAL: $\boxed{y=5}$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{5x}{x-1} = 5$$



x	y
-4	4
-3	$-15/-4 = 3.75$
-1	$-5/-2 = 2.5$
0	0
2	10
3	$15/2 = 7.5$
4	$20/3 = 6.6$
5	$25/4 = 6.25$
6	$30/5 = 6$

e) $f(x) = \frac{2x^2}{x^2 - 9}$ $x^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow x = \pm 3$
 Dom = $\mathbb{R} - \{-3, 3\}$

• Estudiamos la existencia de asíntotas verticales en $x = -3$ y $x = 3$:

En $x = -3$: $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{2x^2}{x^2 - 9} = \left(\text{indet } \frac{18}{0} \right)$

$\lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{2x^2}{x^2 - 9} = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{2x^2}{x^2 - 9} = -\infty$

$x = -3$ es una as. vertical

En $x = 3$: $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2}{x^2 - 9} = \left(\text{indet } \frac{18}{0} \right)$

$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{2x^2}{x^2 - 9} = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{2x^2}{x^2 - 9} = +\infty$

$x = 3$ As. Vertical.

Hay 2 asíntotas verticales.

• Asíntota horizontal: Se estudia el comportamiento de $f(x)$ en $+\infty$ o $-\infty$:

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^2}{x^2 - 9} = 2$

$y = 2$ Ecuación de la asíntota horizontal.

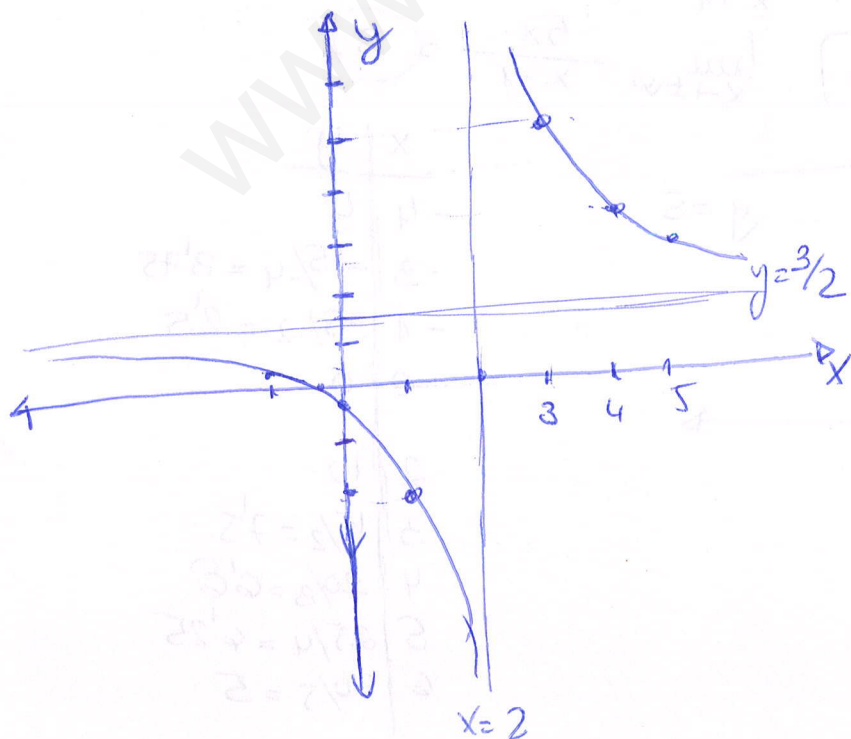
f) $f(x) = \frac{3x+1}{2x-4}$ Dom = $\mathbb{R} - \{2\}$

$x = 2$ es una Asíntota Vertical

$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{3x+1}{2x-4} = -\infty$

$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3x+1}{2x-4} = +\infty$

Por otro lado $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3x+1}{2x-4} = \frac{3}{2} \Rightarrow$ $y = \frac{3}{2}$ asíntota horizontal.



x	y
-2	$-5/8$
-1	$-2/6$
0	$-1/4$
1	$4/2$
3	$10/2$
4	$13/4$
5	$16/6 = 8/3$

$$g) f(x) = \frac{4x^2}{x-1} \quad \text{Dom} = \mathbb{R} - \{1\}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x^2}{x-1} = \text{"indet } \frac{4}{0} \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{4x^2}{x-1} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{4x^2}{x-1} = +\infty \end{cases}$$

f presenta en $x=1$
una ASINTOTA
VERTICAL
($x=1$)

Estudiamos que ocurre en $+\infty$ o $-\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^2}{x-1} = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^2}{x-1} = -\infty$$

f no presenta

ASINTOTAS HORIZONTALES.

Buscamos para ver si hay alguna asíntota oblicua. Es una recta de la forma $y = mx + n$.

$$m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{4x^2}{x^2 - x} = 4$$

Como este límite existe, es finito y distinto de 0, f presenta una asíntota oblicua de pendiente $m=4$.

$$n = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[f(x) - \underset{m}{4x} \right] =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{4x^2}{x-1} - 4x \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{4x^2}{x-1} - \frac{4x^2 - 4x}{x-1} \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{4x}{x-1} = \textcircled{4}$$

$y = 4x + 4$ Ecuación de la asíntota oblicua.

$$h) f(x) = \frac{3x^2}{x^2 + 2}$$

$$\text{Dom} = \mathbb{R}$$

f no presenta asíntotas verticales.

Estudiamos su comportamiento en $\pm\infty$ para ver si hay alguna asíntota horizontal:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3x^2}{x^2 + 2} = \textcircled{3}$$

f presenta una ASINTOTA HORIZONTAL de ecuación $y=3$

$$5.- a) f(x) = \frac{5x}{x-1} \quad D = \mathbb{R} - \{1\}$$

f es continua, por ser cociente de funciones continuas, en todos los puntos salvo quizá en $x=1$, donde no está definida. Veamos como se comporta en $x=1$:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{5x}{x-1} = \text{"indet } \frac{5}{0} \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{5x}{x-1} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{5x}{x-1} = +\infty \end{cases}$$

No existe $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ y $f(1)$ no está definida. En este caso la función presenta en $x=1$ una As. vertical.

f es continua en todos los puntos excepto en $x=1$ donde presenta una discontinuidad de salto infinito.

$$b) f(x) = \begin{cases} x+3 & \text{si } x < 0 \\ x-1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

las funciones piecewise son continuas, pero se deben estudiar límites laterales en $x=0$:

$$f(0) = 0-1 = -1$$

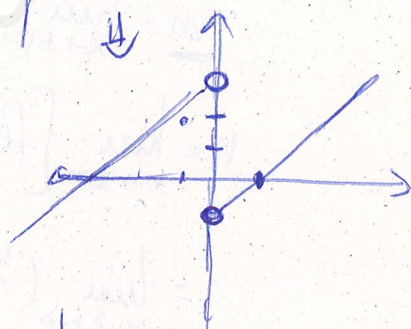
$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} x+3 = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x-1 = -1$$

$\exists$ límites laterales, son finitos pero diferentes

f es continua en $\mathbb{R}$ excepto en $x=0$ donde presenta una discontinuidad de salto finito.

$$c) f(x) = \begin{cases} 2-x^2 & \text{si } x < 1 \\ x^2-x+1 & \text{si } 1 \leq x < 3 \\ x^2-4 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$



las funciones que forman f son polinómicas, luego se trata de funciones continuas. Estudiaremos que ocurre en $x=1$ y en $x=3$.

En $x=1$

$$f(1) = 1^2-1+1 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} 2-x^2 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} x^2-x+1 = 1$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1 = f(1)$$

f es continua en $x=1$

En $x=3$

$$f(3) = 3^2-4 = 5$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} x^2-x+1 = 9-3+1 = 7$$

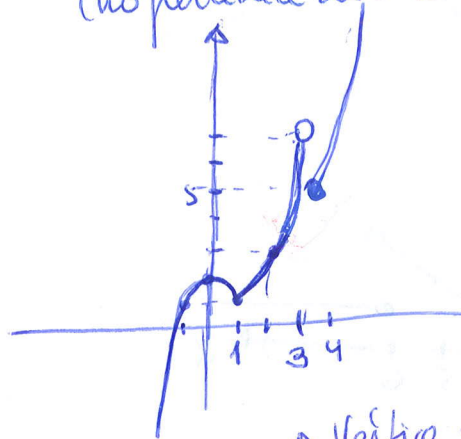
$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} x^2-4 = 5$$

f discontinua en $x=3$

f es continua en $\mathbb{R}$, excepto en $x=3$ donde presenta una discontinuidad de salto finito.

x	y
-1	1
0	2
1	1
2	3
3	5
4	12

$y = 2 - x^2 \rightarrow$ vértice $x=0$
(no pertenece al dominio)



$$y = x^2 - x + 1$$

$$V: x = \frac{1}{2} \notin [1, 3)$$

$$y = x^2 - 4$$

$$V: x = 0 \notin [3, +\infty)$$

d) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2 & \text{si } x < 2 \\ \sqrt{x+2} & \text{si } x \geq 2 \end{cases} \rightarrow$ vértice: $x=0 \in (-\infty, 2)$
 $x+2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -2$ (En este caso se unifica)

f está formada por funciones continuas.

Estudiemos el límite en $x=2$:

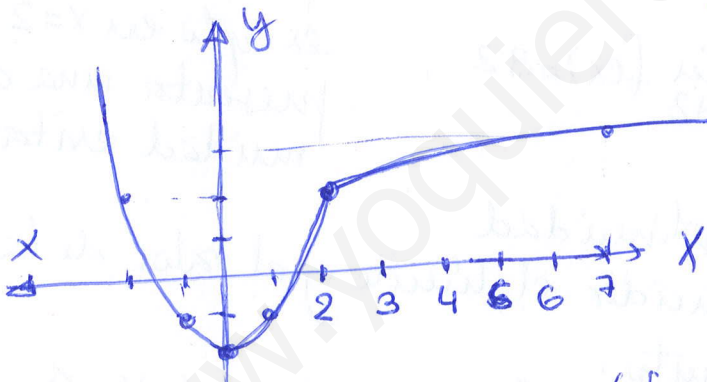
$$f(2) = \sqrt{2+2} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} x^2 - 2 = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \sqrt{x+2} = 2$$

$$\exists \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2) = 2.$$

La función es continua en $x=2$ y con ello, continua en $\mathbb{R}$.



x	y
-2	2
-1	1
0	-2
1	+1
2	2
3	√3
7	3

e) $f(x) = \begin{cases} 3x - x^2 & \text{si } x \leq 3 \quad (V: x = \frac{3}{2}) \\ x - 3 & \text{si } 3 < x < 6 \\ 1 & \text{si } x \geq 6 \end{cases}$

f es continua en $\mathbb{R}$ excepto quizás en $x=3$ y $x=6$ donde estudiamos límites laterales:

En $x=3$:

$$f(3) = 3 \cdot 3 - 3^2 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} 3x - x^2 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} x - 3 = 0$$

$$\exists \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 0 = f(3) \Rightarrow \underline{\text{f es cont. en } x=3}$$

En $x=6$:

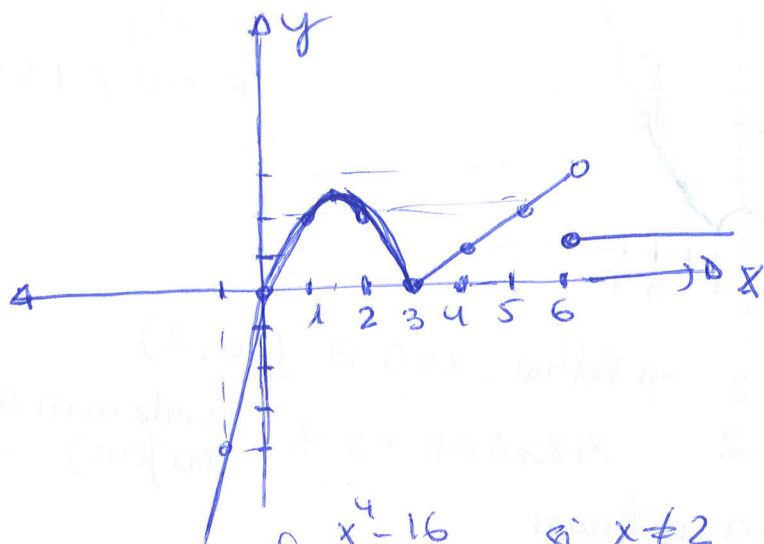
$$f(6) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 6^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 6^-} x - 3 = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 6^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 6^+} 1 = 1$$

f discontinua en $x=6$

f es continua en $\mathbb{R}$, excepto en $x=6$, donde presenta una discontinuidad de salto finito.



x	y
-1	-4
0	0
1	2
3/2	2.25
2	2
3	0

$$f) f(x) = \begin{cases} \frac{x^4 - 16}{x - 2} & \text{si } x \neq 2 \\ -4 & \text{si } x = 2 \end{cases}$$

f debe de estudiarse en $x=2$, en el resto de los valores es continua.

$$f(2) = -4$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 - 16}{x - 2} = \left(\text{indet } \frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+2)(x^2+4)}{x-2}$$

$$= 4 \cdot 8 = 32$$

$$f(2) = -4 \neq \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 32$$

f continua en $\mathbb{R}$ excepto en $x=2$ donde presenta una discontinuidad evitable.

6.- Para que exista continuidad en $x=1$ deben coincidir el límite y el valor de la función en dicho punto:

$$f(1) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - x}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x)(x-1)}{x-1} = 1$$

indet $\frac{0}{0}$

$$\boxed{f(1) = 1}$$

$$a) f(x) = \begin{cases} x^2 + ax & \text{si } x \leq 2 \\ a - x^2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

$$f(2) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$$

$$4 + 2a = 4 + 2a = a - 4$$

$$\boxed{a = -8}$$

$$b) f(x) = \begin{cases} x^2 - a & \text{si } x < 3 \\ 4x + 1 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

$$f(3) = \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x)$$

$$13 = 9 - a = 13 \Rightarrow 9 - 13 = a$$

$$\boxed{a = -4}$$