

ACTIVIDADES

FUNCIONES ELEMENTALES

1. Halla el dominio de definición de las siguientes funciones, a partir de su fórmula:

$$\begin{array}{llll}
 a) y = \sqrt{x^2 + 1} & b) y = \frac{1}{x^2 + 4} & c) y = x^3 - 2x + 3 & d) y = \frac{12}{(x-2) \cdot (x+2) \cdot (x-1)} \\
 e) y = \frac{3}{x^2 + x} & f) y = \frac{x}{(x-2)^2} & g) y = \frac{x-1}{2x+1} & h) y = \frac{2}{5x-x^2} \\
 i) y = \sqrt{-3x} & j) y = \sqrt{x^2 + 3x + 4} & k) y = \sqrt{x^2 - 4x - 5} & l) y = \sqrt{4 - x^2} \\
 m) y = \frac{-1}{x^2 - x^2} & n) y = \frac{2x}{x^2 - 1} & o) y = \frac{1}{\sqrt{x-1}} & p) y = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} \\
 p) y = \sqrt{\frac{x+3}{x-2}} & q) y = \operatorname{Ln}\left(\frac{3x+2}{3x-9}\right) & r) y = \log\left(\frac{-3}{x^2 - 5x + 6}\right)
 \end{array}$$

2. Representa gráficamente las paráolas siguientes:

$$\begin{array}{lll}
 a) y = x^2 - 2x + 3 & b) y = -x^2 + 2x - 3 & c) y = x^2 + 2x + 3 \\
 d) y = \frac{1}{3}x^2 - x + 3 & e) y = -x^2 + 3x & f) y = x^2 - 4 & g) y = 2x^2 + 1
 \end{array}$$

3. Representa gráficamente las siguientes funciones racionales, indicando su dominio y asíntotas:

$$a) y = \frac{2}{x+1} \quad b) y = \frac{2x-5}{x-3} \quad c) y = \frac{2x+3}{x}$$

4. Representa gráficamente las funciones:

$$a) y = +\sqrt{x} \quad b) y = +\sqrt{x-2} \quad c) y = 1 + \sqrt{x}$$

5. Halla la representación gráfica de las siguientes funciones definidas a trozos:

$$\begin{array}{ll}
 a) y = \begin{cases} x & \text{si } x \leq 2 \\ 1 & \text{si } x > 2 \end{cases} & b) y = \begin{cases} x^2 + 2x + 1 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 & \text{si } 0 < x < 4 \\ x-3 & \text{si } x \geq 4 \end{cases} \\
 c) y = \begin{cases} x+1 & \text{si } x \in [-3, 0[\\ x^2 - 2x + 1 & \text{si } x \in [0, 3] \\ 4 & \text{si } x \in]3, +\infty[\end{cases} & d) y = \begin{cases} 2x+1 & \text{si } x < 1 \\ x^2 - 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases} \\
 e) y = \begin{cases} -2x+1 & \text{si } x < -2 \\ \frac{x^2}{2} & \text{si } -2 \leq x \leq 2 \\ 3 & \text{si } x > 2 \end{cases}
 \end{array}$$

6. Representa gráficamente las funciones siguientes:

$$\begin{array}{ll}
 a) y = |-3x| & b) y = |2x-5| \\
 c) y = |x^2 - 4x + 3| & d) y = |-x^2 + 1|
 \end{array}$$

7. Representa gráficamente las funciones exponenciales y logarítmicas siguientes:

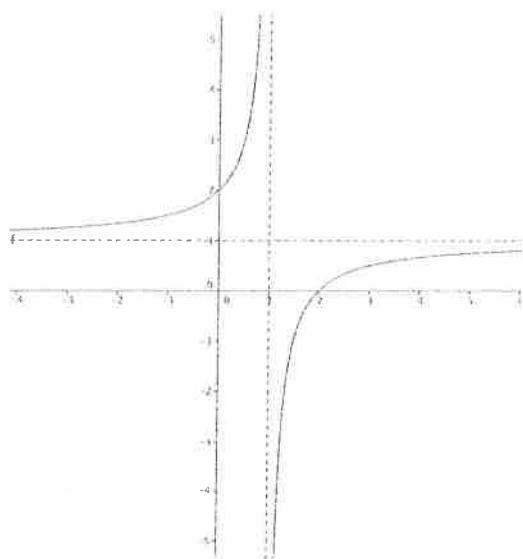
$$\begin{array}{ll}
 a) y = \log(x+2) & b) \log_3(-x+1) \\
 c) y = \left(\frac{1}{3}\right)^x & d) y = 2^{x-1}
 \end{array}$$

8. Dadas las funciones $f(x) = \log x$ y $g(x) = x^2 + 2x - 3$, halla:

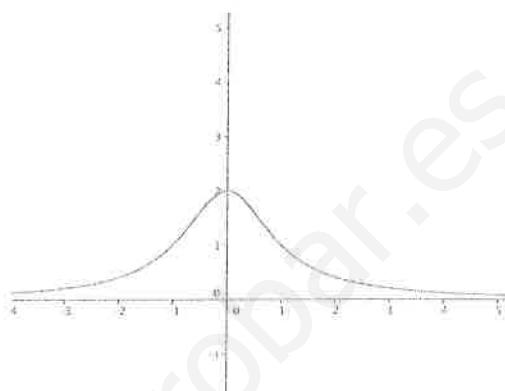
a) $h(x) = fog(x)$ y Dominio de $h(x)$ b) $gof(x)$

9. Observa las siguientes funciones y, a la vista de su gráfica, determina su dominio, recorrido o imagen, intervalos de crecimiento y decrecimiento y existencia de máximos mínimos relativos. Si es posible, determina sus asíntotas.

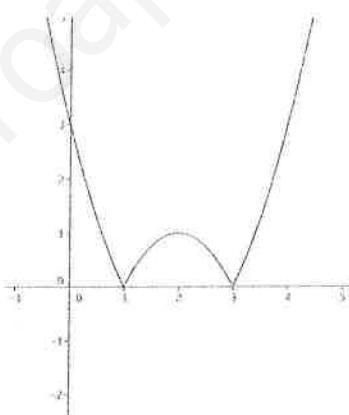
a)



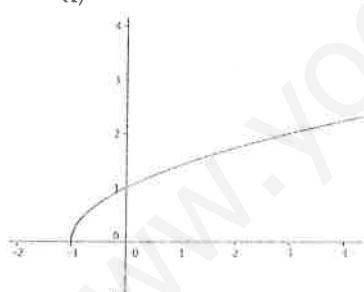
b)



c)



d)



10. Relaciona cada gráfica del ejercicio anterior con una de las siguientes expresiones: (Una de ellas sobra)

I) $y = |x^2 - 4x + 3|$

II) $y = \frac{x-2}{x-1}$

III) $y = \log(x+1)$

IV) $y = \sqrt{x+1}$

V) $y = \frac{2}{x^2+1}$

(SOLUCIONES)

- 1- a) $y = \sqrt{x^2 + 1}$ Dom = \mathbb{R} b) $y = \frac{1}{x^2 + 4}$ Dom = \mathbb{R}
 $x^2 + 4 = 0$ no tiene soluciones
- b) $y = x^3 - 2x + 3$ D = \mathbb{R} d) $y = \frac{12}{(x-2)(x+2)(x-1)}$ D = $\mathbb{R} - \{-2, 2, 1\}$
 $(x-2)(x+2)(x-1) = 0 \Rightarrow x=2, x=-2, x=1$
- e) $y = \frac{3}{x^2 + x}$ Dom = $\mathbb{R} - \{0, -1\}$
 $x^2 + x = 0 \Leftrightarrow x(x+1) = 0 \Leftrightarrow x=0, x=-1$
- f) $y = \frac{x}{(x-2)^2}$ Dom = $\mathbb{R} - \{2\}$ g) $y = \frac{x-1}{2x+1}$ D = $\mathbb{R} - \{-\frac{1}{2}\}$
 $2x+1 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$
- h) $y = \frac{2}{5x-x^2}$ Dom = $\mathbb{R} - \{0, 5\}$
 $5x - x^2 = 0 \Leftrightarrow x=0, x=5$
- i) $y = \sqrt{-3x}$ Dom = $(-\infty, 0]$
 $-3x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 0$
- j) $y = \sqrt{x^2 + 3x + 4}$ Dom = \mathbb{R}
 $x^2 + 3x + 4 \geq 0$
 $x = \frac{-3 \pm \sqrt{9-16}}{2}$ no hay soluciones
 El radicando es siempre positivo, luego Dom = \mathbb{R}
- k) $y = \sqrt{x^2 - 4x - 5}$ Dom = $(-\infty, -1] \cup [5, +\infty)$
 $x^2 - 4x - 5 \geq 0$
 $(x+1)(x-5) \geq 0$
 $x < -1 \quad x > 5$
-

b) $y = \sqrt{4-x^2}$

$$4-x^2 \geq 0 \Leftrightarrow (2-x)(2+x) \geq 0$$

Raíces: $x=-2, 2$

$D = [-2, 2]$

m) $y = \frac{1}{x^3 - x^2}$

$$x^3 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x=0 \text{ y } x=1$$

Dom = $\mathbb{R} - \{0, 1\}$

n) $y = \frac{2x}{x^4 - 1}$

$$x^4 - 1 = 0 \Leftrightarrow \text{Raíces: } x=1, x=-1$$

Dom = $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$

ñ) $y = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$

$$x-1 > 0 \Rightarrow x > 1$$

Dom = $(1, +\infty)$

o) $y = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

$$x^2-1 > 0 \Rightarrow (x-1)(x+1) > 0$$

$D = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

q) $y = \sqrt{\frac{x+3}{x-2}}$

$$\frac{x+3}{x-2} \geq 0$$

$x=-3$ raíces
 $x=2$

Dom = $(-\infty, -3] \cup (2, +\infty)$

q) $y = \ln\left(\frac{3x+2}{3x-9}\right)$

$$\frac{3x+2}{3x-9} > 0$$

$3x+2=0 \Rightarrow x=-\frac{2}{3}$
 $3x-9=0 \Rightarrow x=3$

Dom = $(-\infty, -\frac{2}{3}) \cup (3, +\infty)$

l) $y = \log\left(\frac{-3}{x^2-5x+6}\right)$

El numerador no tiene raíces.
El denominador se anula para $x=2$ y $x=3$.

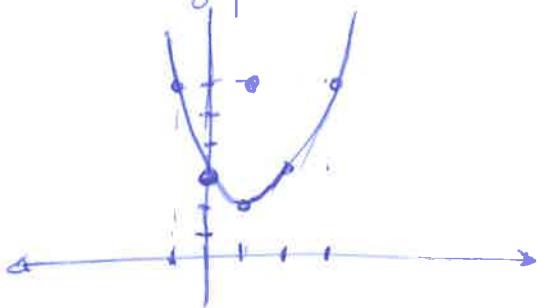
Dom = $(2, 3)$

2.- a) $y = x^2 - 2x + 3$. $D = \mathbb{R}$

Vértice: $x = \frac{-b}{2a} = 1$

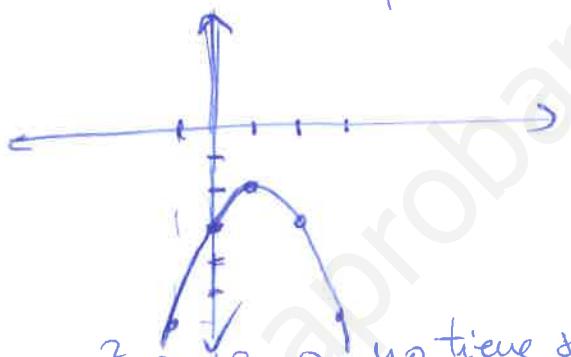
$x^2 - 2x + 3 = 0 \Rightarrow$ No tiene solución
(no hay puntos de corte con el eje x)

x	y
-2	11
-1	6
0	3
1	2
2	3
3	6



b) $y = -x^2 + 2x - 3$ $D = \mathbb{R}$ (Es la opuesta del a). No hay puntos de corte con el eje x)

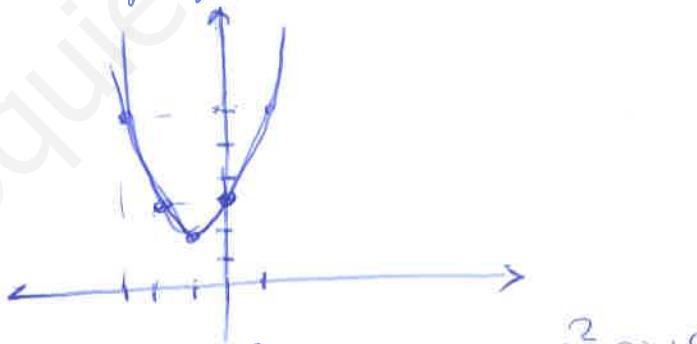
x	y
-1	-6
0	-3
1	-2
2	-3
3	-6



c) $y = x^2 + 2x + 3$

V: $x = -1$

x	y
-3	6
-2	3
-1	2
0	3
1	6

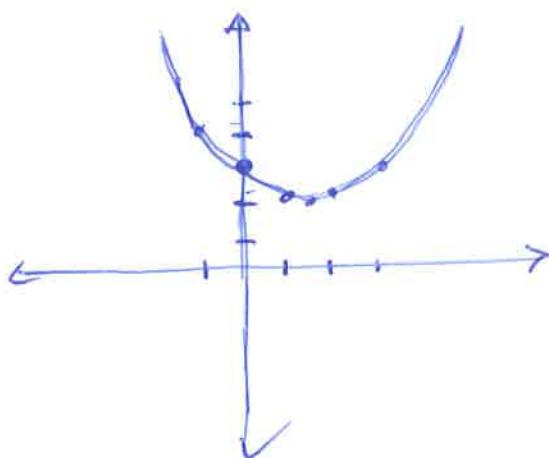


d) $y = \frac{1}{3}x^2 - x + 3$

V: $x = \frac{-b}{2a} = \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

$\frac{1}{3}x^2 - x + 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 9 = 0$
No hay solución, no hay puntos de corte con el eje x .

x	y
-1	13/3
0	3
1	7/3
3/2	9/4
2	7/3
3	3

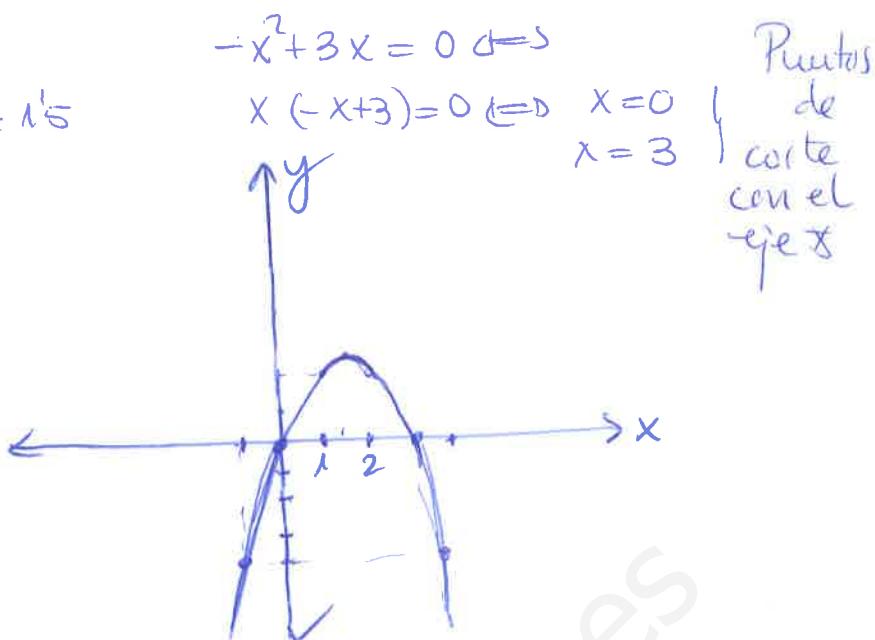


$$e) y = -x^2 + 3x$$

$$\cup \Rightarrow x = \frac{-3}{-2} = \frac{3}{2} = 1.5$$

x	y
-2	-10
-1	-4
0	0
1	2
1.5	9/4 = 2.25
2	2
3	0
4	-4

Vértice: $x=1.5$

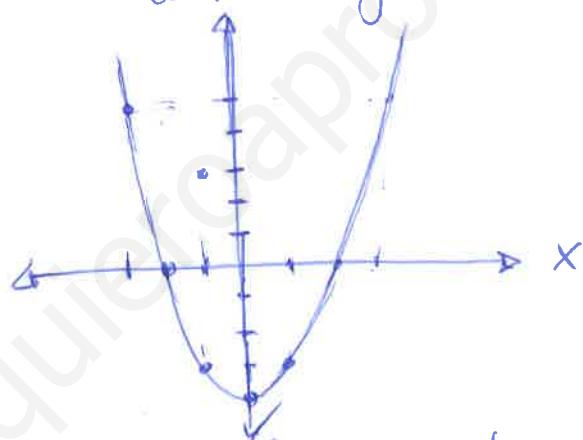


$$f) y = x^2 - 4 \quad D = \mathbb{R}$$

Vértice: $x=0$

x	y
-3	5
-2	0
-1	-3
0	-4
1	-3
2	0
3	5

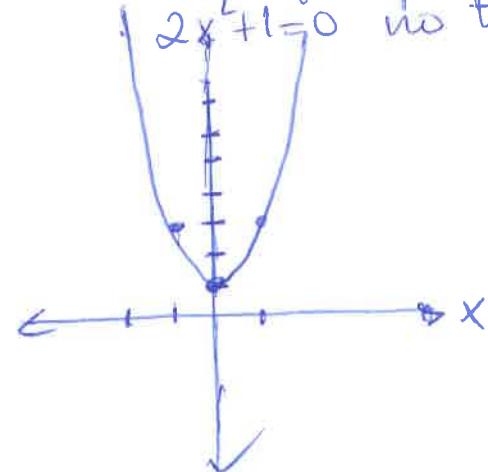
Vértice: $x=0$



$$g) y = 2x^2 + 1 \quad D = \mathbb{R}$$

V: $x=0$

x	y
-2	9
-1	3
0	1
1	3
2	9

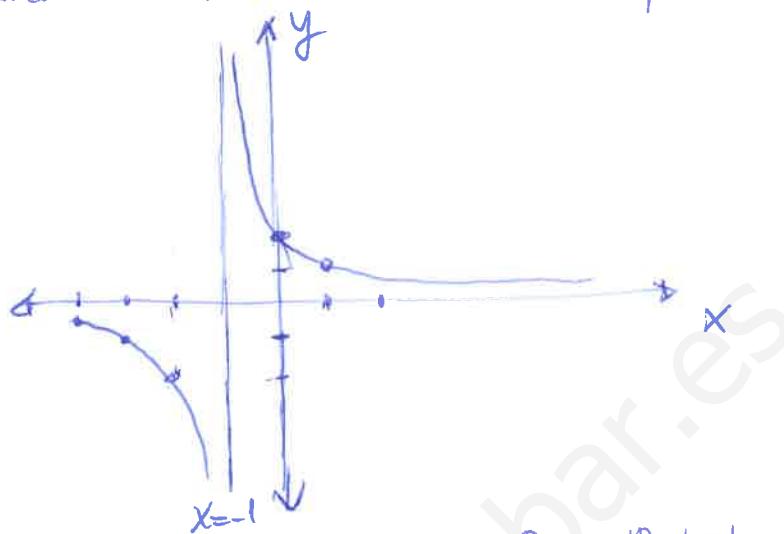


$$3.- \text{ a) } y = \frac{2}{x+1} \quad x+1=0 \Leftrightarrow x=-1 \Leftrightarrow D=\mathbb{R}-\{-1\}.$$

En $x=-1$ hay una asíntota vertical.

En $y=0$ hay una asíntota horizontal (Ej. 8)

x	y
-4	-2/3
-3	-1
-2	-2
0	2
1	1
2	2/3

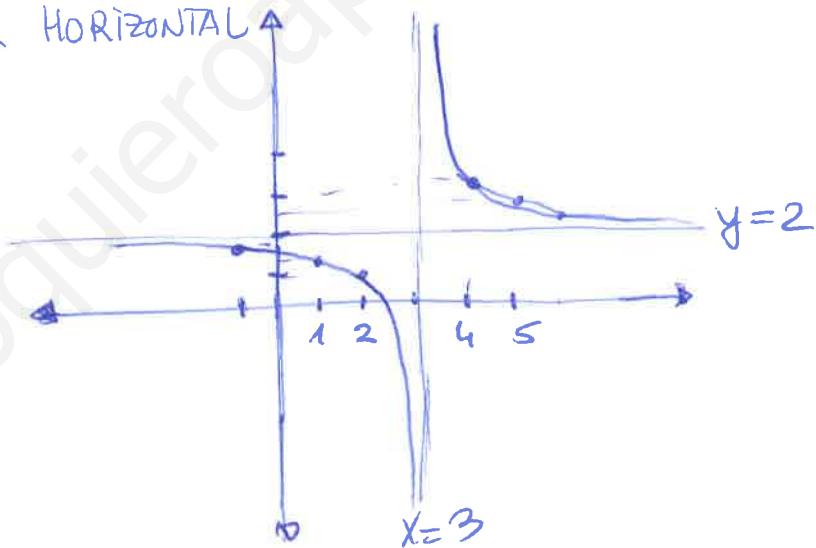


$$\text{b) } y = \frac{2x-5}{x-3} \quad x-3=0 \Leftrightarrow x=3 \quad \text{Dom}=\mathbb{R}-\{3\}.$$

$x=3 \Rightarrow$ Asíntota VERTICAL

$y=2 \Rightarrow$ Asíntota HORIZONTAL

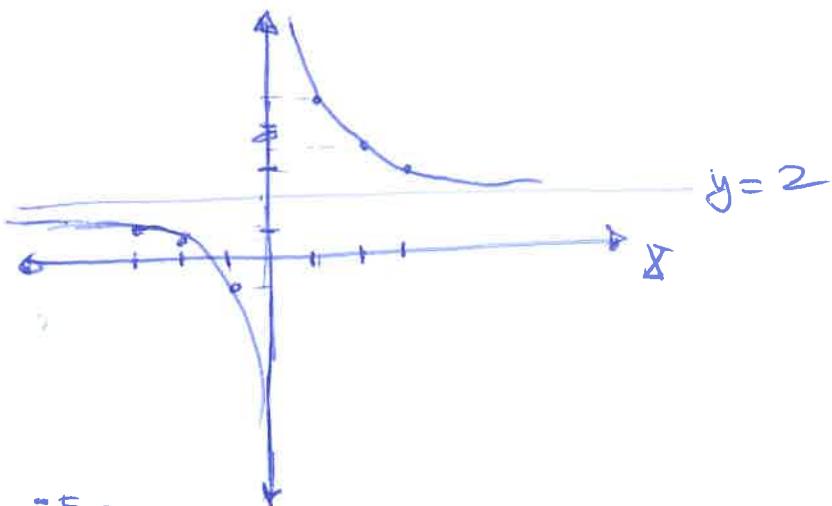
x	y
-1	7/4
0	5/3
1	3/2
2	1
4	3
6	7/3
5	5/2



$$\text{c) } y = \frac{2x+3}{x} \quad D=\mathbb{R}-\{0\}$$

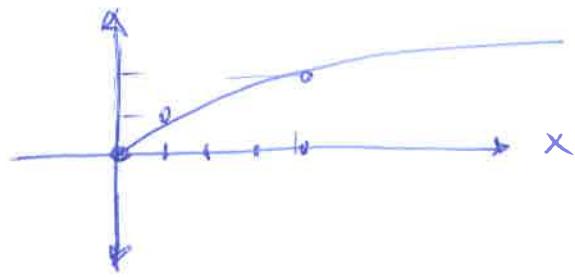
$x=0$ (Eje Y) asíntota Vertical
 $y=2$ Asíntota horizontal

x	y
-3	1
-2	1/2
-1	-1
1	5
2	7/2
3	3



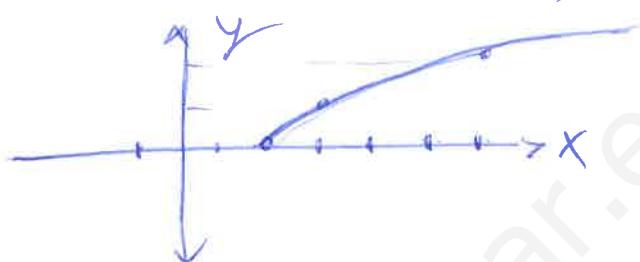
4.- a) $y = +\sqrt{x}$ $D = [0, +\infty)$

x	y
0	0
1	1
4	2
9	3



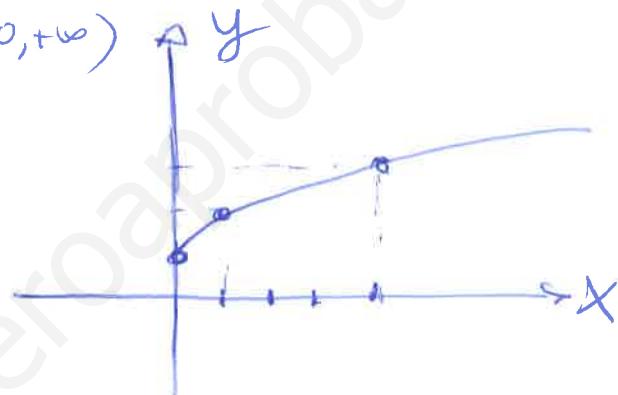
b) $y = +\sqrt{x-2}$ $x-2 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2$ $D = [2, +\infty)$

x	y
2	0
3	1
6	2

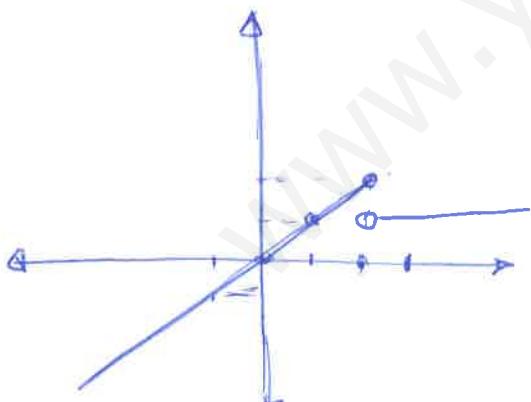


c) $y = 1 + \sqrt{x}$ $D = [0, +\infty)$

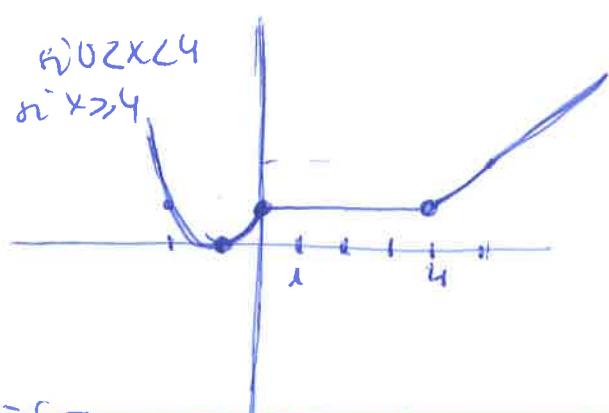
x	y
0	1
1	2
4	3
9	4



5.- a) $y = \begin{cases} x & \text{si } x \leq 2 \\ 1 & \text{si } x > 2 \end{cases}$



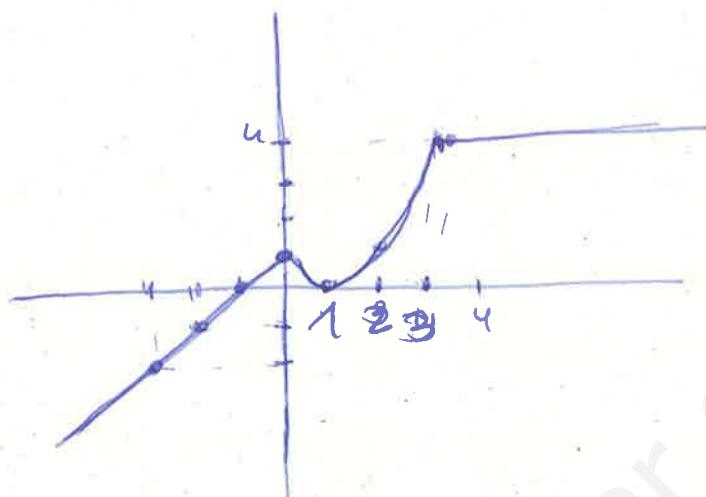
b) $y = \begin{cases} x^2 + 2x + 1 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 & 0 < x \leq 4 \\ x-3 & \text{si } x > 4 \end{cases}$ Vertice: $x = \frac{-2}{2} = -1$



c) $y = \begin{cases} x+1 & \text{si } x \in [-3, 0) \\ x^2 - 2x + 1 & \text{si } x \in [0, 3] \\ 4 & \text{si } x \in (3, +\infty) \end{cases}$

$-3 \leq x < 0$
 $0 \leq x \leq 3$
 $x = 1$
 $3 < x$

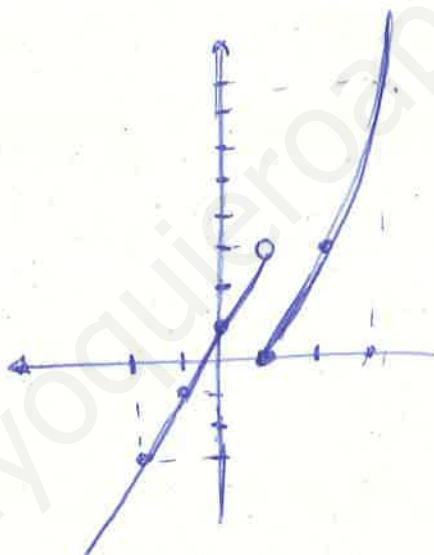
x	y
-3	-2
-2	-1
-1	0
0	1
1	0
2	1
3	4
4	4
5	4



d) $y = \begin{cases} 2x + 1 & \text{si } x < 1 \\ x^2 - 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

$x = 0$ (no pertenece a este intervalo)

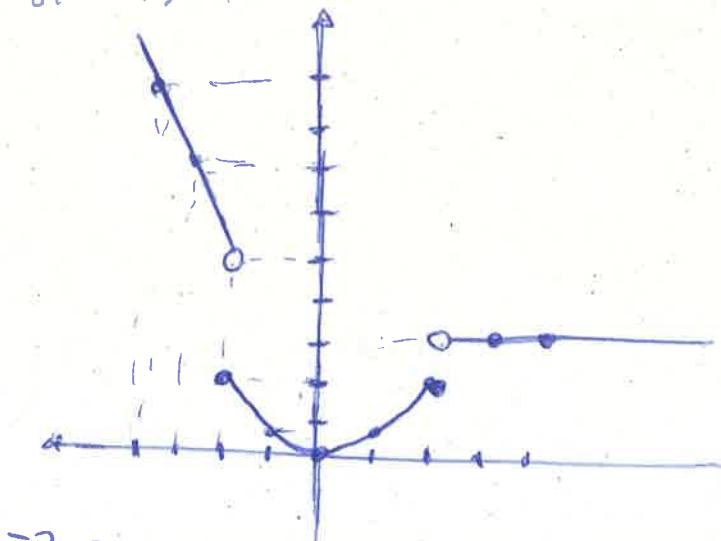
x	y
-2	-3
-1	-1
0	1
1	0
2	3
3	8



e) $y = \begin{cases} -2x + 1 & \text{si } x < -2 \\ x^2/2 & \text{si } -2 \leq x \leq 2 \\ 3 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

Vertice: $x=0$

x	y
-4	9
-3	7
-2	2
-1	1/2
0	0
1	1/2
2	2
3	3
4	3

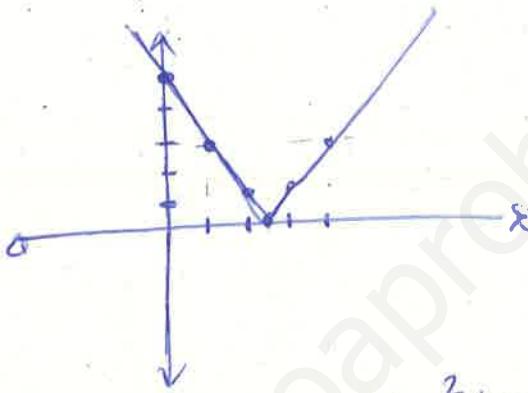


6- a) $y = |-3x| = \begin{cases} +3x & \text{si } -3x < 0 \Leftrightarrow x > 0 \\ -3x & \text{si } -3x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 0 \end{cases}$

x	y
-2	6
-1	3
0	0
1	3
2	6

b) $y = |2x-5| = \begin{cases} -2x+5 & \text{si } 2x-5 < 0 \quad (\text{si } x < 5/2) \\ 2x-5 & \text{si } 2x-5 \geq 0 \quad (\text{si } x \geq 5/2) \end{cases}$

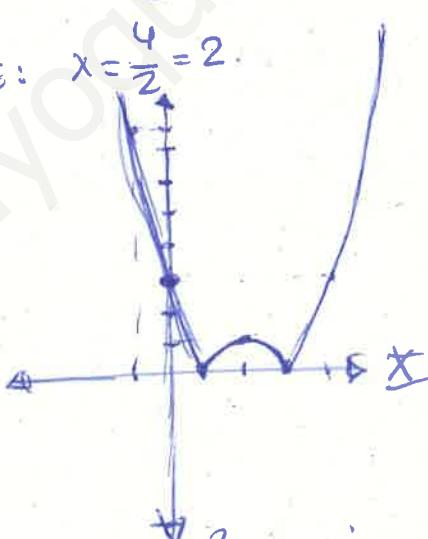
x	y
-1	7
0	5
1	3
2	1
2.5	0
3	1
4	3



c) $y = |x^2 - 4x + 3| = \begin{cases} -x^2 + 4x - 3 & \text{si } x^2 - 4x + 3 < 0 \quad (x \in (1, 3)) \\ x^2 - 4x + 3 & \text{si } x^2 - 4x + 3 \geq 0 \quad (x \in (-\infty, 1] \cup [3, +\infty)) \end{cases}$

VERTECE: $x = \frac{4}{2} = 2$

x	y
-1	8
0	3
1	0
2	1
3	0
4	3
5	8

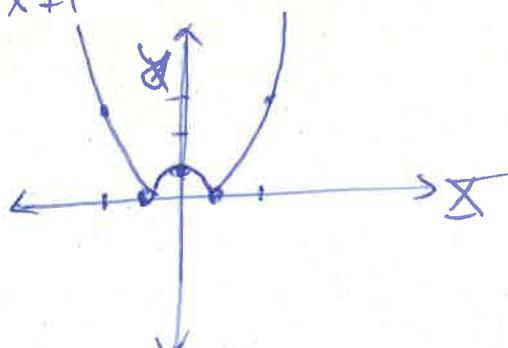


$$\begin{aligned} x^2 - 4x + 3 = 0 &\Leftrightarrow x = 1; 3. \\ (x-1)(x-3) < 0 &\Leftrightarrow x \in (1, 3) \\ (x-1)(x-3) \geq 0 &\Leftrightarrow \\ x \in (-\infty, 1] \cup [3, +\infty) & \end{aligned}$$

d) $y = |-x^2 + 1| = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } -x^2 + 1 < 0 \quad (\text{si } x \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)) \\ -x^2 + 1 & \text{si } -x^2 + 1 \geq 0 \quad (\text{si } x \in [-1, 1]) \end{cases}$

$\cup x=0$

x	y
-2	3
-1	0
0	1
1	0
2	3



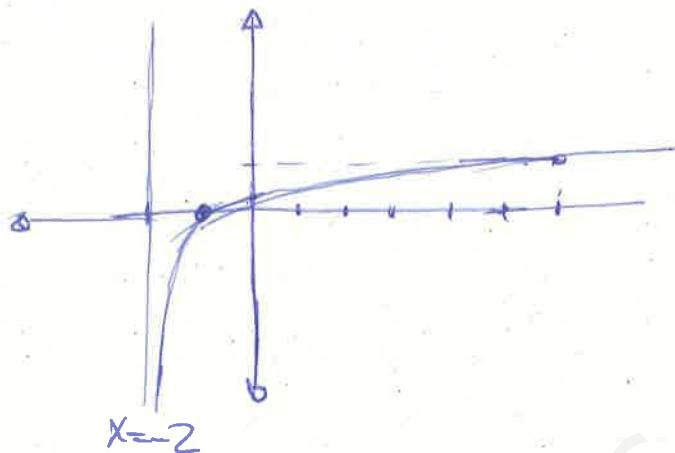
7-

a) $y = \log(x+2)$

$$x+2 > 0 \Leftrightarrow x > -2 \quad D = (-2, +\infty)$$

x	y
-1	0
0	$\log 2 = 0.3010$
8	$\log 10 = 1$

En $x = -2$ hay una asíntota vertical.

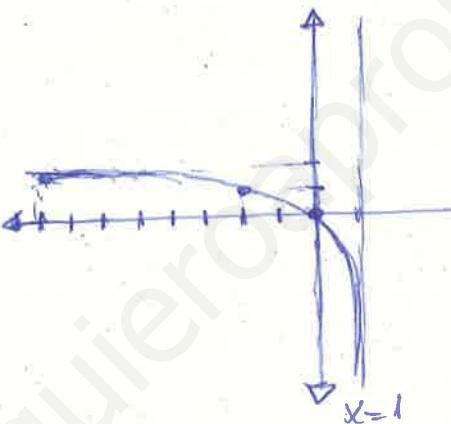


b) $y = \log_3(-x+1)$

$$-x+1 > 0 \quad -x > -1 \quad x < 1$$

$$\text{Dom} = (-\infty, 1)$$

x	y
-8	$\log_3 9 = 2$
-2	$\log_3 3 = 1$
0	$\log_3 1 = 0$
0.5	$\log_3 0.5 = -0.63$
0.9	$\log_3 0.1 = -2.1$

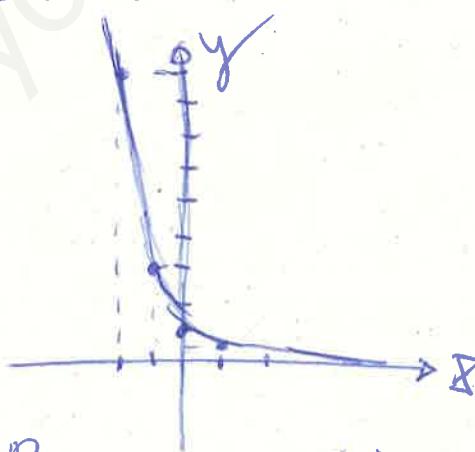


Asíntota Vertical
 $x=1$

c) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

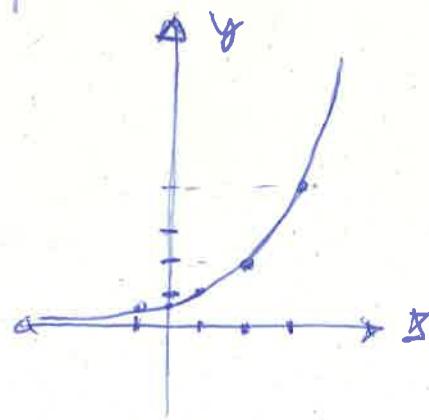
$$\text{Dom} = \mathbb{R}$$

x	y
-2	1/9
-1	1/3
0	1
1	1/3
2	1/9



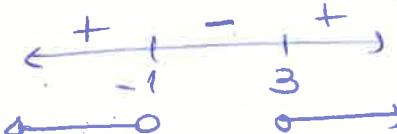
d) $y = 2^{x-1}$ $D = \mathbb{R}$

x	y
-1	1/4
0	1/2
1	1
2	2
3	4



8.- $f(x) = \log x$ $g(x) = x^2 + 2x - 3$

a) $h(x) = f(g(x)) = f(x^2 + 2x - 3) = \log(x^2 + 2x - 3)$

~~b)~~ $x^2 + 2x - 3 > 0$ Raíces: $x^2 + 2x - 3 = 0$
 $(x-1)(x+3) > 0$ $x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \frac{-2 \pm 4}{2}$ $\begin{array}{c} 1 \\[-1ex] -3 \end{array}$

 $\text{Dom} = (-\infty, -3) \cup (-1, +\infty)$.

b) $g \circ f(x) = g(f(x)) = g(\log x) = \log^2 x + 2 \log x - 3$.

9.- a) $\text{Dom} = \mathbb{R} - \{1\}$ Estrictamente creciente en todo su dominio. No existen extremos relativos
 $\text{Im } f = \mathbb{R} - \{1\}$

Asintota vertical: $x = 1$

Asintota horizontal: $y = 1$

b) $\text{Dom} = \mathbb{R}$. Creciente en $(-\infty, 0)$
 $\text{Im } f = (0, 2)$ Decreciente en $(0, +\infty)$
 Existe un máximo relativo en el punto $x=0$ cuyas coordenadas son $(0, 2)$.
 El eje \mathcal{Z} ($y=0$) es una asintota horizontal.

d) $\text{Dom}(f) = [-1, +\infty)$ Estrictamente creciente en todo su dominio.
 $\text{Im } (f) = [0, +\infty)$
 No presenta asintotas ni extremos relativos.

c) $\text{Dom} = \mathbb{R}$ Decreciente en $(-\infty, 1) \cup (2, 3)$.
 $\text{Im } f = [0, +\infty)$ Creciente en $(1, 2) \cup (3, +\infty)$
 No presenta asintotas. Tiene un máximo relativo en el punto $(2, 1)$.

10.- (I) c) (II) a)

(III) no corresponde a ninguna

(IV) d) (V) b)