EJERCICIOS DE GEOMETRÍA ANALÍTICA PLANA

1. Tres vértices consecutivos de un paralelogramo son los puntos de coordenadas (1, 1); (6, 6) y (3, 9). Halla las coordenadas del cuarto vértice. ¿Es un rectángulo?

2. Dos vértices consecutivos de un cuadrado son los puntos (3,0) y (5,4). Halla las coordenadas de los otros vértices.

3. Un paralelogramo tiene tres vértices en los puntos (2,3); (5,1) y (4,0). Halla las coordenadas del cuarto vértice.

4. Halla, en todas las formas que conozcas, las ecuaciones de las rectas en cada uno de los siguientes casos:
   a) Pasa por el punto A(-2, 2) y tiene por vector director $\vec{u} = (2, -3)$.
   b) Pasa por los puntos P(4, 3) y Q(-2, 4).
   c) Pasa por el punto (3, -1) y tiene de pendiente m=-2.
   d) Pasa por el origen de coordenadas y tiene 30º de inclinación.
   e) Pasa por el punto (3, -2) y es paralela a la bisectriz del primer cuadrante.

5. Dada la recta de ecuación 2x-6y+3= 0, escríbela en forma paramétrica, continua y explícita.

6. Calcula el valor de a para que la recta de ecuación ax+3y-9=0:
   a) Pase por el punto (3, 1).
   b) Tenga de pendiente m=-1.
   c) Uno de sus vectores de dirección sea $\vec{v} = (6, -4)$.
   d) Un vector normal a la misma sea $\vec{n} = (-2, -3)$

7. Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto de intersección de las rectas *r: x-2y-4=0, s: y=4x-5* y es paralela a la recta 3x+2y=0.

8. Las ecuaciones de dos rectas son $r: 3x - 5y + 2 = 0$ y $s: 6x + \boldsymbol{m}y = 1$. Halla el valor de $\boldsymbol{m}$ en cada caso para que:
   a) Las rectas sean paralelas.
   b) Las rectas sean perpendiculares.
   c) Formen un ángulo de 45º.

9. Estudia razonadamente la posición relativa de las rectas r y s en cada caso y calcula también el ángulo que forman:

   $a)\ r: \begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = -10t - 3 \end{cases}$ $\qquad s: 5x + y - 2 = 0$

   $b)\ r: \dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y+1}{2}$ $\qquad s: 3x + 2y - 2 = 0$

   $c)\ r: y = 2x - 5$ $\qquad s: y = x + 4$

   $d)\ r: x - y = 2$ $\qquad s: (x, y) = (1, 2) + t(3, 3)$

10. Halla la ecuación de la recta mediatriz del segmento de extremos A(1, 2) y B(5, 2).

11. Dada la recta r: $3x + 2y + 2 = 0$ y un punto exterior a ella P(-2, 0); calcula:
    a) La distancia del punto P a la recta r.
    b) El punto P' simétrico de P respecto de r.

12. Halla el perímetro y el área del triángulo de vértices A(5,3); B(6, 2) y C(3, 1).

13. La recta de ecuación $4x - 3y = 54$ es mediatriz del segmento AB. Sabiendo que A tiene de coordenadas (1,0), halla las coordenadas de B.

14. Halla las ecuaciones de las rectas $3x + 4y - 12 = 0$ que disten de ella 3 unidades de longitud.

15. Halla la ecuación de la recta perpendicular a la recta $4x + 3y - 12 = 0$ que diste 5 unidades del origen de coordenadas.

16. Un triángulo rectángulo en A tiene dos vértices en los puntos A(1,3) y C(3,0). Halla el vértice B sabiendo que está situado en la recta $2x + y + 2 = 0$. Halla también el área del triángulo.

17. Un triángulo isósceles tiene por lado desigual el segmento que une los puntos (1, -3) y (3, 1). El otro vértice está situado sobre la recta $x + y + 3 = 0$. Halla las coordenadas de este vértice y el área del triángulo.

18. Un triángulo ABC tiene dos vértices en los puntos A(1, -3) y B(2, 1). El tercer vértice está en la recta $x + y + 3 = 0$, y el área del triángulo es de 6 unidades cuadradas. Halla las coordenadas del tercer vértice.

19. Halla la ecuación del haz de rectas de centro P(2,-4). Encuentra la ecuación de la recta de dicho haz que forma un ángulo de 60º con el eje de abcisas.

20. Halla el simétrico del punto P(1, 1) respecto de la recta $r: \dfrac{x-4}{2} = y$

21. Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto P(1, 3), que forma 45º con la recta de ecuación $2x - y - 9 = 0$. (Hay dos soluciones)

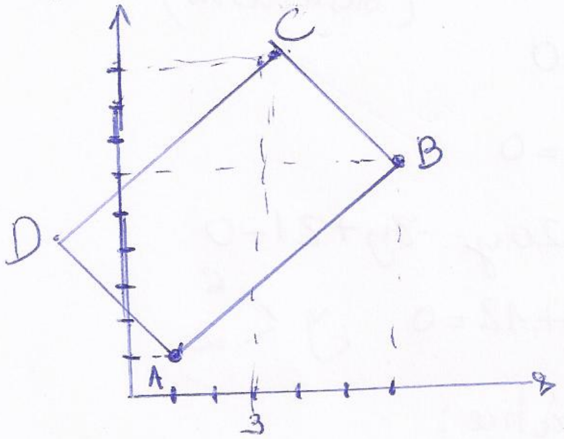
22. Halla la ecuación de la recta paralela a la recta $r: x + 2y - 2 = 0$ que dista de ella $2\sqrt{5}$ unidades. (Hay dos soluciones)

23. Determina qué tipo de triángulo es el triángulo ABC, sabiendo que A(3,5); B(6, 9) y C(0, 9). Halla su perímetro y su área.

EJERCICIOS DE GEOMETRÍA 1º BACHILLERATO

(soluciones)

1.-



A(1,1) B(6,6) C(3,9) consecutivos.

Entonces, sea D el cuarto vértice. Sup. que D(x,y)

Por tanto

$\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$

$(1,1)-(6,6) = (x,y)-(3,9)$

$(-5,-5) = (x-3, y-9)$

$-5 = x-3 \Rightarrow x = -2$

$-5 = y-9 \Rightarrow y = 4$ $\boxed{D(-2,4)}$

Para determinar si es un rectángulo o no, calculamos el ángulo en $\hat{B}$; es decir, el ángulo que forman los vectores $\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{BC}$:

$\overrightarrow{BA} = (-5,-5)$ $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = (-5)\cdot(-3) + (-5)\cdot 3 = 15-15 = 0.$

$\overrightarrow{BC} = (-3, 3)$ Por tanto, ambos vectores son $\perp$.

El ángulo en $\hat{B} = 90°$ y por tratarse de un paralelogramo es un rectángulo.

2.- A(3,0) B(5,4) El segmento $\overline{AB}$ es el lado del cuadrado. Sea C el vértice siguiente a B.

C(x,y).

Se verifica que: $\left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{BC} \text{ (el ángulo es de } 90°) \text{ (I)} \\ |\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BC}| \text{ (los lados son iguales) (II)} \end{array} \right.$

(I) $\overrightarrow{AB} = (2,4)$ $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \Rightarrow 2(x-5) + 4(y-4) = 0$

$\overrightarrow{BC} = (x-5, y-4)$ $2x + 4y - 26 = 0$

$x + 2y - 13 = 0 \longrightarrow \boxed{x = 13 - 2y \cdot (1)}$

(II) $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{2^2+4^2} = \sqrt{20}$
$|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{(x-5)^2+(y-4)^2}$ } Igualando sería:

$(x-5)^2 + (y-4)^2 = 20 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2-10x+25+y^2-8y+16-20=0$

$x^2+y^2-10x-8y+21=0$

Resolvemos $\begin{cases} (I) & x=13-2y \\ (II) & x^2+y^2-10x-8y+21=0 \end{cases}$ (Sustitución)

$(13-2y)^2+y^2-10(13-2y)-8y+21=0$

$169+4y^2-52y+y^2-130+20y-8y+21=0$

$5y^2-40y+60=0 \longrightarrow y^2-8y+12=0 \quad y< {6 \atop 2}$

Hay dos soluciones para el tercer vértice:

C: Si $y=6 \Rightarrow x=13-2\cdot 6=1 \Rightarrow C=(1,6)$

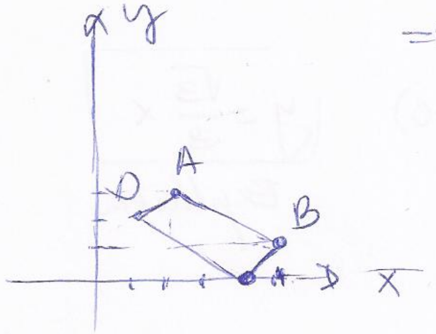
C': Si $y=2 \Rightarrow x=13-2\cdot 2=9 \Rightarrow C'=(9,2)$

Se pueden formar dos cuadrados. Solo queda calcular el cuarto vértice en cualquier caso:

- Cuadrado ABCD: $D(x,y)$ / $\vec{BA}=\vec{CD}$
  $(-2,-4)=(x-1,y-6)$ $\quad x=-1 \quad y=2$
  $D(-1,2)$

- Cuadrado ABC'D': $D'(x,y)$ / $\vec{BA}=\vec{C'D'} \Leftrightarrow (-2,-4)=(x-9,y-2)$
  $x=7 \quad y=-2$
  $D'(7,-2)$

③ $A(2,3)$ $B(5,1)$ $C(4,0)$ Sea $D(x,y)$ el 4º vértice $\Rightarrow$



$\Rightarrow \vec{AB} = \vec{DC} \Leftrightarrow (3,-2) = (4-x,-y)$

$4-x=3 \rightarrow 1=x$ $\quad D(1,2)$

$-2=-y \rightarrow 2=y$

4.- a) $\left.\begin{array}{l} A(-2,2) \\ \vec{u}(2,-3) \end{array}\right\} r:$

VECTORIAL: $(x,y)-(-2,2)=t\cdot(2,-3)\ ;\ t\in\mathbb{R}$

Paramétrica: $\begin{cases} x=-2+2t \\ y=2-3t \end{cases}, t\in\mathbb{R}$

Continua:

$\frac{x+2}{2}=\frac{y-2}{-3}$ $\rightarrow$

Implícita

$-3x-6=2y-4$

$r: -3x-2y-2=0$ $\rightarrow$

Explícita

$3x+2y+2=0$

$y=\frac{-3x+2}{2}$

$\boxed{r: y=\frac{-3}{2}x-1}$

b) $P(4,3)$ y $Q(-2,4)$.

$\vec{PQ}=(-6,1)$

* Vectorial: $(x,y)-(4,3)=t(-6,1)\ ;\ t\in\mathbb{R}$
* Paramétrica: $r: \begin{cases} x=4-6t \\ y=3+t \end{cases}, t\in\mathbb{R}$

• Continua

$\frac{x-4}{-6}=\frac{y-3}{1}$

Implícita

$x-4=-6y+18$

$\boxed{r: x+6y-22=0}$

Explícita

$\boxed{r: y=\frac{-1}{6}x+\frac{22}{6}}$

c) $\left.\begin{array}{l} P(3,-1) \\ m=-2 \end{array}\right\}$ Punto-pendiente: $y+1=-2(x-3)$

Explícita: $y=-2x+6-1$ $\quad \boxed{y=-2x+5}$

Implícita: $\boxed{2x+y-5=0}$

Vector de dirección $(-1,2)$ (ó también $(1,-2)=(1,m)$)

Paramétricas: $\begin{cases} x=3-t \\ y=-1+2t \end{cases}$ $t\in\mathbb{R}$

Vectorial:

$(x,y)-(3,-1)=t(-1,2)$

$t\in\mathbb{R}$

d) $O(0,0)$ punto

$\alpha = 30° \rightarrow m = tg\,30° = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Ecuación punto-pendiente: $y - 0 = \frac{\sqrt{3}}{3}(x-0)$ $\boxed{y = \frac{\sqrt{3}}{3}x}$ Explícita

$3y = \sqrt{3}x \Rightarrow \boxed{\sqrt{3}x - 3y = 0}$ Implícita

Vector de dirección $\vec{u}(3, \sqrt{3})$

Paramétricas: $\begin{cases} x = 3t \\ y = \sqrt{3}t \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$ $(x,y) = t(3, \sqrt{3})$ $t \in \mathbb{R}$ vectorial.

e) $P(3,-2)$

Paralela a la recta $y = x$ (bisectriz del primer cuadrante)

Pendiente $\boxed{m = 1}$

$y + 2 = 1 \cdot (x - 3) \Rightarrow y + 2 = x - 3 \Rightarrow \boxed{-x + y + 5 = 0}$ Implícita.

$\boxed{y = x - 5}$ explícita.

Vector director: $\vec{u}(1,1)$ $\begin{cases} x = 3 + t \\ y = -2 + t \end{cases}$; $t \in \mathbb{R}$ Paramétricas

$(x,y) - (3,-2) = t \cdot (1,1)$
vectorial

5.- $2x - 6y + 3 = 0$

obtengamos un vector director: $\vec{u}(6,2)$ o mejor $\boxed{\vec{u}(3,1)}$

si $x = 0 \Rightarrow -6y + 3 = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{2}$ $\boxed{\text{Punto } (0, 1/2)}$

$\begin{cases} x = 3t \\ y = \frac{1}{2} + t \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$ Paramétrica

$\boxed{\frac{x}{3} = \frac{y - 1/2}{1}}$ Continua

$y = \frac{2}{6}x + \frac{3}{6}$

$\boxed{y = \frac{1}{3}x + \frac{1}{2}}$ Explícita

Otra forma es obtener primero la explícita despejando $\boxed{y = \frac{1}{3}x + \frac{1}{2}}$

Entonces, llamando $x = t$, obtenemos $\begin{cases} x = t \\ y = \frac{1}{3}t + \frac{1}{2} \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$ Paramétricas

Continua $\frac{x}{1} = \frac{y - 1/2}{1/3}$

6.- $ax+3y-9=0$

a) $(3,1)$ punto que pasa por esta recta. Deberá cumplir la ecuación:

$a\cdot 3+3\cdot 1-9=0 \Rightarrow 3a=9-3$ $\boxed{a=2}$ $\boxed{2x+3y-9=0}$

b) $m=-1$

$y=\underbrace{\frac{-a}{3}}_{m}x+\frac{9}{3}$ $\quad -\frac{a}{3}=-1 \Rightarrow \boxed{a=3}$

$\boxed{3x+3y-9=0}$

c) $(6,-4)$ debe ser directamente proporcional a $(3,-a) \Rightarrow$

$\frac{6}{3}=\frac{-4}{-a} \Rightarrow \boxed{a=2}$

d) $\vec{n}(-2,-3)$ vector normal: debe ser directamente proporcional a

$(a,3) \Rightarrow \quad \frac{-2}{a}=\frac{-3}{3} \Rightarrow \boxed{a=2}$

7.- Calculemos previamente P; punto de intersección de las rectas

$r: x-2y-4=0$
$s: y=4x-5$
(Sustitución) $\Rightarrow x-2(4x-5)-4=0$

$x-8x+10-4=0$

$-7x+6=0$

$\boxed{x=\frac{6}{7},\ y=\frac{-11}{7}}$

$y=4\cdot\frac{6}{7}-5=\frac{24-35}{7}=\frac{-11}{7}$

$P\left(\frac{6}{7},\frac{-11}{7}\right)$

• recta que pasa por $P\left(\frac{6}{7},-\frac{11}{7}\right)$ y es paralela a $3x+2y=0$.

Por paralelismo, la recta que se pide debe tener la forma siguiente:

$3x+2y+C=0$ y como queremos que pase por $P \Rightarrow$

$\Rightarrow 3\cdot\frac{6}{7}+2\cdot\frac{-11}{7}+C=0 \Rightarrow \frac{18-22}{7}+C=0 \Rightarrow \boxed{C=\frac{4}{7}}$

Recta: $\boxed{3x+2y+\frac{4}{7}=0}$ ó $\boxed{21x+14y+4=0}$

---

otra forma de hallarla es obtener la pendiente $\underline{m}$ de $3x+2y=0$.

$y=\frac{-3}{2}x$ $\quad m=\frac{-3}{2}$. Por paralelismo las pendientes son iguales y con ello:

$y+\frac{11}{7}=\frac{-3}{2}\left(x-\frac{6}{7}\right) \Rightarrow y+\frac{11}{7}=\frac{-3x}{2}+\frac{18}{14} \Rightarrow 14y+22=-21x+18$

$\boxed{21x+14y+4=0}$

8.- $r: 3x-5y+2=0$

$s: 6x+my-1=0$

a) $r \parallel s \Rightarrow \frac{3}{6} = \frac{-5}{m} \Rightarrow \boxed{m=-10}$

b) $r \perp s \Leftrightarrow \vec{n_r} \perp \vec{n_s} \Leftrightarrow (3,-5)\cdot(6,m)=0 \Rightarrow 18-5m=0$

$\boxed{m=\frac{18}{5}}$

c) Formen un ángulo de 45° $\Leftrightarrow (\widehat{\vec{u_r},\vec{u_s}}) = 45°$

Es más fácil usar la fórmula que relaciona las pendientes de las rectas con la tangente de 45°:

$$tg\, 45° = \left|\frac{m_r - m_s}{1+m_r m_s}\right| \Rightarrow 1 = \left|\frac{\frac{3}{5}+\frac{m}{6}}{1-\frac{3}{5}\cdot\frac{m}{6}}\right| \Rightarrow \left|1-\frac{3m}{30}\right| = \left|\frac{3}{5}+\frac{m}{6}\right|$$

$m_r = \frac{3}{5}$

$m_s = \frac{-m}{6}$

$$\Rightarrow \left|\frac{30-3m}{30}\right| = \left|\frac{18+5m}{30}\right| \Rightarrow |30-3m| = |18+5m| \Rightarrow \begin{cases} 30-3m=-18-5m \\ \text{ó} \\ 30-3m=18+5m \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2m=-48 \Rightarrow \boxed{m=-24} \\ 8m=12 \Rightarrow \boxed{m=\frac{3}{2}} \end{cases}$$ Hay 2 soluciones

9.- a) $r: \begin{cases} x=2t+1 \\ y=-10t-3 \end{cases}$ $\quad s: 5x+y-2=0$ $\quad \vec{u_r}(2,-10)$ $\quad \vec{u_s}(-1,5)$

$\vec{u_r}$ y $\vec{u_s}$ son proporcionales. Entonces r y s, o bien son paralelas, o bien son coincidentes. Para determinar la posición tomamos un punto cualquiera de r; $P(1,-3)$ y vemos si también pertenece a s:

$5\cdot1+(-3)-2=0$ ✓ por tanto r y s son coincidentes.

El ángulo que forman es 0°

O también:

$5(2t+1)+(-10t-3)-2=0$

$10t+5-10t-3-2=0$

$0=0$ Identidad

Infinitas soluciones

Ambas rectas son coincidentes.

b) $r: \frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{2}$ $\quad s: 3x+2y-2=0$

$\vec{u_r}(3,2)$ $\quad \vec{u_s}(-2,3)$ $\quad$ No son proporcionales, luego r y s son secantes.

$(\widehat{r,s}) \Rightarrow \cos(\widehat{r,s}) = \frac{|\vec{u_r}\cdot\vec{u_s}|}{|\vec{u_r}|\cdot|\vec{u_s}|} = \frac{3\cdot(-2)+2\cdot 3}{\sqrt{9+4}\cdot\sqrt{4+9}} = \frac{0}{13} = 0$

$(\widehat{r,s}) = 90°$. r y s son perpendiculares

c) $r: y = 2x-5$ $\quad m_r = 2$ $\quad$ Al tener pendientes distintas las rectas son secantes.

$s: y = x+4$ $\quad m_s = 1$

$(\widehat{r,s}) \Rightarrow tg(\widehat{r,s}) = \frac{|m_r - m_s|}{|1+m_r m_s|} = \frac{|2-1|}{|1+2\cdot 1|} = \frac{1}{3}$

$(\widehat{r,s}) = arc\ tg\left(\frac{1}{3}\right) =$

---

d) $r: x-y=2$

$s: (x,y) = (1,2)+t(3,3) \Rightarrow \begin{cases} x = 1+3t \\ y = 2+3t \end{cases}$

$(1+3t)-(2+3t)-2=0$ $\quad$ No tiene solución

$1+\cancel{3t}-2-\cancel{3t}-2=0$ $\quad$ Por tanto r y s son paralelas

$-3=0$ $\quad (\widehat{r,s}) = 0°$

Ecuación incompatible

10.- Sea r: mediatriz del segmento $\overline{AB}$; siendo $A(1,2)$ y $B(5,2)$.

r es la recta perpendicular al segmento $\overline{AB}$ en su punto medio M.

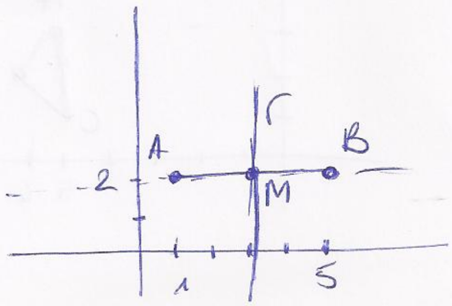
$M = \left(\frac{1+5}{2}, \frac{2+2}{2}\right) = (3,2)$.

$\overline{AB} \to$ Recta que pasa por A y B: $\vec{AB} = (4,0)$ $\quad \frac{x-1}{4} = \frac{y-2}{0}$

$y-2=0 \Rightarrow \vec{n}(0,1)$

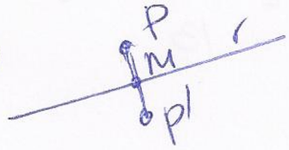
El vector normal $\vec{n}(0,1)$ de la recta $y-2=0$ es un vector de dirección de la mediatriz que pretendemos hallar, luego:

$r\begin{cases} M(3,2) \\ \vec{u}(0,1) \end{cases}$ $\quad \frac{x-3}{0} = \frac{y-2}{1} \Rightarrow \boxed{x-3=0}$



11.- $r: 3x+2y+2=0 \qquad P(-2,0)$

a) $d(P,r) = \dfrac{|3\cdot(-2)+2\cdot 0+2|}{\sqrt{3^2+2^2}} = \dfrac{|-4|}{\sqrt{13}} = \dfrac{4}{\sqrt{13}}$ unidades.

b) 

Sea $P'(x,y)$ el punto simétrico a P respecto de la recta r.

Calculemos "s", recta perpendicular a r que pasa por P; esta recta contiene al punto P y al P'.

$s: \begin{cases} P(-2,0) \\ \vec{u}(3,2) \end{cases} \qquad \dfrac{x+2}{3} = \dfrac{y}{2}$

$2x+4 = 3y$

$\boxed{s: 2x-3y+4=0}$

r y s se cortan en un punto M que equidista de P y P':

$\left.\begin{array}{l} r: 3x+2y+2=0 \\ s: 2x-3y+4=0 \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{Reducción}} \begin{array}{r} 9x+6y+6=0 \\ 4x-6y+8=0 \\ \hline 13x+14=0 \end{array}$

$\begin{array}{r} 6x+4y+4=0 \\ -6x+9y-12=0 \\ \hline 13y-8=0 \end{array}$

$\boxed{x = -\dfrac{14}{13} \qquad y = \dfrac{8}{13}}$

$M\left(-\dfrac{14}{13}, \dfrac{8}{13}\right)$

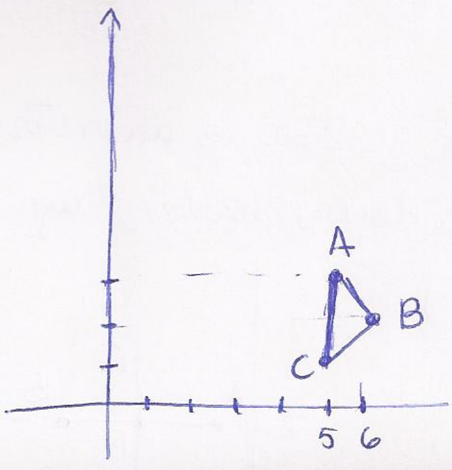
M es el punto medio de $\overline{PP'} \Rightarrow \left(\dfrac{x-2}{2}, \dfrac{y+0}{2}\right) = \left(-\dfrac{14}{13}, \dfrac{8}{13}\right)$

$x = \dfrac{2}{13}$

$y = \dfrac{16}{13}$

$\boxed{P'\left(\dfrac{2}{13}, \dfrac{16}{13}\right)}$

12.- $A(5,3)$; $B(6,2)$; $C(5,1)$



Base: $|\overline{AC}| = b$.

$\vec{AC} = (0,-2) \quad |\vec{AC}| = \sqrt{0^2+(-2)^2} = 2.$

Altura: $h = d(B,r)$; r = recta que pasa por $\overline{AC}$

Recta AC: $\dfrac{x-5}{0} = \dfrac{y-3}{-2} \Rightarrow -2x+10=0.$

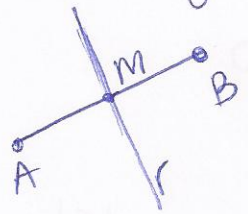
$h = d(B,r) = \dfrac{|-2\cdot 6+10|}{\sqrt{(-2)^2+0^2}} = \dfrac{2}{2} = 1.$

$\underline{\text{Área} = \dfrac{b\cdot h}{2} = \dfrac{2\cdot 1}{2} = 1\ u^2}$

Perímetro: $d(A,C) + d(C,B) + d(A,B) = |\vec{AC}| + |\vec{CB}| + |\vec{AB}| =$

$= 2 + \sqrt{1^2+1^2} + \sqrt{1^2+(-1)^2} = 2+\sqrt{2}+\sqrt{2} = \boxed{2+2\sqrt{2}\ u.}$

13.- $r: 4x-3y=54 \rightarrow$ mediatriz de $\overline{AB}$. $A(1,0)$. $B(x,y)$



Sea s: recta perpendicular a r que pasa por A y B: $\begin{cases} A(1,0) \\ \vec{u}(4,-3) \end{cases}$

$s: \begin{cases} x = 1+4t \\ y = -3t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$

Hallemos $M = r \cap s$ (intersección de r y s) $\Rightarrow$

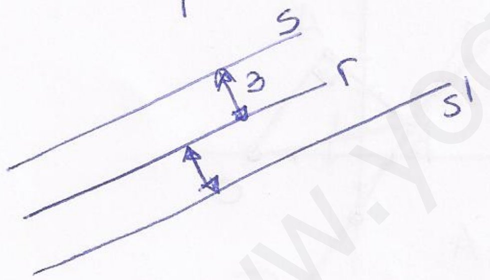
$4(1+4t) - 3(-3t) - 54 = 0$

$4+16t+9t-54=0 \Rightarrow 25t = 50 \quad \boxed{t=2} \quad M=(9,-6)$.

M es el punto medio de A y $B \rightarrow (9,-6) = \left(\frac{1+x}{2}, \frac{0+y}{2}\right) \quad \begin{matrix} x=17 \\ y=-12 \end{matrix}$

$\boxed{B(17,-12)}$

14.- paralelas a $3x+4y-12=0$ que disten de ella 3 unidades:



Tanto s como s' han de tener la forma siguiente: $3x+4y+C=0$

$3 = d(r,s) = d(r,s') = d(P,s) = d(P,s')$

siendo P un punto de r: $\boxed{\begin{matrix} x=0 \\ y=3 \end{matrix}}$ $P(0,3)$

$3 = d(P,s) = \dfrac{|3\cdot 0+4\cdot 3+C|}{\sqrt{3^2+4^2}}$

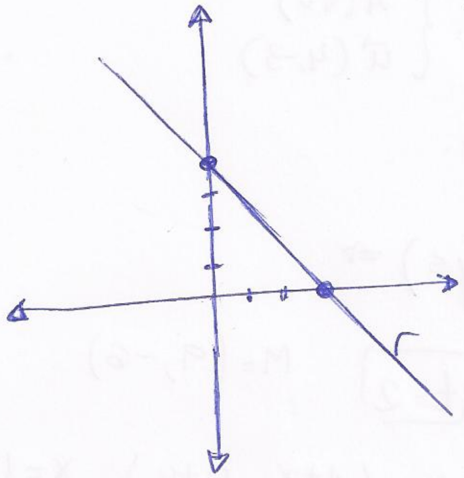
$3 = \dfrac{|12+C|}{5} \Rightarrow |12+C| = 15 \Rightarrow \begin{cases} 12+C=15 & \boxed{C=3} \rightarrow s \\ 12+C=-15 & \boxed{C=-27} \ s' \end{cases}$

$\boxed{\begin{matrix} s: 3x+4y+3=0 \\ s': 3x+4y-27=0 \end{matrix}}$

15.- $r: 4x+3y-12=0$

s: Recta perpendicular a r que diste de $(0,0)$ 5 unidades.

El vector normal a r $\vec{n_r}=(4,3)$ ha de ser un vector de dirección de s: $\vec{u_s}\,(4,3) \rightarrow \vec{n_s}\,(-3,4)$



$s: -3x+4y+C=0.$

$d(0,s)=5$

$$5=\frac{|-3\cdot 0+4\cdot 0+C|}{\sqrt{(-3)^2+4^2}} \Rightarrow 5=\frac{|C|}{5}$$

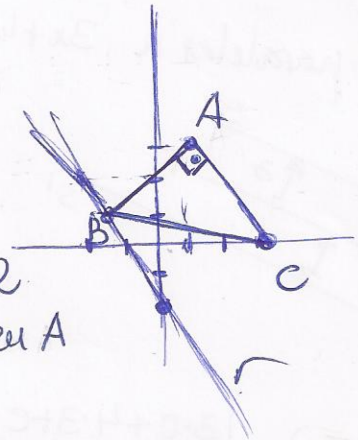
$$|C|=25 \Rightarrow \boxed{\begin{matrix} C=25 \\ C=-25 \end{matrix}}$$

Hay dos soluciones:

$$\boxed{\begin{matrix} s: -3x+4y+25=0 \\ s': -3x+4y-25=0 \end{matrix}}$$

16.- $A(1,3)$ $\quad B\in r: 2x+y+2=0$

$C(3,0)$ $\quad r: y=-2x-2$



$B=(t,-2t-2);\ t\in\mathbb{R}$

Como el triángulo ha de ser rectángulo en A debe verificarse que: $\vec{AB}\perp\vec{AC}$

$$\left.\begin{matrix} \vec{AB}=(t,-2t-2)-(1,3)=(t-1,-2t-5) \\ \vec{AC}=(3,0)-(1,3)=(2,-3) \end{matrix}\right\} \vec{AB}\cdot\vec{AC}=0 \Leftrightarrow 2t-2+6t+15=0$$

$$8t+13=0 \Rightarrow t=\frac{-13}{8}$$

Por tanto $\boxed{B\left(-\frac{13}{8},\frac{10}{8}\right)}$

Otra manera de hallar el vértice B habría sido suponer $B(x,y)$ e imponer la misma condición: $\vec{AB}\cdot\vec{AC}=0$, de la que:

$(x-1,y-3)\cdot(2,-3)=0 \Rightarrow 2x-2-3y+9=0 \Rightarrow 2x-3y+7=0$

Resolviendo el sistema formado por esta ecuación y la recta $r \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{rcases} 2x-3y+7=0 \\ r: 2x+y+2=0 \end{rcases}$ $x=\frac{-13}{8}$; $y=\frac{5}{4}$ $B\left(-\frac{13}{8}, \frac{5}{4}\right)$

"$10/8$"

Área del triángulo. Por tratarse de un triángulo ~~rectángulo~~ en A, tanto la base como la altura pueden considerarse los catetos (pero) $\vec{AB}$ y $\vec{AC}$.

$A = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{|\vec{AC}| \cdot |\vec{AB}|}{2} = \frac{\sqrt{13} \cdot \frac{\sqrt{637}}{8}}{2} =$

$|\vec{AB}| = \sqrt{\left(-\frac{13}{8}-1\right)^2 + \left(\frac{10}{8}-3\right)^2} = \sqrt{\frac{441}{64}+\frac{196}{64}} = \frac{\sqrt{637}}{8}$

$|\vec{AC}| = \sqrt{2^2+(-3)^2} = \sqrt{13}$

$= \frac{\sqrt{8281}}{16} = \boxed{\frac{91}{16}} = 5'6875 \ u^2$

17.- $A(1,-3)$, $B(3,1)$

$\bar{AB}$ = lado desigual

Tercer vértice $C(x,y)$ verificando que $x+y+3=0$.

Por ser el triángulo isósceles, debe ocurrir que $d(A,C) = d(B,C)$

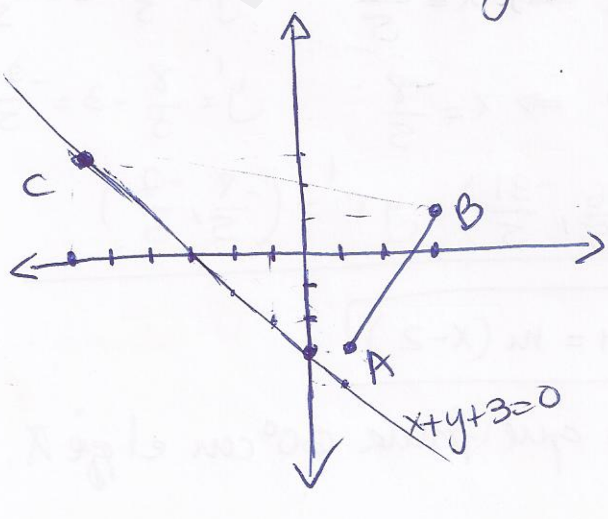
$\begin{rcases} d(A,C) = |\vec{AC}| = \sqrt{(x-1)^2+(y+3)^2} \\ d(B,C) = |\vec{BC}| = \sqrt{(x-3)^2+(y-1)^2} \end{rcases}$ $\sqrt{x^2-2x+1+y^2+6y+9} = \sqrt{x^2-6x+9+y^2-2y+1}$

$\Downarrow$

$x^2-2x+y^2+6y+10 = x^2-6x+y^2-2y+10$

$4x+8y=0 \Rightarrow x+2y=0$

Por otro lado, C pertenece a la recta $x+y+3=0$, entonces $\begin{rcases} x+y+3=0 \\ x+2y=0 \end{rcases}$ $y=3$, $x=-6$ $\boxed{C(-6,3)}$



$\text{Área} = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{\sqrt{20} \cdot 8/\sqrt{20}}{2} = 4 \ u^2$

$b = |\vec{AB}| = \sqrt{2^2+4^2} = \sqrt{20}$

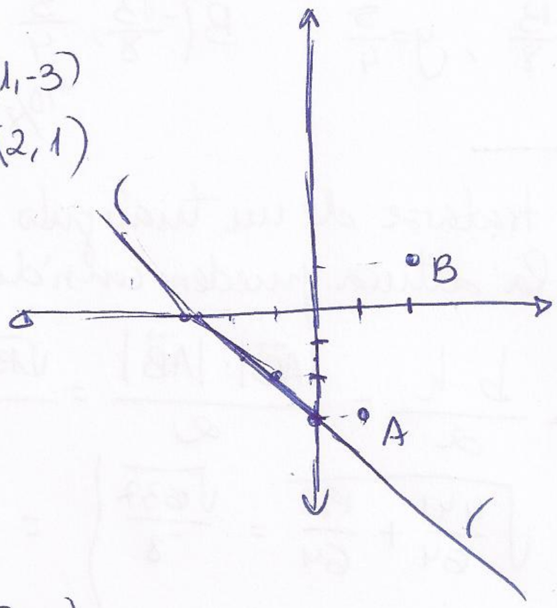
$h = d(C, r_{AB}) = \frac{|4\cdot(-6)-2\cdot 3-10|}{\sqrt{4^2+2^2}} = \frac{8}{\sqrt{20}}$

r_{AB}: recta que pasa por A y B: $\begin{cases} \vec{u} = \vec{AB} = (2,4) \\ A(1,-3) \end{cases}$

$\frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{4} \rightarrow 4x-4 = 2y+6$

$r_{AB}: 4x-2y-10=0$

18.- $A(1,-3)$
$B(2,1)$



$C(x,y) \in r: x+y+3=0$
$y=-x-3$

Consideramos que la base del triángulo es el lado $\overline{AB}$; por tanto

$b = d(A,B) = |\overrightarrow{AB}| =$
$= \sqrt{(2-1)^2+(1-(-3))^2} =$
$= \sqrt{1^2+16} = \underline{\sqrt{17}\ u}$.

$b = \sqrt{17}$ u.

$h = d(C, r_{AB})$
↳ altura del triángulo.

Hallemos primero la recta que pasa por A y B: r_{AB}.

$r_{AB} \equiv \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+3}{4}$ $\quad \begin{cases} A(1,-3) \\ \vec{u}(1,+4) \end{cases}$

$r_{AB} \equiv 4x-4 = y+3$
$\underline{\boxed{4x-y-7=0}}$

Como $A = \dfrac{b \cdot h}{2} = 6\ u^2 \Rightarrow b \cdot h = 12 \Rightarrow h = \dfrac{12}{b} = \dfrac{12}{\sqrt{17}}$

$h = d(C, r_{AB}) = \dfrac{12}{\sqrt{17}} = \dfrac{|4x-y-7|}{\sqrt{4^2+(-1)^2}} \Rightarrow \dfrac{12}{\sqrt{17}} = \dfrac{|4x-y-7|}{\sqrt{17}}$; $12 = |4x-y-7|$

$|4x-y-7| = 12 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Sustitución}}}{\Rightarrow} |4x-(-x-3)-7| = 12 \Rightarrow |4x+x+3-7| = 12 \Rightarrow$

$y = -x-3$

$\Rightarrow |5x-4| = 12 \Rightarrow \begin{cases} 5x-4=12 \longrightarrow x = \dfrac{16}{5} & y = \dfrac{-16}{5} - 3 = \dfrac{-31}{5} \\ 5x-4=-12 \Rightarrow x = \dfrac{-8}{5} & y' = \dfrac{8}{5} - 3 = \dfrac{-7}{5} \end{cases}$

Hay dos posibles soluciones: $\underline{C\left(\dfrac{16}{5}, \dfrac{-31}{5}\right) \text{ y } C' = \left(\dfrac{-8}{5}, \dfrac{-7}{5}\right)}$

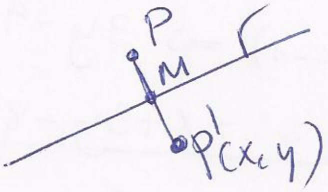
19.- $P(2,-4)$ $\quad$ Haz de rectas: $y+4 = m(x-2)$

~~Ecuación~~ de ~~la~~ recta de este haz que forma $60°$ con el eje X.

$m = tg\, 60° = \frac{sen\, 60°}{cos\, 60°} = \frac{\sqrt{3}/2}{1/2} = \sqrt{3}$

$r:\ y+4 = \sqrt{3}(x-2) \Rightarrow \underline{y = \sqrt{3}x - 2\sqrt{3} - 4}$

20.- $P(1,1)$. Sea $P'(x,y)$ el punto simétrico de P respecto de la recta $r: \frac{x-4}{2} = y$.



Construimos la recta s perpendicular a r que pasa por P:

$r:\ x-4 = 2y \Rightarrow x-2y-4=0$

$\vec{n_r} = (1,-2)$ vector ortogonal o normal a r.

Entonces un vector director de la recta s, es un vector normal a r; $\vec{u_s}(1,-2)$, $P(1,1)$

$s:\ \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-2} \Rightarrow -2x+2 = y-1$

$\underline{s: -2x-y+3=0}$

Hallemos M; punto de intersección de las rectas r y s:

$\left.\begin{array}{l} r:\ x-2y-4=0 \\ s:\ -2x-y+3=0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x=2 \\ y=-1 \end{array}$ $M(2,-1)$.

M es el punto medio del segmento $\overline{PP'}$; de manera que si $P'(x,y) \Rightarrow \left(\frac{x+1}{2}, \frac{y+1}{2}\right) = (2,-1) \Rightarrow (x+1, y+1) = (4,-2) \Rightarrow$

$\Rightarrow (x,y) = (3,-3)$ $\boxed{P'(3,-3)}$

21.- $P(1,3)$.

$r:\ 2x-y-9=0$

Buscamos la ecuación de una recta s que pase por P y forme un ángulo de 45° con la recta r.

Usamos la fórmula del ángulo que forman las dos rectas relacionando las pendientes respectivas m_r y m_s:

$tg\, 45° = \left|\frac{m_r - m_s}{1+m_r \cdot m_s}\right| \Rightarrow 1 = \frac{|2-m_s|}{|1+2m_s|} \Rightarrow |1+2m_s| = |2-m_s|$

$r:\ 2x-9 = y \longrightarrow m_r = 2$

La recta que buscamos tendrá de ecuación:

$y-3 = m_s(x-1)$ (puesto que pasa por $P(1,3)$ y tiene m_s de pendiente)

$$|1+2m_s| = |2-m_s| \Rightarrow \begin{cases} 1+2m_s = 2-m_s \Rightarrow \underline{3m_s = 1} \\ 1+2m_s = -2+m_s \Rightarrow \underline{m_s = -3} \end{cases}$$

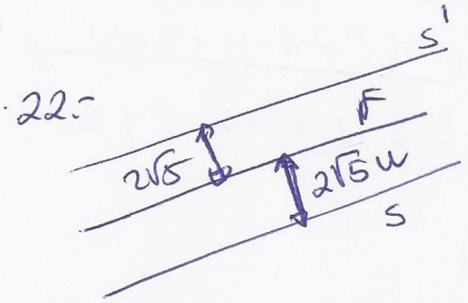
Hay dos soluciones:

· Si $m_s = \frac{1}{3} \Rightarrow$ $s: y-3 = \frac{1}{3}(x-1) \Rightarrow 3y-9 = x-1$

$\underline{s: -x+3y-8=0}$

· Si $m_s = -3 \Rightarrow$ $s': y-3 = -3(x-1) \Rightarrow \boxed{3x+y-6=0 : s'}$

22.-



$r: x+2y-2=0$

s paralela a $r \Rightarrow \boxed{s: x+2y+C=0}$

Debemos determinar C para hallar la ecuación completa de s.

Consideremos P un punto cualquiera de r: Si $x=0 \rightarrow y=1$

$P(0,1)$.

$$d(r,s) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Por paralelismo}}}{=} d(P,s) = \frac{|0+2\cdot 1+C|}{\sqrt{1^2+2^2}} = \frac{|2+C|}{\sqrt{5}}$$

$$\frac{|2+C|}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5} \Rightarrow |2+C| = 10 \Rightarrow \begin{cases} 2+C = 10 \\ 2+C = -10 \end{cases}$$

$C = 8$
$C' = -12$ $\longrightarrow$ $s: x+2y+8=0$
$s': x+2y-12=0$ (Dos soluciones)

23.- $A(3,5)$ $|\overline{AB}| = |\vec{AB}| = \sqrt{3^2+4^2} = 5$
$B(6,9)$ $|\overline{BC}| = |\vec{CB}| = \sqrt{6^2+0^2} = 6$
$C(0,9)$ $|\overline{AC}| = |\vec{AC}| = \sqrt{(-3)^2+4^2} = 5$

$\boxed{\text{Perímetro}: 5+6+5 = 16u}$

$\boxed{A = \frac{b\cdot h}{2} = \frac{6\cdot 4}{2} = 12u^2}$

Tiene dos lados iguales y uno desigual. Es isósceles y no rectángulo. base $= b = |\overline{BC}| = 6$ u.

$\hat{A} \Rightarrow \cos\hat{A} = \frac{|\vec{AB}\cdot\vec{AC}|}{|\vec{AB}||\vec{AC}|} = \frac{7}{25} \rightarrow \hat{A} = 73'7°$

$h = d(A, r_{BC}) = \frac{|5-9|}{\sqrt{0^2+1^2}} = \frac{|-4|}{1} = \underline{4}$ u.

$r_{BC}: y = 9$