EXAMEN DEL BLOQUE DE ÁLGEBRA

1. Efectúa las siguientes operaciones, expresando el resultado de la manera más reducida posible:

$$a)\ \frac{\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}}\cdot\left(\sqrt[5]{a^4}\right)^2}{\sqrt[10]{a^{11}}}=$$

$$b)\ \frac{3\sqrt{6}-2\sqrt{3}}{3\sqrt{6}+2\sqrt{3}}-\frac{4}{7\sqrt{2}}= \qquad (Racionaliza\ primero\ y\ opera\ después)$$

(2 puntos)

2. Encuentra la solución de las siguientes ecuaciones:

$a)\ x+\sqrt{7-3x}=1$

$$b)\ \frac{2x}{x^2-1}-\frac{x+1}{x-1}=-\frac{5}{4}$$

$c)\ 7^{1+2x}-50\cdot 7^x+7=0$

(3 puntos)

3. Clasifica y resuelve, si es posible los sistemas siguientes, utilizando el método de Gauss:

$$a)\ \left.\begin{array}{r} x-2y+3z=7 \\ 2x+y-z=0 \\ -6x+2y-4z=-14 \end{array}\right\} \qquad b)\ \left.\begin{array}{r} x+3y-z=4 \\ 5x-6y+z=2 \\ -x+4y-2z=5 \end{array}\right\}$$

(2 puntos)

4. Resuelve el siguiente sistema:

$$\begin{cases} \log(x+y)-\log(x-y)=\log 5 \\ \log(x+4)+\log(y+6)=2 \end{cases}$$

(1 punto)

5. Halla el conjunto solución en cada caso:

$$a)\ \left.\begin{array}{l} \dfrac{3x-1}{2}-\dfrac{x+1}{4}<7\cdot(x+1) \\ -3\cdot(x-5)+12\geq 24 \end{array}\right\}$$

$$b)\ \frac{2x+5}{6-x}\leq 0$$

(2 puntos)

1.- a) $\dfrac{\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}}\cdot\left(\sqrt[5]{a^4}\right)^2}{\sqrt[10]{a^{11}}} = \dfrac{\sqrt{\sqrt{a^3\sqrt{a}}}\cdot\left(\sqrt[5]{a^8}\right)}{\sqrt[10]{a^{11}}} = \dfrac{\sqrt[4]{\sqrt{a^7}}\;\sqrt[5]{a^8}}{\sqrt[10]{a^{11}}} =$

$= \dfrac{\sqrt[8]{a^7}\cdot\sqrt[5]{a^8}}{\sqrt[10]{a^{11}}} = \sqrt[40]{\dfrac{a^{35}\cdot a^{64}}{a^{44}}} = \sqrt[40]{a^{55}} = \sqrt[8]{a^{11}} = \underline{a\sqrt[8]{a^3}}$

o bien: $\dfrac{a^{1/2}\cdot a^{1/4}\cdot a^{1/8}\cdot a^{8/5}}{a^{11/10}} = a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{8}{5}-\frac{11}{10}} = a^{\frac{20+10+5+64-44}{40}}$

$= a^{55/40} = a^{11/8}$

b) $\dfrac{3\sqrt{6}-2\sqrt{3}}{3\sqrt{6}+2\sqrt{3}} - \dfrac{4}{7\sqrt{2}} =$

$= \dfrac{(3\sqrt{6}-2\sqrt{3})^2}{(3\sqrt{6}+2\sqrt{3})(3\sqrt{6}-2\sqrt{3})} - \dfrac{4\sqrt{2}}{7\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} =$

$= \dfrac{9\cdot 6+4\cdot 3-2\cdot 3\sqrt{6}\cdot 2\sqrt{3}}{9\cdot 6-4\cdot 3} - \dfrac{4\sqrt{2}}{14} = \dfrac{54+12-12\sqrt{18}}{54-12} - \dfrac{2\sqrt{2}}{7} =$

$= \dfrac{66-12\sqrt{3^2\cdot 2}}{42} - \dfrac{2\sqrt{2}}{7} = \dfrac{11-2\cdot 3\sqrt{2}}{7} - \dfrac{2\sqrt{2}}{7} = \dfrac{11-6\sqrt{2}-2\sqrt{2}}{7}$

$= \dfrac{11-8\sqrt{2}}{7}$.

2.- a) $x+\sqrt{7-3x}=1$

$\sqrt{7-3x} = 1-x$

$\left(\sqrt{7-3x}\right)^2 = (1-x)^2$

$7-3x = 1+x^2-2x$

$0 = x^2+x-6$

$x \begin{cases} -3 \\ 2 \end{cases}$

Comprobemos las soluciones

- $\boxed{x=-3}$

$-3+\sqrt{7-3(-3)} \overset{?}{=} 1$

$-3+\sqrt{16} = 1$

$-3+4 = 1$ ✓

Es VÁLIDA

- $\boxed{x=2}$ no es válida porque

$2+\sqrt{7-3\cdot 2} = 1$

$2+\sqrt{1} \neq 1$

$3 \neq 1$

3.- b) $\frac{2x}{x^2-1} - \frac{x+1}{x-1} = -\frac{5}{4}$

$x^2-1 = (x+1)(x-1)$
$x-1$
4
$mcm = 4(x+1)(x-1)$

$$\frac{8x}{4(x+1)(x-1)} - \frac{4(x+1)^2}{4(x+1)(x-1)} = -\frac{5(x+1)(x-1)}{4(x+1)(x-1)}$$

$8x - 4(x^2+2x+1) = -5(x^2-1)$

$\cancel{8x} - 4x^2 \cancel{+8x} - 4 = -5x^2+5 \Rightarrow x^2-9=0 \Rightarrow \boxed{x=+3,-3}$

Ambas soluciones son válidas porque ninguna anula ningún denominador.

c) $7^{1+2x} - 50\cdot 7^x + 7 = 0$

$7\cdot 7^{2x} - 50\cdot 7^x + 7 = 0$ $\quad 7^x = t$ cambio de variable

$7t^2 - 50t + 7 = 0$

$$t = \frac{50 \pm \sqrt{2500 - 4\cdot 7\cdot 7}}{14} = \frac{50 \pm}{14} < \begin{matrix} 7 \\ \frac{2}{14} = \frac{1}{7} \end{matrix}$$

$7^x = 7 \Rightarrow \boxed{x=1}$

$7^x = \frac{1}{7} = 7^{-1} \Rightarrow \boxed{x=-1}$

3.- a) $\left.\begin{matrix} x-2y+3z=7 \\ 2x+y-z=0 \\ -6x+2y-4z=-14 \end{matrix}\right\} \xrightarrow[6E_1+E_3 \to E_3]{-2E_1+E_2 \to E_2} \left.\begin{matrix} x-2y+3z=7 \\ 5y-7z=-14 \\ -10y+14z=28 \end{matrix}\right\}$

$\xrightarrow{2E_2+E_3 \to E_3} \left.\begin{matrix} x-2y+3z=7 \\ 5y-7z=-14 \\ 0=0 \end{matrix}\right\}$

El sistema es COMPATIBLE Indeterminado. Existen infinitas soluciones que dependen de un parámetro.

$\left.\begin{matrix} x-2y+3z=7 \\ 5y-7z=-14 \end{matrix}\right\} \xrightarrow{\text{Sea } z=t \text{ parámetro}} \left.\begin{matrix} x-2y=7-3t \\ 5y=-14+7t \end{matrix}\right\}$

$y = \frac{-14+7t}{5}$ sustituyendo en la primera ecuación:

$$x - 2 \cdot \frac{-14+7t}{5} = 7 - 3t$$

$$5x + 28 - 14t = 35 - 15t$$

$$5x = 7 - t \Rightarrow x = \frac{7-t}{5}$$

Solución:

$$\boxed{x = \frac{7-t}{5}, \quad y = \frac{-14+7t}{5}, \quad z = t \quad \forall t \in \mathbb{R}}$$

b) $\left.\begin{array}{l} x+3y-z=4 \\ 5x-6y+z=2 \\ -x+4y-2z=5 \end{array}\right\}$ $\xrightarrow[-2E_1+E_3 \to E_3]{E_1+E_2 \to E_2}$ $\left.\begin{array}{l} x+3y-z=4 \\ 6x-3y=6 \\ -3x-2y=-3 \end{array}\right\}$

$\xrightarrow{E_2+2E_3 \to E_3}$ $\left.\begin{array}{l} x+3y-z=4 \\ 6x-3y=6 \\ -7y=0 \end{array}\right\}$ $\Rightarrow y=0$

$1+0-z=4 \Rightarrow 1-4=z$

$6x-0=6 \Rightarrow x=1$

El sistema es COMPATIBLE determinado.
Existe una única solución: $\boxed{x=1;\ y=0;\ z=-3}$

4.- $\left.\begin{array}{l} \log(x+y) - \log(x-y) = \log 5 \\ \log(x+4) + \log(y+6) = 2 \end{array}\right.$ $\begin{array}{l} \Rightarrow \log\frac{x+y}{x-y} = \log 5 \\ \Rightarrow \log[(x+4)(y+6)] = \log 10^2 \end{array}$

$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} \frac{x+y}{x-y} = 5 \\ xy+6x+4y+24=100 \end{array}\right\}$

$x+y = 5x-5y \Rightarrow 6y = 4x \Rightarrow 3y = 2x$

$y = \frac{2x}{3}$

$$x \cdot \frac{2x}{3} + 6x + 4 \cdot \frac{2x}{3} + 24 - 100 = 0$$

$$2x^2 + 18x + 8x + 72 - 300 = 0$$

$$2x^2 + 26x - 228 = 0$$

$$x^2 + 13x - 114 = 0 \qquad x = \frac{-13 \pm \sqrt{625}}{2}$$

$$x \begin{cases} 6 \\ -19 \end{cases}$$

Si $x=6 \Rightarrow y=4$

$\boxed{x=6;\ y=4}$ válida

Si $x=-19 \Rightarrow y=\frac{-38}{3}$

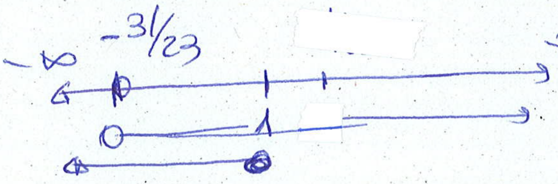
$x=-19;\ y=\frac{-38}{3}$ no puede ser válida puesto que

$\log\left(-19-\frac{38}{3}\right)$ no podría calcularse (El logaritmo de un número negativo no existe)

5.-

(a) $\begin{cases} \dfrac{3x-1}{2} - \dfrac{x+1}{4} < 7(x+1) \\ -3(x-5)+12 \geq 24 \end{cases} \quad \begin{cases} 2(3x-1)-(x+1) < 28(x+1) \\ -3x+15+12 \geq 24 \end{cases}$

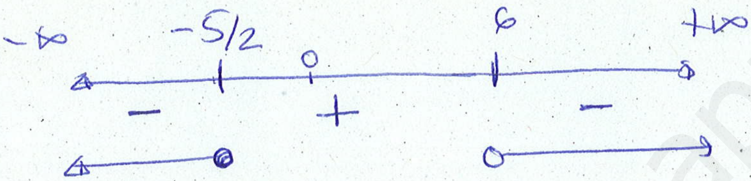
$\Rightarrow \begin{cases} 6x-2-x-1 < 28x+28 \\ -3x \geq -3 \end{cases} \quad \begin{cases} -23x < 31 \Rightarrow x > \dfrac{-31}{23} = -1'35 \\ x \leq 1 \end{cases}$



$\boxed{S = \left(\dfrac{-31}{23}, 1\right]}$

(b) $\dfrac{2x+5}{6-x} \leq 0$ $\quad 2x+5=0 \Rightarrow x = -5/2 \ (= -2'5)$

$6-x=0 \Rightarrow x=6$



$\boxed{S = \left(-\infty, -\dfrac{5}{2}\right] \cup (6, +\infty)}$

o bien:

	$(-\infty, -5/2)$		$(-5/2, 6)$		$(6, +\infty)$
$2x+5$	$-$	0	$+$		$+$
$6-x$	$+$		$+$	0	$-$
	$-$		$+$		$-$