ACTIVIDADES: EXPRESIONES ALGEBRAICAS. ECUACIONES.

1. Encuentra el polinomio A(x) que satisfaga la siguiente igualdad: $(x^2-3)\cdot A(x)=x^3+2x^2-3x-6$.

2. Encuentra a y b para que el polinomio $P(x)=x^2+ax+b$ sea divisible por x-3 y dé de resto -5 al dividirlo por x+1.

3. Calcula k para que el resto de la siguiente divisió $5x^4+x^2-kx-4:(x-2)$ sea - 3.

4. Halla m para que el resto de la divisi6n $-4x^3+3x^2-mx+1:(x+3)$ sea 1.

5. Sabiendo que 2, 3 y -1 son ceros (raíces) de un polinomio de tercer grado y que el coeficiente del término de mayor grado es 5, escribir el polinomio.

6. Saca factor común e identifica expresiones notables en cada caso para factorizar los siguientes polinomios:
   $a)\ 12x^3-3x=$ $\quad b)\ 2x^4+12x^3+18x^2=$ $\quad c)\ 45x^2-120x+80=$

7. Obtén las fracciones irreducibles a las dadas:

$a)\ \dfrac{x^4+2x^3+x^2+2x}{x^3-2x^2+x-2} \qquad b)\ \dfrac{x^4+x^3-2x^2}{x^3+2x^2-5x-6} \qquad c)\ \dfrac{2x^3-7x^2+8x-3}{x^4-x^3-2x^2+3x-1}$

$d)\ \dfrac{5x^2-15x}{10x^3+15x^2} \qquad e)\ \dfrac{6-x-x^2}{x^2+2x-8}$

8. Opera y simplifica:

$a)\ \left(x^2-\dfrac{x^2-2x}{1+2x}\right):\left(1+\dfrac{x(x-2)}{1+2x}\right) \qquad b)\ \dfrac{7x}{x-3}-\dfrac{5}{x+3}+\dfrac{6x}{x^2-9}$

$c)\ \dfrac{2x-6}{x^2-1}\cdot\dfrac{5x+5}{4x-12}$

$d)\ \left(\dfrac{x}{3}-\dfrac{3}{x}\right)\cdot\dfrac{x^3+9x}{x-3} \qquad e)\ \dfrac{x+1}{2x}\cdot\left(\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x-1}\right) \qquad f)\ \left(\dfrac{1+2x}{x-2}-2\right):\left(1+\dfrac{2+4x}{x-2}\right)$

$g)\ \dfrac{\dfrac{x-a}{x+a}-\dfrac{x^2+a^2}{x^2-a^2}}{\left(\dfrac{x-a}{x+a}\right)^2-1} \qquad h)\ \dfrac{\left(1-\dfrac{m}{m+1}\right)^2}{1+\dfrac{m}{m+1}}\cdot\dfrac{\dfrac{2}{m}+\dfrac{1}{m^2}}{1-\dfrac{1}{m}}$

9. Resuelve las siguientes ecuaciones racionales:

$a)\ \dfrac{6x+1}{x^2-4}=\dfrac{x+1}{x+2}+\dfrac{x}{x-2} \qquad b)\ \dfrac{2x}{x+1}=\dfrac{4}{x^2-1} \qquad c)\ \dfrac{x}{x+3}-\dfrac{2}{x^2-9}=\dfrac{1}{x-3}$

$d)\ x^2-\dfrac{64}{x^2}=-12$

Soluciones: $a)\ 3;\ -\frac{1}{2}$ $\quad b)\ 2;\ -1$ *no es válida* $\quad c)5;\ -1$ $\quad d)+2;\ -2$

10. Resuelve las siguientes ecuaciones irracionales:

$a)\ x-\sqrt{x}=6 \qquad b)\ x+\sqrt{x}=6 \qquad c)\ \sqrt{x+5}+\sqrt{2x+8}=7 \qquad d)\ \sqrt{x^2-5}=2$

$e)\ \sqrt{x^2+9}+x^2=21$

$f)\ \sqrt{2x-1}-\sqrt{2x-4}=3 \qquad g)\ 3x-3\sqrt{x+3}=x+3$

$h)\ \sqrt{x+3}+\sqrt{x+6}=\dfrac{3}{\sqrt{x+3}}$

Soluciones: a) 9 b) 4 c) 4 (286 no válida) d) 3, -3 e)4, -4 , ($\pm\sqrt{27}$ no so válidas) f) No tiene (5/2 no es válida) g) 6 (-3/4 no es válida) h) -2.

11. Resuelve las siguientes ecuaciones:

$a)\ \dfrac{8}{x}-1=\dfrac{4}{x} \qquad b)\ x+1=\dfrac{6}{x} \qquad c)\ \dfrac{9}{x}-\dfrac{x}{3}=2$

$d)\ x^3+2x^2-5x-6=0 \qquad e)\ -x^4+x^3-4x^2+4x=0 \qquad f)\ 4x^4-65x^2+16=0$

$g)\ x^6+19x^3-216=0 \qquad h)\ x^2-3x+1=\dfrac{2}{x^2-3x}$

Soluciones: a) 4 b) 2, -3 c) 3, -9 d) -1, 2, -3 e) 0, 1 f) ½, -1/2, 4, -4 g) 2, -3
h) 1, 2 , $\frac{3+\sqrt{13}}{2}$, $\frac{3-\sqrt{13}}{2}$

12. Resuelve las siguientes ecuaciones exponenciales:

$a)\ 3^{x-5}=0,\widehat{3} \quad b)\ 2^{x-5}+2^{x-3}=5 \quad c)\ 4^x+4^{x-1}+3\cdot 4^{x-2}=23 \quad d)\ 3^x+3^{x-1}+3^{x-2}=13$

$e)\ 9^{x+1}-28\cdot 3^x+3=0 \qquad f)\ 128^{x+1}=2^{x^2-x-2} \qquad g)\ 2^x+2^{x+1}+2^{x+2}=7$

$h)\ 9^x-2\cdot 3^{x+2}+81=0$

$i)\ 4^{x+1}+2^{x+3}-320=0 \quad j)\ 5^{x+1}=10+3\cdot 5^{2-x} \quad k)\ 6^{1-x}+6^x=7$

Soluciones:
a) 4 b) 5 c) 2 d) 2 e) -2, 1 f) -1, 9 g) 0 h)2 i) 3 j) 1 k) 0, 1

13. Resuelve las siguientes ecuaciones logarítmicas:

$a)\ \log x=1+\log(22-x) \qquad b)\ \log(3x-1)-\log(2x+3)=-\log 25+1$

$c)\ 2\log(5x+4)-\log 4=\log(x+4) \qquad d)\ \dfrac{\log(5+x^2)}{\log(2-x)}=2$

$e)\ (x^2-5x+9)\cdot\log 2+\log 125=3 \qquad f)\ 2\log x-\log(x-16)=2$

$g)\ \log(x+1)=\log(5x-13)-\log(x-3) \qquad h)\ \dfrac{\log 2+\log(11-x^2)}{\log(5-x)}=2$

Soluciones:
a) 20 b) 1 c) 0 d)-1/4 e) 2, 3 f) 20, 80 g) 5 (2 no es válida) h) 3, 1/3

y $-\frac{36}{25}$

SOLUCIONES: EXPRESIONES ALGEBRAICAS. ECUACIONES

1.- $(x^2-3)\cdot A(x) = x^3+2x^2-3x-6.$

A(x) es el resultado de hacer la división siguiente:

$$\begin{array}{rrrr|l}
\cancel{x^3} & +2x^2 & \cancel{-3x} & -6 & x^2-3 \\
\cancel{-x^3} & & +3x & & \underbrace{x+2}_{A(x)} \\ \hline
 & \cancel{2x^2} & & \cancel{-6} & \\
 & -2x^2 & & +6 & \\ \hline
 & & & 0 &
\end{array}$$

$$\boxed{A(x) = x-2}$$

2.- $P(x) = x^2+ax+b.$

$P(x)$ divisible por $x-3 \xrightarrow[\text{Resto}]{\text{Teor.}} P(3)=0 \Rightarrow 3^2+a\cdot 3+b=0 \quad (I)$

$P(x):(x+1)$ da de resto $-5 \xrightarrow[\text{Resto}]{\text{Teor.}} P(-1)=-5 \Rightarrow \underbrace{(-1)^2}_{1}+a(-1)+b=-5 \quad (II)$

$$\left.\begin{array}{l} (I)\ 3a+b=-9 \\ (II)\ -a+b=-6 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} 4a=-3 \Rightarrow a=\dfrac{-3}{4} \\ 4b=-27 \Rightarrow b=\dfrac{-27}{4} \end{array}$$

Así pues, $\boxed{P(x) = x^2-\frac{3}{4}x-\frac{27}{4}}$

3.- Aplicamos el teorema del resto: $P(2)=-3$

$5\cdot 2^4+2^2-k\cdot 2-4=-3$

$80+4-2k-4=-3 \Rightarrow 83=2k \qquad \boxed{k=\frac{83}{2}}$

Otra forma sería haciendo directamente la división:

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 & 5 & \cancel{0} & +\cancel{1} & -k & -4 \\
2 & & 10 & 20 & 42 & 84-2k \\ \hline
 & 5 & 10 & 21 & 42-k & \boxed{-3}
\end{array}$$

$\Rightarrow 84-2k-4=-3$

$83=2k$

$\boxed{k=83/2}$

4.- $-4\cdot(-3)^3+3\cdot(-3)^2-m(-3)+1=1$

$-4\cdot(-27)+3\cdot 9+3m+1=1$

$108+27+3m+1-1=0$

$3m=-135$

$$\boxed{m=\frac{-135}{3}=-45}$$

o bien:

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & -4 & 3 & -m & 1 \\
-3 & & 12 & -45 & 135+3m \\ \hline
 & -4 & 15 & -45-m & \boxed{1}
\end{array}$$

$135+3m+1=1$

$3m=-135 \qquad \boxed{m=-45}$

5.- $P(x)=5\cdot(x-2)(x-3)\cdot(x+1) \underset{\uparrow}{=}$

Operando

6.- a) $12x^3-3x = 3x(4x^2-1) = 3x(2x-1)(2x+1)$

$\hookrightarrow$ Diferencia de cuadrados

b) $2x^4+12x^3+18x^2 = 2x^2\cdot\underbrace{(x^2+6x+9)}_{\text{Cuadrado de una suma}} = 2x^2(x+3)^2$

c) $45x^2-120x+80 = 5\cdot\underbrace{(9x^2-24x+16)}_{\text{Cuadrado de una diferencia}} = 5(3x-4)^2$

7.- a) $\dfrac{x^4+2x^3+x^2+2x}{x^3-2x^2+x-2} = \dfrac{x(x+2)\cancel{(x^2+1)}}{(x-2)\cancel{(x^2+1)}} = \dfrac{x(x+2)}{x-2}$

no se puede simplificar más

b) $\dfrac{x^4+x^3-2x^2}{x^3+2x^2-5x-6} = \dfrac{x^2\cancel{(x+2)}\cancel{(x+1)}}{\cancel{(x+1)}\cancel{(x-2)}(x+3)} = \dfrac{x^2}{x+3}$

c) $\dfrac{2x^3-7x^2+8x-3}{x^4-x^3-2x^2+3x-1} = \dfrac{\cancel{(x-1)^2}\cdot(2x-3)}{\cancel{(x-1)^2}(x^2+x-1)} = \dfrac{2x-3}{x^2+x-1}$

d) $\dfrac{5x^2-15x}{10x^3+15x^2} = \dfrac{5x(x-3)}{5x^2(2x+3)} = \dfrac{x-3}{x(2x+3)}$

e) $\dfrac{6-x-x^2}{x^2+2x-8} = \dfrac{-1\cdot\cancel{(x-2)}(x+3)}{(x+4)\cancel{(x-2)}} = \dfrac{-x-3}{x+4}$

8.- a) $\left(x^2-\dfrac{x^2-2x}{1+2x}\right):\left(1+\dfrac{x(x-2)}{1+2x}\right) = \dfrac{x^2(1+2x)-(x^2-2x)}{1+2x}:\dfrac{1+2x+x^2-2x}{1+2x} =$

$= \dfrac{\cancel{x^2}+2x^3-\cancel{x^2}+2x}{1+2x}:\dfrac{1+x^2}{1+2x} = \dfrac{(2x^3+2x)\cancel{(1+2x)}}{\cancel{(1+2x)}\cdot(1+x^2)} = \dfrac{2x\cancel{(x^2+1)}}{\cancel{(1+x^2)}} = 2x$

b) $\dfrac{7x}{x-3}-\dfrac{5}{x+3}+\dfrac{6x}{x^2-9} = \dfrac{7x(x+3)}{(x-3)(x+3)}-\dfrac{5(x-3)}{(x-3)(x+3)}+\dfrac{6x}{(x-3)(x+3)} =$

$= \dfrac{7x^2+21x-5x+15+6x}{(x-3)(x+3)} = \dfrac{7x^2+22x+15}{(x-3)(x+3)}$

c) $\dfrac{2x-6}{x^2-1}\cdot\dfrac{5x+5}{4x-12} = \dfrac{2\cancel{(x-3)}\cdot 5\cancel{(x+1)}}{\cancel{(x+1)}(x-1)\,\cancel{4}_{2}\cancel{(x+3)}} = \dfrac{5}{2(x-1)} = \dfrac{5}{2x-2}$

d) $\left(\dfrac{x}{3}-\dfrac{3}{x}\right)\cdot\dfrac{x^3+9x}{x-3}=\dfrac{x^2-9}{3x}\cdot\dfrac{x(x^2+9)}{x-3}=\dfrac{\cancel{(x-3)}(x+3)\cdot\cancel{x}(x^2+9)}{\cancel{(x-3)}\cdot 3\cancel{x}}=$

$=\dfrac{(x+3)(x^2+9)}{3}$

e) $\dfrac{x+1}{2x}\cdot\left(\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x-1}\right)=\dfrac{x+1}{2x}\cdot\dfrac{x-1-(x+1)}{(x+1)(x-1)}=\dfrac{\cancel{(x+1)}}{2x}\cdot\dfrac{-2}{\cancel{(x+1)}(x-1)}=$

$=\dfrac{-1}{x(x-1)}=\dfrac{-1}{x^2-x}$

f) $\left(\dfrac{1+2x}{x-2}-2\right):\left(1+\dfrac{2+4x}{x-2}\right)=\left(\dfrac{1+2x}{x-2}-\dfrac{2(x-2)}{x-2}\right):\left(\dfrac{x-2}{x-2}+\dfrac{2+4x}{x-2}\right)$

$=\dfrac{5}{x-2}:\dfrac{5x}{x-2}=\dfrac{5\cdot(x-2)}{5x(x-2)}=\dfrac{1}{x}$

g) $\dfrac{\dfrac{x-a}{x+a}-\dfrac{x^2+a^2}{x^2-a^2}}{\left(\dfrac{x-a}{x+a}\right)^2-1}=\dfrac{\dfrac{(x-a)^2}{(x+a)(x-a)}-\dfrac{x^2+a^2}{(x+a)(x-a)}}{\dfrac{(x-a)^2}{(x+a)^2}-\dfrac{(x+a)^2}{(x+a)^2}}=$

$=\dfrac{\dfrac{\cancel{x^2}+\cancel{a^2}-2ax-\cancel{x^2}-\cancel{a^2}}{(x+a)(x-a)}}{\dfrac{x^2+a^2-2ax-(x^2+a^2+2ax)}{(x+a)(x+a)}}=\dfrac{\dfrac{-2ax}{(x+a)(x-a)}}{\dfrac{-4ax}{(x+a)(x+a)}}=\dfrac{-\cancel{2}\cancel{ax}\cancel{(x+a)}(x+a)}{-\underset{2}{\cancel{4}}\cancel{ax}\cancel{(x+a)}(x-a)}=$

$=\dfrac{x+a}{2(x-a)}=\dfrac{x+a}{2x-2a}$

h) $\dfrac{\left(1-\dfrac{m}{m+1}\right)^2}{1+\dfrac{m}{m+1}}\cdot\dfrac{\dfrac{2}{m}+\dfrac{1}{m^2}}{1-\dfrac{1}{m}}=\dfrac{\left(\dfrac{m+1-m}{m+1}\right)^2}{\dfrac{m+1+m}{m+1}}\cdot\dfrac{\dfrac{2m+1}{m^2}}{\dfrac{m-1}{m}}=$

$=\dfrac{\dfrac{1}{(m+1)^2}}{\dfrac{2m+1}{(m+1)}}\cdot\dfrac{\dfrac{(2m+1)}{m^2}}{\dfrac{m-1}{m}}=\dfrac{\cancel{m+1}}{(m+1)^{\cancel{2}}\cancel{(2m+1)}}\cdot\dfrac{\cancel{(2m+1)}\,\cancel{m}}{m^{\cancel{2}}(m-1)}=$

$=\dfrac{1}{m(m+1)(m-1)}=\dfrac{1}{m^3-m}$

9.- a) $\frac{6x+1}{x^2-4} = \frac{x+1}{x+2} + \frac{x}{x-2} \Rightarrow \frac{6x+1}{(x+2)(x-2)} = \frac{(x+1)(x-2)}{(x+2)(x-2)} + \frac{x(x+2)}{(x+2)(x-2)}$

$\Rightarrow 6x+1 = x^2+x-\cancel{2x}-2+x^2+\cancel{2x} \Rightarrow 0 = 2x^2-5x-3 \Rightarrow \boxed{x \begin{cases} 3 \\ -1/2 \end{cases}}$

b) $\frac{2x}{x+1} = \frac{4}{x^2-1} \Rightarrow \frac{2x(x-1)}{(x+1)(x-1)} = \frac{4}{(x+1)(x-1)} \Rightarrow 2x^2-2x=4$

$2x^2-2x-4=0$

$x^2-x-2=0$

$x \begin{cases} 2 \text{ válida} \\ -1 \rightarrow \text{no es válida porque anula los denominadores.} \end{cases}$

c) $\frac{x}{x+3} - \frac{2}{x^2-9} = \frac{1}{x-3} \Rightarrow \frac{x(x-3)}{(x+3)(x-3)} - \frac{2}{(x+3)(x-3)} = \frac{x+3}{(x-3)(x+3)}$

$\Rightarrow x^2-3x-2 = x+3 \Rightarrow x^2-4x-5=0 \Rightarrow \boxed{x \begin{cases} -1 \\ 5 \end{cases}}$

d) $x^2 - \frac{64}{x^2} = -12 \Rightarrow x^4-64 = -12x^2$

$\Rightarrow x^4+12x^2-64=0 \xrightarrow[x^4=t^2]{x^2=t} t^2+12t-64=0$

$t = \frac{-12 \pm \sqrt{144+256}}{2} = \frac{-12\pm 20}{2} \begin{cases} 4 \\ -16 \end{cases}$ Deshacemos el cambio para hallar x:

$x^2=4 \Rightarrow \boxed{x=\pm 2}$

$x^2=-16 \rightarrow$ No podemos obtener solución.

10.- a) $x-\sqrt{x}=6$

$x-6=\sqrt{x}$

$(x-6)^2=(\sqrt{x})^2$

$x^2+36-12x=x$

$x^2-13x+36=0$

$x \begin{cases} 9 \\ 4 \end{cases}$

- $\boxed{\text{Si } x=9} \Rightarrow$ solución válida porque

$9-\sqrt{9}=6$

$9-3=6$ ✓

- Si $x=4 \Rightarrow$ No es válida ya que

$4-\sqrt{4}\neq 6$

$4-2\neq 6$

b) $x+\sqrt{x}=6$

$\sqrt{x}=6-x$

$(\sqrt{x})^2=(6-x)^2$

$x^2-13x+36=0 \quad x \begin{cases} 9 \\ 4 \end{cases}$

- Si $x=9$, no se cumple la igualdad:

$9+\sqrt{9}\neq 6$

$9+3=12\neq 6$

No es válida

- $\boxed{x=4}$ es válida porque

$4+\sqrt{4}=6$ ✓

c) $\sqrt{x+5}+\sqrt{2x+8}=7$

$\sqrt{x+5}=7-\sqrt{2x+8}$

$(\sqrt{x+5})^2=(7-\sqrt{2x+8})^2$

$x+5=49+2x+8-14\sqrt{2x+8}$

$-x-52=-14\sqrt{2x+8}$

$x+52=14\sqrt{2x+8}$

$(x+52)^2=(14\cdot\sqrt{2x+8})^2$

$x^2+104x+2704=196\cdot(2x+8)$

$x^2+288x+1136=0$

$x=\dfrac{288\pm\sqrt{288^2-4\cdot1136}}{2}=\dfrac{288\pm280}{2}$ ↗ 284, ↘ 4

Comprobación

1) $x=284$ no es válida

$\sqrt{284+5}+\sqrt{2\cdot284+8}\overset{?}{=}7$

$\sqrt{289}+\sqrt{576}\neq7$

$17+24\neq7$

2) $x=4$ es VÁLIDA

$\sqrt{4+5}+\sqrt{2\cdot4+8}=7$

$\sqrt{9}+\sqrt{16}=7$

$3+4=7$ ✓

d) $\sqrt{x^2-5}=2\Rightarrow(\sqrt{x^2-5})^2=2^2\Rightarrow x^2-5=4\Rightarrow x^2=9$

$\Rightarrow x=\pm\sqrt{9}=\pm3$. Ambas son válidas, puesto que:

$\sqrt{(\pm3)^2-5}=\sqrt{9-5}=\sqrt{4}=2$.

e) $\sqrt{x^2+9}+x^2=21$

$\sqrt{x^2+9}=21-x^2$

$(\sqrt{x^2+9})^2=(21-x^2)^2$

$x^2+9=441-42x^2+x^4$

$0=x^4-43x^2+432$

$x^2=t$ (cambio de variable)

$0=t^2-43t+432$

$t=\dfrac{43\pm\sqrt{43^2-4\cdot432}}{2}$

$t=\dfrac{43\pm11}{2}$ ↗ $54/2=27$, ↘ $32/2=16$

$x^2=27\Rightarrow x=\pm\sqrt{27}=\pm3\sqrt{3}$

$x^2=16\Rightarrow x=\pm4$

Comprobemos:

• Si $x=\pm\sqrt{27}\Rightarrow x^2=27$

Entonces $\sqrt{27+9}+27\overset{?}{=}21$

$6+27\neq21$

No serían válidas

• Si $x=+4$ ó $x=-4$, entonces $x^2=16$ y al sustituir se observa que se verifica la igualdad:

$\sqrt{16+9}+16=21$

$5+16=21$

$21=21$ ✓

f) $\sqrt{2x-1} - \sqrt{2x-4} = 3$

$\sqrt{2x-1} = 3 + \sqrt{2x-4}$

$\left(\sqrt{2x-1}\right)^2 = \left(3+\sqrt{2x-4}\right)^2$

$2x-1 = 9 + 2x - 4 + 6\sqrt{2x-4}$

$-6 = 6\sqrt{2x-4}$ (dividiendo ambos miembros por 6)

$-1 = \sqrt{2x-4}$

$(-1)^2 = \left(\sqrt{2x-4}\right)^2$

$1 = 2x-4$

$5 = 2x$

$x = 5/2$

Veamos que NO es válida:

$\sqrt{2\cdot\frac{5}{2}-1} - \sqrt{2\cdot\frac{5}{2}-4} = 3$

$\sqrt{5-1} - \sqrt{5-4} \neq 3$

$2 - 1 \neq 3$

No hay solución para la ecuación inicial.

g) $3x - 3\sqrt{x+3} = x+3$

$3x - x - 3 = 3\sqrt{x+3}$

$2x-3 = 3\sqrt{x+3}$

$(2x-3)^2 = \left(3\sqrt{x+3}\right)^2$

$4x^2 - 12x + 9 = 9\cdot(x+3)$

$4x^2 - 21x - 18 = 0$

$x = \frac{21 \pm \sqrt{21^2 - 4\cdot4\cdot(-18)}}{8}$

$x = \frac{21 \pm 27}{8} < \begin{matrix} 6 \\ -6/8 = \frac{-3}{4} \end{matrix}$

• Si $x = 6 \Rightarrow$ Solución VÁLIDA

$3\cdot6 - 3\cdot\sqrt{6+3} = 6+3$

$18 - 3\cdot3 = 9$

$18 - 9 = 9$ ✓

• Si $x = \frac{-3}{4} \Rightarrow$ No es válida

$3\cdot\frac{-3}{4} - 3\cdot\sqrt{-\frac{3}{4}+3} \overset{?}{=} \frac{-3}{4} + 3$

$-\frac{9}{4} - 3\sqrt{\frac{9}{4}} \overset{?}{=} \frac{9}{4}$

$-\frac{9}{4} - \frac{3\cdot3}{2} \neq \frac{9}{4}$

$-\frac{9}{4} - \frac{18}{4} \neq \frac{9}{4}$

h) $\sqrt{x+3} + \sqrt{x+6} = \frac{3}{\sqrt{x+3}}$

Multiplicamos ambos miembros por $\sqrt{x+3}$:

$x+3 + \sqrt{(x+6)(x+3)} = 3$

$\sqrt{x^2+9x+18} = -x$

Elevando al cuadrado:

$x^2 + 9x + 18 = x^2$

$9x = -18$

$\boxed{x = -2}$

• Si $x = -2$ es VÁLIDA

$\sqrt{-2+3} + \sqrt{-2+6} = \frac{3}{\sqrt{-2+3}}$

$1 + 2 = \frac{3}{1}$

$3 = 3$ ✓

11.- a) $\frac{8}{x} - 1 = \frac{4}{x} \Rightarrow (mcm = x) \Rightarrow 8 - x = 4 \Rightarrow \boxed{4 = x}$

b) $x + 1 = \frac{6}{x} \Rightarrow x^2 + x = 6 \Rightarrow x^2 + x - 6 = 0 \Rightarrow x < {-3 \atop 2}$ válidas

c) $\frac{9}{x} - \frac{x}{3} = 2 \underset{mcm=3x}{\Rightarrow} 27 - x^2 = 6x \Rightarrow 0 = x^2 + 6x - 27 \quad x < {-9 \atop 3}$ válidas

d) $x^3 + 2x^2 - 5x - 6 = 0 \underset{Ruffini}{\Longrightarrow} (x+1)(x-2)(x+3) = 0 \Rightarrow \boxed{x = -1, 2, -3}$

e) $-x^4 + x^3 - 4x^2 + 4x = 0 \Longrightarrow x \cdot (x-1)(-x^2 - 4) = 0 \Rightarrow \boxed{x = 0, 1}$

($-x^2 - 4 = 0$ es una ecuación que no tiene solución)

f) $4x^4 - 65x^2 + 16 = 0$ (Bicuadrada)

$x^2 = t$ Resolvemos $4t^2 - 65t + 16 = 0 \Rightarrow t = \frac{65 \pm \sqrt{65^2 - 4 \cdot 4 \cdot 16}}{8}$

$t = \frac{65 \pm 63}{8} < {16 \atop 2/8 = 1/4}$ $\qquad x^2 = 16 \Rightarrow \boxed{x = \pm 4}$, $x^2 = 1/4 \Rightarrow \boxed{x = \pm 1/2}$

g) $x^6 + 19x^3 - 216 = 0 \quad (x^3 = t)$

$t^2 + 19t - 216 = 0 \Rightarrow t = \frac{-19 \pm \sqrt{19^2 - 4 \cdot (-216)}}{2} = \frac{-19 \pm 35}{2} < {8 \atop -27}$

Entonces si $x^3 = 8 \Rightarrow x = \sqrt[3]{8} = 2$

si $x^3 = -27 \Rightarrow x = \sqrt[3]{-27} = -3$ $\qquad \boxed{x = 2, -3}$

h) $(x^2 - 3x + 1) = \frac{2}{x^2 - 3x} \Rightarrow (x^2 - 3x + 1)(x^2 - 3x) = 2 \Rightarrow$

$x^4 - 3x^3 - 3x^3 + 9x^2 + x^2 - 3x - 2 = 0 \Rightarrow x^4 - 6x^3 + 10x^2 - 3x - 2 = 0$

$\underset{Ruffini}{\Longrightarrow} (x-1)(x-2)(x^2 - 3x - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x - 1 = 0 \rightarrow \boxed{x = 1} \\ x - 2 = 0 \rightarrow \boxed{x = 2} \\ x^2 - 3x - 1 = 0 \rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{9+4}}{2} \end{cases}$

$\boxed{x < {\frac{3+\sqrt{13}}{2} \atop \frac{3-\sqrt{13}}{2}}}$

12.-

a) $3^{x-5} = 0'\widehat{3} \qquad 0'\widehat{3} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$

$3^{x-5} = \frac{1}{3} = 3^{-1} \Rightarrow x - 5 = -1 \Rightarrow \boxed{x = 4}$

b) $2^{x-5} + 2^{x-3} = 5 \Rightarrow \frac{2^x}{2^5} + \frac{2^x}{2^3} = 5 \xrightarrow{2^x = t}$

$\Rightarrow \frac{t}{32} + \frac{t}{8} = 5 \Rightarrow t + 4t = 160 \Rightarrow 5t = 160 \Rightarrow t = 32$

$2^x = 32 = 2^5 \Rightarrow \boxed{x = 5}$

c) $4^x+4^{x-1}+3\cdot 4^{x-2}=23$ $\quad 4^x=t$

$$4^x+\frac{4^x}{4}+\frac{3\cdot 4^x}{4^2}=23 \Rightarrow t+\frac{t}{4}+\frac{3t}{16}=23 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 16t+4t+3t=368 \Rightarrow 23t=368 \Rightarrow t=16$$

$$4^x=16=4^2 \Rightarrow \boxed{x=2}$$

d) $3^x+3^{x-1}+3^{x-2}=13 \Rightarrow 3^x+\frac{3^x}{3}+\frac{3^x}{9}=13 \xRightarrow{3^x=t}$

$$\Rightarrow t+\frac{t}{3}+\frac{t}{9}=13 \Rightarrow 9t+3t+t=13\cdot 9 \Rightarrow 13t=13\cdot 9$$

$$\Rightarrow t=9 \Rightarrow 3^x=9 \rightarrow \boxed{x=2}$$

e) $9^{x+1}-28\cdot 3^x+3=0 \Rightarrow 3^{2x+2}-28\cdot 3^x+3=0 \quad (3^x=t)$

$$\Rightarrow 9t^2-28t+3=0 \Rightarrow t=\frac{28\pm\sqrt{28^2-4\cdot 9\cdot 3}}{18}=\frac{28\pm 26}{18} \begin{cases} 3 \\ 1/9 \end{cases}$$

$$3^x=3 \Rightarrow \boxed{x=1}$$

$$3^x=\frac{1}{9}=3^{-2} \Rightarrow \boxed{x=-2}$$

f) $128^{x+1}=2^{x^2-x-2} \xRightarrow{128=2^7} 2^{7x+7}=2^{x^2-x-2}$

Igualando exponentes queda $7x+7=x^2-x-2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow 0=x^2-8x-9 \Rightarrow \boxed{x \begin{cases} 9 \\ -1 \end{cases}}$$

g) $2^x+2^{x+1}+2^{x+2}=7 \xRightarrow[2^x=t]{} t+2t+4t=7 \Rightarrow 7t=7 \Rightarrow t=1$

$$2^x=1 \rightarrow \boxed{x=0}$$

h) $9^x-2\cdot 3^{x+2}+81=0 \xRightarrow{2^x=t} t^2-2\cdot t\cdot 9+81=0$

$$(3^x)^2-2\cdot 3^x\cdot 3^2+81=0$$

$$t^2-18t+81=0$$

$$(t-9)^2=0 \Rightarrow t=9 \text{ (doble)}$$

Si $3^x=9 \Rightarrow \boxed{x=2}$

i) $4^{x+1}+2^{x+3}-320=0$

$$2^{2x+2}+2^x\cdot 2^3-320=0$$

$2^x=t$

$$4\cdot(2^x)^2+8\cdot 2^x-320=0$$

$$4t^2+8t-320=0$$

$$t^2+2t-80=0$$

$$t=\frac{-2\pm\sqrt{4+320}}{2}=\frac{-2\pm 18}{2} \begin{cases} 8 \\ -5 \text{ no} \end{cases}$$

Si $2^x=8=2^3 \Rightarrow \boxed{x=3}$

Si $2^x=-5$ no obtenemos solución

j) $5^{x+1} = 10 + 3\cdot 5^{2-x}$

$5\cdot 5^x = 10 + 3\cdot 5^2\cdot \frac{1}{5^x}$

si $5^x = t \Rightarrow 5t = 10 + \frac{75}{t}$

$5t^2 = 10t + 75$

$5t^2 - 10t - 75 = 0$

$t^2 - 2t - 15 = 0$

$t \begin{cases} 5 \\ -3 \end{cases}$

si $5^x = 5 \Rightarrow \boxed{x=1}$

si $5^x = -3 \Rightarrow$ No hay soluc.

k) $6^{1-x} + 6^x = 7$

$\frac{6}{6^x} + 6^x = 7 \xrightarrow{6^x = t} \frac{6}{t} + t = 7 \Rightarrow 6 + t^2 = 7t$

$t^2 - 7t + 6 = 0 \Rightarrow t \begin{cases} 1 \\ 6 \end{cases}$

si $6^x = 1 \Rightarrow x = 0$

si $6^x = 6 \Rightarrow x = 1$

13.- a) $\log x = 1 + \log(22-x)$

$\log x = \log 10 + \log(22-x)$

$\log x = \log(10(22-x))$

$x = 220 - 10x$

$11x = 220$

$\boxed{x = 20}$ válida

b) $\log(3x-1) - \log(2x+3) = -\log 25 + 1$

$\log\left(\frac{3x-1}{2x+3}\right) = -\log 25 + \log 10$

$\log\left(\frac{3x-1}{2x+3}\right) = \log\left(\frac{10}{25}\right)$

$\frac{3x-1}{2x+3} = \frac{10}{25} \Rightarrow$

$75x - 25 = 20x + 30 \Rightarrow \boxed{x = 1}$ válida

c) $2\log(5x+4) - \log 4 = \log(x+4)$

$\log\left(\frac{(5x+4)^2}{4}\right) = \log(x+4)$

$\frac{(5x+4)^2}{4} = x+4$

$25x^2 + 16 + 40x = 4x + 16$

$25x^2 + 36x = 0$

$x(25x+36) = 0$

$\boxed{x = 0}$

$\boxed{x = \frac{-36}{25} = -1'44}$ válidas

d) $\frac{\log(5+x^2)}{\log(2-x)} = 2$

$\log(5+x^2) = 2\log(2-x)$

$\log(5+x^2) = \log(2-x)^2$

$5 + \cancel{x^2} = 4 + \cancel{x^2} - 4x$

$4x = -1$

$\boxed{x = \frac{-1}{4} = -0'25}$

Es válida porque no hace negativo o cero ningún argumento de log.

e) $(x^2-5x+9)\cdot \log 2 + \log 125 = 3$

$\log 2^{x^2-5x+9} + \log 5^3 = \log 10^3 \Rightarrow \log(2^{x^2-5x+9}\cdot 5^3) = \log 10^3$

$2^{x^2-5x+9}\cdot 5^3 = 10^3 \Rightarrow \underline{x^2-5x+9=3}$

Resolviendo: $x^2-5x+9=3 \Rightarrow x^2-5x+6=0$ $\boxed{x \begin{smallmatrix} 2 \\ 3 \end{smallmatrix}}$

f) $2\log x - \log(x-16) = 2$

$\log x^2 - \log(x-16) = \log 10^2 \Rightarrow \log \frac{x^2}{x-16} = \log 100$

$\Rightarrow \frac{x^2}{x-16} = 100 \Rightarrow x^2 = 100x - 1600 \Rightarrow x^2 - 100x + 1600 = 0$

$x = \frac{100 \pm \sqrt{10000-6400}}{2} = \frac{100 \pm 60}{2}$ $\boxed{\begin{smallmatrix} 80 \\ 20 \end{smallmatrix}}$

g) $\log(x+1) = \log(5x-13) - \log(x-3)$

$\log(x+1) = \log \frac{5x-13}{x-3} \Rightarrow x+1 = \frac{5x-13}{x-3} \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2-2x-3 = 5x-13 \Rightarrow x^2-7x+10=0 \Rightarrow x \begin{smallmatrix} 2 \\ 5 \end{smallmatrix}$

$x=2$ no puede ser válida porque $\log(5\cdot 2-13) = \log(-3)$ no existe.

Por tanto $\boxed{x=5}$

h) $\frac{\log 2 + \log(11-x^2)}{\log(5-x)} = 2 \Rightarrow \log[2(11-x^2)] = 2\log(5-x)$

$\Rightarrow \log(22-2x^2) = \log(5-x)^2 \Rightarrow 22-2x^2 = 25+x^2-10x$

$\Rightarrow 0 = 3x^2-10x+3 \Rightarrow x = \frac{10 \pm \sqrt{100-4\cdot 3\cdot 3}}{6} = \frac{10 \pm 8}{6}$ $\boxed{\begin{smallmatrix} 3 \\ \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \end{smallmatrix}}$