

Matemáticas 1º Bachillerato

1. (2 ptos.) Halla en forma binómica y representa la solución obtenida:

a) $3 + 2i \cdot (-1 + i) - (5 - 4i)$

$$3 + 2i \cdot (-1 + i) - (5 - 4i) = 3 - 2i + 2i^2 - 5 + 4i = (3 - 2 - 5) + (-2 + 4)i = -4 + 2i$$

b) $\frac{(3-i) \cdot i^3}{1-2i}$

$$\frac{(3-i) \cdot i^3}{1-2i} = \frac{3i^3 - i^4}{1-2i} = \frac{-3i - 1}{1-2i} = \frac{-1-3i}{1-2i} = \frac{(-1-3i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)} = \frac{(-1+6) + (-2-3)i}{1^2+2^2} = \frac{5-5i}{5} = 1-i$$

2. (2 ptos.)

a) Calcula a y b para que $(2 - ai) \cdot (3 - bi) = 8 + 4i$

$$(6 + ab) + (-2b - 3a)i = 8 + 4i \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} 6 + ab = 8 \\ -2b - 3a = 4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = \frac{2}{b} \\ -2b - 3 \cdot \frac{2}{b} = 4 \end{cases} \rightarrow \frac{-2b^2 - 6b}{b} = 4 \rightarrow -2b^2 - 6b = 4b \rightarrow -2b^2 - 10b = 0 \rightarrow -2b(b+5) = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} b = 0 \\ b = -5 \end{cases}$$

b) Realiza la operación, expresando el resultado en forma binómica: $\frac{20_{\pi/3}}{4_{\pi/6}}$

$$\frac{20_{\pi/3}}{4_{\pi/6}} = \frac{20}{4} \frac{e^{i\pi/3}}{e^{i\pi/6}} = 5 \frac{e^{i\pi/3}}{e^{i\pi/6}} = 5(\cos \frac{\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{3}) = 5(\frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2}) = \frac{5\sqrt{3}}{2} + \frac{5}{2}i$$

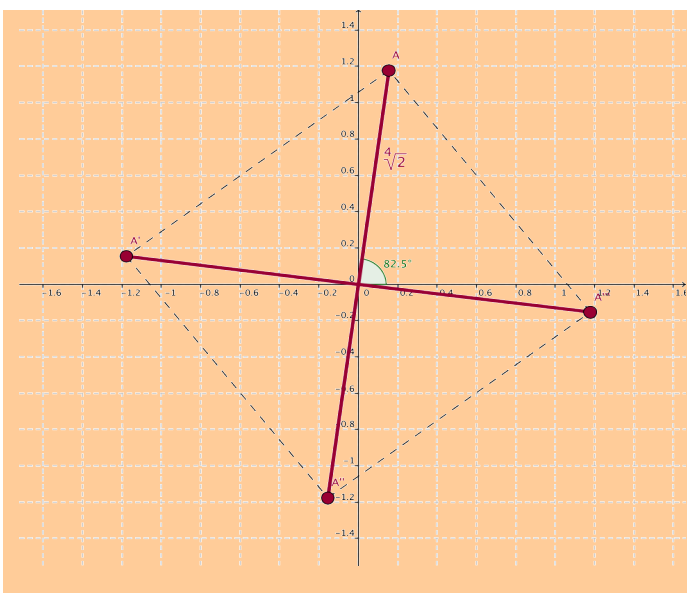
3. (1'5 ptos.) Calcula, expresando el resultado en forma binómica, y representa gráficamente las soluciones de $\sqrt[4]{\sqrt{3}-i}$

$$|\sqrt{3}-i| = \sqrt{\sqrt{3}^2 + (-1)^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{-1}{\sqrt{3}} \rightarrow \varphi = \operatorname{arctg} \frac{-1}{\sqrt{3}} = 330^\circ \text{ (ya que el afijo de } \sqrt{3}-i \text{ está en el cuarto cuadrante)}$$

Por tanto,

$$\sqrt[4]{\sqrt{3}-i} = \sqrt[4]{2_{330}} = \sqrt[4]{2_{\frac{330+k \cdot 360}{4}}} = \begin{pmatrix} \sqrt[4]{2_{82'5}} \\ \sqrt[4]{2_{172'5}} \\ \sqrt[4]{2_{262'5}} \\ \sqrt[4]{2_{352'5}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt[4]{2}(0'13 + 0'99i) \\ \sqrt[4]{2}(-0'99 + 0'13i) \\ \sqrt[4]{2}(-0'99 - 0'13i) \\ \sqrt[4]{2}(0'99 - 0'13i) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0'13 \cdot \sqrt[4]{2} + 0'99 \cdot \sqrt[4]{2}i \\ -0'99 \cdot \sqrt[4]{2} + 0'13 \cdot \sqrt[4]{2}i \\ -0'99 \cdot \sqrt[4]{2} - 0'13 \cdot \sqrt[4]{2}i \\ 0'99 \cdot \sqrt[4]{2} - 0'13 \cdot \sqrt[4]{2}i \end{pmatrix}$$



4. (1 pto.) Determina el valor de “a” para que el número complejo $(3 - 6i) \cdot (4 + a \cdot i)$

a) Sea imaginario puro

$$(3 - 6i) \cdot (4 + a \cdot i) = (12 + 6a) + (3a - 24) \cdot i$$

Para ser imaginario puro la parte real debe ser nula: $12 + 6a = 0 \rightarrow 6a = -12 \rightarrow a = -2$

b) Tenga módulo 30

$$\text{Si } \varphi = 30^\circ \rightarrow \text{tg } 30 = (3a - 24)/(12 + 6a) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{3a - 24}{12 + 6a} \rightarrow 12 + 6a = 3\sqrt{3}a - 24\sqrt{3}$$

$$\rightarrow (6 - 3\sqrt{3})a = -12 - 24\sqrt{3} \rightarrow a = \frac{-12 - 24\sqrt{3}}{6 - 3\sqrt{3}} = \frac{-12(1 + 2\sqrt{3})}{3(2 - \sqrt{3})} = \frac{-4(1 + 2\sqrt{3})}{2 - \sqrt{3}}$$

5. (2 ptos.) Resuelve las ecuaciones, expresando el resultado en forma binómica:

a) $z^3 + 8i = 0$

$$z^3 + 8i = 0 \rightarrow z^3 = -8i$$

$$z = \sqrt[3]{-8i} = \sqrt[3]{8_{270^\circ}} = \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{e^{i \cdot 270^\circ}} = 2 \cdot \sqrt[3]{e^{i \cdot (270^\circ + k \cdot 360^\circ)}} = 2 \cdot \sqrt[3]{e^{i \cdot (270^\circ + k \cdot 360^\circ)}} = \begin{cases} 2_{90^\circ} = 2 \cdot i \\ 2_{210^\circ} = 2(\cos 210 + i \cdot \text{sen} 210) = 2\left(\frac{-\sqrt{3}}{2} + i \cdot \frac{1}{2}\right) = -\sqrt{3} + i \\ 2_{330^\circ} = 2(\cos 330 + i \cdot \text{sen} 330) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i \cdot \frac{1}{2}\right) = \sqrt{3} - i \end{cases}$$

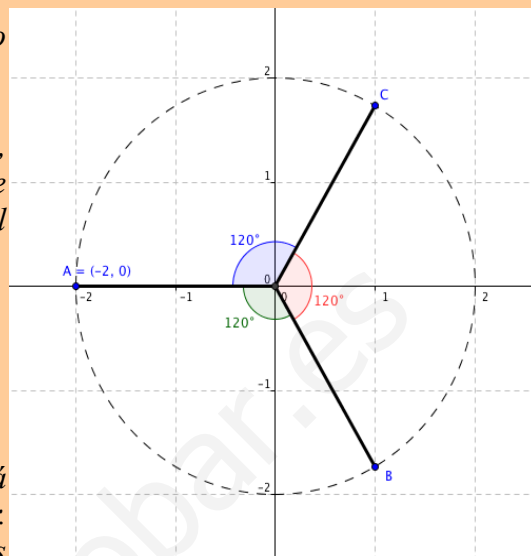
b) $z^2 + z + 1 = 0$

$$z = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{3} \cdot i}{2} = \begin{cases} \frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot i \\ \frac{-1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot i \end{cases}$$

6. (1'5ptos.) Halla las coordenadas de los vértices de un triángulo equilátero centrado en el origen de coordenadas del que sabemos que una de ellas es $(-2, 0)$.

Supongamos que el vértice $A(-2, 0)$ es el afijo del complejo $z_A = -2 + 0 \cdot i = 2_\pi$

Puesto que el triángulo equilátero está centrado en el origen, la longitud del segmento que une este punto con cada vértice es la misma y el ángulo que forma ese segmento el que une el origen con el siguiente vértice es de $120^\circ (= 360^\circ / 3)$.



En consecuencia, el afijo correspondiente al vértice B tendrá el mismo módulo que el de A y un argumento 120° mayor. Teniendo en cuenta las propiedades del producto, sabemos que esto se obtiene multiplicando el complejo z_A por otro que tenga módulo 1 y argumento 120° . Por tanto:

$$z_B = z_A \cdot 1_{120} \quad \text{y} \quad z_C = z_B \cdot 1_{120}$$

$$z_B = 2_{180} \cdot 1_{120} = 2_{300} = 2(\cos 300 + i \cdot \text{sen } 300) = 2\left(\frac{1}{2} + i \cdot \frac{-\sqrt{3}}{2}\right) = 1 - \sqrt{3} \cdot i \rightarrow B(1, -\sqrt{3})$$

$$z_C = 2_{300} \cdot 1_{120} = 2_{60} = 2(\cos 60 + i \cdot \text{sen } 60) = 2\left(\frac{1}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 + \sqrt{3} \cdot i \rightarrow C(1, \sqrt{3})$$