1) Demostrar que 2 tg a $\text{sen}^2 \dfrac{a}{2}$ + sen a = tg a *(2 puntos)*

2) Resolver la ecuación sen $2x = \cos x$ *(2 puntos)*

3) Resolver un triángulo sabiendo que $a = 5$ cm, $b = 4$ cm y $C = 47º$ (ángulo comprendido) *(2 puntos)*

4) a) Calcular *cos* 105º sin utilizar la calculadora, expresando 105º en función de otros ángulos cuyas razones trigonométricas sean conocidas. *(1 punto)*

   b) Sin usar la calculadora, hallar cos 2370º. *(1 punto)*

5) a) Dado $z = -2 - 2\sqrt{3}\, i$, calcular z^{14} *(1 punto)*

   b) Calcular las raíces cúbicas de –1 en el conjunto de los complejos *(1 punto)*

SOLUCIONES

1) Demostrar que $2 \text{ tg } a \text{ sen}^2 \frac{a}{2} + \text{sen } a = \text{tg } a$ *(2 puntos)*

$$2 \text{ tg } a \text{ sen}^2 \frac{a}{2} + \text{sen } a = 2 \text{ tg } a \left(\sqrt{\frac{1-\cos a}{2}}\right)^2 + \text{sen } a = 2 \text{ tg } a \frac{1-\cos a}{2} + \text{sen } a =$$

$$= \text{tg } a\,(1 - \cos a) + \text{sen } a = \text{tg } a - \text{tg } a \cos a + \text{sen } a = \text{tg } a - \frac{\text{sen } a}{\cos a} \cos a + \text{sen } a =$$

$$= \text{tg } a - \text{sen } a + \text{sen } a = \text{tg } a$$

2) Resolver la ecuación $\text{sen } 2x = \cos x$ *(2 puntos)*

$$\text{sen } 2x = \cos x \Rightarrow 2 \text{ sen } x \cos x = \cos x \Rightarrow 2 \text{ sen } x \cos x - \cos x = 0 \Rightarrow$$

$$(\cos x)(2\text{sen } x - 1) = 0 \Rightarrow$$

Como un producto vale cero si, y sólo si alguno de los factores es cero, se tienen dos posibilidades:

a) $\cos x = 0 \Rightarrow \boxed{x = 90^\circ + 360^\circ k \ \text{ ó } \ x = 270^\circ + 360^\circ k}$ (que pueden escribirse en una sola fórmula como $\boxed{x = 90^\circ + 180^\circ k}$), $\forall k \in Z$.

b) $2\text{sen } x - 1 = 0 \Rightarrow 2\text{sen } x = 1 \Rightarrow \text{sen } x = ½ \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x = 30^\circ + 360^\circ k \ \text{ ó} \\ x = 150^\circ + 360^\circ k \end{cases}}$ $\forall k \in Z.$

3) Resolver un triángulo sabiendo que $a = 5$ cm, $b = 4$ cm y $C = 47^\circ$ (ángulo comprendido) *(2 puntos)*

Por los datos que tenemos, hemos de utilizar el teorema del coseno:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C = 25 + 16 - 2\cdot 5\cdot 4 \cos 47^\circ \Rightarrow \boxed{c = 3{,}70 \text{ m}}$$

Según el T. del seno:

$$\frac{a}{\text{sen } A} = \frac{c}{\text{sen } C} \Rightarrow \text{sen } A = \frac{a \text{ sen } C}{c} = \frac{5 \text{ sen } 47^\circ}{3{,}70} \Rightarrow A = 80{,}83^\circ \text{ ó } A = 180^\circ - 80{,}83^\circ = 99{,}17^\circ.$$

En principio, ambas soluciones serían válidas, porque sumadas con el ángulo C no llegan a 180º, por lo que podría existir B en ambos casos. Sin embargo, cuando un problema de este tipo se puede comenzar con el Teorema del coseno, sólo hay una solución válida. Como no tenemos forma de saber cuál de las dos es la correcta, desechamos el procedimiento y recalculamos A usando el teorema del coseno:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \Rightarrow 25 = 16 + 3{,}70^2 - 2\cdot 4\cdot 3{,}70 \cdot \cos A \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{25 - 16 - 3{,}70^2}{-2\cdot 4\cdot 3{,}70} = \cos A \Rightarrow \boxed{A = 80{,}83^\circ = 80^\circ\ 50'\ 4.18''}.$$

Por tanto, $\boxed{B = 180^\circ - A - C = 52{,}17^\circ = 52^\circ\ 9'\ 55{,}82''}$.

4) a) Calcular *cos* 105º sin utilizar la calculadora, expresando 105º en función de otros ángulos cuyas razones trigonométricas sean conocidas. *(1 punto)*

$$\boxed{\cos 105^\circ} = \cos(60^\circ + 45^\circ) = \cos 60^\circ \cos 45^\circ - \text{sen } 60^\circ \text{ sen } 45^\circ = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} =$$

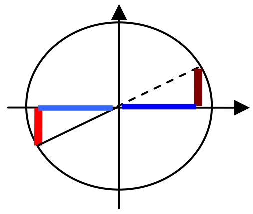
$$\boxed{\frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}}.$$

b) Sin usar la calculadora, hallar $\cos 2370^{\circ}$. *(1 punto)*

Dividiendo 2370º entre 360º, se tiene que $2370^{\circ} = 6\cdot 360^{\circ} + 210^{\circ}$. Es decir, que tras 6 vueltas completas, 2370º se sitúa en el mismo lugar de la circunferencia que 210º. Razonando sobre la circunferencia trigonométrica, tendremos, por tanto:

$$\cos 2370^{\circ} = \cos 210^{\circ} = -\cos(210^{\circ} - 180^{\circ}) =$$

$$= -\cos 30^{\circ} = \boxed{-\frac{\sqrt{3}}{2}}$$



5) a) Dado $z = -2 - 2\sqrt{3}\,i$, calcular z^{14} *(1 punto)*

Pasamos z a polares.

$$|z| = \sqrt{(-2)^2 + (-2\sqrt{3})^2} = \sqrt{4 + (-2)^2(\sqrt{3})^2} = \sqrt{4 + 4\cdot 3} = \sqrt{16} = 4$$

Como $\operatorname{arctg} \dfrac{-2\sqrt{3}}{-2} = \operatorname{arctg} \sqrt{3} = 60^{\circ}$, pero estamos en el tercer cuadrante, al ser negativas la parte real y la imaginaria $\Rightarrow$ $\alpha = 240^{\circ}$.

Luego:

$$z^{14} = (4_{240^{\circ}})^{14} = (4^{14})_{240^{\circ}\cdot 14} = (4^{14})_{3360^{\circ}} = \boxed{(4^{14})_{120^{\circ}} = 268.435.456_{120^{\circ}}}$$

puesto que $3360^{\circ} = 360^{\circ}\cdot 9 + 120^{\circ}$.

b) Calcular las raíces cúbicas de –1 en el conjunto de los complejos *(1 punto)*

Comenzamos escribiendo –1 en polares. Como su afijo está en la parte negativa del eje real $\Rightarrow$ $-1 = 1_{180^{\circ}}$. Luego nos piden todas las soluciones de $\sqrt[3]{1_{180^{\circ}}}$.

Pues bien, el módulo de las tres soluciones será: $\sqrt[3]{1} = 1$.

Y sus argumentos:

$$\alpha_1 = \frac{180^{\circ}+360^{\circ}\cdot 0}{3} = 60^{\circ} \quad \Rightarrow \quad \boxed{z_1 = 1_{60^{\circ}}}$$

$$\alpha_2 = \frac{180^{\circ}+360^{\circ}\cdot 1}{3} = \frac{180^{\circ}}{3} + \frac{360^{\circ}}{3}\cdot 1 = 60^{\circ} + 120^{\circ} = 180^{\circ} \quad \Rightarrow \quad \boxed{z_2 = 1_{180^{\circ}} = -1}$$

$$\alpha_3 = \frac{180^{\circ}+360^{\circ}\cdot 2}{3} = \frac{180^{\circ}}{3} + \frac{360^{\circ}}{3}\cdot 2 = 60^{\circ} + 120^{\circ}\cdot 2 = 300^{\circ} \quad \Rightarrow \quad \boxed{z_3 = 1_{300^{\circ}}}$$