1) Conociendo que cos $\alpha = 1/3$ y que α está en el cuarto cuadrante, hallar, sin usar calculadora, el resto de las razones trigonométricas de dicho ángulo. Posteriormente, con ayuda de la calculadora, decir cuánto vale el ángulo. *(2 puntos)*

2) Resolver un triángulo sabiendo que A=96º, a=12 m y b=9 m *(2 puntos)*

3) Demostrar que $\operatorname{tg}(45º+x) - \operatorname{tg}(45º-x) = 2\operatorname{tg} 2x$ *(2 puntos)*

4) Resolver la ecuación $\cos 2x + 5\cos^2 x = 6$ *(2 puntos)*

5) a) Hallar $(-1+i\sqrt{3})^{15}$ *(1 punto)*

b) Hallar los cinco resultados de $\sqrt[5]{-243}$ *(1 punto)*

SOLUCIONES

1) Conociendo que cos α = 1/3 y que α está en el cuarto cuadrante, hallar, sin usar calculadora, el resto de las razones trigonométricas de dicho ángulo. Posteriormente, con ayuda de la calculadora, decir cuánto vale el ángulo. *(2 puntos)*

Como $\text{sen}^2\,\alpha + \cos^2\alpha = 1 \;\Rightarrow\; \text{sen}^2\,\alpha = 1 - \cos^2\alpha = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9} \;\Rightarrow\; \boxed{\text{sen}\,\alpha} = -\sqrt{\frac{8}{9}} =$

$= -\frac{\sqrt{8}}{3} = \boxed{-\frac{2\sqrt{2}}{3}}$, donde el signo negativo es por ser del cuarto cuadrante.

Por tanto, $\boxed{\text{tg}\,\alpha} = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} = \frac{-\frac{2\sqrt{2}}{3}}{\frac{1}{3}} = \boxed{-2\sqrt{2}}$.

Con lo que: $\boxed{\text{cotg}\,\alpha} = \frac{1}{-2\sqrt{2}} = -\frac{1}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2\cdot 2} = \boxed{-\frac{\sqrt{2}}{4}}$; $\boxed{\sec\alpha} = \frac{1}{1/3} = \boxed{3}$;

$\boxed{\text{cosec}\,\alpha} = \frac{1}{-\frac{2\sqrt{2}}{3}} = -\frac{3}{2\sqrt{2}} = -\frac{3}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \boxed{-\frac{3\sqrt{2}}{4}}$

Como cos α = 1/3 ⇒ α = 70,53º. Pero considerando que es del 4º cuadrante, el resultado real es: $\boxed{\alpha}$ = 360º – 70,53º = $\boxed{289{,}47^\circ = 289^\circ\ 28'\ 16''}$.

2) Resolver un triángulo sabiendo que A=96º, *a*=12 m y *b*=9 m *(2 puntos)*

Por el T. de los senos:

$$\frac{a}{\text{sen}\,A} = \frac{b}{\text{sen}\,B} \;\Rightarrow\; \text{sen}\,B = \frac{b\,\text{sen}\,A}{a} = \frac{9\,\text{sen}\,96^\circ}{12} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{B = 48{,}24^\circ} \text{ ó } B = 180^\circ - 48{,}24^\circ = 131{,}76^\circ.$$

Pero esta segunda solución no es válida, porque *A* + *B* > 180º, con lo que no puede completarse el triángulo.

Entonces: $\boxed{C}$ = 180º – *A* – *B* = $\boxed{35{,}76^\circ}$. Y además:

$$\frac{a}{\text{sen}\,A} = \frac{c}{\text{sen}\,C} \;\Rightarrow\; \boxed{c} = \frac{a\,\text{sen}\,C}{\text{sen}\,A} = \frac{12\,\text{sen}\,35{,}76^\circ}{\text{sen}\,96^\circ} = \boxed{7{,}05\text{ m}}$$

3) Demostrar que $\text{tg}\,(45^\circ+x) - \text{tg}\,(45^\circ-x) = 2\text{tg}\,2x$ *(2 puntos)*

$$\boxed{\text{tg}\,(45^\circ+x) - \text{tg}\,(45^\circ-x)} = \frac{\text{tg}\,45^\circ+\text{tg}\,x}{1-\text{tg}\,45^\circ\,\text{tg}\,x} - \frac{\text{tg}\,45^\circ-\text{tg}\,x}{1+\text{tg}\,45^\circ\,\text{tg}\,x} = \frac{1+\text{tg}\,x}{1-\text{tg}\,x} - \frac{1-\text{tg}\,x}{1+\text{tg}\,x} =$$

$$= \frac{(1+\text{tg}\,x)^2 - (1-\text{tg}\,x)^2}{(1-\text{tg}\,x)(1+\text{tg}\,x)} = \frac{1+2\text{tg}\,x+\text{tg}^2\,x-(1-2\text{tg}\,x+\text{tg}^2\,x)}{1^2-\text{tg}^2 x} =$$

$$= \frac{1+2\text{tg}\,x+\text{tg}^2\,x-1+2\text{tg}\,x-\text{tg}^2\,x}{1-\text{tg}^2 x} = \frac{4\text{tg}\,x}{1-\text{tg}^2 x} = 2\cdot\frac{2\text{tg}\,x}{1-\text{tg}^2 x} = \boxed{2\text{ tg }2x}$$

4) Resolver la ecuación $\cos 2x + 5\cos^2 x = 6$ *(2 puntos)*

$\cos 2x + 5\cos^2 x = 6 \;\Rightarrow\; \cos^2 x - \text{sen}^2\, x + 5\cos^2 x = 6 \;\Rightarrow\; 6\cos^2 x - (1 - \cos^2 x) = 6$

$\Rightarrow \; 7\cos^2 x - 1 = 6 \;\Rightarrow\; 7\cos^2 x = 7 \;\Rightarrow\; \cos^2 x = 1 \;\Rightarrow\; \cos x = \pm 1.$

En consecuencia:

- Si $\cos x = -1 \;\Rightarrow\; \boxed{x = 180^\circ + 360^\circ k, \quad \forall k \in Z}$
- Si $\cos x = 1 \;\Rightarrow\; \boxed{x = 0^\circ + 360^\circ k, \quad \forall k \in Z}$

5) a) Hallar $(-1+i\sqrt{3})^{15}$ *(1 punto)*

Lo primero es pasar la base de la potencia a forma polar, para poder operar fácilmente.

- El módulo será $\sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$.
- Como $\operatorname{arctg} \dfrac{\sqrt{3}}{-1} = -60^\circ$, y el complejo está en el segundo cuadrante (pues su parte real es negativa, y la parte imaginaria positiva) $\Rightarrow \; \alpha = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$

Por tanto, $\boxed{(-1+i\sqrt{3})^{15}} = (2_{120^\circ})^{15} = (2^{15})_{15\cdot 120^\circ} = 32.768_{1.800^\circ} = 32.768_{0^\circ} = \boxed{32.768}$

Ya que $1.800^\circ = 5\cdot 360^\circ + 0^\circ$.

b) Hallar los cinco resultados de $\sqrt[5]{-243}$ *(1 punto)*

Para empezar, es imprescindible poner el radicando en polares. Lo que es fácil: $-243 = 243_{180^\circ}$ pues el número está en la parte negativa del eje real.

Entonces, las cinco raíces tendrán como modulo $\sqrt[5]{243} = 3$. Sus argumentos serán:

por lo que los resultados finales son:

$\alpha_1 = \dfrac{180}{5} = 36^\circ \qquad \Rightarrow \quad \boxed{z_1 = 3_{36^\circ}}$

$\alpha_2 = \dfrac{180}{5} + \dfrac{360^\circ}{5}\cdot 1 = 36^\circ + 72^\circ = 108^\circ \qquad \Rightarrow \quad \boxed{z_2 = 3_{108^\circ}}$

$\alpha_3 = \dfrac{180}{5} + \dfrac{360^\circ}{5}\cdot 2 = 36^\circ + 72^\circ\cdot 2 = 180^\circ \qquad \Rightarrow \quad \boxed{z_3 = 3_{180^\circ} = -3}$

$\alpha_4 = \dfrac{180}{5} + \dfrac{360^\circ}{5}\cdot 3 = 36^\circ + 72^\circ\cdot 3 = 252^\circ \qquad \Rightarrow \quad \boxed{z_4 = 3_{252^\circ}}$

$\alpha_5 = \dfrac{180}{5} + \dfrac{360^\circ}{5}\cdot 4 = 36^\circ + 72^\circ\cdot 4 = 324^\circ \qquad \Rightarrow \quad \boxed{z_5 = 3_{324^\circ}}$