1) Comprobar que los vectores $\vec{a}$=(1,1,3) $\vec{b}$=(-1,2,0) y $\vec{c}$=(1,3,5) son linealmente dependientes. Encontrar la ecuación del plano que contiene a esos vectores y al punto Q(-1,0,1).

$$rg(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = rg\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \to \left\langle \begin{matrix} F_2 = f_2 + f_1 \\ F_3 = f_3 - f_1 \end{matrix} \right\rangle \to rg\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \to \langle F_3 = 3f_3 - 2f_2 \rangle \to rg\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2 \to$$

Los vectores son linealmente dependientes.

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x+1 & y & z-1 \\ 1 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \to \pi \equiv 2x + y - z + 3 = 0$$

2) Se consideran cinco puntos de coordenadas P(1,-1,2) Q(-2,2,3) R(-3,3,3) S(-3,3,0) y T(-3,4,3). Razona si forman parte del mismo plano

Con los cinco puntos construimos cuatro vectores y analizamos su rango

$$rg(\overrightarrow{PQ},\overrightarrow{PR},\overrightarrow{PS},\overrightarrow{PT}) = rg\begin{pmatrix} -3 & 3 & 1 \\ -4 & 4 & 1 \\ -4 & 4 & -2 \\ -4 & 5 & 1 \end{pmatrix} \to \left\langle \begin{matrix} F_2 = 3f_2 - 4f_1 \\ F_3 = 3f_3 - 4f_1 \\ F_4 = 3f_4 - 4f_1 \end{matrix} \right\rangle \to rg\begin{pmatrix} -3 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -10 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} \to$$

$$\langle F_3 = f_3 - 10f_2 \rangle \to rg\begin{pmatrix} -3 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} = 3 \to \textit{Los vectores no son coplanarios.}$$

3) Sean los vectores $\vec{u} = (-1,2,3)$ $\vec{v} = (2,5,-2)$ $\vec{x} = (4,1,3)$ y $\vec{z} = (4,1,-8)$

a) ¿Se puede expresar $\vec{x}$ como combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{v}$? Si es así escribe dicha combinación lineal.

$$(4,1,3) = a(-1,2,3) + b(2,5,-2) \to \left.\begin{matrix} 4 = -a + 2b \\ 1 = 2a + 5b \\ 3 = 3a - 2b \end{matrix}\right\} \to \left\{\begin{matrix} \text{Resolviendo las dos} \\ \text{primeras ecuaciones sale } a = -2 \ b = 1 \to \\ \text{pero } 3 \neq 3(-2) - 2 \cdot 1 \end{matrix}\right.$$

el sistema es incompatible $\to \vec{x}$ *no puede expresarse como combinación lineal de* $\vec{u}$ *y* $\vec{v}$

b) ¿Se puede expresar $\vec{z}$ como combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{v}$? Si es así escribe dicha combinación lineal.

$$(4,1,-8) = a(-1,2,3) + b(2,5,-2) \to \left.\begin{matrix} 4 = -a + 2b \\ 1 = 2a + 5b \\ -8 = 3a - 2b \end{matrix}\right\} \to \left\{\begin{matrix} \text{Resolviendo las dos primeras} \\ \text{ecuaciones sale } a = -2 \ b = 1 \\ -8 = 3(-2) - 2 \cdot 1 \end{matrix}\right. \to \vec{z} = -2\vec{u} + \vec{v}$$

c) ¿Son $\vec{u}$ $\vec{v}$ y $\vec{z}$ linealmente independientes? Justifica la respuesta.

$\vec{z} = -2\vec{u} + \vec{v} \to rg(\vec{z}, \vec{u}, \vec{v}) = 2 \to$ *Son linealmentes dependientes*

4) Dados los vectores $\vec{u} = (1,-1,2)$ y $\vec{v}$ = (3,1,-1) Halla el conjunto de vectores que siendo perpendiculares a $\vec{u}$ pertenezcan al plano generado por $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

Si pertenecen al plano generado por $\vec{u}$ *y* $\vec{v}$ *puede expresarse como combinación lineal de* $\vec{u}$ *y* $\vec{v}$

$\vec{w} = a\vec{u} + b\,\vec{v} = a(1,-1,2) + b(3,1,-1) = (a+3b, -a+b, 2a-b) \to$

Si $\vec{w}$ *es perpendicular a* $\vec{u}$ $\to \vec{w} \cdot \vec{u} = 0 \to a + 3b - (-a+b) + 2(2a-b) = 0 \to a + 3b + a - b + 4a - 2b = 0 \to$

$a = 0$ *y* b *puede tomar cualquier valor* $\to \vec{w} = \{(3b, b, -b) \mid b \in \Re\}$

5) Dada la recta r determinada por los puntos A(1,1,1) y B(3,1,2) y la recta $s \equiv \begin{cases} x-2z-1=0 \\ y-2=0 \end{cases}$ averigua su posición relativa y halla, si existe, el plano que las contiene.

$$r \equiv \begin{cases} A(1,1,1) \\ B(3,1,2) \end{cases} \rightarrow r \begin{cases} A(1,1,1) \\ \overrightarrow{AB} = \vec{u}_r(2,0,1) \end{cases}$$

$$s \equiv \begin{cases} x-2z-1=0 \\ y-2=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=1+2z \\ y=2 \end{cases} \rightarrow \left.\begin{matrix} x=1+2t \\ y=2 \\ z=t \end{matrix}\right\} \rightarrow s \equiv \begin{cases} C(1,2,0) \\ \vec{u}_s = (2,0,1) \end{cases} \rightarrow$$

$$rg(\vec{u}_r, \vec{u}_s) = 1 \rightarrow rg(\overrightarrow{AC}, \vec{u}_r, \vec{u}_s) = rg\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 2 \rightarrow rectas\ paralelas$$

El plano que las contiene se construye:

$$\pi \equiv \begin{cases} A(1,1,1) \\ \overrightarrow{AC} = (0,1,-1) \\ \vec{u}_r = (2,0,1) \end{cases} \rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \pi \equiv x-2y-3z+3=0$$

6) Dados el punto P(2,1,1) y la recta $r \equiv \begin{cases} x=2+t \\ y=3-t \\ z=4-3t \end{cases}$ encuentra la ecuación del plano que contiene a ambos

$$r \equiv \begin{cases} x=2+t \\ y=3-t \\ z=4-3t \end{cases} \rightarrow r \equiv \begin{cases} A(2,3,4) \\ \vec{u} = (1,-1,-3) \end{cases} \rightarrow \pi \equiv \begin{cases} A(2,3,4) \\ \overrightarrow{AP} = (0,2,3) \\ \vec{u} = (1,-1,-3) \end{cases} \rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x-2 & y-3 & z-4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & -3 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow$$

$$\pi \equiv 3x-3y+2z-5=0$$

7) Calcula la ecuación del plano que contiene a la recta definida por el punto (1,1,1) y el vector (0,-5,3) y que pasa por el punto P(1,0,-5)

$$\pi \equiv \begin{cases} R(1,1,1) \\ \overrightarrow{PR} = (0,-1,-6) \\ \vec{u} = (0,-5,3) \end{cases} \rightarrow \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 0 & -1 & -6 \\ 0 & -5 & 3 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \pi \equiv x-1=0$$

8) Dadas las rectas $r \equiv \dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y+1}{1} = \dfrac{z+m}{2}$ y $s \equiv \begin{cases} x=1-2\alpha \\ y=-1+4\alpha \\ z=5-\alpha \end{cases}$ determina m para que las rectas sean secantes, y calcula, en ese caso, el punto de corte.

$$r \equiv \begin{cases} A(2,-1,-m) \\ \vec{u}_r = (2,1,2) \end{cases}; s \equiv \begin{cases} B(1,-1,5) \\ \vec{u}_s = (-2,4,-1) \end{cases} \rightarrow Si\ son\ secantes \rightarrow \begin{cases} rg(\vec{u}_r, \vec{u}_s) = 2 \\ rg(\overrightarrow{AB}, \vec{u}_r, \vec{u}_s) = 2 \end{cases} \rightarrow \begin{vmatrix} -1 & 0 & 5+m \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow 1+8(5+m)+2(5+m)+8=0 \rightarrow m=-59/10$$

Para calcular el punto de corte P se resuelve el sistema en paramétricas

$$r \equiv \begin{cases} x=2+2t \\ y=-1+t \\ z=\dfrac{59}{10}+2t \end{cases} \qquad s \equiv \begin{cases} x=1-2\alpha \\ y=-1+4\alpha \\ z=5-\alpha \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2+2t=1-2\alpha \\ -1+t=-1+4\alpha \\ \dfrac{59}{10}+2t=5-\alpha \end{cases} \rightarrow \alpha=-\frac{1}{10} \rightarrow P\left(\frac{6}{5}, -\frac{7}{5}, \frac{51}{10}\right)$$

9) Estudia, según los distintos valores que puede tomar el parámetro m las posiciones relativas del plano p y de la recta r de ecuaciones $p \equiv mx-3y+2z=1$ $r \equiv \begin{cases} 3x+y=1 \\ 2x-y+mz=1 \end{cases}$

$$\begin{cases} mx-3y+2z=1 \\ 3x+y=1 \\ 2x-y+mz=1 \end{cases} \rightarrow A=\begin{pmatrix} m & -3 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & m \end{pmatrix} \rightarrow |A|=m^2+9m-10 \rightarrow |A|=0 \rightarrow m=1;\ m=-10$$

$\otimes$ $Si\ m \neq 1\ \ m \neq -10 \rightarrow rgA = rgA^* = 3 \rightarrow \text{Recta y plano se cortan en un punto}$

$$\otimes\ Si\ m=1 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left\langle \begin{array}{l} F_2 = f_2 - 3f_1 \\ F_3 = f_3 - 2f_1 \end{array} \right\rangle \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 10 & -6 & -2 \\ 0 & 5 & -3 & -1 \end{array}\right) \langle F_3 = f_3 - 0{,}5f_2 \rangle \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 10 & -6 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$rgA = rgA^* = 2 \rightarrow \text{Recta contenida en el plano}$

$$\otimes\ Si\ m=-10 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -10 & -3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -10 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left\langle \begin{array}{l} F_2 = 10f_2 + 3f_1 \\ F_3 = 10f_3 + 2f_1 \end{array} \right\rangle \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -10 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 6 & 13 \\ 0 & -16 & -96 & 22 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\langle F_3 = f_3 + 16f_2 \rangle \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 6 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 230 \end{array}\right) \rightarrow rgA = 2\ \ rgA^* = 3 \rightarrow \text{Recta paralela al plano}$$

10) Estudia la posición relativa de los planos $\pi \equiv ax+20y+7z=1$, $\pi' \equiv 3y+z=0$, $\pi'' \equiv x-ay=1$ según los valores de a.

$$\left.\begin{array}{l} x-ay=1 \\ 3y+z=0 \\ ax+20y+7z=1 \end{array}\right\} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -a & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ a & 20 & 7 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \langle F_3 = f_3 - af_1 \rangle \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -a & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 20+a^2 & 7 & 1-a \end{array}\right) \rightarrow \left\langle \begin{array}{c} c_2 \leftrightarrow c_3 \\ \text{Las incógnitas} \\ \text{quedan } x,\ z\ y \end{array} \right\rangle \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -a & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 7 & 20+a^2 & 1-a \end{array}\right) \rightarrow \langle F_3 = f_3 - 7f_2 \rangle \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -a & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & a^2-1 & 1-a \end{array}\right) \rightarrow |A| = a^2-1 \rightarrow |A|=0 \rightarrow a=\pm 1$$

$\otimes$ $Si\ a \neq \pm 1 \rightarrow rgA = rgA^* = 3 \rightarrow \text{Los planos se cortan en un punto}$

$$\otimes\ Si\ a=1 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -a & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow rgA = rgA^* = 2 \rightarrow \text{Los planos se cortan en una recta}$$

$$\otimes\ Si\ a=-1 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -a & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right) \rightarrow rgA = 2\ \ rgA^* = 3 \rightarrow \begin{cases} \text{No hay filas proporcionales} \\ \text{Los planos se cortan dos a dos} \end{cases}$$

11) Halla el punto del plano de ecuación $\pi \equiv x-z=3$ que está más cerca del punto P(3,1,4), así como la distancia entre el punto P y el plano.

El punto pedido Q es el pie de la perpendicular trazada al plano desde el punto P

$$\pi \equiv x-z=3\ \ P(3,\ 1,\ 4)\ \text{construimos}\ r \perp \pi\ \text{y}\ P \in r \rightarrow r \equiv \begin{cases} P(3,\ 1,\ 4) \\ \vec{u}_r = \vec{n}_\pi = (1,\ 0,\ -1) \end{cases} \rightarrow r \equiv \begin{cases} x=3+t \\ y=1 \\ z=4-t \end{cases}$$

$$\text{Calculamos el punto de corte de } r \text{ y } \pi \rightarrow \begin{cases} x-z=3 \\ x=3+t \\ y=1 \\ z=4-t \end{cases} \rightarrow 3+t-4+t=3 \rightarrow t=2 \rightarrow Q(5,\ 1,\ 2)$$

$$d(P,\pi) = d(P,\ Q) = \sqrt{(5-3)^2+(1-1)^2+(2-4)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}\ \text{unidades}$$

12)Estudiar las posiciones relativas de los planos $\pi \equiv x + y + z = -3$ y $\pi' \equiv \begin{cases} x = -3+\lambda \\ y = -\lambda+\mu \\ z = -6-\mu \end{cases}$ y de la recta $r \equiv \frac{x-3}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-3}{3}$ con relación a ellos. Halla un punto P de r que esté a la misma distancia de π y de π'

$$\pi' \equiv \begin{cases} x = -3+\lambda \\ y = -\lambda+\mu \\ z = -6-\mu \end{cases} \rightarrow \pi' \equiv \begin{vmatrix} x+3 & y & z+6 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \pi' \equiv x+y+z+9 = 0 \rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} \pi \equiv x+y+z=-3 \\ \pi' \equiv x+y+z=-9 \end{array}\right\} \rightarrow rg\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 1 \quad rg\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & -9 \end{pmatrix} = 2 \rightarrow Sist.\ incompatible \rightarrow Planos\ Paralelos$$

$$Analizamos\ la\ posición\ entre\ r \equiv \frac{x-3}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-3}{3} \rightarrow r \equiv \begin{cases} x-2y=3 \\ 3y-z=-3 \end{cases} \ y \ \ \pi \equiv x+y+z=-3$$

$$\begin{cases} x+y+z=-3 \\ x-2y=3 \\ 3y-z=-3 \end{cases} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & -1 & -3 \end{array}\right) \rightarrow \left\langle \begin{array}{l} F_2 = \\ f_2 - f_1 \end{array} \right\rangle \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & -3 & -1 & 6 \\ 0 & 3 & -1 & -3 \end{array}\right) \rightarrow \left\langle \begin{array}{l} F_3 = \\ f_3 + f_2 \end{array} \right\rangle \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & -3 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \end{array}\right)$$

$$rgA = rgA^* = 3 \rightarrow r\ y\ \pi\ se\ cortan\ en\ un\ punto$$

$$\left.\begin{array}{l} \pi\ y\ \pi'\ paralelos \\ r\ y\ \pi\ se\ cortan\ en\ un\ punto \end{array}\right\} \rightarrow La\ recta\ corta\ a\ los\ planos\ en\ un\ punto\ en\ cada\ uno\ de\ ellos$$

$$P \in r \rightarrow P(3+2t,\ t,\ 3+3t)\ y\ cumple\ d(P,\ \pi) = d(P,\ \pi') \rightarrow \frac{|3+2t+t+3+3t+3|}{\sqrt{3}} = \frac{|3+2t+t+3+3t+9|}{\sqrt{3}} \rightarrow$$

$$|6t+9| = |6t+15| \rightarrow 6t+9 = \pm(6t+15) \rightarrow \left\langle \begin{array}{l} 6t+9 = 6t+15\ \ no\ tiene\ solución \\ 6t+9 = -6t-15 \rightarrow t = -2 \rightarrow P(-1,\ -2,\ -3) \end{array} \right.$$

13)Calcular los puntos de la recta r que pasa por los puntos P y Q de coordenadas P(-1,2,3) y Q(3,5,0), cuya distancia al punto C(-1,0,1) es de 12 unidades.

$$r \equiv \begin{cases} P(-1,\ 2,\ 3) \\ Q(3,\ 5,\ 0) \end{cases} \rightarrow r \equiv \begin{cases} P(-1,\ 2,\ 3) \\ \overrightarrow{PQ} = (4,\ 3,\ -3) \end{cases} \rightarrow Un\ punto\ de\ s\ es\ de\ la\ forma: S(-1+4t,\ 2+3t,\ 3-3t)$$

$$d(S,\ C) = 12 \rightarrow \sqrt{(-1+4t+1)^2 + (2+3t)^2 + (3-3t-1)^2} = 12 \rightarrow \sqrt{(4t)^2 + (2+3t)^2 + (2-3t)^2} = 12 \rightarrow$$

$$16t^2 + 4 + 9t^2 + 12t + 4 + 9t^2 - 12t = 144 \rightarrow 34t^2 = 136 \rightarrow t = \pm 2 \rightarrow \left\langle \begin{array}{l} t = 2 \rightarrow S_1(7,\ 8,\ -3) \\ t = -2 \rightarrow S_2(-9,\ -4,\ 9) \end{array} \right.$$

14)Dados los planos $\alpha \equiv x+y+z=1$ $\beta \equiv ax+y=1$ y $\gamma \equiv x+(a+1)z=0$, determinar los valores de a para los cuales:

a) Los planos se cortan en un solo punto
b) Se cortan en una recta

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=1 \\ ax+y=1 \\ x+(a+1)z=0 \end{array}\right\} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & a+1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left\langle \begin{array}{l} F_2 = f_2 - af_1 \\ F_3 = f_3 - f_1 \end{array} \right\rangle \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1-a & -a & 1-a \\ 0 & -1 & a & -1 \end{array}\right) \rightarrow \langle f_2 \leftrightarrow f_3 \rangle \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & a & -1 \\ 0 & 1-a & -a & 1-a \end{array}\right) \rightarrow \left\langle \begin{array}{l} c_2 \leftrightarrow c_3 \\ Las\ incógnitas \\ quedan: x, z, y \end{array} \right\rangle \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a & -1 & -1 \\ 0 & -a & 1-a & 1-a \end{array}\right) \rightarrow \langle F_3 = f_3 + f_2 \rangle \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -a & -a \end{array}\right)$$

$$|A| = -a^2 \rightarrow |A| = 0 \rightarrow a = 0 \rightarrow \left\langle \begin{array}{l} Si\ a = 0\ rgA = rgA^* = 2 \rightarrow Comp.\ Indeterminado \rightarrow se\ cortan\ en\ una\ recta \\ Si\ a \neq 0\ rgA = rgA^* = 3 \rightarrow Sist.\ Comp.\ determinado \rightarrow se\ cortan\ en\ un\ punto \end{array} \right.$$

15) Encontrar el punto de intersección de la recta $r \equiv \begin{cases} x = 1+\lambda \\ y = 2-\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$ con el plano π perpendicular a r que pasa por el origen de coordenadas.

$$r \equiv \begin{cases} x = 1+\lambda \\ y = 2-\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \rightarrow r \equiv \begin{cases} A(1,\ 2,\ 0) \\ \vec{u}_r = (1,\ -1,\ 1) \end{cases} \rightarrow \pi \equiv \begin{cases} O(0,\ 0,\ 0) \\ \vec{n}_\pi = \vec{u}_r = (1,\ -1,\ 1) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \pi \equiv x - y + z + D = 0 \\ 0 + D = 0 \rightarrow D = 0 \end{cases} \rightarrow \pi \equiv x - y + z = 0$$

Punto de intersección:

$$\left.\begin{array}{l} x - y + z = 0 \\ x = 1+\lambda \\ y = 2-\lambda \\ z = \lambda \end{array}\right\} \rightarrow 1+\lambda-(2-\lambda)+\lambda = 0 \rightarrow \lambda = 1/3 \rightarrow P\left(1+\frac{1}{3}, 2-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) \rightarrow P\left(\frac{4}{3}, \frac{5}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

16) Dados los planos $\pi_1 \equiv mx + 2y + 3z - 1 = 0$ y $\pi_2 \equiv 2x + 4y + 6z + 5 = 0$.

a) Determinar m para que sean paralelos y hallar su distancia

$$\left.\begin{array}{l} \pi_1 \equiv mx + 2y + 3z - 1 = 0 \\ \pi_2 \equiv 2x + 4y + 6z + 5 = 0 \end{array}\right\} \rightarrow Son\ \ paralelos\ si\ \frac{m}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} \neq \frac{-1}{5} \rightarrow m = 1$$

$$\left.\begin{array}{l} \pi_1 \equiv x + 2y + 3z - 1 = 0 \\ \pi_2 \equiv 2x + 4y + 6z + 5 = 0 \end{array}\right\} \rightarrow P \in \pi_1 \rightarrow y = 0\ \ z = 0 \rightarrow x = 1 \rightarrow P(1,\ 0,\ 0) \rightarrow$$

$$d(\pi_1, \pi_2) = d(P, \pi_2) = \left| \frac{2+5}{\sqrt{2^2+4^2+6^2}} \right| = \frac{7}{\sqrt{56}} = \frac{\sqrt{56}}{8}\ unidades$$

b) Determinar m para que sean ortogonales y hallar un punto y un vector de la recta intersección.

$$\left.\begin{array}{l} \pi_1 \equiv mx + 2y + 3z - 1 = 0 \\ \pi_2 \equiv 2x + 4y + 6z + 5 = 0 \end{array}\right\} \rightarrow Son\ \ ortogonales\ si\ (m,\ 2,\ 3)\cdot(2,\ 4,\ 6) = 0 \rightarrow m = -13$$

$$r \equiv \begin{cases} -13x + 2y + 3z - 1 = 0 \\ 2x + 4y + 6z + 5 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} P \rightarrow Si\ \ z = 0 \rightarrow \begin{cases} -13x + 2y - 1 = 0 \\ 2x + 4y + 5 = 0 \end{cases} \rightarrow x = -\frac{1}{4}\ \ y = -\frac{9}{8} \rightarrow P\left(\frac{-1}{4}, \frac{-9}{8}, 0\right) \\ \vec{u}_r = (-13,\ 2,\ 3)x(2,\ 4,\ 6) = (0,\ 84,\ -56) \end{cases}$$

17) Encuentra la recta que pasa por el punto P(1,0,-1) y corta a $r \equiv \begin{cases} 3x + 2y - z - 1 = 0 \\ 2x - y + z + 4 = 0 \end{cases}$ $s \equiv \begin{cases} x = 3+t \\ y = t \\ z = 1+t \end{cases}$

$$P(1,\ 0,\ -1)\quad r \equiv \begin{cases} 3x + 2y - z - 1 = 0 \\ 2x - y + z + 4 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} Q \rightarrow x = 0 \rightarrow y = -3\ \ z = -7\quad Q(0,\ -3,\ -7) \\ \vec{u}_r = (3,\ 2,\ -1)x(2,\ -1,\ 1) = (1,\ -5,\ -7) \end{cases} \qquad s \equiv \begin{cases} R(3,\ 0,\ 1) \\ \vec{u}_s = (1,\ 1,\ 1) \end{cases}$$

$$rg(\overrightarrow{PQ}, \vec{u}_r, \vec{u}_s) = rg\begin{pmatrix} 3 & 3 & 8 \\ 1 & -5 & -7 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 3 \rightarrow Las\ rectas\ se\ cruzan$$

$$La\ recta\ pedida\ \ t\ \ la\ calculamos\ como\ intersección\ de\ dos\ planos \rightarrow t \equiv \begin{cases} \pi : contiene\ a\ P\ y\ a\ r \\ \pi' :\ contiene\ a\ P\ y\ a\ s \end{cases} \rightarrow$$

$$\pi : \begin{vmatrix} x-1 & y & z+1 \\ -1 & -3 & -6 \\ 1 & -5 & -7 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \pi \equiv 9x + 13y - 8z = 17 \qquad \pi' : \begin{vmatrix} x-1 & y & z+1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \pi' \equiv x - z = 2$$

$$t \equiv \begin{cases} 9x + 13y - 8z = 17 \\ x - z = 2 \end{cases}$$

18)Dadas las rectas de ecuaciones $r \equiv x = y = z \quad s \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{2}$ estudiar su posición y hallar la recta que corta a r y s y es paralela a la recta $t \equiv (x, y, z) = (1,2,3) + \lambda(1,2,-1)$

$$r \equiv x = y = z \to r \equiv \begin{cases} P(0,\ 0,\ 0) \\ \vec{u}_r = (1,\ 1,\ 1) \end{cases};\ s \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{2} \to s \equiv \begin{cases} Q(1,\ 2,\ 0) \\ \vec{u}_s = (1,\ 2,\ 2) \end{cases} \to rg\left(\overrightarrow{PQ}, \vec{u}_r, \vec{u}_s\right) = rg\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} = 3$$

$$SE\ \ CRUZAN.\ La\ recta\ pedida\ \ la\ calculamos\ como\ \text{intersección}\ de\ dos\ planos \to$$

$$l \equiv \begin{cases} \pi : contiene\ a\ r\ y\ al\ vector\ de\ t\ \vec{u}_t \\ \pi' : contiene\ a\ s\ y\ al\ vector\ de\ t\ \vec{u}_t \end{cases} \to \pi \equiv \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0 \qquad \pi' \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\pi \equiv -3x + 2y + z = 0 \qquad \pi' \equiv 2x - y = 0 \to$$

$$l \equiv \begin{cases} -3x + 2y + z = 0 \\ 2x - y = 0 \end{cases}$$

19)Calcula la distancia entre las rectas $\begin{cases} x - z = -2 \\ y - z = -4 \end{cases}$ y $\begin{cases} x - z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$

$$r \equiv \begin{cases} x - z = -2 \\ y - z = -4 \end{cases} \to r \equiv \begin{cases} x = -2 + z \\ y = -4 + z \end{cases} \to r \equiv \begin{cases} x = -2 + t \\ y = -4 + t \\ z = t \end{cases} \to r \equiv \begin{cases} P(-2,\ -4,\ 0) \\ \vec{u}_r = (1,\ 1,\ 1) \end{cases}$$

$$s \equiv \begin{cases} x - z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} \to r \equiv \begin{cases} x = z \\ y = -z \end{cases} \to r \equiv \begin{cases} x = t \\ y = -t \\ z = t \end{cases} \to r \equiv \begin{cases} Q(0,\ 0,\ 0) \\ \vec{u}_s = (1,\ -1,\ 1) \end{cases} \to rg\left(\overrightarrow{PQ}, \vec{u}_r, \vec{u}_s\right) = rg\begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = 3$$

$$\to LAS\ RECTAS\ SE\ CRUZAN \to d(r, s) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{PQ},\ \vec{u}_r, \vec{u}_s\right]\right|}{\left|\vec{u}_r \times \vec{u}_s\right|} = \frac{\left|\begin{vmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}\right|}{\left|(2,\ 0,\ -2)\right|} = \frac{4}{\sqrt{8}} = \frac{4}{2\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}\ u$$

$$\left(\vec{u}_r \times \vec{u}_s\ se\ calcula\ con\ la\ regla\ mnemotécnica : \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (2,\ 0,\ -2) \right)$$

20) Considera un cuadrado cuyo centro es el punto C(1,1,-1) y tiene uno de sus lados en la recta $r \equiv \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{0}$. Calcula la ecuación del plano en el que se encuentra el cuadrado y la longitud de su lado.

$$r \equiv \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{0} \to r \equiv \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 + t \\ z = 1 \end{cases} \to r \equiv \begin{cases} P(2,\ 1,\ 1) \\ \vec{u}_r = (1,\ 1,\ 0) \end{cases} \to \pi \equiv \begin{cases} P(2,\ 1,\ 1) \\ \overrightarrow{PC} = (-1,\ 0,\ -2) \\ \vec{u}_r = (1,\ 1,\ 0) \end{cases} \to \begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z-1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \to$$

$$\pi \equiv 2x - 2y - z - 1 = 0$$

$$d(C,\ r)\ es\ \ la\ mitad\ \ del\ lado \to \frac{l}{2} = d(C,\ r) = \frac{\left|\overrightarrow{PC} \times \vec{u}_r\right|}{\left|\vec{u}_r\right|} = \frac{\left|(2,\ -2,\ -1)\right|}{\left|(1,\ 1,\ 0)\right|} = \frac{3}{\sqrt{2}}\ u \to l = \frac{6}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}\ u$$

$$\left(\overrightarrow{PC} \times \vec{u}_r\ se\ calcula\ con\ la\ regla\ mnemotécnica : \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (2,\ -2,\ -1) \right)$$

21)Dada la recta $r \equiv \begin{cases} x=1 \\ y=3 \end{cases}$ y el plano $\pi \equiv x+y+z=0$, hallar un plano que contenga a la recta r y corte al plano π en una recta paralela al plano OXY

Calculamos la recta s contenida en π y paralela al plano OXY $\rightarrow$

Su vector direccional $\vec{u}_s$ es perpendicular a $\vec{n}_\pi$ y $\vec{n}_{OXY}$ $\rightarrow \vec{u}_s = \vec{n}_\pi \times \vec{n}_{OXY} = (1,1,1)\times(0,0,1) = (1,-1,0)$

El plano pedido π' contiene a r y a $\vec{u}_s$

$$r \equiv \begin{cases} x=1 \\ y=3 \end{cases} \rightarrow r \equiv \begin{cases} x=1 \\ y=3 \\ z=t \end{cases} \rightarrow r \equiv \begin{cases} P(1,3,0) \\ \vec{u}_r = (0,0,1) \end{cases} \rightarrow \pi' \equiv \begin{cases} P(1,3,0) \\ \vec{u}_r = (0,0,1) \\ \vec{u}_s = (1,-1,0) \end{cases} \rightarrow \pi' \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y-3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow$$

$$\pi' \equiv x+y=4$$

22)Dadas las rectas $r \equiv \begin{cases} x=1+a(y-2) \\ x=z \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} y-z+1=0 \\ ax-z=2a-2 \end{cases}$ Se pide la posición relativa de ellas en función del parámetro a. Para el caso de $a=0$ determinar puntos P$\in r$ y Q$\in s$ tales que la distancia entre P y Q sea mínima.

$$r \equiv \begin{cases} x=1+a(y-2) \\ x=z \end{cases} \quad s \equiv \begin{cases} y-z+1=0 \\ ax-z=2a-2 \end{cases} \rightarrow \left.\begin{matrix} x-ay=1-2a \\ x-\ \ z=0 \\ y-z=-1 \\ ax-z=-2+2a \end{matrix}\right\} \rightarrow \left\langle \begin{matrix} Cambiando \\ orden \\ ecuaciones \end{matrix} \right\rangle \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -a & 0 & 1-2a \\ a & 0 & -1 & -2+2a \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\left\langle \begin{matrix} F_3 = f_3 - f_1 \\ F_4 = f_4 - af_1 \end{matrix} \right\rangle \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -a & 1 & 1-2a \\ 0 & 0 & -1+a & -2+2a \end{array}\right) \rightarrow \langle F_3 = f_3 + af_2 \rangle \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1-a & 1-3a \\ 0 & 0 & -1+a & -2+2a \end{array}\right) \rightarrow \langle F_4 = f_3 + f_4 \rangle$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1-a & 1-3a \\ 0 & 0 & 0 & -1-a \end{array}\right) \rightarrow \begin{cases} |A^*| = (1-a)\cdot(-1-a) \\ |A^*| = 0 \rightarrow a=-1\ ;\ a=1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a=-1\ rgA = rgA^* = 3 \rightarrow Se\ \ cortan\ en\ un\ punto \\ a=1\ rgA=2\ rgA^*=3 \rightarrow rectas\ \ paralelas \\ a \neq -1\ a \neq 1\ rgA=3\ \ rgA^*=4 \rightarrow Se\ cruzan \end{cases}$$

$$a=0 \rightarrow r \equiv \begin{cases} x=1 \\ x=z \end{cases} \rightarrow r \equiv \begin{cases} x=1 \\ y=y \\ z=1 \end{cases} \rightarrow r \equiv \begin{cases} A(1,0,1) \\ \vec{u}_r = (0,1,0) \end{cases} \quad s \equiv \begin{cases} y-z+1=0 \\ -z=-2 \end{cases} \rightarrow s \equiv \begin{cases} x=x \\ y=1 \\ z=2 \end{cases} \rightarrow s \equiv \begin{cases} B(0,1,2) \\ \vec{u}_s = (1,0,0) \end{cases}$$

P es un punto de r $\rightarrow P(1,t,1)$;

Q es un punto de s $\rightarrow Q(s,1,2)$

y ambos puntos están sobre la perpendicular común

$$\overrightarrow{PQ} = (s-1, 1-t, 1) \rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{PQ} \perp \vec{u}_r \\ \overrightarrow{PQ} \perp \vec{u}_s \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{PQ}\cdot\vec{u}_r = 0 \\ \overrightarrow{PQ}\cdot\vec{u}_s = 0 \end{cases} \rightarrow \left.\begin{matrix} (s-1,1-t,1)\cdot(0,1,0)=0 \\ (s-1,1-t,1)\cdot(1,0,0)=0 \end{matrix}\right\} \rightarrow \left.\begin{matrix} 1-t=0 \\ s-1=0 \end{matrix}\right\} \rightarrow \left.\begin{matrix} t=1 \\ s=1 \end{matrix}\right\} \rightarrow \begin{cases} P(1,1,1) \\ Q(1,1,2) \end{cases}$$

23)Se consideran los planos de ecuaciones $-ax-y+az=0$ y $(a+3)x+1/a\,y-z=1$ $(a\neq 0)$. Estudiar su posición relativa en función de a. Para $a=-2$ los planos contienen caras de un cubo, calcular su volumen.

$$\left.\begin{array}{l}\alpha\equiv -ax-y+az=0\\ \beta\equiv (a+3)x+\dfrac{1}{a}y-z=1\end{array}\right\}\rightarrow Son\ \sec antes\ si\ rg\begin{pmatrix}-a & -1 & a\\ a+3 & \dfrac{1}{a} & -1\end{pmatrix}=2\rightarrow$$

$$\frac{-a}{a+3}=\frac{-1}{\frac{1}{a}}=\frac{a}{-1}\rightarrow\begin{cases}\dfrac{-a}{1}=\dfrac{a}{-1}\\ \dfrac{-a}{a+3}=\dfrac{a}{-1}\end{cases}\rightarrow\begin{cases}a=a\\ a+3=1\end{cases}\rightarrow a=-2\rightarrow\begin{cases}a=-2\ \ planos\ \ paralelos\\ a\neq -2\ \ planos\ \sec antes\end{cases}$$

$$Para\ a=-2\ los\ \ planos\ \ son\ \ paralelos\rightarrow la\ dis\tan cia\ entre\ ellos\ es\ la\ longitud\ l\ de\ la\ arista\ \ del\ cubo\rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l}\alpha\equiv 2x-y-2z=0\\ \beta\equiv x-\dfrac{1}{2}y-z=1\end{array}\right\}P(0,\,0,\,0)\in\alpha\rightarrow d(\alpha,\,\beta)=d(P,\,\beta)=\left|\frac{-1}{\sqrt{1^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2+(-1)^2}}\right|=\frac{1}{\sqrt{\frac{9}{4}}}=\frac{2}{3}=l\rightarrow V=\left(\frac{2}{3}\right)^3u^3$$

24) Halla la ecuación general del plano determinado por los puntos A(1,1,1), B(-2,0,-1) y C(1,-2,0). Calcula el volumen del tetraedro que limita con los planos cartesianos.

$$\pi\equiv\begin{cases}A(1,\,1,\,1)\\ \overrightarrow{BA}=(3,1,\,2)\\ \overrightarrow{CA}=(0,\,3,\,1)\end{cases}\rightarrow\pi\equiv\begin{vmatrix}x-1 & y-1 & z-1\\ 3 & 1 & 2\\ 0 & 3 & 1\end{vmatrix}=0\rightarrow\pi\equiv -5x-3y+9z-1=0$$

$$Los\ \ puntos\ de\ corte\ de\ \pi\ con\ los\ ejes\ los\ llamamos\ \ P,\,Q,\,R\rightarrow$$

$$P=\pi\cap OX\equiv\begin{cases}-5x-3y+9z-1=0\\ y=0\\ z=0\end{cases}\qquad Q=\pi\cap OY\equiv\begin{cases}-5x-3y+9z-1=0\\ x=0\\ z=0\end{cases}\qquad R=\pi\cap OZ\equiv\begin{cases}-5x-3y+9z-1=0\\ x=0\\ y=0\end{cases}$$

$$\rightarrow P\left(\frac{-1}{5},\ 0,\,0\right)\qquad\rightarrow Q\left(0,\ \frac{-1}{3},\,0\right)\qquad\rightarrow R\left(0,\ 0,\,\frac{1}{9}\right)$$

$$V=\frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{OP};\ \overrightarrow{OQ},\,\overrightarrow{OR}\right]\right|=\left|\frac{1}{6}\begin{vmatrix}-1/5 & 0 & 0\\ 0 & -1/3 & 0\\ 0 & 0 & 1/9\end{vmatrix}\right|=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{135}=\frac{1}{810}u^3$$

25)Dados los puntos A(1,-3,1) B(2,3,1) y C(1,3,-1) se pide:

a) Ecuación del plano π que los contiene.

$$\pi\equiv\begin{cases}A(1,\,-3,\,1)\\ \overrightarrow{AB}=(1,6,\,0)\\ \overrightarrow{AC}=(0,\,6,\,-2)\end{cases}\rightarrow\pi\equiv\begin{vmatrix}x-1 & y+3 & z-1\\ 1 & 6 & 0\\ 0 & 6 & -2\end{vmatrix}=0\rightarrow\pi\equiv 6x-y-3z=6$$

b) Calcular la distancia del origen de coordenadas al plano π

$$d(O,\,\pi)=\left|\frac{-6}{\sqrt{36+1+9}}\right|=\frac{6}{\sqrt{46}}=\frac{6\sqrt{46}}{46}=\frac{3\sqrt{46}}{23}u$$

c) Volumen del tetraedro cuyos vértices son A, B, C y el origen de coordenadas.

$$V=\frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{OA};\ \overrightarrow{OB},\,\overrightarrow{OC}\right]\right|=\left|\frac{1}{6}\begin{vmatrix}1 & -3 & 1\\ 2 & 3 & 1\\ 1 & 3 & -1\end{vmatrix}\right|=\frac{1}{6}\cdot 12=2\ u^3$$

26)Dadas las rectas $r \equiv \frac{x-1}{a} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{1}$ y $\begin{cases} x + y = b \\ y - z = 1 \end{cases}$ determinar a y b para que sean perpendiculares y se corten.

$$r \equiv \frac{x-1}{a} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{1} \to r \equiv \begin{cases} A(1,\ 1,\ -1) \\ \vec{u}_r = (a,\ 2,\ 1) \end{cases}$$

$$s \equiv \begin{cases} x+y=b \\ y-z=1 \end{cases} \to s \equiv \begin{cases} x=b-y \\ z=-1+y \end{cases} \to s \equiv \begin{cases} x=b-t \\ y=t \\ z=-1+t \end{cases} \to s \equiv \begin{cases} B(b,\ 0,\ -1) \\ \vec{u}_s = (-1,\ 1,\ 1) \end{cases}$$

$$Para\ que\ sean\ perpendiculares\ \vec{u}_r \cdot \vec{u}_s = 0 \to -a+2+1=0 \to a=3$$

$$Para\ \ que\ \ se\ \ corten\ rg\left(\overrightarrow{AB}, \vec{u}_r, \vec{u}_s\right) = 2 \to \begin{vmatrix} b-1 & -1 & 0 \\ a & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \to a+b=0 \to b=-3$$

27)Halla la recta que pasa por el punto (1,2,1) y corta perpendicularmente a la recta $r \equiv \begin{cases} x-y-z=1 \\ x+z=2 \end{cases}$

$$r \equiv \begin{cases} x-y-z=1 \\ x+z=2 \end{cases} \to \begin{cases} x=2-z \\ y=x-z-1=2-z-z-1=1-2z \end{cases} \to \begin{cases} x=2-t \\ y=1-2t \\ z=t \end{cases} \to r \equiv \begin{cases} P(2,1,\ 0) \\ \vec{u}_r = (-1,\ -2,\ 1) \end{cases}$$

$$Calculamos\ un\ plano\ \pi\ perpendicular\ a\ r\ y\ que\ pasa\ por\ A \to \pi \equiv \begin{cases} A(1,\ 2,\ 1) \\ \vec{n}_\pi = \vec{u}_r = (-1,\ -2,\ 1) \end{cases} \to$$

$$\pi \equiv -x-2y+z+D=0 \to -1-4+1+D=0 \to D=4 \to \pi \equiv -x-2y+z+4=0$$

$$\begin{cases} Calculamos\ el\ punto\ B \\ de\ corte\ de\ \pi\ y\ r \end{cases} \to \left.\begin{matrix} -x-2y+z+4=0 \\ x=2-t \\ y=1-2t \\ z=t \end{matrix}\right\} \to -2+t-2+4t+t+4=0 \to t=0 \to B(2,\ 1,\ 0)$$

$$La\ recta\ pedida\ pasa\ por\ A\ y\ B \to s \equiv \begin{cases} A(1,\ 2,\ 1) \\ B(2,\ 1,\ 0) \end{cases} \to s \equiv \begin{cases} A(1,\ 2,\ 1) \\ \vec{u} = \overrightarrow{AB} = (1,\ -1,\ -1) \end{cases} \to s \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-1}{-1}$$

28)Calcula un punto R de la recta s dada por $s \equiv \begin{cases} x-y-5=0 \\ x-3y-z=0 \end{cases}$ que equidiste de los puntos P(1,0,-1) y Q(2,1,1). Y calcula el área del triángulo determinado por los puntos P, Q, R

$$s \equiv \begin{cases} x-y-5=0 \\ x-3y-z=0 \end{cases} \to \begin{cases} x=5+y \\ z=x-3y=5+y-3y=5-2y \end{cases} \to \begin{cases} x=5+t \\ y=t \\ z=5-2t \end{cases} \to s \equiv \begin{cases} P(5,\ 0,\ 5) \\ \vec{u}_s = (1,\ 1,\ -2) \end{cases}$$

$$R(5+t,\ t,\ 5-2t) \to d(P,R) = d(Q,R) \to \sqrt{(5+t-1)^2 + t^2 + (5-2t+1)^2} = \sqrt{(t+3)^2 + (t-1)^2 + (-2t+5-1)^2} \to$$

$$\to \sqrt{(4+t)^2 + t^2 + (6-2t)^2} = \sqrt{(t+3)^2 + (t-1)^2 + (-2t+4)^2} \to -4t=-26 \to t=\frac{13}{2} \to R\left(\frac{23}{2}, \frac{13}{2}, -8\right)$$

$$El\ área\ del\ triángulo\ PQR \to A = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}\right| = \frac{1}{2}\left|(1,\ 1,\ 2) \times \left(\frac{21}{2}, \frac{13}{2}, -7\right)\right| = \frac{1}{2}\left|(-20,\ 28,\ -4)\right| =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{(-20)^2 + 28^2 + (-4)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{1200} = \frac{20}{2}\sqrt{3} = 10\sqrt{3}\ u^2$$

29)Estudia la posición relativa de las rectas r y s y calcula el ángulo que forman:

$$r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4} \rightarrow \begin{cases} A(1,\,0,\,0) \\ \vec{u}_r = (2,\,3,\,4) \end{cases} \qquad s \equiv \begin{cases} x = 3+\lambda \\ y = 3+2\lambda \\ z = 4+3\lambda \end{cases} \rightarrow \begin{cases} B(3,\,3,\,4) \\ \vec{u}_s = (1,\,2,\,3) \end{cases} \rightarrow$$

$$rg\left(\overrightarrow{AB}, \vec{u}_r, \vec{u}_s\right) = rg\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = 2 \rightarrow Las\ \ rectas\ se\ cortan$$

$$\cos\left(r\hat{\ }s\right) = \cos\left(\vec{u}_r\hat{\ }\vec{u}_s\right) = \left|\frac{\vec{u}_r \cdot \vec{u}_s}{|\vec{u}_r| \cdot |\vec{u}_s|}\right| = \frac{20}{\sqrt{406}} \rightarrow \left(r\hat{\ }s\right) = 6^\circ 58' 56.99''$$

30)Sea r la recta que pasa por A(2,4,0) y B(6,2,0) y sea s la recta que pasa por C(0,0,7) y D(3,2,0) obtén la distancia entre r y s.

$$r \equiv \begin{cases} A(2,\,4,\,0) \\ B(6,\,2,\,0) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A(2,\,4,\,0) \\ \vec{u}_r = \overrightarrow{AB} = (4,\,-2,\,0) \end{cases} \qquad s \equiv \begin{cases} C(0,\,0,\,7) \\ D(3,\,2,\,0) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} C(0,\,0,\,7) \\ \vec{u}_s = \overrightarrow{CD} = (3,\,2,\,-7) \end{cases}$$

$$rg\left(\overrightarrow{AC}, \vec{u}_r, \vec{u}_s\right) = rg\begin{pmatrix} 2 & 4 & -7 \\ 4 & -2 & 0 \\ 3 & 2 & -7 \end{pmatrix} = 3 \rightarrow Se\ cruzan$$

$$d(r,\,s) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{AC},\ \vec{u}_r,\ \vec{u}_s\right]\right|}{\left|\vec{u}_r \times \vec{u}_s\right|} = \frac{\left|\begin{vmatrix} 2 & 4 & -7 \\ 4 & -2 & 0 \\ 3 & 2 & -7 \end{vmatrix}\right|}{\left|\left(\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 2 & -7 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 3 & -7 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}\right)\right|} = \frac{\left|\begin{vmatrix} 2 & 4 & -7 \\ 4 & -2 & 0 \\ 3 & 2 & -7 \end{vmatrix}\right|}{|(14,\,28,\,14)|} = \frac{42}{\sqrt{1176}} = \frac{42}{14\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{2}\ u$$

31)Sea el tetraedro de vértices A(0,0,0), B(1,1,1), C(3,0,0) y D(0,3,0)

a) Calcula la ecuación del plano que contiene la cara BCD y la del plano que contiene la cara ACD

$$Cara\ BCD \rightarrow \pi \equiv \begin{cases} B(1,\,1,\,1) \\ \overrightarrow{BC} = (2,\,-1,\,-1) \\ \overrightarrow{BD} = (-1,\,2,\,-1) \end{cases} \rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \pi \equiv x+y+z = 3$$

$$Cara\ ACD \rightarrow \pi' \equiv \begin{cases} A(0,\,0,\,0) \\ \overrightarrow{AC} = (3,\,0,\,0) \\ \overrightarrow{AD} = (0,\,3,\,0) \end{cases} \rightarrow \pi' \equiv \begin{vmatrix} x & y & z \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \pi' \equiv z = 0$$

b) Calcula las ecuaciones de dos de las alturas del tetraedro, la que pasa por el vértice A y la que pasa por el vértice B respectivamente. (nota: la altura del tetraedro es la recta que pasa por un vértice y es perpendicular al plano que determina la cara opuesta)

La altura que pasa por A tiene como vector direccional el vector normal del plano BCD

$$\vec{n}_{BCD} = \overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BD} = (2,\,-1,\,-1) \times (-1,\,2,\,-1) = (3,\,3,\,3) \rightarrow La\ altura\ es\ \ r \equiv \frac{x}{3} = \frac{y}{3} = \frac{z}{3}$$

La altura que pasa por B tiene como vector direccional el vector normal del plano BCD

$$\vec{n}_{BCD} = \overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD} = (3,\,0,\,0) \times (0,\,3,\,0) = (0,\,0,\,9) \rightarrow La\ altura\ es\ \ s \equiv \frac{x-1}{0} = \frac{y-1}{0} = \frac{z-1}{9}$$

c) Comprueba que las dos alturas anteriores se cortan en un punto P.

$$r \equiv \begin{cases} x = 3t \\ y = 3t \\ z = 3t \end{cases} \quad s \equiv \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 1+9s \end{cases} \rightarrow Punto\ de\ corte \rightarrow \left.\begin{matrix} 3t = 1 \\ 3t = 1 \\ 3t = 1+9s \end{matrix}\right\} \rightarrow \left.\begin{matrix} t = \frac{1}{3} \\ s = 0 \end{matrix}\right\} \rightarrow Se\ cortan\ en\ \ P(1,\,1,\,1)$$

d) Comprueba que la recta que une cualquier vértice del tetraedro con el punto P es perpendicular a la cara opuesta (y es por tanto la altura del tetraedro)

$\overrightarrow{AP}=(1,1,1)$ $\quad \vec{n}_{BCD}=(3,3,3) \quad \rightarrow \quad \vec{n}_{BCD}=3\ \overrightarrow{AP} \quad \rightarrow \quad$ *recta y plano son perpendiculares*

$\overrightarrow{CP}=(-2,1,1)$ $\quad \vec{n}_{ABD}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}=(1,1,1)\times(0,3,0)=(-3,0,3)$ *no es paralelo a* $\overrightarrow{CP} \rightarrow CP$ *no es altura*

$\overrightarrow{DP}=(1,-2,1)$ $\quad \vec{n}_{ABC}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(1,1,1)\times(3,0,0)=(0,3,-3)$ *no es paralelo a* $\overrightarrow{DP} \rightarrow DP$ *no es altura*

32)Hallar la ecuación de la proyección ortogonal r' de la recta $r\equiv\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-2}{2}$ sobre el plano $\alpha\equiv x-3y+2z+12=0$

Calculamos la recta r´ como intersección de dos planos: el plano α y el plano β que contiene a r y es perpendicular a α

$$\beta:\begin{cases}P_r(1,1,2)\\ \vec{u}_r=(2,1,2)\\ \vec{n}_\alpha=(1,-3,2)\end{cases}\rightarrow\beta\equiv\begin{vmatrix}x-1 & y-1 & z-2\\ 2 & 1 & 2\\ 1 & -3 & 2\end{vmatrix}=0\rightarrow\beta\equiv 8x-2y-7z+8=0\rightarrow r'\equiv\begin{cases}x-3y+2z+12=0\\ 8x-2y-7z+8=0\end{cases}$$

33)Perpendicular común de las rectas $r\equiv\frac{x-2}{1}=\frac{y-4}{2}=\frac{z-5}{2}$ $\quad s\equiv\begin{cases}x-y=3\\ z=4\end{cases}$

$$r\equiv\frac{x-2}{1}=\frac{y-4}{2}=\frac{z-5}{2}\rightarrow r\equiv\begin{cases}A(2,4,5)\\ \vec{u}_r=(1,2,2)\end{cases};\quad s\equiv\begin{cases}x-y=3\\ z=4\end{cases}\rightarrow\begin{cases}x=3+y\\ z=4\end{cases}\rightarrow\begin{cases}x=3+t\\ y=t\\ z=4\end{cases}\rightarrow s\equiv\begin{cases}B(3,0,4)\\ \vec{u}_s=(1,1,0)\end{cases}$$

$rg(\overrightarrow{AB},\vec{u}_r\ \vec{u}_s)=3\rightarrow$ *las rectas se cruzan* $\rightarrow$ *construimos la perpendicular común como intersección de dos planos: Uno contiene a r y a un vertor ortogonal a ambas rectas y el otro contiene a ese mismo vector y a s.*

$\vec{w}=\vec{u}_s\times\vec{u}_s=(1,2,2)\times(1,1,0)=(-2,2,-1)$

$$\pi\equiv\begin{cases}\text{contiene a } r\\ \vec{w}\end{cases}\rightarrow\pi\equiv\begin{vmatrix}x-2 & y-4 & z-5\\ 1 & 2 & 2\\ -2 & 2 & -1\end{vmatrix}=0\rightarrow \qquad \pi'\equiv\begin{cases}\text{contiene a } s\\ \vec{w}\end{cases}\rightarrow\pi'\equiv\begin{vmatrix}x-3 & y & z-4\\ 1 & 1 & 0\\ -2 & 2 & -1\end{vmatrix}=0\rightarrow$$

$$\pi\equiv-6x-3y+6z=6 \qquad \pi'\equiv-x+y+4z-13=0$$

$$\text{Perpendicular común}\rightarrow t\equiv\begin{cases}-6x-3y+6z=6\\ -x+y+4z-13=0\end{cases}$$

34)Hallar la ecuación de la recta que pasa por A(1,2,-1), es perpendicular a la recta $r\equiv\begin{cases}3y+z=7\\ x+4y+z=8\end{cases}$ y paralela al plano $\pi\equiv 2x+y-z=3$

El vector de la recta buscada es perpendicular al vector de r y perpendicular al normal del plano. Un vector direccional de la recta buscada es el producto vectorial del direccional de r y del normal del plano

$$r\equiv\begin{cases}3y+z=7\\ x+4y+z=8\end{cases}\rightarrow\vec{u}_r=(0,3,1)\times(1,4,1)=(-1,1,-3);\qquad \pi\equiv 2x+y-z=3\rightarrow\vec{n}_\pi=(2,1,-1)$$

$$\text{La recta buscada}\quad s\equiv\begin{cases}A(1,2,-1)\\ \vec{u}_s=\vec{u}_r\times\vec{n}_\pi=(-1,1,-3)\times(2,1,-3)=(2,-7,-3)\end{cases}\rightarrow s\equiv\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{-7}=\frac{z+1}{-3}$$

35) Halla la ecuación continua de la proyección ortogonal de la recta (x,y,z)=(2,1,1)+t(-1,0,2) sobre el plano $\pi \equiv 2x+y-z=0$.

Calculamos la recta r´ como intersección de dos planos: el plano π y el plano π' que contiene a r y es perpendicular a π.

$$\pi' : \begin{cases} P_r(2,\,1,\,1) \\ \vec{u}_r = (-1,\,0,\,2) \\ \vec{n}_\alpha = (2,\,1,\,-1) \end{cases} \rightarrow \pi' \equiv \begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z-1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \pi' \equiv 2x-3y+z-2=0 \rightarrow r' \equiv \begin{cases} 2x+y-z=0 \\ 2x-3y+z-2=0 \end{cases}$$

Para escribir la recta r´ en forma continua calculamos un punto de ella dando un valor a x

$$x=0 \rightarrow \left.\begin{matrix} y-z=0 \\ -3y+z-2=0 \end{matrix}\right\} \rightarrow y=-1,\;\; z=-1 \rightarrow P(0,\,-1,\,-1)$$

Y un vector direccional de r´ con el producto vectorial $\rightarrow \vec{u}_{r'} = (2,\,1,\,-1)\times(2,\,-3,\,1) = (-2,\,-4,\,-8)$

$$\rightarrow r' \equiv \frac{x}{-2} = \frac{y+1}{-4} = \frac{z+1}{-8}$$

36)Recta que se apoya en $r \equiv \dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y-4}{2} = \dfrac{z-5}{2}$ $\;s \equiv \begin{cases} x-y=3 \\ z=4 \end{cases}$ y pasa por el punto A(2,4,0)

Calculamos la recta pedida p como intersección de dos planos: el plano α que contiene a r y al punto A y el plano β que contiene a s y al punto A

$$r \equiv \frac{x-2}{1} = \frac{y-4}{2} = \frac{z-5}{2} \rightarrow r \equiv \begin{cases} A(2,\,4,\,5) \\ \vec{u}_r = (1,\,2,\,2) \end{cases};\quad s \equiv \begin{cases} x-y=3 \\ z=4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=3+y \\ z=4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=3+t \\ y=t \\ z=4 \end{cases} \rightarrow s \equiv \begin{cases} B(3,\,0,\,4) \\ \vec{u}_s = (1,\,1,\,0) \end{cases}$$

$$p \equiv \begin{cases} \alpha : \begin{cases} contiene\ a\ A \\ contiene\ a\ r \end{cases} \\ \beta : \begin{cases} contiene\ a\ A \\ contiene\ a\ s \end{cases} \end{cases} \rightarrow \alpha \equiv \begin{cases} A(2,\,4,\,0) \\ P(2,\,4,\,5) \\ \vec{u}_r = (1,\,2,\,2) \end{cases} \quad \alpha \equiv \begin{vmatrix} x-2 & y-4 & z \\ 0 & 0 & -5 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0; \beta \equiv \begin{cases} A(2,4,0) \\ B(3,0,4) \\ \vec{u}_s = (1,\,1,\,0) \end{cases} \quad \beta \equiv \begin{vmatrix} x-2 & y-4 & z \\ 1 & -4 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\alpha \equiv 10x-5y=0 \qquad \beta \equiv 4x-4y-5z+8=0 \rightarrow$$

$$p \equiv \begin{cases} 2x-y=0 \\ 4x-4y-5z+8=0 \end{cases}$$

37)Recta que se apoya en $r \equiv \begin{cases} 3x+2y-z-1=0 \\ 2x-y+z+4=0 \end{cases}$ $\;s \equiv \begin{cases} x=3+t \\ y=t \\ z=1+t \end{cases}$ y es paralela a $t \equiv \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z-2}{2}$

Calculamos la recta pedida p como intersección de dos planos: el plano α que contiene a r y al vector direccional de t y el plano β que contiene a s y al vector direccional de t.

$$r \equiv \begin{cases} 3x+2y-z-1=0 \\ 2x-y+z+4=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} Punto \rightarrow x=0 \rightarrow \begin{cases} 2y-z-1=0 \\ -y+z+4=0 \end{cases} \rightarrow y=-3 \rightarrow z=-7 \rightarrow A(0,\,-3,\,-7) \\ vector \rightarrow \vec{u}_r = (3,\,2,\,-1)\times(2,\,-1,\,1) = (1,\,-5,\,-7) \end{cases}$$

$$s \equiv \begin{cases} x=3+t \\ y=t \\ z=1+t \end{cases} \rightarrow s \equiv \begin{cases} B(3,\,0,\,1) \\ \vec{u}_s = (1,\,1,\,1) \end{cases} \rightarrow p \equiv \begin{cases} \alpha : contiene\ a\ r\ y\ \vec{u}_t = (2,1,2) \\ \beta : contiene\ a\ s\ y\ \vec{u}_t = (2,\,1,\,2) \end{cases}$$

$$\alpha \equiv \begin{vmatrix} x & y+3 & z+7 \\ 1 & -5 & -7 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \alpha \equiv -3x-16y+11z+29=0; \beta \equiv \begin{vmatrix} x-3 & y & z-1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \beta \equiv x-z-2=0$$

$$p \equiv \begin{cases} -3x-16y+11z+29=0 \\ x-z-2=0 \end{cases}$$

38)Calcula la distancia entre las rectas $t \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{1}$ y $s \equiv \begin{cases} x = 3+t \\ y = t \\ z = 1+t \end{cases}$

$$t \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{1} \to \begin{cases} A(1,\ 1,\ 2) \\ \vec{u}_t = (1,\ 1,\ 1) \end{cases};\quad s \equiv \begin{cases} x = 3+t \\ y = t \\ z = 1+t \end{cases} \to \begin{cases} B(3,0,1) \\ \vec{u}_s = (1,1,1) \end{cases} \to \begin{cases} rg(\vec{u}_t, \vec{u}_s) = rg\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 1 \\ rg\left(\overrightarrow{AB}, \vec{u}_t, \vec{u}_s\right) = rg\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 2 \end{cases}$$

$$Las\ rectas\ son\ paralelas \to d(t,s) = d(A,s) = \frac{\left|\overrightarrow{AB} \times \vec{u}_s\right|}{|\vec{u}_s|} = \frac{|(2,-1,-1)\times(1,1,1)|}{|(1,1,1)|} = \frac{|(0,-3,3)|}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{18}}{\sqrt{3}} = \sqrt{6}\ u$$

39)Calcula la distancia entre los planos $\pi \equiv 2x+3y+4z-5=0$ y $\pi' \equiv 2x+3y+4z+7=0$

Los planos son paralelos. La distancia entre ellos se calcula eligiendo un punto de uno de ellos y calculando la distancia de ese punto al otro plano.

$$\pi \equiv 2x+3y+4z-5=0 \to Calculamos\ un\ punto\ A \in \pi\ dando\ valores\ x=1;\ y=1 \to z=0 \to A(1,1,0)$$

$$d(\pi,\pi') = d(A,\pi') = \frac{|2+3+7|}{\sqrt{2^2+3^2+4^2}} = \frac{12}{\sqrt{29}} = \frac{12\sqrt{29}}{29}\ u$$

40)Halla la ecuación del plano que es perpendicular a la recta $r \equiv \begin{cases} 2x+y-z=0 \\ x-y+z=-3 \end{cases}$ y pasa por el punto $P(3\ 2,\ 1)$

$$r \equiv \begin{cases} 2x+y-z=0 \\ x-y+z=-3 \end{cases} \to \vec{u}_r = (2,\ 1,\ -1)\times(1,\ -1,\ 1) = (0,\ 1,\ 1) = \vec{n}_\pi$$

$$\pi \equiv 0x+y+z+D=0 \to P \in \pi \to 0+2+1+D=0 \to D=-3 \to \pi \equiv y+z-3=0$$

41)Dada la recta $r \equiv \begin{cases} x-y=0 \\ x+y=z \end{cases}$ y el punto $P(1,\ 2,\ -1)$

a) Halla la ecuación del plano que contiene a P y es perpendicular a r

$$r \equiv \begin{cases} x-y=0 \\ x+y=z \end{cases} \to \begin{cases} x=y \\ z=2y \end{cases} \to \begin{cases} x=t \\ y=t \\ z=2t \end{cases} \to \vec{u}_r = (1,\ 1,\ 2) \to \pi \equiv x+y+2z+D=0$$

$$P \in r \to 1+2-2+D=0 \to D=-1 \to \pi \equiv x+y+2z-1=0$$

b) Calcula el área del triángulo cuyos vértices son los puntos de corte del plano hallado y los ejes coordenados.

$\pi \equiv x+y+2z-1=0 \to$

Corte con OX

$$\left.\begin{array}{r} x+y+2z-1=0 \\ y=0 \\ z=0 \end{array}\right\} \to A(1,\ 0,\ 0)$$

Corte con OY

$$\left.\begin{array}{r} x+y+2z-1=0 \\ x=0 \\ z=0 \end{array}\right\} \to B(0,\ 1,\ 0)$$

Corte con OZ

$$\left.\begin{array}{r} x+y+2z-1=0 \\ x=0 \\ y=0 \end{array}\right\} \to C(0,\ 0,\ 1/2)$$

$$Área\ del\ triángulo\ ABC \to \overrightarrow{AB} = (-1,\ -1,\ 0);\ \overrightarrow{AC} = (-1,\ 0,\ 1/2) \to$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \left(\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1/2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \right) = \left(\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}, 1 \right) \to$$

$$Área = \frac{1}{2}\left|\left(\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}, 1\right)\right| = \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{4}u^2 = 0{,}61u^2$$

42)Dados el plano $\alpha \equiv 2x+2y+z=3$ y el punto $A(1,\ 0,\ 2)$, sea B el pie de la perpendicular de A sobre el plano y $C(2,\ 1,\ -2)$ un punto del plano. Halla área del triángulo ABC

$$Calculamos\ una\ recta\ r \perp \alpha\ y\ que\ pasa\ por\ A \rightarrow r \equiv \begin{cases} A(1,\ 0,\ 2) \\ \vec{u}_r = (2,\ 2,\ 1) \end{cases} \rightarrow r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z-2}{1}$$

$$Calculamos\ la\ intersección\ de\ r\ y\ \alpha \rightarrow \left.\begin{array}{l} 2x+2y+z=3 \\ x=1+2t \\ y=2t \\ z=2+t \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} 2(1+2t)+2(2t)+2+t=3 \\ 2+4t+4t+2+t=3 \\ 9t=-1 \\ t=-1/9 \end{array}\right| \rightarrow B\left(\frac{7}{9}, -\frac{2}{9}, \frac{17}{9}\right)$$

$$Área\ del\ triángulo\ ABC \rightarrow \overrightarrow{AB} = \left(-\frac{2}{9}, -\frac{2}{9}, -\frac{1}{9}\right);\ \overrightarrow{AC} = (1, 1, -4)$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \left(\begin{vmatrix} -\frac{2}{9} & -\frac{1}{9} \\ 1 & -4 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} -\frac{2}{9} & -\frac{1}{9} \\ 1 & -4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -\frac{2}{9} & -\frac{2}{9} \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \right) = (1, -1, 0) \rightarrow$$

$$Área = \frac{1}{2}\left|(1,\ 1,\ 0)\right| = \frac{1}{2}\sqrt{1^2+1^2} = \frac{1}{2}\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}u^2$$

43)Halla las ecuaciones de la recta que pasa por el punto $P(1,\ 2,\ -1)$, es paralela al plano $\pi \equiv 2x+y-z=3$ y es perpendicular a la recta $r \equiv \begin{cases} 3y+z=7 \\ x+4y+z=8 \end{cases}$

$$El\ vector\ de\ la\ recta\ pedida\ s\ es\ perpendicular\ al\ normal\ del\ plano\ \pi\ (\vec{n}_\pi)\ y\ al\ direccional\ de\ r\ (\vec{u}_r) \rightarrow$$

$$r \equiv \begin{cases} 3y+z=7 \\ x+4y+z=8 \end{cases} \rightarrow \vec{u}_r = (0,\ 3,\ 1) \times (1,\ 4,\ 1) = (-1,\ 1,\ -3) \rightarrow \vec{u}_s = \vec{n}_\pi \times \vec{u}_r = (2,\ 1,\ -1) \times (-1,\ 1,\ -3) = (-2,\ 7,\ 3)$$

$$\rightarrow s \equiv \frac{x-1}{-2} = \frac{y-2}{7} = \frac{z+1}{3}$$

$$También\ se\ puede\ \ calcular\ como\ intersección\ de\ dos\ planos \rightarrow$$

$$r \equiv \begin{cases} \pi' \rightarrow \pi' \parallel \pi\ \ y\ \ pasa\ \ por\ \ P \\ \pi'' \rightarrow \pi'' \perp r\ \ y\ \ pasa\ \ por\ \ P \end{cases} \rightarrow r \equiv \begin{cases} \pi' : 2x+y-z+D=0 \rightarrow 2+2+1+D=0 \rightarrow D=-5 \\ \pi'' : -x+y-3z+D=0 \rightarrow -1+2+3+E=0 \rightarrow E=-4 \end{cases}$$

$$\rightarrow r \equiv \begin{cases} 2x+y-z-5=0 \\ -x+y-3z-4=0 \end{cases}$$

44)Sean $A(1,\ -5,\ a)$ $B(2,\ a,\ -1)$ $C(a,\ -5,\ 2)$, los tres vértices de un triángulo ABC Determina el valor de a para que ese triángulo sea rectángulo en C y después calcula su área

$$A(1,\ -5,\ a)\ \ B(2,\ a,\ -1)\ \ C(a,\ -5,\ 2) \rightarrow \overrightarrow{CB} \perp \overrightarrow{CA} \rightarrow \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CA} = 0$$

$$\rightarrow (a-2,\ -5-a,\ 3) \cdot (a-1,\ 0,\ 2-a) = 0 \rightarrow$$

$$(a-2) \cdot (a-1) + (-5-a) \cdot 0 + 3 \cdot (2-a) = 0 \rightarrow a^2 - 6a + 8 = 0 \rightarrow a = 2,\ a = 4$$

$$\otimes\ a = 2 \rightarrow \overrightarrow{CA} = (-1,\ 0,\ 0),\ \overrightarrow{CB} = (0,\ -7,\ 3) \rightarrow \overrightarrow{CB} \times \overrightarrow{CA} = (0,\ 3,\ 7) \rightarrow Área = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{CB} \times \overrightarrow{CA}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{58} = 3{,}81u^2$$

$$Como\ el\ triángulo\ es\ rectángulo\ también\ se\ puede\ calcular\ el\ área$$

$$con\ las\ longitudes\ de\ los\ catetos \rightarrow Área = \frac{1}{2}\sqrt{49+9} \cdot \sqrt{1} = 3{,}81u^2$$

$$\otimes\ a = 4 \rightarrow \overrightarrow{CA} = (-3,\ 0,\ 2),\ \overrightarrow{CB} = (2,\ -9,\ 3) \rightarrow \overrightarrow{CB} \times \overrightarrow{CA} = (-18,\ -13,\ -27) \rightarrow$$

$$Área = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{CB} \times \overrightarrow{CA}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{1222} = 17{,}48\ u^2.$$

$$Calculando\ las\ longitudes\ de\ los\ catetos \rightarrow Área = \frac{1}{2}\sqrt{4+81+9} \cdot \sqrt{9+4} = \frac{34{,}95}{2} = 17{,}48\ u^2$$

45)Encuentra las ecuaciones de una recta que sea paralela a los planos $\alpha \equiv 3x+y-2z-2=0$ y $\alpha' \equiv -2x+z=10$ y que pase por el origen de coordenadas.

$$Si\ es\ paralela\ a\ los\ planos\ \alpha\ y\ \alpha' \rightarrow es\ paralela\ a\ la\ recta\ que\ determinan\ esos\ planos \rightarrow$$

$$r \equiv \begin{cases} 3x+y-2z=2 \\ -2x+z=10 \end{cases} \rightarrow tiene\ el\ mismo\ vector\ direccional\ que\ r \rightarrow \vec{u}_r = (3,1,-2)\times(-2,\ 0,\ 1) = (1,\ 1,\ 2) \rightarrow$$

$$s \equiv \begin{cases} O(0,\ 0,\ 0) \\ \vec{u}_r = (1,\ 1,\ 2) \end{cases} \rightarrow \frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{2}$$

$$También\ se\ puede\ resolver\ calculando\ planos\ \pi\ y\ \pi'\ paralelas\ a\ \alpha\ y\ \alpha'\ y\ que\ pasen\ por\ O(0,\ 0,\ 0).$$

$$La\ recta\ pedida\ es\ la\ determinada\ por\ \pi\ y\ \pi' \rightarrow s \equiv \begin{cases} 3x+y-2z=0 \\ -2x+z=0 \end{cases}$$

46)Un triángulo tiene dos vértices en los puntos $O(0,\ 0,\ 0)$ y $P(1,\ 1,\ 1)$ y el tercer vértice está situado en la recta $r \equiv \begin{cases} x=2y \\ z=1 \end{cases}$. Halla este vértice si el área del triángulo es $\sqrt{2}/2$

$$r \equiv \begin{cases} x=2y \\ z=1 \end{cases} \rightarrow r \equiv \begin{cases} x=2t \\ y=t \\ z=1 \end{cases} \rightarrow Un\ punto\ cualquiera\ de\ r\ es\ de\ la\ forma\ Q(2t,\ t,\ 1) \rightarrow$$

$$\overrightarrow{OP} = (1,\ 1,\ 1)\quad \overrightarrow{OQ} = (2t,\ t,\ 1) \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{OP}\times\overrightarrow{OQ}\right| = \frac{1}{2}\left|(1-t,\ 2t-1,\ -t)\right| = \frac{1}{2}\sqrt{(1-t)^2+(2t-1)^2+(-t)^2} \rightarrow$$

$$\sqrt{2} = \sqrt{(1-t)^2+(2t-1)^2+(-t)^2} \rightarrow 2 = 1-2t+t^2+4t^2-4t+1+t^2$$

$$\rightarrow 6t^2-6t=0 \rightarrow \begin{cases} t=0 \rightarrow Solución\ Q(0,\ 0,\ 1) \\ t=1 \rightarrow Solución\ Q'(2,\ 1,\ 1) \end{cases}$$

47)Estudia la posición relativa de los planos $\begin{cases} \alpha \equiv x+y=1 \\ \beta \equiv ay+z=0 \\ \pi \equiv x+(a+1)y+az=a+1 \end{cases}$, en función de a.

$$\begin{cases} x+y=1 \\ ay+z=0 \\ x+(a+1)y+az=a+1 \end{cases} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & a & 1 & 0 \\ 1 & a+1 & a & a+1 \end{array}\right) \rightarrow \langle F_3 = f_3 - f_1 \rangle \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & a & a & a \end{array}\right) \rightarrow \langle F_3 = f_3 - f_2 \rangle$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a-1 & a \end{array}\right) \rightarrow |A| = a\cdot(a-1) \rightarrow |A| = 0 \rightarrow a=0,\ a=1 \rightarrow$$

$$\otimes\ a=0 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow rgA = rgA^* = 2 \rightarrow Compatible\ indeterminado \rightarrow$$

$$\rightarrow\ dos\ son\ coincidentes\ y\ el\ tercero\ los\ corta \rightarrow se\ cortan\ en\ una\ recta$$

$$\otimes\ a=1 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow rgA = 2\ rgA^* = 3 \rightarrow Incompatible\ y\ sin\ filas\ proporcionales\ en\ A \rightarrow se\ cortan\ dos\ a\ dos$$

$$\otimes\ a \neq 0\ y\ a \neq 1 \rightarrow rgA = rgA^* = 3 \rightarrow Compatible\ determinado \rightarrow se\ cortan\ en\ un\ punto$$

48)Halla las proyecciones del punto P(4, –2, 1):

a) Sobre el plano π :–3x+y+2z–2=0

Construimos la recta r perpendicular al plano y que contenga al punto P

$$r \equiv \begin{cases} P(4,-2,1) \\ \vec{u}_r = \vec{n}_\pi = (-3,1,2) \end{cases} \to r \equiv \frac{x-4}{-3} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-1}{2} \to Q_r(4-3t,\ -2+t,\ 1+2t)$$

$$Calculamos\ \ P' = \pi \cap r \to \left.\begin{array}{l} -3x+y+2z-2=0 \\ x=4-3t \\ y=-2+t \\ z=1+2t \end{array}\right\} \to \left|\begin{array}{c} -3(4-3t)+(-2+t)+2(1+2t)-2=0 \\ -12+9t-2+t+2+4t-2=0 \\ 14t=14 \\ t=1 \end{array}\right| \to P'(1,\ -1,\ 3)$$

b) sobre la recta $\frac{x-1}{3} = \frac{y-1}{5} = \frac{z-7}{-1}$

Construimos el plano π perpendicular a la recta y que contenga al punto P

$$\pi \equiv \begin{cases} P(4,-2,1) \\ \vec{n}_\pi = \vec{u}_r = (3,5,-1) \end{cases} \to \pi \equiv 3x+5y-z+D=0 \to 3\cdot 4+5\cdot(-2)-1+D=0 \to D=-1 \to \pi \equiv 3x+5y-z-1=0$$

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y-1}{5} = \frac{z-7}{-1} \to Q_r(1+3t,\ 1+5t,\ 7-t)$$

$$Calculamos\ \ P'' = \pi \cap r \to \left.\begin{array}{l} 3x+5y-z-1=0 \\ x=1+3t \\ y=1+5t \\ z=7-t \end{array}\right\} \to \left|\begin{array}{c} 3(1+3t)+5(1+5t)-(7-t)-1=0 \\ 3+9t+5+25t-7+t-1=0 \\ 35t=0 \\ t=0 \end{array}\right| \to P''(1,\ 1,\ 7)$$

49)Dados el plano y la recta $\begin{cases} \pi \equiv x+y+mz=p \\ r \equiv \frac{x}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z}{2} \end{cases}$. Se pide: a) Calcular m y p para que sean secantes, b) Para que sean paralelos c) Para que el plano contenga a la recta.

$$\left\langle \begin{array}{l} A(3,2,1)\ B(1,2,4) \\ C(4,0,3)\ D(1,1,7) \end{array} \right\rangle \to \overrightarrow{AB} = (-2,\ 0,\ 3);\ \overrightarrow{AC} = (1,\ -2,\ 2);\ \overrightarrow{AD} = (-2,\ -1,\ 6) \to V = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & 6 \end{vmatrix} = \frac{5}{6}u^3$$

$$\begin{cases} \pi \equiv x+y+mz=p \\ r \equiv \frac{x}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z}{2} \end{cases} \to \left.\begin{array}{l} x+y+mz=p \\ -x=y-2 \\ 2y-4=-z \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{l} x+y=2 \\ 2y+z=4 \\ x+y+mz=p \end{array}\right\} \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & m & p \end{array}\right) \langle F_3 = f_3 - f_1 \rangle \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & m & p-2 \end{array}\right)$$

$$\otimes\ Si\ \ m \neq 0\ rgA = rgA^* = 3 \to Sist.\ COMPATIBLE\ \ DETERMINADO \to recta\ \ y\ \ plano\ se\ cor\tan\ en\ un\ \ punto$$

$$\otimes\ Si\ m=0 \to \begin{cases} p \neq 2\ rgA = 2\ \ rgA^* = 3 \to Sist.\ INCOMPATIBLE \to recta\ \ paralela\ al\ \ plano \\ p = 2\ rgA = rgA^* = 2 \to Sist.\ COMPATIBLE\ \ INDETERMINADO \to recta\, contenida\ en\ el\ plano \end{cases}$$

50) a)Obtener el volumen del tetraedro cuyos vértices son los puntos (3,2,1), (1,2,4), (4,0,3) y (1,1,7)

b) Longitud del segmento de la recta $r \equiv \begin{cases} 2x-y=0 \\ x-z=0 \end{cases}$ comprendido entre los planos $\pi \equiv 3x-z=5\ \ y\ \ \mu \equiv x-y-z=0$

$$r \equiv \left.\begin{array}{l} 2x-y=0 \\ x-z=0 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{l} x=z \\ y=2z \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{l} x=t \\ y=2t \\ z=t \end{array}\right\} \to P(t,\ 2t,\ t) \to$$

$$Inter\sec ción\ \ con\ \ \pi \to 3x+z=5 \to 3t+t=5 \to t=5/4 \to P\left(\frac{5}{4},\ \frac{10}{4},\ \frac{5}{4}\right)$$

$$Inter\sec ción\ \ con\ \ \mu \to x-y-z=5 \to t-2t-t=0 \to t=0 \to Q(0,\ 0,0) \to$$

$$d(P,\ Q) = \sqrt{\left(\frac{5}{4}\right)^2 + \left(\frac{10}{4}\right)^2 + \left(\frac{5}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{150}{16}} = \frac{5\sqrt{6}}{4}u$$

51)Hallar la distancia entre el punto A (-4, 2, 1) y la diagonal del plano OXY.

$$La\ diagonal\ del\ plano\ OXY\ pasa\ por\ los\ puntos\ d \equiv \begin{cases} O(0,\,0,\,0) \\ B(1,\,1,\,0) \end{cases} \to d \equiv \begin{cases} O(0,\,0,\,0) \\ \overrightarrow{OB} = (1,\,1,\,0) \end{cases} \to \frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{0}$$

$$d(A,d) = \frac{\left|\vec{u}_d \times \overrightarrow{OA}\right|}{\left|\vec{u}_d\right|} = \frac{\left|(1,\,1,\,0)\times(-4,\,2,\,1)\right|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{\left|(1,\,-1,\,6)\right|}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{38}{2}} = \sqrt{19}\ u$$

52)Calcula la perpendicular común a las rectas $r \equiv x = y = z$ y $s \equiv x = y = 3z - 1$.

$$r \equiv x = y = z \to r \equiv \begin{cases} O(0,\,0,\,0) \\ \vec{u}_r = (1,1,\,1) \end{cases};\ s \equiv x = y = 3z-1 \to x = y = 3\left(z - \frac{1}{3}\right) \to x = y = \frac{z - \frac{1}{3}}{\frac{1}{3}} \to \begin{cases} P\left(0,\,0,\,\frac{1}{3}\right) \\ \vec{u}_s = \left(1,1,\,\frac{1}{3}\right) \end{cases} \to$$

$$rg\left(\overrightarrow{OP},\,\vec{u}_r,\,\vec{u}_s\right) = rg\begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \langle F_3 = f_3 - f_1 \rangle\ rg\begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} = 2\ \ y\ rg(\vec{u}_r,\,\vec{u}_s) = 2 \to Las\ rectas\ se\ cortan \to$$

$$La\ recta\ pedida\ (t)\ pasa\ por\ el\ punto\ de\ corte\ y\ tiene\ de\ vector\ direccional\ un\ vector\ perpendicular\ a\ \vec{u}_r,\,\vec{u}_s \to$$

$$Punto\ de\ corte \to \left.\begin{matrix} x = y = z \\ x = y = 3z - 1 \end{matrix}\right\} \to z = 3z - 1 \to -2z = -1 \to z = 1/2 \to R\left(\frac{1}{2},\,\frac{1}{2},\,\frac{1}{2}\right)$$

$$Vector \to \vec{u}_t = (1,\,1,\,1)\times(1,\,1,\,1/3) = (1,\,-1,\,0) \to \qquad t \equiv \frac{x - 1/2}{1} = \frac{y - 1/2}{-1} = \frac{z - 1/2}{0}$$

53)Hallar la ecuación de la recta, en forma paramétrica, que pasa por el punto P (1,2,-1), es paralela al plano $\alpha \equiv 2x + y - z = 3$ y es perpendicular a la recta $r \equiv \begin{cases} 3x + z = 7 \\ x + 4y + z = 8 \end{cases}$

$$r \equiv \begin{cases} 3x + z = 7 \\ x + 4y + z = 8 \end{cases} \to \vec{u} = (3,\,0,\,1)\times(1,\,4,\,1) = (-4,\,-2,\,12) \to \vec{u}_r = (2,\,1,\,-6)$$

$$\alpha \equiv 2x + y - z = 3 \to \vec{n}_\alpha = (2,\,1,\,-1) \to$$

$$El\ vector\ de\ la\ recta\ pedida\ (s)\ es\ perpendicular\ a\ \vec{u}_r\ y\ a\ \vec{n}_\alpha \to \vec{u}_s = (2,\,1,\,-6)\times(2,\,1,\,-1) = (-5,\,10,\,0) \to$$

$$s \equiv \frac{x-1}{-5} = \frac{y-2}{10} = \frac{x+1}{0} \to s \equiv \frac{x-1}{-1} = \frac{y-2}{2} = \frac{x+1}{0}$$

54)Obtener el ángulo formado por el plano y la recta: $\pi \equiv x = 1$ y $r \equiv \begin{cases} y = 2 \\ 3x - \sqrt{3}\,z = 0 \end{cases}$

$$\pi \equiv x = 1 \to \vec{n}_\pi = (1,\,0,\,0);\ r \equiv \begin{cases} y = 2 \\ 3x - \sqrt{3}\,z = 0 \end{cases} \to \begin{cases} y = 2 \\ x = \sqrt{3}/3\,z \end{cases} \to \begin{cases} x = \sqrt{3}/3\,t \\ y = 2 \\ z = t \end{cases} \to \vec{u}_r = \left(\frac{\sqrt{3}}{3},\,0,\,1\right) \to$$

$$sen\ \alpha = \frac{\left|\vec{u}_r \cdot \vec{n}_\pi\right|}{\left|\vec{u}_r\right| \cdot \left|\vec{n}_\pi\right|} = \frac{\sqrt{3}/3}{\sqrt{\frac{1}{3}+1}\cdot\sqrt{1}} = \frac{\sqrt{3}/3}{\sqrt{\frac{4}{3}}} = \frac{\sqrt{3}/3}{2/\sqrt{3}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \to \alpha = 30^{\circ}$$