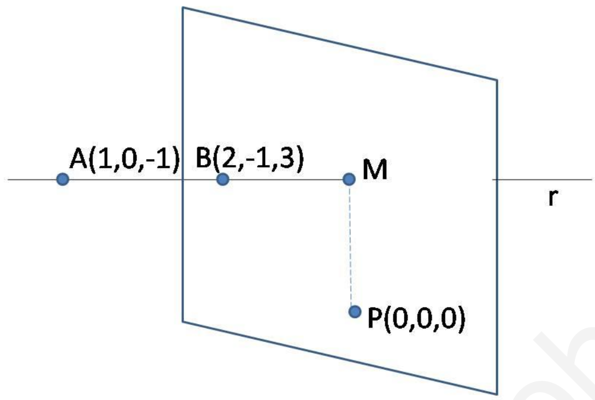
1. Sean los puntos **A** (1, 0,-1) y **B** (2,-1, 3). Calcular la distancia del origen de coordenadas a la recta que pasa por **A** y **B** .



Calculemos la recta que pasa por A y B . El vector AB es (1,-1,4) y por tanto la recta citada es:

$$r \equiv \begin{cases} P(1,0,-1) \\ \vec{u} = (1,-1,4) \end{cases} \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y-0}{-1} = \frac{z+1}{4} \equiv \begin{cases} x+y-1=0 \\ 4y+z+1=0 \end{cases}$$

Se trata de calcular la distancia del origen (0,0,0) a la recta r. Calculemos el plano perpendicular a r que pasa por P

$$\pi \equiv \begin{cases} P(0,0,0) \\ \vec{w} = (1,-1,4) \end{cases} \equiv \{1x - 1y + 4z + D = 0 \equiv \{x - y + 4z = 0$$

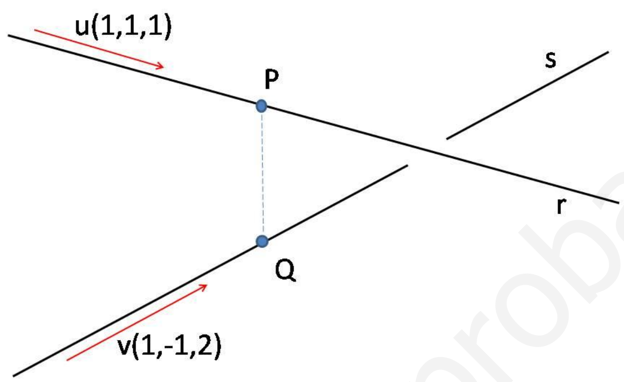
Hacemos el corte entre recta y plano

$$\begin{cases} x+y-1=0 \\ 4y+z+1=0 \\ x-y+4z=0 \end{cases}$$ que tiene solución x=7/6 y=-1/6 z =-1/3 luego M=(7/6,-1/6,-1/3)

Por tanto, la distancia del punto a la recta es la distancia al punto calculado anteriormente:

d(O,r) = d(O,M) = $\sqrt{\left(\frac{7}{6}\right)^2 + \left(\frac{1}{6}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{6}}{2} = 1.2247$

2. Halla un punto A que esté dentro de la recta r de ecuación $x = y = z$ y un punto B, dentro la recta s de ecuación $x = \frac{y}{-1} = \frac{z+1}{2}$, de forma que la distancia entre A y B sea mínima.



Nos piden los puntos que determinan la distancia entre ambas rectas, es decir, los que generan la perpendicular común.

En paramétricas

$$r \equiv \left\{\frac{x-0}{1} = \frac{y-0}{1} = \frac{z-0}{1} \equiv \begin{cases} x = \alpha \\ y = \alpha \\ z = \alpha \end{cases}\right. \qquad s \equiv \left\{\frac{x-0}{1} = \frac{y-0}{-1} = \frac{z+1}{2} \equiv \begin{cases} x = \beta \\ y = -\beta \\ z = -1 + 2\beta \end{cases}\right.$$

Las rectas no son paralelas y no tienen punto en común (las ecuaciones paramétricas en x e y son contradictorias) por lo que se cruzan.

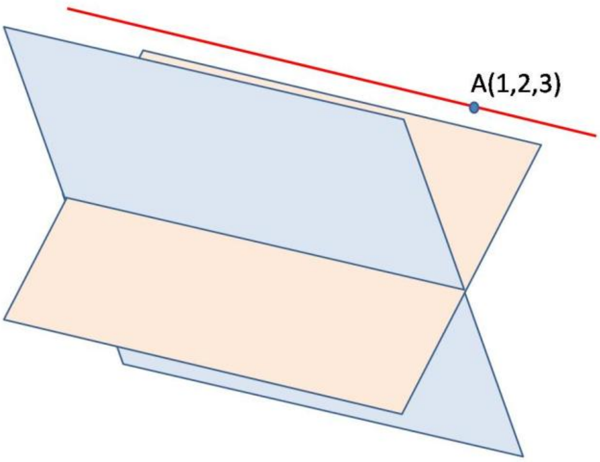
Llamemos a los puntos que buscamos P y Q. Serán $P(\alpha,\alpha,\alpha)$ y $Q(\beta,-\beta,-1+2\beta)$ que generan $PQ = (\beta-\alpha,-\beta-\alpha,-1+2\beta-\alpha)$

Dicho vector debe ser perpendicular a los vectores (1,1,1) y (1,-1,2) y ello nos permite proponer el sistema que forman los productos nulos de dichos vectores con el PQ:

$$PQ\,.(1,1,1) = 0 \qquad \beta-\alpha-\beta-\alpha-1+2\beta-\alpha = 0 \qquad -3\alpha+2\beta-1 = 0$$
$$PQ.(1,-1,2) = 0 \qquad \beta-\alpha+\beta+\alpha-2+4\beta-2\alpha = 0 \qquad -2\alpha+6\beta-2 = 0$$

Cuya solución es $\alpha=-1/7$ $\beta=1/7$ y por tanto los puntos solicitados son: (-1/7, -1/7, -1/7) (2/7, -2/7,-3/7)

3. Considera los planos de ecuaciones $x - y + z = 0$ y $x + y - z = 2$. Determina la recta que pasa por el punto A (1, 2, 3) y no corta a ninguno de los planos anteriores.



La recta que buscamos es paralela al primer plano (pues no lo corta) , por lo tanto, perpendicular al vector (1,-1,1). Análogamente debe ser perpendicular al (1,1,-1). Por ser perpendicular a los dos, debe ser paralela a su producto vectorial:

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (0,2,2)$$

Como sabemos que un punto de la recta es (1,2,3) podemos encontrarla:

$$r \equiv \begin{matrix} P(1,2,3) \\ \vec{u} = (0,2,2) \end{matrix}$$
$$\equiv \frac{x-1}{0} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{2}$$
$$\equiv \begin{cases} y - z + 1 = 0 \\ x - 1 = 0 \end{cases}$$

4. Sean los puntos A (1, 2, 1), B (2, 3, 1), C (0, 5, 3) y D (1, 4, 3). Comprueba si forman o no un rectángulo plano en el espacio, es decir, que están contenidos en un mismo plano, que los lados opuestos son paralelos y los contiguos perpendiculares.

Para calcular el plano, tomamos un punto (por ejemplo el A) y dos vectores (por ejemplo AB y AC).

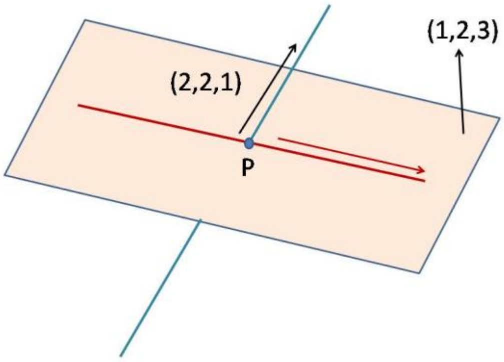
$$\pi \equiv \begin{cases} P(1,2,1) \\ \vec{u}(1,1,0) \\ \vec{v}(-1,3,2) \end{cases} \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0 \equiv \ x-y+2z-1=0$$

Podemos sustituir los cuatro puntos y comprobar que NO están contenidos (sólo con ver que el D no está en el plano)

Aunque ya no es necesario también se puede comprobar que los lados no son paralelos dos a dos.

Por todo ello, NO FORMAN UN RECTÁNGULO PLANO.

5. Halla la ecuación de la recta contenida en el plano de ecuación $x + 2y + 3z - 1 = 0$ que corta perpendicularmente a la recta definida por $\begin{matrix} x = 2z + 4 \\ y = 2z + 3 \end{matrix}$



El punto de corte entre la recta que nos dan y el plano es de la recta que buscamos. Vamos a calcularlo resolviendo el sistema:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z - 1 = 0 \\ x = 2z + 4 \\ y = 2z + 3 \end{cases}$$

que se resuelve fácilmente sustituyendo las dos últimas en la primera y obteniendo el punto: P=(2,1,-1) que está en la recta.

Por otra parte, si la recta está en el plano que nos dan debe ser perpendicular a su vector asociado (1,2,3). También es perpendicular al de la recta que nos dan, que se puede comprobar es (2,2,1). Significa que será paralelo a su producto vectorial:

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (-4,5,-2)$$

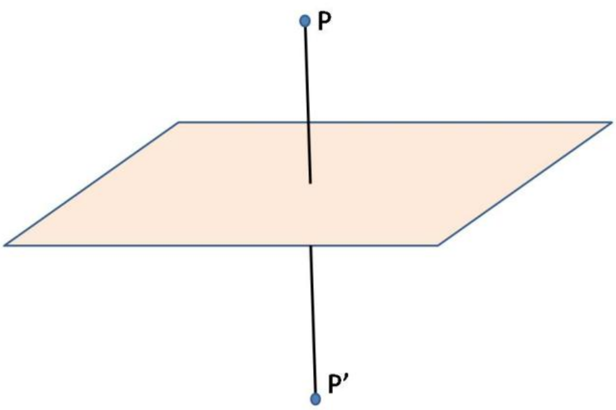
Ya tenemos, en resumen, un punto de la recta (2,1,-1) y un vector paralelo(-4,5,-2). Su ecuación es:

$$\begin{cases} 5x + 4y - 14 = 0 \\ x - 2z - 4 = 0 \end{cases}$$

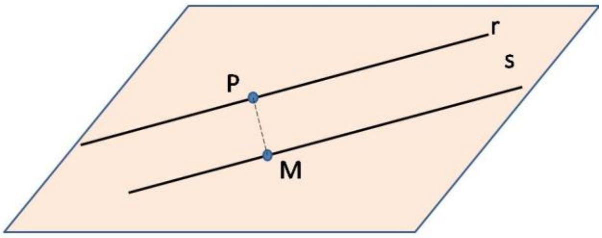
6. Calcula la distancia que hay entre el punto P (12,13,-1) y su punto simétrico respecto del plano de ecuación $3x - 9y + 12z = 0$

La distancia que nos piden es el doble que la que hay hasta el plano. Vamos a calcularla:

$$d(P\,,P') = 2\,.\,d(P,\pi) = 2.\frac{3(12)-9(13)+12(-1)}{\sqrt{9+81+144}} = 2\,.\,\frac{93}{\sqrt{234}} = 12.1592\,u$$



7. Se sabe que las rectas $r \equiv \begin{cases} x + y - z - 3 = 0 \\ x + 2y - 2 = 0 \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} ax + 6y + 6 = 0 \\ x - 2z + 2 = 0 \end{cases}$ son paralelas. Halla la ecuación del plano que contiene a las rectas r y s.



Como la recta r está dentro del plano podemos obtener de ella un punto y un vector. Resolviendo sus ecuaciones:

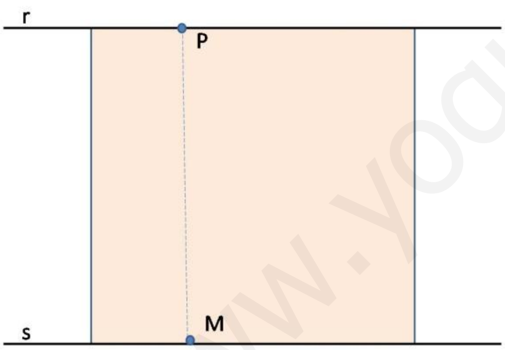
$$r \equiv \begin{cases} x + y - z - 3 = 0 \\ x + 2y - 2 = 0 \end{cases} \equiv \begin{cases} x = 2 - 2\mu \\ y = \mu \\ z = -1 - \mu \end{cases} \equiv \begin{matrix} P = (2,0,-1) \\ \vec{u} = (-2,1,-1) \end{matrix}$$

De la recta s podemos sacar el vector que nos falta u otro punto. Como resolver el sistema con la letra “a” no es fácil encontramos un punto cualquiera: tomando x=0 obtenemos el punto M=(0,-1,1) que está en s, luego está en el plano.

$$\pi \equiv \begin{cases} P(2,0,-1) \\ \vec{u}(-2,1,-1) \\ PM(-2,-1,2) \end{cases} \equiv \begin{vmatrix} x-2 & y-0 & z+1 \\ -2 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \equiv$$

x+6y+4z+2=0

8. Las rectas $r \equiv \begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ 2x + 2y + z - 4 = 0 \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x + y - 6 = 0 \\ x + y - z - 6 = 0 \end{cases}$ contienen dos lados de un cuadrado. Calcular su área.



Para que puedan ser los lados de un cuadrado, deberían ser paralelas. Lo son pues es fácilmente comprobable que sus ecuaciones paramétricas son:

$$r \equiv \begin{cases} x = 2 - \alpha \\ y = \alpha \\ z = 0 \end{cases} \qquad s \equiv \begin{cases} x = 6 - \beta \\ y = \beta \\ z = 0 \end{cases}$$

El área de un cuadrado es el lado al cuadrado, es decir, la distancia entre las dos rectas, al cuadrado. Como son paralelas podemos hacer la distancia de un punto de la primera P=(2,0,0) a la segunda s.

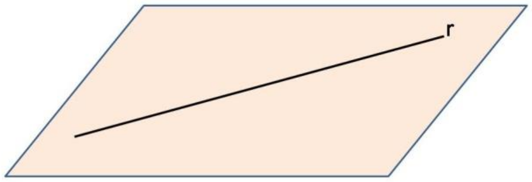
Para calcular esa distancia encontramos el plano perpendicular a s que pasa por P. Como el vector paralelo a s es (-1,1,0) el plano será de ecuación π: -x+y+D = 0 cuyo término independiente es D=-2 sin más que sustituir el punto que sabemos está dentro. Por tanto es π: -x+y-2=0

El corte entre la recta s y el plano π nos dará el punto sobre el que calcular la distancia. Para hacer el corte sustituimos las ecuaciones paramétricas de s en el plano π y queda: -(6-β)+β-2=0 de donde β=4 y el punto M es (2,4,0).

La distancia entre las dos rectas será la distancia entre P y M: $d = \sqrt{0 + 16 + 0} = 4$

Como dijimos antes el área del cuadrado será el cuadrado de esa distancia, es decir 16 unidades cuadradas.

9. Considera el plano π de ecuación $x - 2y + 1 = 0$ y la recta $r \equiv \begin{cases} x - 3y + z = 0 \\ x - y + az + 2 = 0 \end{cases}$. Halla el valor de a sabiendo que la recta está contenida en el plano



Si la recta está contenida en el plano, recta y plano tienen infinitos puntos en común, es decir, el sistema que plantean sus ecuaciones es compatible indeterminado.

$$\begin{cases} x - 2y + 1 = 0 \\ x - 3y + z = 0 \\ x - y + az + 2 = 0 \end{cases}$$

Ello implica que el rango de la matriz de coeficientes no puede ser tres y por tanto el determinante de tamaño tres tiene que ser cero:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & a \end{vmatrix} = 0$$

Desarrollando queda: -a -1 = 0 y por tanto el valor buscado es a=-1