

GEOMETRÍA ANALÍTICA

EJERCICIO 1 :

- a) Halla las ecuaciones paramétricas de la recta r que pasa por $P(3,2)$ y tiene la misma dirección que el vector $v(1,-2)$
 b) Obtén tres puntos de r
 c) Comprueba si los puntos $A(7,-6)$ y $B(-3,7)$ pertenecen a r .

$$a) r: \begin{cases} x = 3 + k \\ y = 2 - 2k \end{cases}$$

$$b) \text{ Dando valores a "k" obtenemos los puntos } \Rightarrow \begin{cases} k = 1 \rightarrow P_1(4,0) \\ k = 2 \rightarrow P_2(5,-2) \\ k = -1 \rightarrow P_3(6,-4) \end{cases}$$

$$c) A = (7,-6) \Rightarrow \begin{cases} 7 = 3 + k \rightarrow k = 4 \\ -6 = 2 - 2k \rightarrow k = 4 \end{cases} \Rightarrow \text{Como coinciden, A pertenece a r}$$

$$B = (-3,7) \Rightarrow \begin{cases} -3 = 3 + k \rightarrow k = -6 \\ 7 = 2 - 2k \rightarrow k = -\frac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow \text{Como no coinciden, B no pertenece a r}$$

EJERCICIO 2 : Halla las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por $A(-1,3)$ y $B(5,-1)$

$$r: \begin{cases} \text{Punto : } A(-1,3) \\ \text{Vector : } v = AB = (6,-4) \parallel (3,-2) \end{cases} \Rightarrow r: \begin{cases} x = -1 + 3k \\ y = 3 - 2k \end{cases}$$

EJERCICIO 3 : Halla una recta paralela y otra perpendicular a $r: \begin{cases} x = 7 - 2t \\ y = -4 + 3t \end{cases}$ que pasen por el punto $M(1,-2)$

$$\text{Paralela: } s: \begin{cases} \text{Punto : } M(1,-2) \\ \text{Vector : } v_s \text{ paralelo } v_r(-2,3) \rightarrow v_s(-2,3) \end{cases} \Rightarrow s: \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = -2 + 3t \end{cases}$$

$$\text{Perpendicular: } p: \begin{cases} \text{Punto : } M(1,-2) \\ \text{Vector : } v_p \text{ perpendicular a } v_r(-2,3) \rightarrow v_p = (3,2) \end{cases} \Rightarrow p: \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = -2 + 2t \end{cases}$$

EJERCICIO 4 : Dadas las rectas $r_1: \begin{cases} x = 5 - 2k \\ y = 2 + 4k \end{cases}$, $r_2: \begin{cases} x = -4k \\ y = 1 - 2k \end{cases}$ y $r_3: \begin{cases} x = 3 + k \\ y = 6 - 2k \end{cases}$ estudiar la posición relativa y hallar el punto de corte, si es posible, en los siguientes casos:

a) r_1 y r_2

b) r_1 y r_3

a) Resolvemos el sistema, cambiando el nombre a un parámetro:

$$\begin{cases} 5 - 2k = -4t \\ 2 + 4k = 1 - 2t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2k + 4t = -5 \\ 4k + 2t = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4k + 8t = -10 \\ 4k + 2t = -1 \end{cases} \Rightarrow 10t = -11 \Rightarrow t = -\frac{11}{10}$$

Sistema compatible determinado, existe una solución. Se cortan en un punto (secantes)

Para hallar el punto de corte, sustituimos el valor de "t" en r₂:

$$\begin{cases} x = -4 \cdot \left(-\frac{11}{10}\right) = \frac{44}{10} = \frac{22}{5} \\ y = 1 - 2 \cdot \left(-\frac{11}{10}\right) = \frac{32}{10} = \frac{16}{5} \end{cases} \Rightarrow P\left(\frac{22}{5}, \frac{16}{5}\right)$$

b) Resolvemos el sistema, cambiando el nombre a un parámetro:

$$\begin{cases} 5 - 2k = 3 + t \\ 2 + 4k = 6 - 2t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2k - t = -2 \\ 4k + 2t = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4k - 2t = -4 \\ 4k + 2t = 4 \end{cases} \Rightarrow \text{Sumándolas } 0 = 0$$

Sistema compatible indeterminado, existen infinitas soluciones. Son coincidentes

EJERCICIO 5 : Dadas las rectas r: $\begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = 5 + 3t \end{cases}$ y s: $2x - 3y + 9 = 0$, halla:

- La ecuación implícita de r y su pendiente
- Las ecuaciones paramétricas de s
- El punto de corte de r y s

a) r: $\begin{cases} \text{Punto } P(3,5) \\ \text{Vector normal: } v = (-2,3) \rightarrow n = (3,2) \end{cases} \Rightarrow 3x + 2y + C = 0 \Rightarrow 9 + 10 + C = 0 \Rightarrow C = -19$
 $\Rightarrow 3x + 2y - 19 = 0 \Rightarrow m = -3/2$

b) s: $\begin{cases} \text{Punto: } x = 0, y = 3 \rightarrow (0,3) \\ \text{Vector: } n = (2,-3) \rightarrow v = (3,2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3t \\ y = 3 + 2t \end{cases}$

c) Resolvemos el sistema: $2(3-2t) - 3(5+3t) + 9 = 0 \Rightarrow 6 - 4t - 15 - 9t + 9 = 0 \Rightarrow -13t = 0 \Rightarrow t = 0 \Rightarrow P(3,5)$

EJERCICIO 6 : Dada las rectas r: $3x - 2y + 6 = 0$ y el punto P(5,-1), halla las ecuaciones de las rectas s y p que pasen por P y sean:

- s paralela a r
- p perpendicular a r

a) $3x - 2y + C = 0 \Rightarrow 15 + 2 + C = 0 \Rightarrow C = -17 \Rightarrow 3x - 2y - 17 = 0$

b) $2x + 3y + C = 0 \Rightarrow 10 - 3 + C = 0 \Rightarrow C = -7 \Rightarrow 2x + 3y - 7 = 0$

EJERCICIO 7 : Halla el ángulo que forman las rectas r: $\begin{cases} x = t \\ y = 4 - 2t \end{cases}$ y s: $x - y = 0$

$$v_r = (1, -2), \quad n_s = (1, -1) \Rightarrow v_s = (1, 1)$$

$$\cos(r, s) = \cos(v_r, v_s) = \frac{|v_r \cdot v_s|}{|v_r| |v_s|} = \frac{|1 - 2|}{\sqrt{5} \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{10}} \Rightarrow \alpha = 71^\circ 33' 54''$$

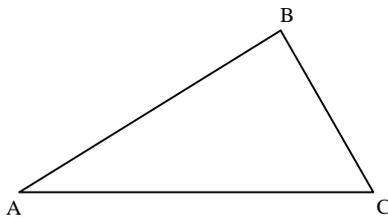
EJERCICIO 8 : Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto P(3,5) y forma un ángulo de 45° con la recta r: $2x + 3y - 6 = 0$

$$s: \begin{cases} \text{Punto : P(3,5)} \\ \text{Pendiente : } m_r = -\frac{2}{3} \Rightarrow \text{tag}45^\circ = \left| \frac{m_s - m_r}{1 + m_s \cdot m_r} \right| \Rightarrow 1 = \left| \frac{m_s + \frac{2}{3}}{1 - m_s \cdot \frac{2}{3}} \right| \Rightarrow \pm 1 = \frac{3m_s + 2}{3 - 2m_s} \begin{cases} m_s = \frac{1}{5} \\ m_s = -5 \end{cases} \end{cases}$$

$$\text{Dos soluciones: } s_1: y-5 = \frac{1}{5}(x-3) \Rightarrow x - 5y + 22 = 0$$

$$s_2: y - 5 = -5(x-3) \Rightarrow 5x + y - 20 = 0$$

EJERCICIO 9 : En el triángulo de vértices A(0,-1), B(8,3) y C(6,-1) calcula la longitud de la altura que parte de B



$$\text{Altura} = d(B, r_{AC})$$

Calculamos la recta r_{AC} : Recta que pasa por A y C:

$$r_{AC} \begin{cases} \text{Punto : A(0,-1)} \\ \text{Vector : } v = AC = (6-0, -1+1) = (6,0) \rightarrow n = (0,6) \end{cases} \Rightarrow 0x + 6y + C = 0 \Rightarrow -6 + C = 0$$

$$C = 6 \Rightarrow 6y + 6 = 0 \Rightarrow y + 1 = 0$$

$$\text{Altura} = d((8,3), y + 1 = 0) = \frac{|3+1|}{\sqrt{0^2 + 1^2}} = 4$$

EJERCICIO 10 : Halla la ecuación de las rectas paralelas a r: $2x - y + 3 = 0$ que distan de $\sqrt{5}$ unidades.

Si son paralelas a r $\Rightarrow r': 2x - y + C' = 0$

$$d(2x-y+3=0; 2x-y+C'=0) = \sqrt{5} \Rightarrow \frac{|3-C'|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \sqrt{5} \Rightarrow |3-C'| = 5 \begin{cases} 3-C' = 5 \rightarrow C' = -2 \\ 3-C' = -5 \rightarrow C' = 8 \end{cases}$$

$$\text{Dos soluciones: } r_1: 2x - y - 2 = 0 \quad r_2: 2x - y + 8 = 0$$

EJERCICIO 11 : En el triángulo de vértices A(-2,2), B(6,0) y C(2,-4), halla el circuncentro.

El circuncentro es el punto donde se cortan las mediatrices (rectas perpendicular a un lado por el punto medio).

Mediatriz del lado AB

$$r_1: \begin{cases} \text{Punto : Punto medio de AB} = \left(\frac{-2+6}{2}, \frac{2+0}{2} \right) = (2,1) \Rightarrow 4x - y + C = 0 \rightarrow 8 - 1 + C = 0 \\ \text{Vector normal : } n = AB = (6+2, 0-2) = (8, -2) \parallel (4, -1) \end{cases}$$

$$\Rightarrow C = -7 \Rightarrow 4x - y - 7 = 0$$

Mediatriz del lado AC

$$r_2: \begin{cases} \text{Punto : Punto medio de AC} = \left(\frac{-2+2}{2}, \frac{2-4}{2} \right) = (0, -1) & \Rightarrow 2x - 3y + C = 0 \rightarrow 3 + C = 0 \\ \text{Vector normal : } n = AB = (2+2, -4-2) = (4, -6) \parallel (2, -3) \end{cases}$$

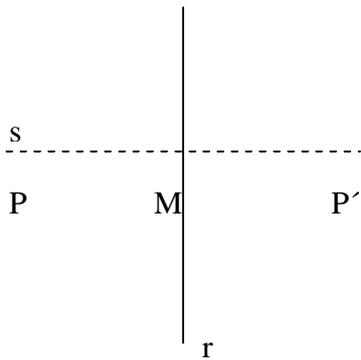
$$\Rightarrow C = -3 \Rightarrow 2x - 3y - 3 = 0$$

Circuncentro : Intersección de las mediatrices (Resolvemos el sistema)

$$\begin{cases} 4x - y - 7 = 0 \\ 2x - 3y - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x - y - 7 = 0 \\ -4x + 6y + 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow 5y - 1 = 0 \rightarrow y = \frac{1}{5} \rightarrow 4x - \frac{1}{5} - 7 = 0 \rightarrow 20x - 1 - 35 = 0$$

$$x = \frac{36}{20} = \frac{9}{5} \Rightarrow C = \left(\frac{9}{5}, \frac{1}{5} \right)$$

EJERCICIO 12 : Determina el punto P' simétrico de P(3,-2) respecto de la recta r: $2x - y + 8 = 0$



Paso 1 : Hallar la recta s: Perpendicular a r por P

$$s: \begin{cases} \text{Punto : } P(3, -2) \\ \text{Vector : } v_s = n_r = (2, -1) \rightarrow n_s = (1, 2) \end{cases}$$

$$x + 2y + C = 0 \Rightarrow 3 - 4 + C = 0 \Rightarrow C = 1 \Rightarrow x + 2y + 1 = 0$$

Paso 2 : Hallamos el punto M: Intersección de r y s

$$M: \begin{cases} 2x - y + 8 = 0 \\ x + 2y + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - y + 8 = 0 \\ -2x - 4y - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow -5y + 6 = 0$$

$$y = \frac{6}{5} \rightarrow x = -1 - 2 \cdot \frac{6}{5} = -\frac{17}{5} \Rightarrow M = \left(-\frac{17}{5}, \frac{6}{5} \right)$$

Paso 3 : M es el punto medio de P y P'

$$\left(-\frac{17}{5}, \frac{6}{5} \right) = \left(\frac{3+x}{2}, \frac{-2+y}{2} \right) \Rightarrow P' = \left(-\frac{49}{5}, \frac{22}{5} \right)$$

EJERCICIO 13 : Halla el punto de la recta r: $y = -3x + 2$ que equidista de los puntos A(5,1) y B(3,-2)

$$\begin{cases} \text{El punto } P(x, y) \text{ pertenece a la recta} \rightarrow \text{Cumple la ecuación : } y = -3x + 2 \\ d((x, y), (5, 1)) = d((x, y), (3, -2)) \rightarrow \sqrt{(x-5)^2 + (y-1)^2} = \sqrt{(x-3)^2 + (y+2)^2} \end{cases}$$

$$\text{Resolviendo el sistema: } P = \left(-\frac{1}{14}, \frac{31}{14} \right)$$