Geometría analítica

Tipo I: Vectores

1. Un vector fijo tiene su origen en el punto A(2, −1) y es equipolente al vector $\overrightarrow{CD}(-1, 4)$. Determina las coordenadas de su extremo y su módulo. [Sol] B(1, 3); $\left|\overrightarrow{\mathbf{AB}}\right| = \sqrt{17}$.

2. Tres vértices consecutivos de un paralelogramo son los puntos A(1, −3), B(2, 2) y C(−3, 0). Calcula las coordenadas del cuarto vértice. **[Sol]** D(-4, -5)

3. Halla el producto escalar $\vec{u}\cdot\vec{v}$ en los siguientes casos:

a) $|\vec{u}| = 2,\ |\vec{v}| = \dfrac{1}{4};\ (\vec{u},\vec{v}) = 60^\circ$ b) $|\vec{u}| = 3,\ |\vec{v}| = (2,-3);\ (\vec{u},\vec{v}) = 45^\circ$

c) $\vec{u} = \left(3, \dfrac{1}{2}\right),\ \vec{v} = (-1, 3)$ [Sol] a) $\frac{1}{4}$; b) $= \frac{3\sqrt{26}}{2}$; c) $-\frac{3}{2}$

4. Dados los vectores $\vec{u}\,(1, -2)$, $\vec{v}\,(3, 1)$ y $\vec{w}\,(2, 0)$,

a) calcula las coordenadas del vector $2\vec{u} - \vec{v} + \dfrac{1}{3}\vec{w}$,

b) expresa $\vec{w}$ como combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{v}$,

c) calcula los ángulos que forman dos a dos,

d) halla un vector con la misma dirección que $\vec{u}$ y de módulo $\sqrt{20}$,

[Sol] a) $\left(-\frac{1}{3}, -5\right)$; b) $\vec{\mathbf{w}} = \frac{2}{7}\vec{\mathbf{u}} + \frac{4}{7}\vec{\mathbf{v}}$; c) $(\vec{u},\vec{v}) = 81^\circ\ 52'\ 12''$; $(\vec{u},\vec{v}) = 63^\circ\ 26'\ 6''$; $(\vec{v},\vec{w}) =$ 18º 26´ 6´´; d) $\vec{\mathbf{x}_1} = (2, -4)$ y $\vec{\mathbf{x}_2} = (-2, 4)$.

5. Si $\vec{u}$ (2, *a*) y $\vec{v}$ (1, -4) determina el valor de *a* para que:

a) $\vec{u}$ y $\vec{v}$ sean perpendiculares; b) $\vec{u}$ y $\vec{v}$ tengan el mismo módulo,

c) $\vec{u}\cdot\vec{v} = 10$. [Sol] a) $a = \frac{1}{2}$; b) $a = \pm\sqrt{13}$; c) $a = -2$

6. Sea $\vec{u}$ (3, -2). Calcula:

a) un vector $\vec{x}$ unitario y con la misma dirección que $\vec{u}$,

b) un vector $\vec{z}$ unitario y perpendicular a $\vec{u}$.

[Sol] a) $\vec{\mathbf{x}_1} = \left(\frac{3\sqrt{13}}{13}, -\frac{2\sqrt{13}}{13}\right)$ y $\vec{\mathbf{x}_2} = \left(-\frac{3\sqrt{13}}{13}, \frac{2\sqrt{13}}{13}\right)$; b) $\vec{\mathbf{z}_1} = \left(\frac{2\sqrt{13}}{13}, \frac{3\sqrt{13}}{13}\right)$ y $\vec{\mathbf{z}_2} = \left(-\frac{2\sqrt{13}}{13}, -\frac{3\sqrt{13}}{13}\right)$.

Tipo II: Determinación de rectas. Posición relativa. Perpendicularidad

7. Escribe todas las ecuaciones de la recta que:

a) pasa por A(−1, 2) y tiene por vector director el $\vec{u}$ (3, −5),

b) pasa por los puntos A(3, −1) y B(2, 2),

c) pasa por A(1, −5) y tiene por pendiente m = −3.

[Sol] a) $\begin{cases} x = -1 + 3\lambda \\ y = 2 - 5\lambda \end{cases}$; $\dfrac{x+1}{3} = \dfrac{y-2}{-5}$; 5x + 3y − 1 = 0; $y - 2 = \frac{-5}{3}(x+1)$; $y = -\frac{5}{3}x + \frac{1}{3}$ b) $\begin{cases} x = 3 - \lambda \\ y = -1 + 3\lambda \end{cases}$; $\dfrac{x-3}{-1} = \dfrac{y+1}{3}$; 3x + y − 8 = 0; $y + 1 = -3(x-3)$; $y = -3x + 8$ c) $\begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = -5 - 3\lambda \end{cases}$; $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+5}{-3}$; 3x + y +2 = 0; $y + 5 = -3(x-1)$; $y = -3x - 2$

8. Estudia la posición relativa de cada uno de los siguientes pares de rectas:

a) r: 2x –y + 5 = 0, $s: \frac{x}{-1} = \frac{y-2}{1}$ b) r: x + 2y + 2 = 0, $s: \frac{x+1}{4} = \frac{y-1}{-2}$

[Sol] a) Se cortan en P(−1, 3); b) Paralelas.

9. Determina el ángulo que forman los siguientes pares de rectas:

a) r: x – y – 3 = 0, s: x – 3y – 5 = 0 b) $r: y+3 = \frac{1}{2}(x-1)$, s: y = x + 2

[Sol] a) 26º 33´ 54´´; b) 18º 26´ 6´´.

10. Calcula el área del triángulo que determinan la recta x – 2y + 8 = 0 y los ejes coordenados.

[Sol] $S = 16u^2$

11. Determina la mediatriz del segmento que tiene por extremos A(1, 2) y B(3, −1).

[Sol] 4x – 6y – 5 = 0.

12. Calcula el baricentro y el ortocentro del triángulo de vértices A(1, −1), B(2, 3) y C(−3, 2).

[Sol] Baricentro: $G\left(0, \frac{4}{3}\right)$; ortocentro $\left(\frac{11}{19}, \frac{21}{19}\right)$.

13. Calcula el baricentro y el circuncentro del triángulo de vértices A(1, −1), B(−3, 3) y C(4, 1). **[Sol]** Baricentro $G\left(\frac{2}{3}, 1\right)$; circuncentro $\left(\frac{7}{10}, \frac{27}{10}\right)$.

14. Dos lados de un paralelogramo están sobre las rectas r: x + y –1 = 0 y s: x – 2y – 5 = 0. Uno de sus vértices es el punto A(1, -1). Halla los otros vértices.

[Sol] $B\left(\frac{5}{3}, -\frac{5}{3}\right)$; $C\left(\frac{7}{3}, -\frac{4}{3}\right)$ y $D\left(\frac{5}{3}, -\frac{2}{3}\right)$.

Tipo III: Distancias

15. [S] Sea el triángulo de vértices A(4, 2), B(13, 5) y C(6, 6).

a) Hallar la ecuación de la altura que pasa por el vértice C.
b) Calcular la longitud de los dos segmentos en que la altura anterior corta al lado AB.

[Sol] a) 3x + y – 24 = 0; b) $2\sqrt{10}$

16. En el triángulo de vértices A(2, -3), B(-1, 4) y C(0, 5) calcula:

a) la altura correspondiente al vértice C,
b) la ecuación de la mediatriz del lado AB,
c) su área.

[Sol] a) $\frac{10}{\sqrt{58}}$; b) 3x – 7y + 2 = 0; c) 5 u^2

17. Los puntos A(–2, –2) y B(1, 4) son vértices de un triángulo rectángulo en A. Determina el tercer vértice que está situado sobre la recta x + y – 1 = 0.

[Sol] (8, –7)