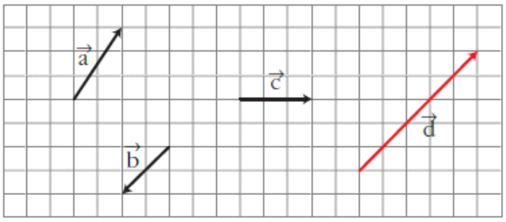
VECTORES

1.- DEFINICIÓN Y OPERACIONES

1. Copia en un papel cuadriculado los siguientes vectores:

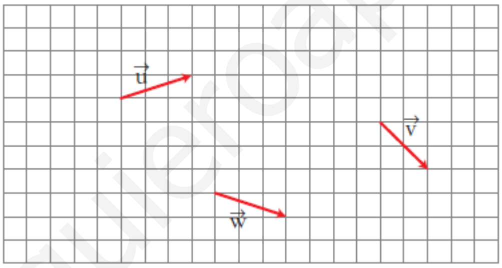


Representa los vectores: $-2\vec{a}$, $3\vec{b}$ y $\dfrac{\vec{c}}{2}$ y expresa sus coordenadas.

2. Efectúa gráficamente:
   a) $\vec{a}+\vec{b}$ b) $\vec{b}+\vec{d}$
   y expresa dichas operaciones mediante coordenadas.

3. Efectúa gráficamente:
   a) $\vec{a}-\vec{b}$ b) $\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}$
   y expresa dichas operaciones mediante coordenadas.

4. Con los vectores de la figura:



Realiza las siguientes operaciones gráficamente y mediante coordenadas.
a) $3\vec{u}+2\vec{v}$ b) $\vec{u}-2\vec{v}$ c) $\vec{a}-\vec{b}$ b) $3\vec{u}-2\vec{v}+4\vec{w}$

2.- BASES

5. Halla las coordenadas de los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{u}_1 = \vec{u}+\vec{v}$, $\vec{u}_2 = \vec{u}-\vec{v}$, $\vec{u}_3 = 3\vec{u}-2\vec{v}$ en la base B = $\{\vec{u},\vec{v}\}$ y representa los vectores obtenidos.
   Solución: $\vec{u}=(1,0)$; $\vec{v}=(0,1)$; $\vec{u}_1=(1,1)$, $\vec{u}_2=(1,-1)$, $\vec{u}_3=(3,-2)$

6. Comprueba que los vectores (1, 1), (1, 0) son linealmente independientes.

7. Demuestra que los vectores (1, a) y (0, b) son linealmente independientes para cualquier valor de a y $b\neq 0$.

8. Demuestra que los vectores (a, b) y (c, d) son linealmente independientes si y solo si $ad- bc \neq 0$.

9. Determina los valores a y b para que el vector (1, a) sea combinación lineal de (1, b) y (1, 2).
   Solución: $b \neq 2$, $a \in \mathbb{R}$.

10. Halla el vector $\vec{w}$ tal que $\vec{u} = 3\vec{v} - 2\vec{w}$, siendo $\vec{u}$ = (2, 3) y $\vec{v}$ = (1, 1).
    Solución: $a = 1$, $b = 0$, $a, b \in \mathbb{R}$.

11. Halla el vector $\vec{w}$ tal que $\vec{u} = \vec{v} - 2\vec{w}$, siendo $\vec{u}$ = (2, 2) y $\vec{v}$ = (1/2, 1/1).
    Solución: $a = 1$, $b = 1$, $a, b \in \mathbb{R}$.

2.- SISTEMAS DE REFERENCIA

12. Dados los puntos A = (1, 2), B = (-1, 3), C = (3, 4) y D = (1, 0) halla las coordenadas de los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DA}$ y $\overrightarrow{AC}$.
Solución: $\overrightarrow{AB}$ = (-2, 1), $\overrightarrow{BC}$ = (4, 1), $\overrightarrow{CD}$ = (-2, -4), $\overrightarrow{DA}$ = (0, 2) y $\overrightarrow{AC}$ = (2, 2)

13. Dado el vector $\overrightarrow{AB}$ = (2, 1) y el punto A = (3,1), halla las coordenadas del punto B.
Solución: B = (5,2).

14. Dado el vector $\overrightarrow{AB}$ = (2, 3) y el punto B = (5, -3), halla las coordenadas del punto A.
Solución: A = (3, -6)

15. Dados los puntos A = (1, 2), B = (-1, 3), C = (3, 4) y D = (1, 0) Halla el punto medio de los segmentos AB, BC, CD, DA, AC.
Solución: Son respectivamente M = $\left(0,\ \frac{5}{2}\right)$, N = $\left(1,\ \frac{7}{2}\right)$, O *= (2, 2),* P *= (1, 1)* y Q *= (2, 3).*

16. Halla el punto simétrico de A = (-5, 2) respecto del punto B = (1, -1).
Solución: A' = (7, -4).

17. Halla el punto simétrico de A = (1, 2) respecto del punto B = (2, 3).
Solución: A' = (3, 4).

18. Halla si están alineados los puntos A = (3, 1), B = (4, 4) y C = (5, 7).
Solución: Sí lo están.

19. Halla si están alineados los puntos A = (3, 1), B = (4, 6) y C = (5, 9).
Solución: No lo están.

20. Dados los puntos A = (2, 3) y B = (1, -2) halla los puntos que dividen al segmento en tres partes iguales.
Solución: M = $\left(\frac{5}{3},\ \frac{4}{3}\right)$ *y N =* $\left(\frac{4}{3}, -\frac{1}{3}\right)$

21. Sean A = (-3, 5), B = (7, 2) y C = (5, 6) los vértices de un triángulo. Calcula las coordenadas del baricentro del triángulo.
Solución: Baricentro G = $\left(3, \frac{13}{3}\right)$

22. Sean A = (1, -3), B = (0, 7) y C = (-1, 5) los vértices de un triángulo. Calcula las coordenadas de los puntos medios de cada lado y del baricentro del triángulo.
Solución: Punto medios de AB: M = $\left(\frac{1}{2}, 2\right)$*, BC: N =* $\left(-\frac{1}{2}, 6\right)$ *y AC: O =* $(0,1)$.
Baricentro: G = $(0, 3)$

23. De un paralelogramo ABCD se conocen dos vértices consecutivos A = (1, 1) y B = (2, 2) y el centro M = (3, 0), determina las coordenadas de los otros dos vértices C y D.
Solución: C = (5,-1) y D = (4,-2).

3.- PRODUCTO ESCALAR

24. Sean $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ dos vectores tales que $|\vec{u}_1| = |\vec{u}_2|$ y $\vec{u}_1 . \vec{u}_2 = 0$. Comprueba que los vectores $\vec{u}$ = x $\vec{u}_1$+y $\vec{u}_2$ y $\vec{v}$ = -y $\vec{u}_1$+x $\vec{u}_2$ son ortogonales:.

25. Sea B = {$\vec{u}_1, \vec{u}_2$} una base ortonormal. Calcula el valor de k para que los vectores: $\vec{u} = \frac{1}{2}\vec{u}_1 + k\vec{u}_2$ y $\vec{v} = \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{u}_1 + m\vec{u}_2$ sean unitarios.

Solución: k = $\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$, m = $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

26. Sea B = {$\vec{u}_1, \vec{u}_2$} una base tal que $|\vec{u}_1| = |\vec{u}_2| = 1$ y $(\vec{u}_1, \vec{u}_2) = 60°$. Calcula el módulo del vector $\vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$.

Solución: $|\vec{u}| = \sqrt{3}$

27. Sea B = {$\vec{u}_1, \vec{u}_2$} una base ortonormal y sean los vectores: $[\overrightarrow{OA}] = 3\vec{u}_1 + \vec{u}_2$, $[\overrightarrow{OB}] = 2\vec{u}_1 + 5\vec{u}_2$, $[\overrightarrow{OC}] = 7\vec{u}_1$. Demuestra que el triángulo ABC es isósceles y calcula su perímetro.

Solución: Su perímetro es $2\sqrt{17} + 5\sqrt{2}$, Los lados AB y AC miden lo mismo $\sqrt{17}$.

28. ¿Qué ángulo forman los vectores $\vec{u} = 2\vec{u}_1 - 3\vec{u}_2$ y $\vec{v} = 4\vec{u}_1 - 5\vec{u}_2$ sabiendo que B = {$\vec{u}_1, \vec{u}_2$} es una base ortonormal.

Solución: arc cos $\left(\frac{23}{\sqrt{13}.\sqrt{41}}\right)$

29. Dados los vectores $\vec{u} = (2, a)$ y $\vec{v} = (b, -2)$ determina los valores de a y b tales que hacen que $\vec{u}$ y $\vec{v}$ sean ortogonales y $|\vec{u}| = |\vec{v}|$.

Solución: a = b.

30. Dados los vectores $\vec{u} = (2, 0)$, $\vec{v} = (0, 1)$ y $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$, ¿qué relación deben satisfacer a y b para que el módulo de $\vec{w}$ sea la unidad?

Solución: $4a^2 + b^2 = 1$.

31. Halla la proyección ortogonal de $\overrightarrow{AB}$ sobre $\overrightarrow{CD}$, si A = (1,2), B = (-2,0), C = (2,3) y D = (–1,1).

Solución: Como $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, $\text{proy}_{\overrightarrow{CD}}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}$.

32. ¿Son unitarios los vectores $\vec{u} = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$, $\vec{v} = \left(-\frac{5}{13}, \frac{12}{13}\right)$ y $\vec{w} = (1, 1)$?

Solución: No lo es $\vec{w}$, sí los demás.

33. Demuestra que las dos diagonales de un rombo son perpendiculares.

34. Sean los vectores $\vec{u} = (1,-1)$ y $\vec{v} = (2, m)$ halla m de forma que:
a) $\vec{u}$ y $\vec{v}$ sean ortogonales.
b) $\vec{u}$ y $\vec{v}$ tengan la misma dirección.
Solución: a) m = 2, b) m = -2,

35. Sean los vectores $\vec{u} = (1,-1)$ y $\vec{v} = (2, m)$ halla m de forma que:
a) $\vec{v}$ sea unitario.
b) $(\vec{u}, \vec{v}) = 45°$.
Solución: a) sin solución real., b) m = 0