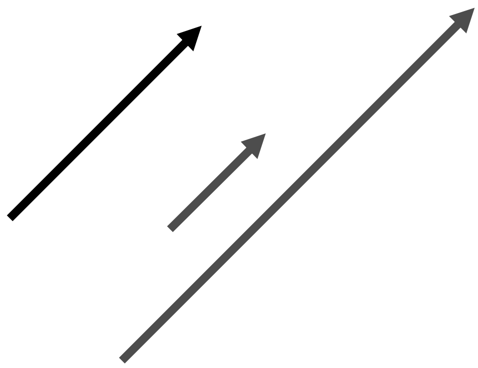
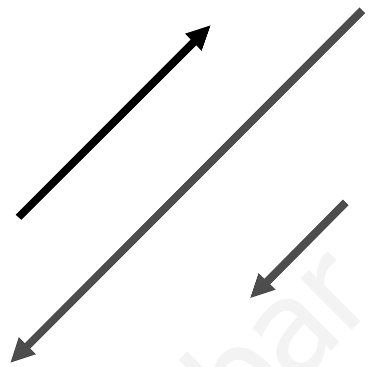
Vectores

Ejercicio 1

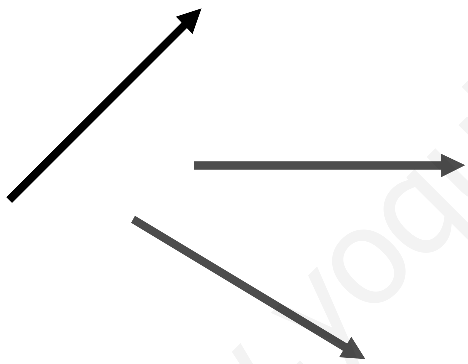
a) Dibuja dos vectores con distinto módulo, misma dirección y mismo sentido que el vector dado:



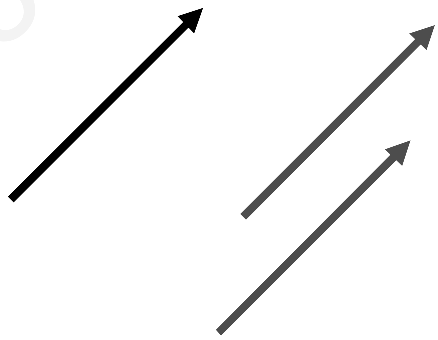
b) Dibuja dos vectores con distinto módulo, misma dirección y sentido contrarios que el vector dado:



c) Dibuja dos vectores con el mismo módulo y distinta dirección que el vector dado:



d) Dibuja dos vectores con el mismo módulo, mismo sentido y distinto punto de aplicación que el vector dado:



Ejercicio 2

a) ¿El módulo de un vector, puede ser un número real negativo? **No**

b) ¿Existe algún vector sin dirección ni sentido? **Vector nulo**

c) ¿Cuándo dos vectores son equipolentes? **Mismo módulo, dirección y sentido**

d) Dos vectores de distinta dirección, ¿pueden ser opuestos? **No**

e) ¿Cuándo un vector es nulo? **Módulo cero**

f) El módulo de un vector ¿siempre es un número real positivo? **No, puede ser cero**

Ejercicio 3

Conociendo los puntos $A=(2,3)$, $B=(1,-1)$ y $C=(-2,4)$, calcula las componentes de los vectores:

$a)$ $\overrightarrow{AB}=(1-2,(-1)-3)=(-1,-4)$ Cuadrante III

$b)$ $\overrightarrow{AC}=(-2-2,4-3)=(-4,1)$ Cuadrante II

$c)$ $\overrightarrow{CA}=(2-(-2),3-4)=(4,-1)$ Cuadrante IV

$d)$ $\overrightarrow{BA}=(2-1,3-(-1))=(1,4)$ Cuadrante I

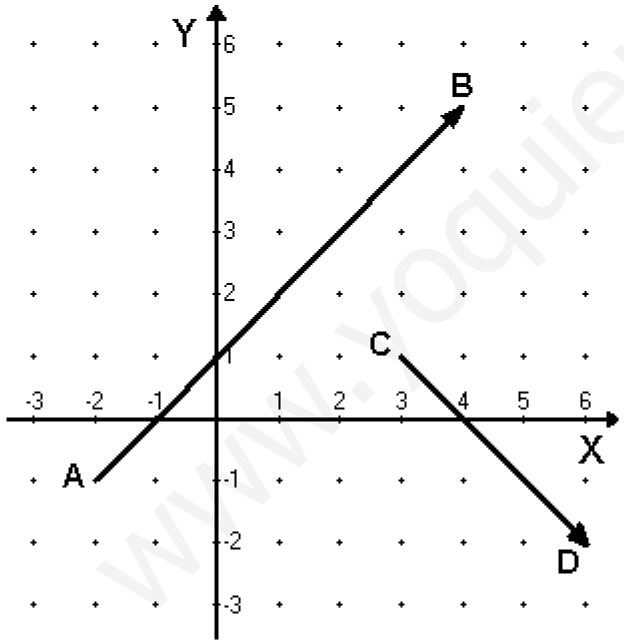
$e)$ $\overrightarrow{CB}=(1-(-2),(-1)-4)=(3,-5)$ Cuadrante IV

¿Cuáles de los vectores anteriores son opuestos? $\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{AC}=-\overrightarrow{CA}$.

Sirve de ayuda determinar en qué cuadrante está cada vector.

Ejercicio 4

Halla, gráfica y analíticamente, las componentes de los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$:



Gráficamente:

$\overrightarrow{AB}=(6,6)$;

$\overrightarrow{CD}=(3,-3)$

Analíticamente:

$A=(-2,-1)$; $B=(4,5)$

$C=(3,1)$; $D=(6,-2)$

$\overrightarrow{AB}=(4-(-2),5-(-1))=(6,6)$;

$\overrightarrow{CD}=(6-3,-2-1)=(3,-3)$

Ejercicio 5

Halla el módulo de los siguientes vectores: $\vec{a}=(1,2)$ y $\vec{b}=(6,-8)$

$|\vec{a}|=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$

$|\vec{b}|=\sqrt{6^2+(-8)^2}=\sqrt{36+64}=10$

Ejercicio 6

Dado el vector $\vec{v}=\left(5,12\right)$, y con ayuda del teorema de Pitágoras, obtén el módulo del vector.

$$\vec{v}=\sqrt{5^2+12^2}=\sqrt{169}=\boxed{13}$$

¿Podríamos averiguar la dirección, es decir, el ángulo que forma el vector con la horizontal?

$$\text{tg}\,\alpha=\frac{12}{5}=2'4 \quad \rightarrow \quad \boxed{\alpha=67'38^\circ}$$

Ejercicio 7

Dados los siguientes vectores: $\vec{u}=\left(3,0\right)$; $\vec{v}=\left(2,1\right)$; $\vec{w}=\left(2,2\right)$ y $\vec{x}=\left(2'5,2\right)$, ¿cuál tiene mayor módulo?

El vector $\vec{x}$

(2'5,2) -> Su módulo es $\sqrt{10'25}$

(3,0) -> Su módulo es $\sqrt{9}=3$

(2,2) -> Su módulo es $\sqrt{8}$

(2,1) -> Su módulo es $\sqrt{5}$

Ejercicio 8

Halla las componentes del vector $\vec{v}$ sabiendo que su módulo es 5 y el ángulo que forma con la horizontal (eje de abscisas) es 30°:

Utilizamos las razones trigonométricas:

$$\text{sen }30^\circ=\frac{y}{5};\ y=5\cdot\text{sen }30^\circ=2'5$$

$$\cos 30^\circ=\frac{x}{5};\ x=5\cdot\cos 30^\circ=\frac{5\sqrt{3}}{2}=2'5\sqrt{3}$$

$$\vec{v}=\left(2'5,2'5\sqrt{3}\right)=\left(\frac{5}{2},\frac{5\sqrt{3}}{2}\right)$$

Ejercicio 9

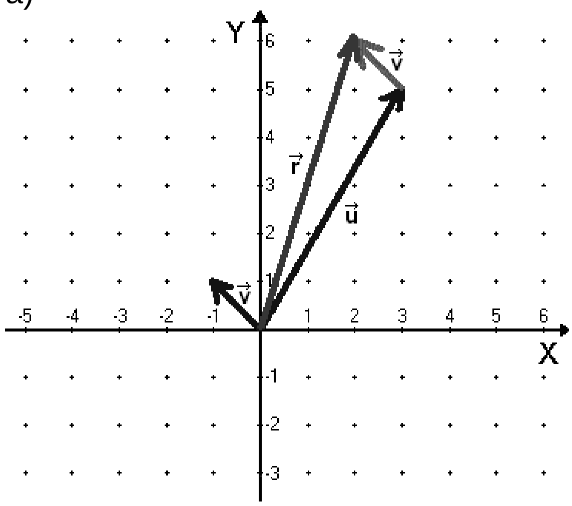
¿Es posible que la suma de dos vectores no nulos sea el vector nulo?

Sí, la suma de vectores opuestos: mismo módulo y dirección, y sentidos contrarios.

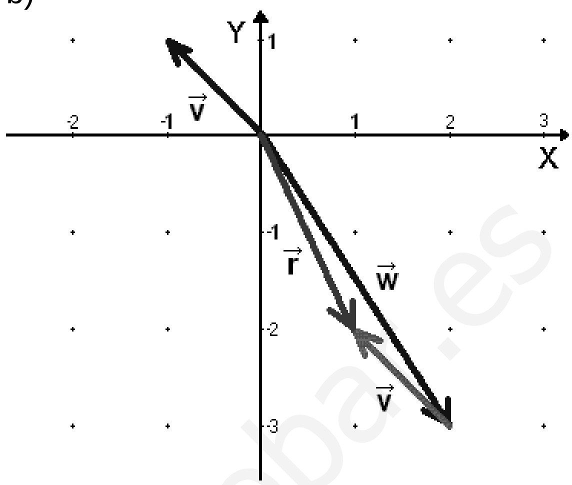
Ejercicio 10

Representa los vectores $\vec{u}=(3,5)$, $\vec{v}=(-1,1)$ y $\vec{w}=(2,-3)$ y realiza gráficamente las siguientes operaciones: $a)\,\vec{u}+\vec{v}$, $b)\,\vec{v}+\vec{w}$, $c)\,\vec{v}-\vec{w}$, $d)\,\vec{u}+\vec{w}-\vec{v}$

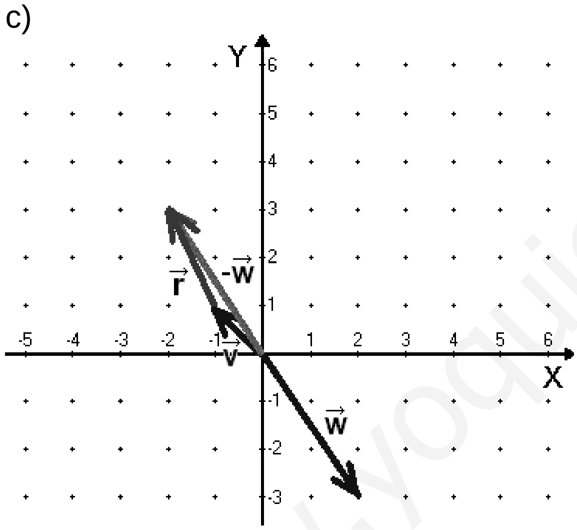
a)



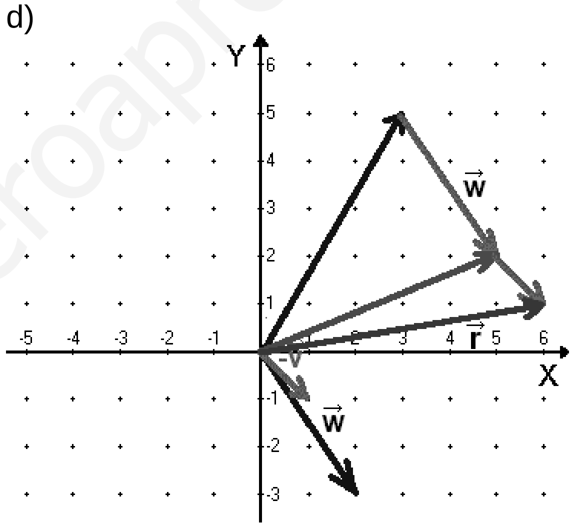
b)



c)



d)



Ejercicio 11

Dados los vectores $\vec{u}=(1,-3)$, $\vec{v}=(4,-2)$ y $\vec{w}=(1,1)$ calcula analíticamente las componentes de los siguientes vectores:

$a)\quad \vec{u}+\vec{v}=(1+4,-3-2)=(5,-5)$ $\qquad b)\quad \vec{w}-\vec{v}=(1-4,1-(-2))=(-3,3)$

$c)\quad \vec{u}+\vec{v}-\vec{w}=(5-1,-5-1)=(4,-6)$ $\quad d)\quad 2\vec{v}-\vec{u}=(8-1,-4-(-3))=(7,-1)$

$e)\quad \vec{w}+3\vec{u}=(1+3\cdot 1,1+3(-3))=(4,-8)$

$f)\quad \vec{u}+\vec{w}-5\vec{v}=(1+1-20,-3+1+10)=(-18,8)$

Ejercicio 12

¿En qué casos el producto escalar de dos vectores es nulo?

- Cuando alguno de los vectores sea nulo (módulo cero).
- Cuando ambos vectores sean perpendiculares entre sí: $\cos 90° = \cos 270° = 0$

Ejercicio 13

¿Podemos obtener el producto escalar de un vector por sí mismo?

Sí. $\vec{v} \cdot \vec{v} = |\vec{v}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos 0° = |\vec{v}|^2 \cdot 1 = |\vec{v}|^2$; es decir, si $|\vec{v}|^2 = \vec{v} \cdot \vec{v}$, entonces $|\vec{v}| = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}}$

El módulo de un vector es la raíz cuadrada positiva del producto escalar de un vector por sí mismo.

Esta expresión, aunque parezca poco útil, puede servir para dar una <u>expresión del módulo de un vector</u> utilizando el producto escalar, familiarizase aún más con el lenguaje matemático escrito, utilizar oralmente la terminología adecuada, etc.

Ejercicio 14

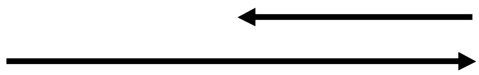
Calcula el producto escalar de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ sabiendo que $|\vec{u}| = 2$, $|\vec{v}| = 3$ y que forman un ángulo de $30°$.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 \cdot 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \boxed{3\sqrt{3}}$$

Ejercicio 15

Sabemos que $|\vec{u}| = 3$ y que $\vec{u} = -2\vec{v}$. Calcula $\vec{u} \cdot \vec{v}$. (Pista: dibuja los vectores)

Debemos analizar la igualdad $\vec{u} = -2\vec{v}$ que se da entre dos vectores: el vector $\vec{u}$ es el mismo que el vector $\vec{v}$ pero multiplicado por -2. Ya sabemos que cuando un vector se multiplica por un número: primero, se conserva la dirección ($\vec{u}$ y $\vec{v}$ tienen la misma dirección); segundo, el módulo de $\vec{u}$ es el doble que el de $\vec{v}$; tercero, ambos vectores tienen sentidos opuestos. Tenemos información suficiente como para dibujarlos:



Al dibujar los vectores comprobamos que el ángulo que forman es de 180º (el coseno es, por tanto, -1).

$|\vec{u}| = 3$; $|\vec{v}| = \frac{3}{2}$, y el ángulo entre ellos es 180º, por tanto: $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3 \cdot \frac{3}{2} \cdot \cos 180° = \boxed{\frac{-9}{2}}$

Ejercicio 16

Se sabe que el producto escalar de dos vectores no nulos es cero; ¿qué se puede decir de las direcciones de los vectores?

Que son perpendiculares (el coseno de 90º y de 180º es cero).

Ejercicio 17

Dados los vectores $\vec{u}=(1,3)$, $\vec{v}=(-1,1)$ y $\vec{w}=(6,0)$, calcula los productos escalares:

$a)\quad \vec{u}\cdot\vec{v}=1(-1)+3\cdot 1=\boxed{2}$

$b)\quad \vec{u}\cdot\vec{w}=1\cdot 6+3\cdot 0=\boxed{6}$

$c)\quad \vec{v}\cdot\vec{w}=-1\cdot 6+1\cdot 0=\boxed{-6}$

$d)\quad \vec{v}\cdot\vec{u}=-1\cdot 1+1\cdot 3=\boxed{2}$

$e)\quad \vec{w}\cdot\vec{u}=6\cdot 1+0\cdot 3=\boxed{6}$

¿Qué conclusión puede sacarse de los apartados a) y d) o de los apartados b) y e)?

Prueban (no demuestran) la propiedad conmutativa del producto escalar.

Ejercicio 18

Remarcar la idea de que el resultado debe ser un escalar.

Aquí tiene especial relevancia la posición del punto (producto escalar) entre los vectores, aunque podría no ponerse. Conviene diferenciarlo del punto entre escalar y vector.

Mirar la actividad 13. Como $\vec{v}\cdot\vec{v}=(\vec{v})^2=|\vec{v}|^2$

$a)\quad \vec{u}\cdot(2\vec{u}-\vec{v})=2\vec{u}\cdot\vec{u}-\vec{u}\cdot\vec{v}=2\cdot 2^2-(-3)=8+3=\boxed{11}$

$b)\quad (3\vec{u}-\vec{v})^2=9(\vec{u})^2-6\vec{u}\cdot\vec{v}+(\vec{v})^2=9\cdot 2^2-6(-3)+4^2=36+18+16=\boxed{70}$

Ejercicio 19

Determina el valor de ***a*** para que los vectores $\vec{u}=\left(a,-2\right)$ y $\vec{v}=\left(2a,9\right)$ sean perpendiculares:

Si deben ser perpendiculares, el ángulo que formarán será 90º ó 180º, y por tanto, su coseno es cero.

Si hay una incógnita, necesitamos una ecuación: si planteamos el producto escalar de ambos vectores, podremos igualarlo a cero:

Utilizamos la segunda definición de producto escalar: $\vec{u}\cdot\vec{v}=a\cdot 2a+\left(-2\right)\cdot 9=0$

$2a^2-18=0$; $a^2=9$; $\boxed{a=\pm 3}$

Ejercicio 20

Halla el ángulo formado por los vectores $\vec{u}=\left(-5,12\right)$ y $\vec{v}=\left(8,-6\right)$:

Ayuda: comprobar en qué cuadrante está cada vector (estudiando los signos de las componentes) nos dará una idea del tamaño del ángulo.

En este caso, el vector $\vec{u}$ está en el cuadrante ***II***, y el $\vec{v}$ en el ***IV***. El ángulo que forman es mayor de 90º y menor de 180º.

Producto escalar (segunda definición): $\vec{u}\cdot\vec{v}=-5\cdot 8+12\cdot\left(-6\right)=-40-72=-112$

Módulos:

$$\left|\vec{u}\right|=\sqrt{\left(-5\right)^2+12^2}=\sqrt{25+144}=\sqrt{169}=13$$

$$\left|\vec{v}\right|=\sqrt{8^2+\left(-6\right)^2}=\sqrt{64+36}=\sqrt{100}=10$$

Obtenemos el coseno del ángulo que forman: $\cos\left(\vec{u},\vec{v}\right)=\dfrac{-112}{13\cdot 10}$

Y, finalmente, el ángulo pedido: $\widehat{\vec{u},\vec{v}}=\arccos\dfrac{-112}{13\cdot 10}=\boxed{149'49^\circ}$

Ejercicio 21

Determina el ángulo que forman los vectores $\vec{u}=\left(1,3\right)$ y $\vec{v}=\left(2,-4\right)$:

Producto escalar (segunda definición): $\vec{u}\cdot\vec{v}=1\cdot 2+3\cdot\left(-4\right)=2-12=-10$

Módulos:

$$\left|\vec{u}\right|=\sqrt{1^2+3^2}=\sqrt{1+9}=\sqrt{10}$$

$$\left|\vec{v}\right|=\sqrt{2^2+\left(-4\right)^2}=\sqrt{4+16}=\sqrt{20}$$

Coseno del ángulo que forman: $\cos(\vec{u},\vec{v}) = \frac{-10}{\sqrt{10}\cdot\sqrt{20}} = \frac{-10}{\sqrt{200}} = \frac{-10}{10\sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{2}}{2}$.

(El ángulo puede obtenerse a simple vista: 180º - 45º = 135º)

Y, finalmente, el ángulo pedido: $\widehat{\vec{u},\vec{v}} = \arccos\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right) = \boxed{135^\circ}$

Ejercicio 22

Igual que el ejercicio anterior para $\vec{u}=(1,0)$, $\vec{v}=(1,1)$: (no utilices la calculadora)

$\cos(\vec{u},\vec{v}) = \frac{1\cdot 1+0\cdot 1}{1\cdot\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$; Por lo que el ángulo que forman es de 45°.

Ejercicio 23

Calcula el producto vectorial de los vectores $\vec{u}=(5,0)$ y $\vec{v}=(-3,4)$:

Sea $\vec{w}$ el vector resultante del producto vectorial de $\vec{u}$ y $\vec{v}$, es decir: $\vec{w}=\vec{u}\times\vec{v}$.

- Dirección de $\vec{w}$: perpendicular al plano que forman $\vec{u}$ y $\vec{v}$.
- Sentido: el del avance de un tornillo que gira desde $\vec{u}$ hacia $\vec{v}$.
- Módulo: $|\vec{w}| = |\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot \operatorname{sen}\left(\widehat{\vec{u},\vec{v}}\right)$

Obtenemos los módulos: $|\vec{u}| = \sqrt{5^2+0^2} = 5$; $|\vec{v}| = \sqrt{(-3)^2+4^2} = 5$

Para obtener el ángulo recurrimos al producto escalar:

$\cos(\vec{u},\vec{v}) = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|} = \frac{5\cdot(-3)+0\cdot 4}{5\cdot 5} = \frac{-15}{25} = \frac{-3}{5}$; El ángulo está entre 90º y 180º: $\widehat{\vec{u},\vec{v}} = 126'87^\circ$. El seno es positivo.

Por tanto, el módulo es: $|\vec{w}| = 5\cdot 5\cdot \operatorname{sen}\left[\arccos\left(\frac{-3}{5}\right)\right] = 25\cdot 0'8 = \boxed{20}$

Ejercicio 24

Calcula el producto vectorial de los vectores $\vec{u}=(1,3)$ y $\vec{v}=(2,-4)$: (obtén los datos que necesites de la actividad 21)

Sea $\vec{w}$ el vector resultante del producto vectorial de $\vec{u}$ y $\vec{v}$, es decir: $\vec{w}=\vec{u}\times\vec{v}$.

- Dirección de $\vec{w}$: perpendicular al plano que forman $\vec{u}$ y $\vec{v}$.
- Sentido: el del avance de un tornillo que gira desde $\vec{u}$ hacia $\vec{v}$.
- Módulo: $\vec{w}=\vec{u}\times\vec{v}=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\operatorname{sen}(\vec{u},\vec{v})$

$$|\vec{u}|=\sqrt{10}\ ;\ |\vec{v}|=\sqrt{20}\ ;\ \cos(\vec{u},\vec{v})=\frac{-\sqrt{2}}{2}$$

$$|\vec{w}|=\sqrt{10}\cdot\sqrt{20}\cdot\operatorname{sen}\left[\arccos\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right)\right]=10\sqrt{2}\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\boxed{10}$$

Ejercicio 25

Sean $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ tres vectores y ***a*** un número real:

¿Tiene sentido la expresión $(\vec{u}\cdot\vec{v})\cdot\vec{w}$? Sí; primero hay una multiplicación escalar de dos vectores (cuyo resultado es un números real), y después hay una multiplicación de un escalar por un vector.

¿y esta expresión $\vec{v}\cdot\vec{w}+a$? Sí, se trata de la suma de dos números reales.

¿y esta: $\vec{u}+(\vec{v}\cdot\vec{w})$? No, no está definida la suma de vector por un escalar (resultado del producto escalar).

¿y $a-\vec{v}\times\vec{w}$? No, no está definido la suma (o resta) de un número por un vector. Es similar al caso anterior.

¿y estas dos: $(\vec{w}-\vec{v})\times\vec{w}$ y $\vec{w}-(\vec{v}\times\vec{v})$? Sí, se trata de operaciones entre vectores. Puede multiplicarse vectorialmente un vector consigo mismo.