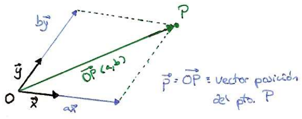
Geometría Analítica

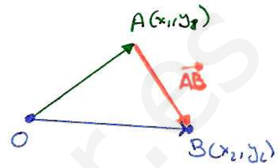
Sistema de Referencia

Conjunto formado por un punto fijo denominado origen (O), y una base $(\vec{x},\vec{y})$ => $\boxed{R=\{O,(\vec{x},\vec{y})\}}$



Dado un punto cualquiera R:**P(a,b)**, las coordenadas de dicho punto vendrán según el **vector posición** $\vec{p}=\vec{OP}$

Vector a partir de dos puntos



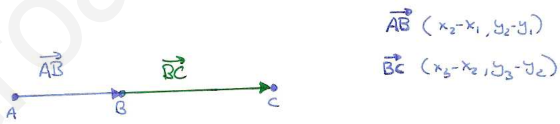
$\boxed{\vec{AB}=\vec{OB}-\vec{OA}=(x_2-x_1,y_2-y_1)}$ --> $A=(x_1,y_1)$ $B=(x_2,y_2)$

$\boxed{\vec{BA}=\vec{OA}-\vec{OB}=(x_1-x_2,y_1-y_2)}$ (igual pero de sentido contrario)

¿Cómo saber si dos puntos están alineados?

Los puntos $A=(x_1,y_1)$, $B=(x_2,y_2)$ y $C=(x_3,y_3)$ estarán alineados siempre que $\vec{AB}=(x_2-x_1,y_2-y_1)$ y $\vec{BC}=(x_3-x_2,y_3-y_2)$ tengan la misma dirección, y esto ocurre si sus coordenadas son proporcionales, es decir, si se cumple que:

$$\boxed{\frac{x_2-x_1}{x_3-x_2}=\frac{y_2-y_1}{y_3-y_2}}$$

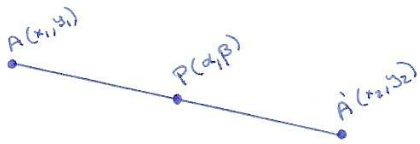


Podemos deducir, aplicando vectores, que si los vectores tienen la misma dirección, el ángulo que forman entre ellos es de 0º, es decir, si realizamos el producto vectorial: $\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|$ ya que $\cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}})=1$

¿Cuál es el Punto Medio (M) de un segmento?

Siendo $A=(x_1,y_1)$ y $B=(x_2,y_2)$ dos puntos de un segmento, su punto medio será $\boxed{M\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)}$

Cabe destacar que *M* es un punto simétrico a *A* y *B*.



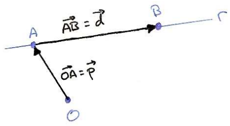
Punto simétrico de un punto respecto de otro

Si tenemos dos puntos, *A* y *P*, podemos hallar el simétrico de *A* respecto de *P*, tomando a éste último como punto medio entre *A* y *A'*, siendo este último el simétrico de *A*.

$$A=(x_1,y_1) \qquad P=\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)=(\alpha,\beta) \qquad A'=(x_2,y_2)$$

Los valores desconocidos son los de *A'*, con lo que a partir de sustituir los valores de *A* en *P*, tenemos un sistema de tal manera que: $\boxed{(x_2,y_2)=(2\cdot\alpha-x_1,2\cdot\beta-y_1)}$

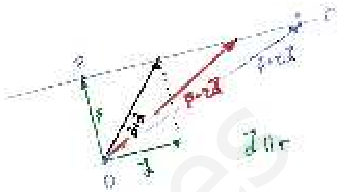
Ecuaciones de las Rectas



Recta que pasa por dos puntos

Sabiendo dos puntos, A y B, podemos tener tanto un vector de posición $\vec{p} = \vec{OA}$, como un vector dirección $\vec{d} = \vec{AB}$, y por consiguiente, podemos obtener cualquier ecuación de una recta como veremos en los siguientes apartados.

Nota: En caso de no conocer *O*, podemos tomar *O=(0,0)*



Ecuación vectorial de la recta $\boxed{\vec{OX} = \vec{p} + t \cdot \vec{d}}$

O es el origen de coordenadas. *X* es un punto variable de la recta r.

$\vec{p}$ es el vector posición y $\vec{d}$ es el vector dirección, que es paralelo a r . $\vec{d} \parallel r$

t es el parámetro, de tal manera, que al variar *t*, varía *X* sobre r

Ecuación paramétrica de la recta $\boxed{\begin{cases} x = p_1 + t \cdot d_1 \\ y = p_2 + t \cdot d_2 \end{cases}}$

Sabiendo los siguientes datos, $\vec{OX} = (x, y)$ $\vec{p} = (p_1, p_2)$ $\vec{d} = (d_1, d_2)$, y sustituyendo los mismos en la ecuación vectorial de la recta, obtendremos el sistema que implica la ecuación pedida. Para cada *t* obtendremos un punto *(x,y)*.

Ecuación continua de la recta $\boxed{\dfrac{x - p_1}{d_1} = \dfrac{y - p_2}{d_2}}$ **-->** $\boxed{\dfrac{x - x_0}{a} = \dfrac{y - y_0}{b}}$

Despejando *t* y realizando el método de igualación obtenemos esta ecuación. Muy conocida de la segunda forma expresada.

Ecuación General o Implícita de la recta $\boxed{r: Ax + By + C = 0}$

A partir de la ecuación paramétrica, si despejamos *t*, y realizamos, por ejemplo, el método de igualación *t=t*, obtendremos lo siguiente: $d_2 x - d_1 y - d_2 p_1 + d_1 p_2 = 0$, y llamando $A = d_2$ $B = -d_1$ y $C = -d_2 p_1 + d_1 p_2$, tenemos dicha ecuación general.

$$\left.\begin{array}{l} x = p_1 + d_1 t \\ y = p_2 + d_2 t \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \dfrac{x - p_1}{d_1} = t \\ \dfrac{y - p_2}{d_2} = t \end{array}\right\} \quad \dfrac{x - p_1}{d_1} = \dfrac{y - p_2}{d_2}; \quad d_2 x - d_2 p_1 = d_1 y - d_1 p_2$$

$$d_2 x - d_1 y - d_2 p_1 + d_1 p_2 = 0$$

$$A = d_2 \quad B = -d_1 \quad C = d_1 p_2 - d_2 p_1$$

$$\boxed{Ax + By + C = 0}$$

Especial atención hay que hacer sobre el punto (A, B), ya que sustituyendo por sus valores originales obtenemos $(d_2, -d_1)$, o lo que es lo mismo, un v**ector dirección perpendicular** a la recta **r**, es decir, $\boxed{(A, B) \perp r}$

Recordemos del tema de vectores, que para conseguir un vector perpendicular a uno dado, sólo tenemos que permutar sus componentes y cambiarle el signo a una de ellas. $(v_1, v_2) \perp (v_2, -v_1)$ o también, $(v_1, v_2) \perp (-v_2, v_1)$

Ecuación Explícita de la recta $\boxed{r: y = mx + n}$

De la ecuación implícita, si $B \neq 0$, si despejamos *y* obtendremos la siguiente ecuación $y = \frac{-A}{B}x - \frac{C}{B}$, y haciendo $m = \frac{-A}{B}$ y $n = \frac{-C}{B}$, obtenemos la ecuación explícita de la recta.

m es la pendiente de la recta, mientras que *n* es la ordenada en el origen.

Ecuación Punto Pendiente de la recta $\boxed{y = y_0 + m \cdot (x - x_0)}$

Ecuación canónica, segmentaria o Forma de los interceptos $\boxed{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1}$

Pendiente de una recta

La pendiente de una recta el es incremento de la ordenada cuando la abscisa aumenta una unidad, de tal manera que

$$\boxed{m = tg\,\alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}$$

también podemos decir que $m = \frac{-A}{B}$ a partir de una Ecuación General o Implícita de la recta, o que $m = \frac{-d_2}{(-d_1)} = \frac{d_2}{d_1}$

Posición de dos rectas según su pendiente

- Dos **rectas** son **paralelas** si tienen la misma pendiente: $\boxed{r_1 \| r_2 \Leftrightarrow m_1 = m_2}$
- Dos **rectas** son **perpendiculares** si : $\boxed{r_1 \perp r_2 \Leftrightarrow m_1 \cdot m_2 = -1}$ o también $r_1 \perp r_2 \Rightarrow m_2 = \frac{-1}{m_1}$

$r_1: y = m_1 x + n_1 \longrightarrow \overset{A}{m_1} x \overset{B}{-} y + n_1 = 0 \longrightarrow (m_1, -1) \perp r_1$

$r_2: y = m_2 x + n_2 \longrightarrow m_2 x - y + n_2 = 0 \longrightarrow (m_2, -1) \perp r_2$

Si son perpendiculares, $(m_1, -1) \cdot (m_2, -1) = 0 \Rightarrow m_1 \cdot m_2 + 1 = 0$

luego $\boxed{m_1 \cdot m_2 = -1}$ c.q.d

- En general, el **ángulo** formado **entre dos rectas** será: $\boxed{\widehat{r_1, r_2} = \wp \to tg\,\wp = \left|\frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 \cdot m_1}\right|}$

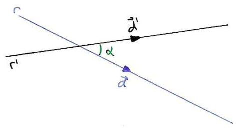
$r_1: m_1 = tg\,\beta$

$r_2: m_2 = tg\,\alpha$ $\Rightarrow \varphi = \alpha - \beta$ (ángulo entre ambas rectas)

$$tg\,\varphi = |tg(\alpha - \beta)| = \left|\frac{tg\,\alpha - tg\,\beta}{1 + tg\,\alpha \cdot tg\,\beta}\right| = \left|\frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 \cdot m_1}\right|$$

Ángulo de dos rectas

$$\boxed{\cos\alpha = \frac{|\vec{d}\cdot\vec{d}\,'|}{|\vec{d}|\cdot|\vec{d}\,'|}}$$



Nota importante: En el numerador tenemos el valor absoluto del producto escalar de dos vectores, mientras que en el denominador, tenemos el producto del módulo de cada uno de los vectores.

- Si $\vec{d}=(d_{1,}d_2)$ es vector director de **r**:
  - Cualquier recta con vector director $(k\cdot d_{1,}k\cdot d_2)$ será paralela o coincidente a **r**, siempre que *k* no sea cero.
  - Cualquier recta con vector director $(d_{2,}-d_1)$ o $(k\cdot d_{2,}-k\cdot d_1)$ será perpendicular a **r**, siempre que *k* no sea cero.

Posición relativa de dos rectas

<u>A través de sus Ecuaciones Generales</u>

Sean $r_1: Ax+By+C=0$ y $r_2: A'x+B'y+C'=0$ tendremos que el sistema de ecuaciones formado entre ambos tendrá:

- **Solución única** si: $\frac{A'}{A}\neq\frac{B'}{B}$
- **Sin solución** , es decir $r_1\|r_2$, si $\frac{A'}{A}=\frac{B'}{B}\neq\frac{C'}{C}$
- **Infinitas soluciones**, es decir, coincidentes, si $\frac{A'}{A}=\frac{B'}{B}=\frac{C'}{C}$

<u>A través de sus Ecuaciones Paramétricas</u>

Sean $r_1:\begin{cases}x=a+bt\\ y=c+dt\end{cases}$ y t $r_2:\begin{cases}x=a'+b's\\ y=c'+d's\end{cases}$ tendremos que resolver un sistema de ecuaciones igualando las *x* y las *y* de ambas rectas, de tal manera que el sistema será $\begin{cases}a+bt=a'+b's\\ c+dt=c'+d's\end{cases}$ y las incógnitas serán ***t*** y ***s***. Según el resultado de dicho sistema tendremos lo siguiente:

- Si el sistema tiene una **Solución única** $(t_{0,}s_0)$ => Obtendremos (x,y) sustituyendo t_0 en r_1 , o bien, s_0 en r_2
- Si el sistema **no** tiene una **solución** , las rectas son paralelas, es decir $r_1\|r_2$
- Si el sistema tiene **Infinitas soluciones**, las rectas son coincidentes, es decir, son la misma.

Distancias

- <u>Entre dos puntos</u> $\boxed{dist(P,Q)=|\vec{PQ}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}}$

- <u>Un punto a una recta</u> $\boxed{dist(P,r)=\frac{|Aa+Bb+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}}$ donde $P(a,b)$ y $r: Ax+By+C=0$