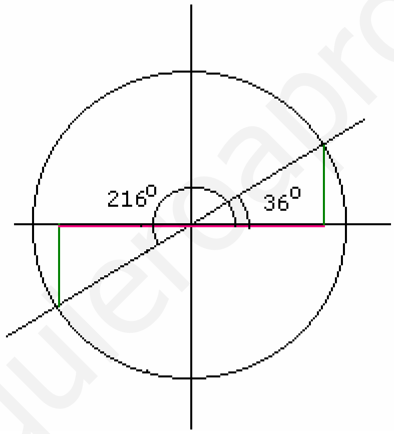
# EJERCICIOS RESUELTOS DE TRIGONOMETRÍA

**1.** Escribir las razones trigonométricas del ángulo de 3456º en función de las de un ángulo positivo menor que 45º.

**Solución**

Al representar el ángulo de 3456º en la circunferencia unidad, después de haber dado varias vueltas completas a la circunferencia, su segundo lado corresponderá con el segundo lado de un ángulo menor de 360º. Dicho ángulo es el resto obtenido al dividir 3456º entre 360º y el cociente es el número de vueltas que se dan a la circunferencia.
Realizando la división se obtiene que 3456 = 9·360 + 216 y, por tanto, las razones trigonométricas de 3456º coinciden con las de 216º.




Teniendo en cuenta lo anterior y que 216º-180º= 36º o lo que es lo mismo 216º = 180º + 36º se tiene:

sen 3456º = sen 216º = -sen 36º        cos 3456º = cos 216º = -cos 36º

Por otra parte, $\text{tg } 3456º = \text{tg } 216º = \dfrac{\text{sen } 216º}{\cos 216º} = \dfrac{-\text{sen } 36º}{-\cos 36º} = \text{tg } 36º$

**2.** Sabiendo que cos100º ≃ -0´17, calcular las razones trigonométricas de $\alpha$ = 200º y $\beta$ = 50º.

**Solución**

El ángulo de 200º es el doble del ángulo de 100º, por tanto aplicando las fórmulas trigonométricas del ángulo doble se tiene:

$\text{sen } 200º = 2 \text{ sen}100º \cos 100º$        $\cos 200º = \cos^2 100º - \text{sen}^2 100º$

Para obtener estas razones trigonométricas hay que tener en cuenta que $\text{sen}100º = \sqrt{1-\cos^2 100} = \sqrt{1-(-0'17)^2} \simeq \sqrt{0'9711} \simeq 0'9854$. Por tanto,

$$\text{sen } 200º = 2 \text{ sen}100º \cos 100º \simeq 2 \cdot 0'9854\,(-0'17) \simeq -0'3350$$

$$\cos 200º = \cos^2 100º - \text{sen}^2 100º \simeq 0'0289 - 0'9711 = -0'9422$$

Conocidos los valores del seno y del coseno se tiene $\text{tg}\, 200º = \dfrac{\text{sen}\,200º}{\cos 200º} \simeq \dfrac{-0´3350}{-0´9422} \simeq -0´3556$

El ángulo de 50º es la mitad del ángulo de 100º, por tanto aplicando las fórmulas trigonométricas del ángulo mitad se tiene:

$$|\text{sen}50º| = \left|\text{sen}\frac{100º}{2}\right| = \sqrt{\frac{1-\cos 100º}{2}} \simeq \sqrt{\frac{1-(-0´17)}{2}} = \sqrt{0´585} \simeq 0´7649$$

$$|\cos 50º| = \left|\cos\frac{100º}{2}\right| = \sqrt{\frac{1+\cos 100º}{2}} \simeq \sqrt{\frac{1-0´17}{2}} = \sqrt{0´415} \simeq 0´6442$$

Se acaban de obtener el valor absoluto del seno y del coseno, ahora es necesario determinar su signo. Al estar el ángulo de 50º en el primer cuadrante todas sus razones trigonométricas son positivas, por tanto:

$\text{sen}50º \simeq 0´7649$, $\cos 50º \simeq 0´6442$ y en consecuencia $\text{tg}\, 50º = \dfrac{\text{sen}50º}{\cos 50º} \simeq \dfrac{0´7649}{0´6442} \simeq 1´1874$

**3.** Simplificar las siguientes expresiones:

**a)** $\dfrac{\text{sen}2\alpha}{\text{tg}\alpha}$ **b)** $\dfrac{\text{tg}(\pi+\alpha)}{\text{tg}(\pi-\alpha)}$ **c)** $\dfrac{\text{sen}^2\alpha\ (1+\cos\alpha)}{1-\cos\alpha}$ **d)** $\dfrac{\cos\alpha}{\text{tg}\alpha\ (1 - \text{sen}\alpha)}$

**Solución**

**a)** $\dfrac{\text{sen}2\alpha}{\text{tg}\alpha} = \dfrac{2\,\text{sen}\alpha\cos\alpha}{\dfrac{\text{sen}\alpha}{\cos\alpha}} = 2\cos^2\alpha$

**b)** $\dfrac{\text{tg}(\pi+\alpha)}{\text{tg}(\pi-\alpha)} = \dfrac{\text{tg}\alpha}{-\text{tg}\alpha} = -1$

**c)** $\dfrac{\text{sen}^2\alpha\ (1+\cos\alpha)}{1-\cos\alpha} = \dfrac{(1-\cos^2\alpha)(1+\cos\alpha)}{1-\cos\alpha} = \dfrac{(1-\cos\alpha)(1+\cos\alpha)(1+\cos\alpha)}{1-\cos\alpha} = (1+\cos\alpha)^2 \otimes$

En la primera igualdad se ha tenido en cuenta que $\text{sen}^2\alpha = 1-\cos^2\alpha$ y en la segunda se ha aplicado que una diferencia de cuadrados es igual a la suma por la diferencia.

**d)** $\dfrac{\cos\alpha}{\text{tg}\alpha\ (1 - \text{sen}\alpha)} = \dfrac{\cos\alpha}{\dfrac{\text{sen}\alpha}{\cos\alpha}\ (1 - \text{sen}\alpha)} = \dfrac{\cos^2\alpha}{\text{sen}\alpha(1 - \text{sen}\alpha)} = \dfrac{1 - \text{sen}^2\alpha}{\text{sen}\alpha(1 - \text{sen}\alpha)} = \dfrac{(1+\text{sen}\alpha)(1 - \text{sen}\alpha)}{\text{sen}\alpha(1 - \text{sen}\alpha)} = \dfrac{1+\text{sen}\alpha}{\text{sen}\alpha} =$

$= \dfrac{1}{\text{sen}\alpha} + 1$

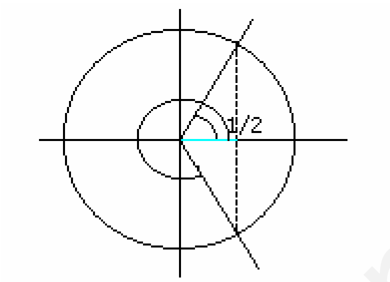
**4.** Resolver las siguientes ecuaciones: **a)** sen2$x$ = sen$x$ **b)** $\dfrac{2}{\text{sen}x} = \dfrac{3}{\cos^2 x}$

**Solución**

**a)** Sustituyendo en la ecuación inicial la expresión del seno del ángulo doble, sen2$x$ = 2 sen$x$ cos$x$, se obtiene la ecuación 2 sen$x$ cos$x$ = sen$x$.

Pasando sen$x$ al primer miembro y sacándolo factor común se obtiene sen$x$ $(2\cos x - 1) = 0$, de donde, sen$x$ = 0 o $2\cos x - 1 = 0$. Resolviéndo cada una de las ecuaciones anteriores se tiene:

- sen$x$ = 0 $\Rightarrow$ $x = k\pi$ con $k \in$ Z.
- $2\cos x - 1 = 0$ $\Rightarrow$ $2\cos x = 1$ $\Rightarrow$ $\cos x = \frac{1}{2}$. Los ángulos positivos menores que 360º cuyo coseno es $\frac{1}{2}$ son $\frac{\pi}{3}$ y $\frac{5\pi}{3}$, por tanto, las soluciones serán esos ángulos y los que se obtienen sumando un número entero de vueltas a la circunferencia.




Por tanto, las soluciones de la ecuación inicial son $x = k\pi$, $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ y $x = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi$ con $k \in$ Z.

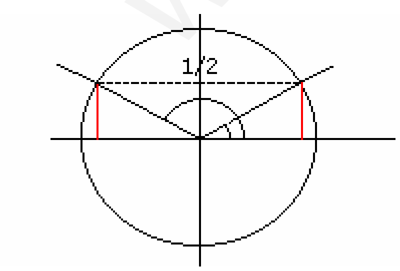
**b)** Para resolver la ecuación inicial es conveniente que aparezca una única razón trigonométrica, para ello se sustituye $\cos^2 x = 1 - \text{sen}^2 x$, quedando $\frac{2}{\text{sen}x} = \frac{3}{1-\text{sen}^2 x}$, y pasando todo al primer miembro se obtiene, $\frac{2\left(1-\text{sen}^2 x\right) - 3\text{sen}x}{\text{sen}x\left(1-\text{sen}^2 x\right)} = 0$.

Las soluciones serán los valores de $x$ para los que el numerador sea nulo, $2 - 3\text{sen}x - 2\text{sen}^2 x = 0$, y no anulen el denominador, es decir, las que verifiquen $\text{sen}x \neq 0$ y $\text{sen}^2 x \neq 1$.

Al ser $2 - 3\text{sen}x - 2\text{sen}^2 x = 0$ una ecuación de segundo grado con incógnita sen$x$ se tiene

$$\text{sen}x = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{-4} = \frac{3 \pm 5}{-4} = \begin{cases} -2 \\ 1/2 \end{cases}$$

El valor del seno siempre está entre -1 y 1, por tanto de los dos valores obtenidos, el único a considerar es $\text{sen}x = \frac{1}{2}$. (Observar que se verifica $\text{sen}x \neq 0$ y $\text{sen}^2 x \neq 1$)

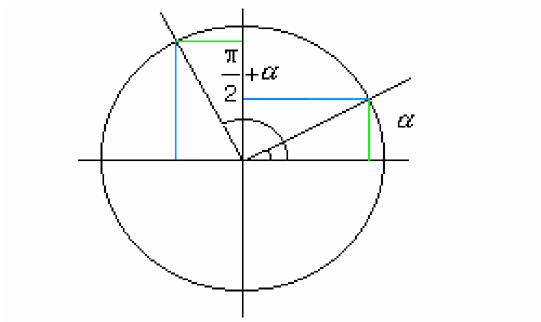



Los ángulos $\frac{\pi}{6}$ y $\frac{5\pi}{6}$ son los únicos positivos menores que 360º que tienen el seno igual a $\frac{1}{2}$, por tanto, las soluciones serán esos ángulos y los que se obtienen sumando un número entero de vueltas a la circunferencia, es decir, las soluciones son

$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ y $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$ con $k \in$ Z.

**5.** Escribir las razones trigonométricas de $\frac{\pi}{2}+\alpha$ en función de las del ángulo $\alpha$.

**Solución**




En la figura anterior se observa que:

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = \cos\alpha$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = -\operatorname{sen}\alpha$$

y en consecuencia $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\frac{\cos\alpha}{-\operatorname{sen}\alpha} = \frac{-1}{\operatorname{tg}\alpha}$

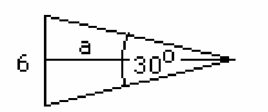
**6.** Calcular el área de un dodecágono regular cuyo lado mide 6 cm.

**Solución**

El área de un polígono regular es $\frac{P\,.\,a}{2}$ siendo $P$ el perímetro y $a$ el apotema (segmento que une el centro del polígono con el punto medio de un lado).

El perímetro es $P = 12{\cdot}6 = 72$ cm.

Para calcular el apotema se considera la parte del dodecágono correspondiente a un lado, es un triángulo isósceles cuyo ángulo opuesto al lado del polígono es igual a $\frac{360}{12} = 30^{\circ}$, y se representa a continuación.



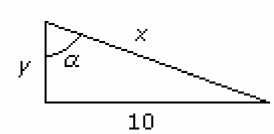

Considerando la mitad de este triángulo isósceles se obtiene el triángulo rectángulo que tiene un cateto igual a 3 y el ángulo opuesto igual a $\frac{30^{\circ}}{2}=15^{\circ}$ de donde $\operatorname{tg}15^{\circ}=\frac{3}{a}$, por tanto, $a = \frac{3}{\operatorname{tg}15^{\circ}} \simeq \frac{3}{0{'}2679} \simeq 11{'}1982$ cm.

Sustituyendo en el área del dodecágono se tiene $A = \frac{P\,.\,a}{2} \simeq \frac{72{\cdot}11{'}1982}{2} = 403{'}1352\ \text{cm}^2$.

**7.** De un triángulo rectángulo se sabe que un cateto mide 10 cm. y que el ángulo opuesto a dicho cateto tiene por coseno 0´4. Calcular la longitud del otro cateto y de la hipotenusa.

**Solución**

Se denota $x$ a la longitud de la hipotenusa e $y$ a la longitud del cateto




En la figura se observa que $\operatorname{sen}\alpha = \frac{10}{x}$ y $\cos\alpha = \frac{y}{x}$.

Al ser $\cos\alpha = 0{'}4$ se tiene $\operatorname{sen}\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-0{'}16} = \sqrt{0{'}84} \simeq 0{'}9165$

y sustituyendo este valor en la igualdad $\operatorname{sen}\alpha = \frac{10}{x}$ queda $0{'}9165 \simeq \frac{10}{x}$,

$$\text{de donde } x \simeq \frac{10}{0'9165} \simeq 10'9111$$

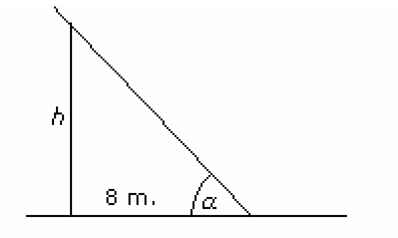
Sustituyendo $\cos\alpha = 0'4$ y $x \simeq 10'9111$ en $\cos\alpha = \frac{y}{x}$ queda $0'4 \simeq \frac{y}{10'9111}$ y despejando se tiene

$y \simeq 0'4 \cdot 10'9111 = 4'3644$.

Así, aproximadamente la longitud del cateto es 4´3644 cm. y la de la hipotenusa 10´9111 cm.

**8.** Calcular la altura de una torre sabiendo que proyecta una sombra de 8 m. cuando los rayos de sol inciden sobre la tierrra con un ángulo cuya tangente es 1´6351.

**Solución**




Llamando *h* a la altura de la torre y observando la figura se tiene $\text{tg}\alpha = \frac{h}{8}$ y como $\text{tg}\alpha = 1'6351$ igualando queda $\frac{h}{8} = 1'6351$, de donde $h = 8.\ 1'6351 = 13'0808$ m.