

Examen de Trigonometría (1º Bachillerato de Ciencias)

1. Sea un triángulo del que conocemos los siguientes datos $a=10\text{cm}$, $b=20\text{cm}$, $\hat{A}=30^\circ$.
Calcular los demás datos del triángulo. Calcular el área del triángulo. (1.5 puntos)

Solución:

Opción 1

Teorema del coseno ($a^2=b^2+c^2-2bc\cdot\cos\hat{A}$) $\rightarrow 100=400+c^2-40\cdot c\cdot\cos(30^\circ)$

$$c^2-20\sqrt{3}c+300=0 \rightarrow c=10\sqrt{3} \text{ (doble)}$$

Si $c=10\sqrt{3}$, apliquemos teorema del seno ($\frac{a}{\text{sen}\hat{A}} = \frac{b}{\text{sen}\hat{B}}$) $\rightarrow \frac{10}{\text{sen}30} = \frac{20}{\text{sen}\hat{B}}$

$$\hat{B} = \text{arcsen}\left(\frac{20\cdot\text{sen}(30)}{10}\right) = 90^\circ \rightarrow \hat{C} = 60^\circ$$

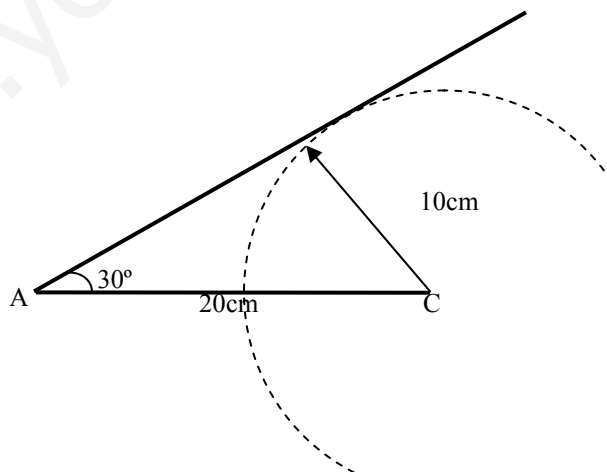
Opción 2

Teorema del seno ($\frac{a}{\text{sen}\hat{A}} = \frac{b}{\text{sen}\hat{B}}$) $\rightarrow \frac{10}{\text{sen}30} = \frac{20}{\text{sen}\hat{B}} \rightarrow \hat{B} = \text{arcsen}\left(\frac{20\cdot\text{sen}30}{10}\right) = 90^\circ$

$$\hat{C} = 60^\circ.$$

Teorema del coseno para calcular c : $c^2=b^2+a^2-2ab\cdot\cos(\hat{C}) \rightarrow c=10\sqrt{3}$

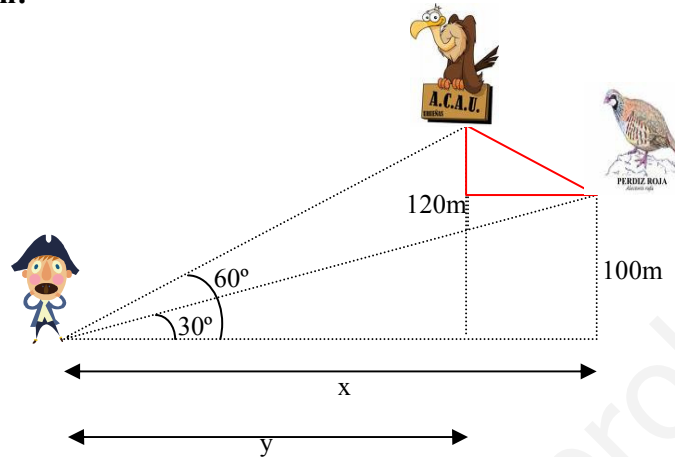
Gráficamente



Área: como es rectángulo un cateto es la base y el otro la altura $\text{area} = \frac{10 \cdot 10\sqrt{3}}{2} = 50\sqrt{3} \text{ cm}^2$

2. Un buitre vuela a 120 m de altura y formando un ángulo con la horizontal respecto de nosotros de 60° . En la misma dirección pero formando un ángulo de 30° vuela una perdiz a 100 m de altura. Si el buitre quiere comerse la perdiz, pero sólo lo consigue si la distancia entre ambos es menor de 150 m. ¿Puede el buitre cazar a la perdiz? ¿A qué distancia están? (1.5 puntos)

Solución:



Podemos calcular la distancia si conocemos los catetos del triángulo rojo. Uno de los dos catetos mide $5\text{km} - 3\text{km} = 2\text{km}$. El otro es $y - x$. Calculémoslo:

$$\text{tg}(30) = 100/x \rightarrow x = 100/\text{tg}(30) = 100 \cdot \sqrt{3} \text{ m}$$

$$\text{tg}(60) = 120/y \rightarrow y = 120/\text{tg}(60) = 40 \cdot \sqrt{3} \text{ m}$$

Así la distancia entre las dos aves definida por la hipotenusa de un triángulo con catetos de 20m y de $(x - y) = 60 \cdot \sqrt{3} \text{ m} \rightarrow d = \sqrt{20^2 + (60\sqrt{3})^2} = 105.8 \text{ m} \rightarrow$ se come la perdiz.

3. Calcular sin utilizar la calculadora el resto de razones trigonométricas (seno, coseno) de α , sabiendo que $\text{tg}(\alpha) = 1/2$ y $\alpha \in 3^{\text{er}}$ cuadrante. (0.75 puntos)

Solución:

$$1 + \text{tg}^2(\alpha) = \frac{1}{\cos^2(\alpha)} \rightarrow \frac{5}{4} = \frac{1}{\cos^2(\alpha)} \rightarrow \cos^2(\alpha) = \frac{4}{5} \rightarrow \cos(\alpha) = \pm \frac{2}{\sqrt{5}} \xrightarrow{3^{\text{er}} \text{ cuad}} \cos(\alpha) = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$\text{tg}(\alpha) = \frac{\text{sen}(\alpha)}{\cos(\alpha)} \rightarrow \text{sen}(\alpha) = \text{tg}(\alpha) \cdot \cos(\alpha) = -\frac{2\sqrt{5}}{5} \cdot \frac{1}{2} = -\frac{1}{\sqrt{5}} = -\frac{\sqrt{5}}{5}$$

4. Resolver: (4 puntos)

a. $6 \cdot \cos^2(x/2) + \cos(x) = 1$

b. $\operatorname{sen}(x) + \cos(x) = \sqrt{2}$

c.
$$\begin{cases} \operatorname{sen}(x) + \operatorname{sen}(y) = 1 \\ x + y = \pi \end{cases}$$

d.
$$\begin{cases} \operatorname{sen}(x) + \operatorname{sen}(y) = \frac{\sqrt{3} + 1}{2} \\ \operatorname{sen}(x) - \operatorname{sen}(y) = \frac{\sqrt{3} - 1}{2} \end{cases}$$

Solución

a)

$$6 \cdot \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) + \cos(x) = 1 \rightarrow 6 \cdot \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) + \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \operatorname{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right) = 1 \rightarrow 8 \cdot \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) = 2$$

$$\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{4} \rightarrow \cos\left(\frac{x}{2}\right) = \pm \frac{1}{2} \rightarrow \left(\frac{x}{2}\right) = \begin{cases} 60^\circ + 360^\circ k \\ 300^\circ + 360^\circ k \\ 120^\circ + 360^\circ k \\ 240^\circ + 360^\circ k \end{cases} \rightarrow x = \begin{cases} 120^\circ + 720^\circ k \\ 600^\circ + 720^\circ k \\ 240^\circ + 720^\circ k \\ 480^\circ + 720^\circ k \end{cases} \rightarrow x = \begin{cases} 120^\circ + 720^\circ k \\ 240^\circ + 720^\circ k \end{cases}$$

b)

$$\operatorname{sen}(x) + \cos(x) = \sqrt{2} \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \operatorname{sen}(x) + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \cos(x) = 1 \rightarrow \cos(45^\circ) \cdot \operatorname{sen}(x) + \operatorname{sen}(45^\circ) \cdot \cos(x) = 1$$

$$\rightarrow \operatorname{sen}(x + 45^\circ) = 1 \rightarrow x + 45^\circ = 90^\circ \rightarrow x = 45^\circ + 360^\circ k$$

c) $x = \pi - y \rightarrow \operatorname{sen}(\pi - y) + \operatorname{sen}(y) = 1 \rightarrow \operatorname{sen}(y) + \operatorname{sen}(y) = 1 \rightarrow \operatorname{sen}(y) = 1/2 \rightarrow$

$$\begin{cases} y = 60^\circ + 360^\circ k = \frac{\pi}{3} + 2\pi k \rightarrow x = \frac{2\pi}{3} - 2\pi k \\ y = 120^\circ + 360^\circ k = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k \rightarrow x = \frac{\pi}{3} - 2\pi k \end{cases}$$

$$\mathbf{d)} \begin{cases} \operatorname{sen}(x) + \operatorname{sen}(y) = \frac{\sqrt{3} + 1}{2} \\ \operatorname{sen}(x) - \operatorname{sen}(y) = \frac{\sqrt{3} - 1}{2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} X + Y = \frac{\sqrt{3} + 1}{2} \\ X - Y = \frac{\sqrt{3} - 1}{2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} X = \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow x = \begin{cases} 60^\circ + 360^\circ k \\ 120^\circ + 360^\circ k \end{cases} \\ Y = \frac{1}{2} \rightarrow y = \begin{cases} 30^\circ + 360^\circ k \\ 150^\circ + 360^\circ k \end{cases} \end{cases}$$

5. Demostrar: (1.5 puntos)

a) $\cos(x+y+z) = \cos(x) \cdot \cos(y) \cdot \cos(z) - \cos(x) \cdot \sin(y) \cdot \sin(z) - \sin(x) \cdot \cos(y) \cdot \sin(z) - \sin(x) \cdot \sin(y) \cdot \cos(z)$

b) $\frac{\sin^2(2a)}{(1 - \cos^2 a) \cdot \cos(a)} = 4 \cdot \cos(a)$

Solución:

a)

$$\begin{aligned} \cos(x + (y + z)) &= \cos(x) \cdot \cos(y + z) - \sin(x) \cdot \sin(y + z) = \cos(x) \cdot (\cos(y) \cdot \cos(z) - \sin(y) \cdot \sin(z)) - \\ &- \sin(x) \cdot (\sin(y) \cdot \cos(z) + \cos(y) \cdot \sin(z)) = \\ &= \cos(x) \cos(y) \cos(z) - \cos(x) \sin(y) \sin(z) - \sin(x) \sin(y) \cos(z) - \sin(x) \cos(y) \sin(z) \end{aligned}$$

b) $\frac{\sin^2(2a)}{(1 - \cos^2 a) \cdot \cos(a)} = \frac{(2 \cdot \sin(a) \cdot \cos(a))^2}{\sin^2 a \cdot \cos(a)} = \frac{4 \sin^2(a) \cdot \cos^2(a)}{\sin^2(a) \cdot \cos(a)} = 4 \cdot \cos(a)$