OPTIMIZACION

En un experimento en un laboratorio se han realizado 5 medidas del mismo objeto, que han dado los resultados siguientes: $m_1 = 0.92$; $m_2 = 0.94$; $m_3 = 0.89$; $m_4 = 0.90$; $m_5 = 0.91$.

Se tomará como resultado el valor de x tal que la suma de los cuadrados de los errores sea mínima. Es decir, el valor para el que la función $E(x) = (x - m_1)^2 + (x - m_2)^2 + \_\ \_\ \_ + (x - m_5)^2$ alcanza el mínimo.

Calcule dicho valor x.

Solución.

a. Se pide calcular el mínimo de un función, para ello se deriva la función y se iguala a cero.

$$E(x) = (x - m_1)^2 + (x - m_2)^2 + (x - m_3)^2 + (x - m_4)^2 + (x - m_5)^2$$

$$E'(x) = 2(x - m_1)\cdot 1 + 2(x - m_2)\cdot 1 + 2(x - m_3)\cdot 1 + 2(x - m_4)\cdot 1 + 2(x - m_5)\cdot 1 = 10x - 2m_1 - 2m_2 - 2m_3 - 2m_4 - 2m_5$$

$$E'(x) = 0 \qquad 10x - 2m_1 - 2m_2 - 2m_3 - 2m_4 - 2m_5 = 0 \qquad x = \frac{2m_1 + 2m_2 + 2m_3 + 2m_4 + 2m_5}{10}$$

$$x = \frac{m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5}{5} = \frac{0.92 + 0.94 + 0.89 + 0.90 + 0.91}{5} = 0{,}912$$

Para comprobar que se trata de un mínimo acudimos al citerior de la segunda derivada

$$E''(x) = 10 > 0 \ \Rightarrow \text{mínimo}$$

Se administra una medicina a un enfermo y t horas después la concentración en sangre del principio activo viene dada por $c(t) = t\,e^{-t/2}$ miligramos por mililitro. Determine el valor máximo de c(t) e indique en qué momento se alcanza dicho valor máximo. Sabiendo que la máxima concentración sin peligro es de 1 mg/ml, señale si en algún momento hay riesgo para el paciente.

Solución.

La función tendrá máximos relativos en aquellos puntos donde su primera derivada sea cero y su segunda derivada sea negativa.

$$c'(t) = 1\cdot e^{-t/2} + t\cdot e^{-t/2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = \left(1 - \frac{t}{2}\right)\cdot e^{-t/2}$$

$$c'(t) = 0: \quad \left(1 - \frac{t}{2}\right)\cdot e^{-t/2} = 0: \quad 1 - \frac{t}{2} = 0: \quad t = 2$$

En la resolución de la ecuación, hay que tener en cuenta que la parte exponencial nunca se anula

$$c''(t) = \left(-\frac{1}{2}\right)\cdot e^{-t/2} + \left(1 - \frac{t}{2}\right)\cdot e^{-t/2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{t}{4}\right)\cdot e^{-t/2} = \left(\frac{t}{4} - 1\right)\cdot e^{-t/2}$$

$$c''(2) = \left(\frac{2}{4} - 1\right)\cdot e^{-2/2} = -\frac{1}{2}e^{-1} = \frac{-1}{2e} < 0$$

$$c(2) = 2\,e^{-2/2} = \frac{2}{e} \approx 0{,}74 \text{ mg/mL}$$

La concentración del fármaco es máxima a las dos horas de haberlo administrado, siendo el valor máximo (0,74 mg/mL) inferior a la concentración máxima que no entraña riesgo para el paciente, por lo tanto, el paciente no corre ningún riesgo.

Los estudiantes de un centro docente han organizado una rifa benéfica, con la que pretenden recaudar fondos para una ONG. Han decidido sortear un ordenador portátil, que les cuesta 600 euros. Quieren fijar el precio de la papeleta, de modo que la recaudación sea máxima. Saben que si el precio de cada una es 2 euros, venderían 5000 papeletas, pero que, por cada euro de incremento en dicho precio, venderán 500 papeletas menos. ¿A qué precio deben vender la papeleta? Si el único gasto que tienen es la compra del ordenador, ¿cuánto dinero podrán donar a la ONG?

Solución.

Problema de optimación.

x ≡ cantidad en € en que se incrementa el precio ce la papeleta

Precio de la papeleta: x + 2

Número de papeletas vendidas: 5000 – 500x

Recaudación en función del incremento del precio de la papeleta:

$$R(x)=(x+2)\cdot(5000-500x)=500\,(x+2)\cdot(10-x)=500\left(20+8x-x^2\right)$$

La recaudación máxima se obtiene derivando la función e igualando a cero

$$R'(x)=500\,(8-2x)\quad;\quad R'(x)=0\quad;\quad 500\,(8-2x)=0 : x=4$$

Para comprobar que es un máximo es utiliza el criterio de la segunda derivada:

$$R''(x)=500\cdot(-2)=-1000<0$$

Para un precio de 6 € por papeleta se obtiene una recaudación máxima.

Donación = Recaudación – Gastos

$$\text{Donación} = R(x=4)-600=500\left(20+8\cdot 4-4^2\right)-600=17400\text{ €}$$

Hallar a, b, c de modo que la función $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ alcance en x = 1 un máximo relativo de valor 2, y tenga en x = 3 un punto de inflexión.

Solución.

En el enunciado se informa que la función tiene un máximo en el punto (1, 2), por lo tanto se debe cumplir dos condiciones:

- $f(1)=2$
- $f'(1)=0$

La tercera condición es que en x = 3 existe un punto de inflexión.

- $f''(3)=0$

$$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$$
$$f'(x)=3x^2+2ax+b$$
$$f''(x)=6x+2a$$

Las tres condiciones que debe cumplir la función permiten plantear un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas.

$$\left.\begin{array}{ll} f(1)=2 & 1^3+a\cdot 1^2+b\cdot 1+c=2 \\ f'(1)=0 & 3\cdot 1^2+2a\cdot 1+b=0 \\ f''(3)=0 & 6\cdot 3+2a=0 \end{array}\right\} : \left\{\begin{array}{l} a+b+c=1 \\ 2a+b=-3 \\ 2a=-18 \end{array}\right. : \left\{\begin{array}{l} a=-9 \\ b=15 \\ c=-5 \end{array}\right.$$

$$f(x)=x^3-9x^2+15x-5$$

03851

Dado el polinomio $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, obtener los valores de a, b y c de modo que se verifiquen las condiciones siguientes:

- El polinomio P(x) tenga extremos relativos en los puntos de abscisas $x = –1/3$, $x = –1$.
- La recta tangente a la gráfica de P(x) en el punto (0, P(0)) sea $y = x + 3$.

Solución.

Los datos que aparecen en el enunciado permiten plantear cuatro ecuaciones con tres incógnitas.

- $x=-\frac{1}{3}$ extremos relativo. $P'\left(-\frac{1}{3}\right)=0$
- $x=-1$ extremos relativo. $P'(-1)=0$
- La pendiente de la recta tangente en x = 0 vale 1 (y = mx + n). $P'(0)=1$
- La tangente y la función comparten el punto de tangencia. Si x = 0, y = 0 + 3 = 3 = P(0). El punto (0, 3) pertenece a la función. $P(0)=3$

$$P'(x)=3x^2+2ax+b$$

$$\begin{cases} P'\left(-\frac{1}{3}\right)=0 & : & 3\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^2+2a\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)+b=0 \\ P'(-1)=0 & : & 3\cdot(-1)^2+2a\cdot(-1)+b=0 \\ P'(0)=1 & : & 3\cdot 0^2+2a\cdot 0+b=1 \\ P(0)=3 & : & 0^3+a\cdot 0^2+b\cdot 0+c=3 \end{cases} : \begin{cases} \left.\begin{matrix} -\frac{2}{3}+b=-\frac{1}{3} \\ -2a+b=-3 \end{matrix}\right\} : \begin{cases} a=2 \\ b=1 \end{cases} \\ b=1 \\ c=3 \end{cases} : \begin{cases} a=2 \\ b=1 \\ c=3 \end{cases}$$

$$P(x) = x^3 + 2x^2 + x + 3$$

Dada la función $f(x)=\frac{1}{x}$ se pide:

a) (1 punto). Hallar la ecuación de la recta tangente a su gráfica en el punto $(a, f(a))$ para $a > 0$.

b) (1 punto). Hallar los puntos de corte de la recta tangente hallada en el apartado a) con los dos ejes coordenados.

c) (1 punto). Hallar el valor de a > 0 que hace que la distancia entre los dos puntos hallados en b) sea mínima.

Solución

a. La ecuación de la recta tangente a una función en un punto en forma punto-pendiente es:

$$y-y_o=m\cdot(x-x_o)$$

donde: $\begin{cases} (x_o, y_o)\equiv \text{Punto} \\ m\equiv \text{Pendiente} \end{cases}$

Teniendo en cuenta que la pendiente de la recta tangente es la derivada de la función particularizada en el punto $(m=f'(x_o))$, y que el punto pertenece a la función y por tanto tiene la forma $(x_o, f(x_0))$, la ecuación de la tangente en el punto $x_o = a$ tiene la forma:

$$y-f(a)=f'(a)\cdot(x-a)$$

donde:

$$f(a)=\frac{1}{a}$$

$$f'(x)=\frac{-1}{x^2}\Rightarrow f'(a)=\frac{-1}{a^2}$$

sustituyendo en la ecuación de la recta tangente

$$y-\frac{1}{a}=\frac{-1}{a^2}\cdot(x-a)$$

multiplicando toda la ecuación por a^2 y ordenando se pasa a forma general

$$x + a^2 y - 2a = 0$$

b. Para obtener los puntos de intersección de la recta con los ejes coordenados, se pasa la ecuación a forma canónica.

$$x + a^2 y - 2a = 0 \qquad x + a^2 y = 2a \qquad \frac{x}{2a} + \frac{a^2 y}{2} = \frac{2a}{2a} \qquad \frac{x}{2a} + \frac{y}{2/a} = 1$$

$$\text{OX: } A = (2a, 0) \qquad \text{OY: } B = \left(0, 2/a\right)$$

c.

$$d(A-B) = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2} = \sqrt{(0-2a)^2 + \left(\frac{2}{a} - 0\right)^2} = \sqrt{4a^2 + \frac{4}{a^2}}$$

Para obtener el mínimo de esta función se derivada respecto de a y se iguala a cero.

$$d'(a) = \frac{1}{2\cdot\sqrt{4a^2 + \frac{4}{a^2}}}\cdot\left(8a - \frac{8}{a^3}\right) = 0 \ : \ 8a - \frac{8}{a^3} = 0 \ : \ 8a = \frac{8}{a^3} \ : \ a^4 = 1 \ : \ a = \pm 1$$

Como se pide el valor positivo de a, el posible mínimo está en a = 1.

Para comprobar que es un mínimo, el signo de la primera derivada a la izquierda de uno (1^-) debe ser negativo (decreciente) y a la derecha (1^+) positivo (creciente).

Para que resulte más sencillo el estudio, es conveniente simplificar la expresión de la derivada

$$d'(a) = \frac{\left(8a - \frac{8}{a^3}\right)}{2\cdot\sqrt{4a^2 + \frac{4}{a^2}}} = \frac{2\left(a^4 - 1\right)}{a^2\sqrt{a^4 + 1}}$$

teniendo en cuenta la expresión simplificada de la derivada, su signo solo depende del numerador.

$$\left.\begin{array}{l} d'(1^-) = (1^-)^4 - 1 < 0 \\ d'(1^+) = (1^+)^4 - 1 > 0 \end{array}\right\} : \text{ para a = 1 existe un mínimo.}$$

Calcular un polinomio de tercer grado $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ sabiendo que verifica:

i) tiene un máximo relativo en x = 1.
ii) tiene un punto de inflexión en el punto de coordenadas (0, l).
iii) se verifica: $\int_0^1 p(x)dx = \frac{5}{4}$

Solución.

Se pide calcular cuatro parámetros de un polinomio conocidas ciertas características del mismo. Es necesario calcular las dos primeras derivadas.

$$p'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \qquad p''(x) = 6ax + 2b$$

i) Si la función tiene un máximo relativo en x = 1, la derivada del polinomio particularizada en x = 1 debe ser cero.

$$p'(1) = 3a\cdot 1^2 + 2b\cdot 1 + c = 0 \ : \ 3a + 2b + c = 0$$

ii) Si el polinomio tiene un punto de inflexión en (0, l), debe de cumplir dos condiciones

- $(0,1) \in y = p(x) \Rightarrow p(0) = 1 \ : \ p(0) = a0^3 + b0^2 + c0 + d = 1 \ : \ d = 1$
- Si en $(0,1)$ existe inflexión $\ p''(0) = 0 \ : \ 6a\cdot 0 + 2b = 0 \ : \ b = 0$

iii) $$\int_0^1 \left(ax^3 + bx^2 + cx + d\right)\cdot dx = \frac{5}{4} \qquad \left(\frac{ax^4}{4} + \frac{bx^3}{3} + \frac{cx^2}{2} + dx\right]_0^1 = \frac{5}{4}$$

$$\frac{a\cdot 1^4}{4}+\frac{b\cdot 1^3}{3}+\frac{c\cdot 1^2}{2}+d\cdot 1=\frac{5}{4}\xrightarrow{\times 12}3a+4b+6c+12d=15$$

La características del polinomio generan un sistema de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas

$$\begin{cases}3a+2b+c=0\\ d=1\\ b=0\\ 3a+4b+6c+12d=15\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}3a+c=0\\ 3a+6c=3\end{cases}\Rightarrow\begin{matrix}a=-1/5\\ c=3/5\end{matrix}$$

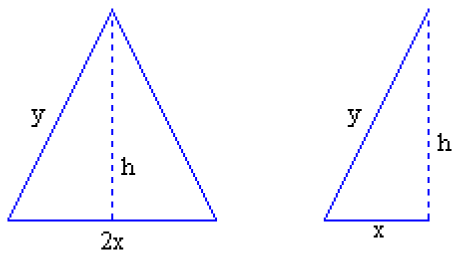
$$p(x)=-\frac{x^3}{5}+\frac{3}{5}x+1$$

Calcular la base y la altura del triángulo isósceles de perímetro 8 y área máxima.

Solución.

Se piden las dimensiones del triángulo isósceles de área máxima y perímetro constante, para ellos se deberá expresar el área del triángulo en función de una única variable.

Supóngase un triángulo como el de la figura, que para simplificar los cálculos a la base se la denomina 2x y a los lados iguales y, al dividirlo en dos se obtiene un triángulo rectángulo en el que se encuentra, mediante el teorema de Pitágoras, la relación entre la altura y las longitudes de los lados x e y.



$$A=\frac{1}{2}b\cdot h:\left\{\begin{matrix}b=2x\\ h=\sqrt{y^2-x^2}\end{matrix}\right\}=\frac{1}{2}2x\cdot\sqrt{y^2-x^2}=x\cdot\sqrt{y^2-x^2}$$

La expresión obtenida permite calcular el área de cualquier triángulo isósceles conocidas las longitudes de los lados.

Si el perímetro del triangulo debe ser 8, se deberá cumplir además

$$2x+y+y=8 \quad \text{simplificando} \quad x+y=4$$

despejando y para sustituirla en el área

$$A=x\cdot\sqrt{y^2-x^2}=x\cdot\sqrt{(4-x)^2-x^2}=x\cdot\sqrt{16-8x}=\sqrt{16x^2-8x^3}$$

expresión que permite calcular el área de cualquier triángulo isósceles de perímetro 8 en función de la mitad de la longitud de la base.

Para calcular el máximo de esta función se deriva y se iguala a cero

$$A'=\frac{1}{2\sqrt{16x^2-8x^3}}\cdot\left(32x-24x^2\right)=\frac{4x\cdot(4-3x)}{\sqrt{16x^2-8x^3}}=0:4x\cdot(4-3x)=0:\begin{cases}4x=0:x=0\\ 4-3x=0:x=\dfrac{4}{3}\end{cases}$$

La solución x = 0 no tiene sentido geométrico. Para comprobar si en $x=\frac{4}{3}$ la función presenta un máximo basta con estudiar el signo a la derecha y la izquierda de $\frac{4}{3}$

$$\begin{cases}\text{Sí } x<\dfrac{4}{3}\Rightarrow 4-3x>0\Rightarrow A'>0\Rightarrow A(x) \text{ es creciente}\\ \text{Sí } x>\dfrac{4}{3}\Rightarrow 4-3x<0\Rightarrow A'<0\Rightarrow A(x) \text{ es decreciente}\end{cases}$$

$$\text{En } x=\frac{4}{3} \text{ el área alcanza un valor máximo}$$

$$\text{Si } x=\frac{4}{3} \Rightarrow y=4-\frac{4}{3}=\frac{8}{3}$$

El triángulo isósceles de área máxima es equilátero de lado $\frac{8}{3}$

Se desea construir una caja cerrada de base cuadrada cuya capacidad sea 8 dm^3. Averiguar las dimensiones de la caja para que la superficie exterior sea mínima.

Solución.

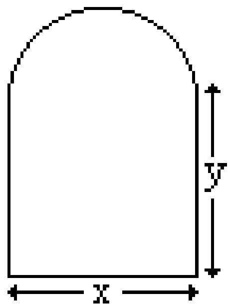
$$\left.\begin{array}{r} A(x,y)=2x^2+4xy \\ x^2y=8 \end{array}\right\} : A(x)=2x^2+\frac{32}{x}$$

$$A'(x)=4x-\frac{32}{x^2}=0 \Rightarrow x=\sqrt[3]{\frac{32}{4}}=2 \Rightarrow y=\frac{8}{2^2}=2$$

$$A''(x)=4+\frac{64}{x^3} \Rightarrow A''(2)=4+\frac{64}{2^3}>0 \qquad \text{Mínimo}$$

Base = 2×2; altura = 2

Se considera una ventana como la que se indica en la figura (la parte inferior es rectangular; la superior, una semicircunferencia). El perímetro de la ventana mide 6 m. Hallar las dimensiones x e y del rectángulo para que la superficie de la ventana sea máxima.



(Expresar los resultados en función de π)

Solución

Es un problema de optimación en el que se pide optimizar las dimensiones de una ventana para que su área sea máxima siendo su perímetro constante.

ÁREA VENTANA = ÁREA RECTÁNGULO + ÁREA SEMICÍRCULO

$$A(x,y)=x\cdot y+\frac{1}{2}\pi\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^2=x\cdot y+\frac{\pi}{8}\cdot x^2$$

Función de dos variables que permite calcular el área de cualquier ventana como la de la figura, conocida la longitud de la base y de la altura de la parte rectangular.

Teniendo en cuenta que el perímetro debe ser de 6 m:

$$\text{Perímetro}=6=x+2y+\frac{1}{2}\cdot 2\pi\cdot\left(\frac{x}{2}\right)=x+\frac{\pi}{2}x+2y=\left(1+\frac{\pi}{2}\right)\cdot x+2y$$

Despejando "y" de la ecuación del perímetro y sustituyendo en la del área se obtiene una expresión A(x) que permite calcular el área de cualquier ventana como la de la figura de perímetro 6 en función únicamente de la longitud de la base.

$$y=\frac{6-\left(1+\frac{\pi}{2}\right)\cdot x}{2}=3-\frac{2+\pi}{4}x$$

sustituyendo en A(x,y)

$$A(x)=x\cdot\left(3-\frac{2+\pi}{4}x\right)+\frac{\pi}{8}x^2=3x-\frac{2+\pi}{4}x^2+\frac{\pi}{8}x^2=3x-\frac{4+3\pi}{8}x^2$$

$$A(x)=3x-\frac{4+3\pi}{8}x^2$$

Derivando esta expresión se obtienen los valores de x que optimizan la función:

$$A' = 3 - \frac{4+\pi}{8}2x = 3 - \frac{4+\pi}{4}x = 0 \;\; ; \;\; x = \frac{12}{4+\pi} \;\; ; \;\; y = 3 - \frac{2+\pi}{4}\cdot\frac{12}{4+\pi} = \frac{6}{4+\pi}$$

$$A'' = -\frac{4+\pi}{4} < 0$$

Para $x = \frac{12}{4+\pi}$, $y = \frac{6}{4+\pi}$ el área de la ventana es máxima.

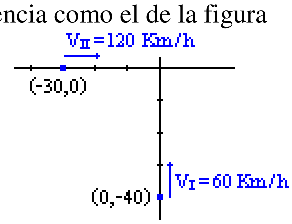
Dos líneas férreas se cortan perpendicularmente. Por cada línea avanza una locomotora (de longitud despreciable), dirigiéndose ambas al punto de corte; sus velocidades son 60 km/h y han salido simultáneamente de estaciones situadas, respectivamente, a 40 y 30 km del punto de corte.

1. Hallar la distancia a la que se encuentran las locomotoras, en función del tiempo que pasa desde que inician su recorrido.
2. Hallar el valor mínimo de dicha distancia.

Solución

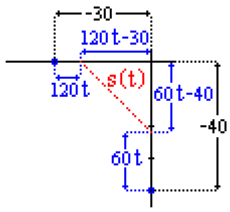
1.- Se pide calcular una expresión para la distancia de separación de dos puntos móviles que se desplazan perpendicularmente y con velocidades constantes en función del tiempo.

Tomando un sistema de referencia como el de la figura



y considerando el desplazamiento positivo, el ejercicio se reduce a calcular la hipotenusa de un triángulo rectángulo en el que la longitud de los catetos será función del tiempo.

Transcurrido un tiempo t, la posición de los móviles vendrá dada por



$$\begin{cases} s_I = 60t - 40 \\ s_{II} = 120t - 30 \end{cases}$$

por lo que la distancia de separación entre los móviles será

$$s(t) = \sqrt{(60t-40)^2 + (120t-30)^2} = \sqrt{18000t^2 - 12000t + 2500} = 10\cdot\sqrt{180t^2 - 120t + 25}$$

2.- Se pide calcular el mínimo de la función s(t). Se calcula la derivada:

$$s'(t) = 10\cdot\frac{360t - 120}{2\cdot\sqrt{180t^2 - 120t + 25}}$$

igualando a cero la derivada:

$$S'(t) = 0 \Rightarrow 360t - 120 = 0 \;\; ; \;\; t = \frac{120}{360} = \frac{1}{3}\,\text{h.}$$

Criterio:

$$\left.\begin{array}{l} S'\left(\frac{1}{3}^{-}\right) < 0 \Rightarrow S(t)\,\text{Decreciente} \\ S'\left(\frac{1}{3}^{+}\right) > 0 \Rightarrow S(t)\,\text{Creciente} \end{array}\right\} : x = \frac{1}{3}\,\text{existe un mínimo}$$