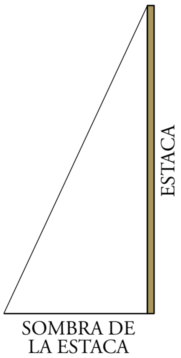
Página 143

Resuelve

1. **a) Razona que la estaca y su sombra forman un triángulo rectángulo. ¿Ocurre lo mismo con cada árbol y su sombra?**

b) ¿Por qué se han de dar prisa en señalar los extremos de las sombras? Razona que todos los triángulos formados por un árbol, o la estaca, y sus correspondientes sombras en cada instante son semejantes.

c) Sabiendo que hay un chopo cuya sombra midió 3,92 m, halla su altura.

a) 

La estaca es vertical y el suelo es horizontal. La sombra se proyecta sobre el suelo. Por tanto, la estaca y su sombra son los catetos de un triángulo rectángulo.

Lo mismo ocurre con cada árbol y su sombra. (Los árboles hay que idealizarlos para considerarlos como segmentos verticales).

b) Hay que señalar las sombras muy deprisa para que no les afecte el movimiento del Sol. Los triángulos formados por una estaca y su sombra y por un árbol y su sombra siempre serán semejantes porque siempre serán rectángulos y compartirán un ángulo agudo (el que corresponde a la inclinación de los rayos del Sol).

c) $\begin{cases} \text{Longitud estaca} = 163 \text{ cm} \\ \text{Sombra de la estaca} = 76 \text{ cm} \end{cases}$ $\begin{cases} \text{Altura del chopo} = x \\ \text{Sombra del chopo} = 3{,}92 \text{ m} = 392 \text{ cm} \end{cases}$

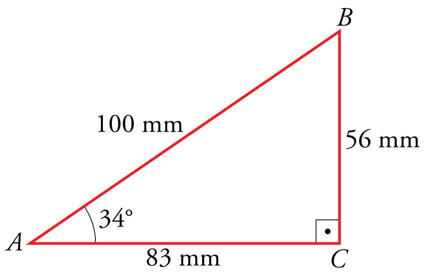
$$\frac{x}{392} = \frac{163}{76} \rightarrow x = 392 \cdot \frac{163}{76} \rightarrow x = 840{,}7 \text{ cm} = 8{,}407 \text{ m}$$

1 Razones trigonométricas de un ángulo agudo

Página 144

1. Dibuja sobre un ángulo como el anterior, 34°, un triángulo rectángulo de tal modo que $\overline{AB}$ = 100 mm.

Halla sus razones trigonométricas y observa que obtienes, aproximadamente, los mismos valores que en el ejemplo de arriba.



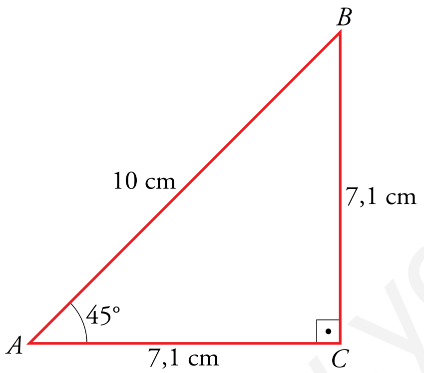
$$sen\ 34° = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{56}{100} = 0{,}56$$

$$cos\ 34° = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{83}{100} = 0{,}83$$

$$tg\ 34° = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{56}{83} = 0{,}67$$

2. Dibuja, sobre un ángulo de 45°, un triángulo rectángulo cuya hipotenusa mida 10 cm.

Calcula, como en el ejemplo de arriba, las razones trigonométricas de 45°. ¿Cómo son entre sí el seno y el coseno? ¿Cuánto vale la tangente? Explica por qué.



$$sen\ 45° = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{7,1}{10} = 0{,}71$$

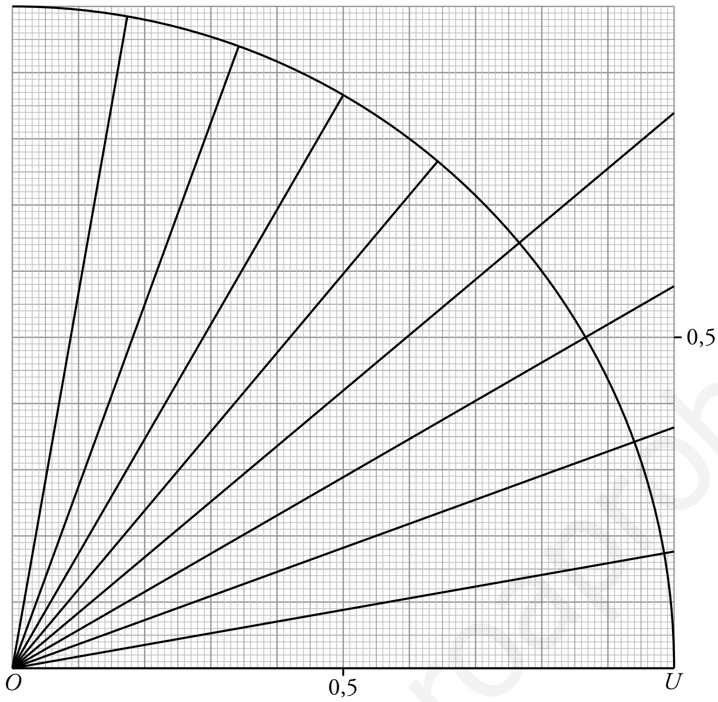
$$cos\ 45° = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{7,1}{10} = 0{,}71$$

$$tg\ 45° = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{7,1}{7,1} = 1$$

El triángulo además de rectángulo es isósceles y, por tanto, los dos catetos tienen la misma longitud, de ahí que el seno y el coseno de 45° sean iguales y la tangente valga 1.

Página 145

3. Utilizando una plantilla de papel milimetrado como la de arriba y un transportador de ángulos, calcula el seno y el coseno de 10°, 20°, 30°, 40°, 50°, 60°, 70° y 80°, y la tangente de aquellos que puedas.



sen 10° = 0,18, *cos* 10° = 0,98, *tg* 10° = 0,18

sen 20° = 0,34, *cos* 20° = 0,94, *tg* 20° = 0,37

sen 30° = 0,5, *cos* 30° = 0,86, *tg* 30° = 0,58

sen 40° = 0,64, *cos* 40° = 0,76, *tg* 40° = 0,84

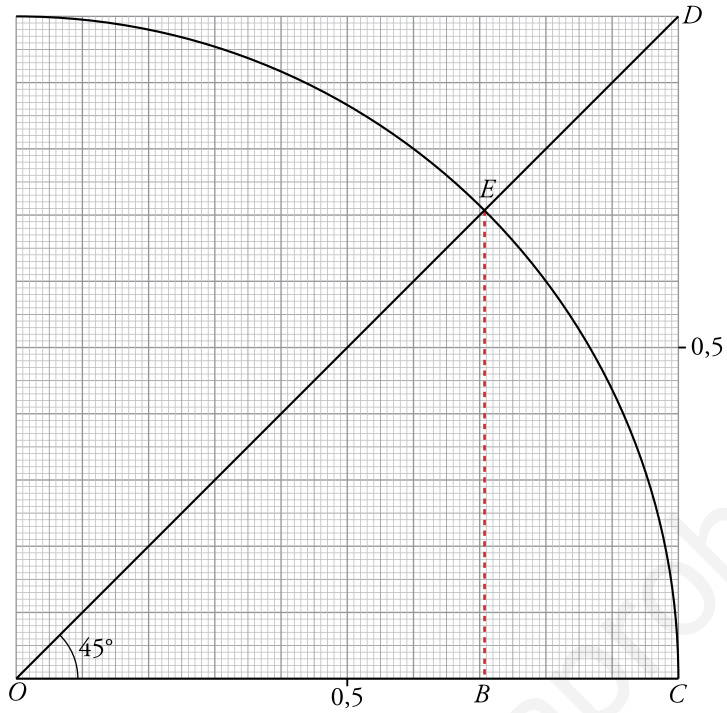
sen 50° = 0,76, *cos* 50° = 0,64

sen 60° = 0,86, *cos* 60° = 0,5

sen 70° = 0,94, *cos* 70° = 0,34

sen 80° = 0,98, *cos* 80° = 0,18

4. Calcula las razones trigonométricas, seno, coseno y tangente, de 45° y comprueba que coinciden (excepto decimales) con lo que calculaste en el ejercicio 2 de la página anterior.



$$sen\ 45° = \frac{\overline{EB}}{1} \rightarrow sen\ 45° = \overline{EB} \rightarrow sen\ 45° = 0{,}71$$

$$cos\ 45° = \frac{\overline{OB}}{1} \rightarrow cos\ 45° = \overline{OB} \rightarrow cos\ 45° = 0{,}71$$

$$tg\ 45° = \frac{\overline{CD}}{\overline{OC}} = \frac{\overline{CD}}{1} = \overline{CD} \rightarrow tg\ 45° = 1$$

2 Relaciones trigonométricas fundamentales

Página 146

1. ***sen*** **α = 0,6. Calcula** ***cos*** **α y** ***tg*** **α.**

- $sen^2\ \alpha + cos^2\ \alpha = 1 \rightarrow 0{,}6^2 + cos^2\ \alpha = 1 \rightarrow cos^2\ \alpha = 1 - 0{,}6^2 \rightarrow$

$$\rightarrow cos^2\ \alpha = 0{,}64 \xrightarrow[\text{raíz positiva}]{\text{tomamos la}} cos\ \alpha = 0{,}8$$

- $tg\ \alpha = \dfrac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha} \rightarrow tg\ \alpha = \dfrac{0,6}{0,8} \rightarrow tg\ \alpha = 0{,}75$

Por tanto, $cos\ \alpha = 0{,}8$ y $tg\ \alpha = 0{,}75$.

2. ***tg*** **β = 0,53. Calcula** ***sen*** **β y** ***cos*** **β.**

- $\left.\begin{array}{l} \dfrac{sen\ \beta}{cos\ \beta} = 0,53 \\ sen^2\ \beta + cos^2\ \beta = 1 \end{array}\right\} \rightarrow sen\ \beta = 0,53\ cos\ \beta$

$(0{,}53 cos\ \beta)^2 + cos^2\ \beta = 1 \rightarrow 0{,}2809 cos^2\ \beta + cos^2\ \beta = 1 \rightarrow 1{,}2809 cos^2\ \beta = 1 \rightarrow$

$$\rightarrow cos^2\ \beta = \frac{1}{1,2809} \xrightarrow[\text{raíz positiva}]{\text{tomamos la}} cos\ \beta = 0{,}88$$

- $sen\ \beta = 0{,}53 cos\ \beta \rightarrow sen\ \beta = 0{,}47$

Por tanto, $sen\ \beta = 0{,}47$ y $cos\ \beta = 0{,}88$.

Página 147

3. Teniendo en cuenta que *tg* 45° = 1, deduce el valor de *sen* 45° y de *cos* 45° mediante las relaciones fundamentales.

$\frac{sen\ 45°}{cos\ 45°} = 1;\ sen\ 45° = cos\ 45°$

$(sen\ 45°)^2 + (cos\ 45°)^2 = 1$

$(cos\ 45°)^2 + (cos\ 45°)^2 = 1 \ \rightarrow\ cos\ 45° = \pm\sqrt{\frac{1}{2}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

Solo tomamos el resultado positivo: $cos\ 45° = \frac{\sqrt{2}}{2} \ \rightarrow\ sen\ 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$

4. Teniendo en cuenta que *sen* 30° = 1/2, halla el valor de *cos* 30° y de *tg* 30° mediante las relaciones fundamentales.

$sen\ 30° = \frac{1}{2}$

$(sen\ 30°)^2 + (cos\ 30°)^2 = 1 \ \rightarrow\ \frac{1}{4} + (cos\ 30°)^2 = 1 \ \rightarrow\ cos\ 30° = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

Tomamos el resultado positivo: $cos\ 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$tg\ 30° = \frac{1/2}{\sqrt{3}/2} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

5. Calcula el seno y la tangente de un ángulo cuyo coseno vale 0,8.

$cos\ \alpha = 0{,}8$

$(sen\ \alpha)^2 + (cos\ \alpha)^2 = 1 \ \rightarrow\ (0{,}8)^2 + (sen\ \alpha)^2 = 1 \ \rightarrow sen\ \alpha = \pm 0{,}6$

Tomamos solo el valor positivo: $sen\ \alpha = 0{,}6$

$tg\ \alpha = \frac{0{,}6}{0{,}8} = 0{,}75$

6. Halla el seno y el coseno de un ángulo cuya tangente vale 0,7.

$tg\ \alpha = \frac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha} = 0{,}7;\ sen\ \alpha = 0{,}7 \cdot cos\ \alpha$

$(sen\ \alpha)^2 + (cos\ \alpha)^2 = 1$

$(0{,}7 cos\ \alpha)^2 + (cos\ \alpha)^2 = 1 \ \rightarrow\ 1{,}49(cos\ \alpha)^2 = 1 \ \rightarrow\ cos\ \alpha = \pm 0{,}82$

Solo tomamos el valor positivo: $cos\ \alpha = 0{,}82$

$sen\ \alpha = 0{,}7 \cdot 0{,}82 \ \rightarrow\ sen\ \alpha = 0{,}57$

7. Copia en tu cuaderno y completa la siguiente tabla de razones trigonométricas:

sen α	**0,94**		**4/5**			
cos α		**0,82**			**$\sqrt{3}/2$**	
tg α				**3,5**		**1**

En las operaciones donde aparezcan fracciones o radicales, trabaja con ellos; no utilices su expresión decimal.

En todos los casos, solo tomaremos los resultados positivos.

- $sen\ \alpha = 0{,}94$

  $(cos\ \alpha)^2 + (0{,}94)^2 = 1 \rightarrow cos\ \alpha = 0{,}34$

  $tg\ \alpha = \dfrac{0{,}94}{0{,}34} = 2{,}76$

- $sen\ \alpha = \dfrac{4}{5}$

  $\left(\dfrac{4}{5}\right)^2 + (cos\ \alpha)^2 = 1 \rightarrow cos\ \alpha = \dfrac{3}{5}$

  $tg\ \alpha = \dfrac{4/5}{3/5} = \dfrac{4}{3}$

- $cos\ \alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

  $(sen\ \alpha)^2 + \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 1 \rightarrow sen\ \alpha = \dfrac{1}{2}$

  $tg\ \alpha = \dfrac{1/2}{\sqrt{3}/2} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

- $cos\ \alpha = 0{,}82$

  $(sen\ \alpha)^2 + (0{,}82)^2 = 1 \rightarrow sen\ \alpha = 0{,}57$

  $tg\ \alpha = \dfrac{0{,}57}{0{,}82} = 0{,}69$

- $tg\ \alpha = 3{,}5 = \dfrac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha} \rightarrow sen\ \alpha = 3{,}5 \cdot cos\ \alpha$

  $(sen\ \alpha)^2 + (cos\ \alpha)^2 = 1$

  $(3{,}5 cos\ \alpha)^2 + (cos\ \alpha)^2 = 1 \rightarrow cos\ \alpha = 0{,}27$

  $sen\ \alpha = 3{,}5 \cdot 0{,}27 \rightarrow sen\ \alpha = 0{,}96$

- $tg\ \alpha = 1$

  $\dfrac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha} = 1;\ sen\ \alpha = cos\ \alpha$

  $(sen\ \alpha)^2 + (cos\ \alpha)^2 = 1$

  $(cos\ \alpha)^2 + (cos\ \alpha)^2 = 1 \rightarrow cos\ \alpha = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

  $sen\ \alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

sen α	0,94	0,57	4/5	0,96	1/2	$\sqrt{2}/2$
cos α	0,34	0,82	3/5	0,27	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$
tg α	2,76	0,69	4/3	3,5	$\sqrt{3}/3$	1

3 Utilización de la calculadora en trigonometría

Página 148

1. Obtén las siguientes razones trigonométricas y escribe en tu cuaderno los resultados redondeando a las milésimas.

a) ***sen*** **86°**

b) ***cos*** **59°**

c) ***tg*** **22°**

d) ***sen*** **15° 25' 43''**

e) ***cos*** **59° 27'**

f) ***tg*** **86° 52'**

g) ***sen*** **10° 30'' (atención, 10° 0' 30'')**

a) *sen* 86° = 0,998

b) *cos* 59° = 0,515

c) *tg* 22° = 0,404

d) *sen* (15° 25' 43'') = 0,266

e) *cos* (59° 27') = 0,508

f) *tg* (86° 52') = 18,268

g) *sen* (10° 30'') = 0,174

Página 149

2. Da el valor del ángulo α en forma sexagesimal, en cada caso:

a) $sen\ \alpha = 0{,}91$ **b)** $tg\ \alpha = 5{,}83$
c) $cos\ \alpha = 0{,}42$ **d)** $tg\ \alpha = 0{,}34$
e) $sen\ \alpha = 0{,}08$ **f)** $cos\ \alpha = 0{,}88$

a) $\alpha = 65°\ 30'\ 19''$ b) $\alpha = 80°\ 16'\ 1''$
c) $\alpha = 65°\ 9'\ 55''$ d) $\alpha = 18°\ 46'\ 41''$
e) $\alpha = 4°\ 35'\ 19''$ f) $\alpha = 28°\ 21'\ 27''$

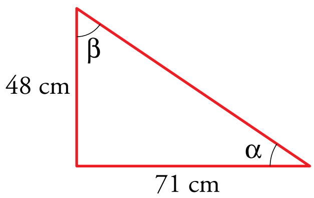
3. a) Calcula $sen\ \alpha$ sabiendo que $cos\ \alpha = 0{,}91$.
b) Calcula $cos\ \alpha$ sabiendo que $tg\ \alpha = 6{,}41$.
c) Calcula $tg\ \alpha$ sabiendo que $cos\ \alpha = 0{,}06$.
d) Calcula $tg\ \alpha$ sabiendo que $cos\ \alpha = 0{,}96$.
e) Calcula $sen\ \alpha$ sabiendo que $tg\ \alpha = 0{,}1$.

a) $cos\ \alpha = 0{,}91 \rightarrow sen\ \alpha = 0{,}415$
b) $tg\ \alpha = 6{,}41 \rightarrow cos\ \alpha = 0{,}154$
c) $cos\ \alpha = 0{,}06 \rightarrow tg\ \alpha = 16{,}637$
d) $cos\ \alpha = 0{,}96 \rightarrow tg\ \alpha = 0{,}292$
e) $tg\ \alpha = 0{,}1 \rightarrow sen\ \alpha = 0{,}0995$

4 Resolución de triángulos rectángulos

Página 150

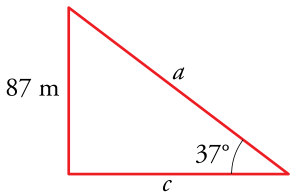
1. Los dos catetos de un triángulo rectángulo miden 48 cm y 71 cm. Halla los dos ángulos agudos.



$$tg\ \alpha = \frac{48}{71} = 0{,}676 \rightarrow \alpha = 34°\ 3'\ 39{,}27''$$

$$\beta = 90° - 34°\ 3'\ 39{,}27'' = 55°\ 86'\ 51{,}73''$$

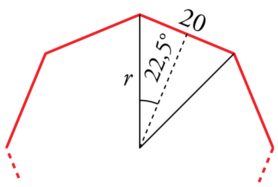
2. En un triángulo rectángulo, un ángulo agudo mide 37°, y el cateto opuesto, 87 m. Halla el otro cateto y la hipotenusa.



$$sen\ 37° = \frac{87}{a} \rightarrow a = \frac{87}{sen\ 37°} = 144{,}56 \text{ m}$$

$$tg\ 37° = \frac{87}{c} \rightarrow c = \frac{87}{tg\ 37°} = 115{,}45 \text{ m}$$

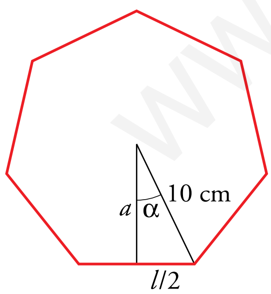
3. Calcula el radio de un octógono regular de 20 cm de lado. ¿Cuánto mide su apotema?



$$sen\ 22{,}5° = \frac{10}{r} \rightarrow r = \frac{10}{sen\ 22{,}5°} \approx 26{,}13 \text{ cm}$$

$$cos\ 22{,}5° = \frac{\text{apotema}}{r} \rightarrow \text{apotema} \approx 24{,}14 \text{ cm}$$

4. Halla la apotema de un heptágono regular de 10 cm de radio. Calcula también la longitud del lado.



$$\alpha = 360° : 14 = 25°\ 42'\ 51''$$

$$cos\ (25°\ 42'\ 51'') = \frac{a}{10} \rightarrow a = 10 \cdot cos\ (25°\ 42'\ 51'') \rightarrow$$

$$\rightarrow a = 9 \text{ cm}$$

$$sen\ (25°\ 42'\ 51'') = \frac{l/2}{10} \rightarrow \frac{l}{2} = 10 \cdot sen\ (25°\ 42'\ 51'') \rightarrow$$

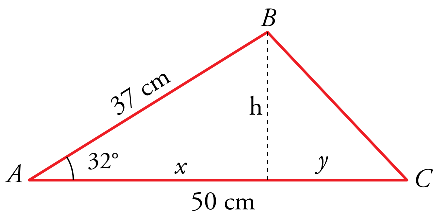
$$\rightarrow \frac{l}{2} = 4{,}34 \text{ cm} \rightarrow l = 8{,}68 \text{ cm}$$

Por tanto, el lado del heptágono mide 8,68 cm y su apotema 9 cm.

5 Resolución de triángulos oblicuángulos

Página 151

1. En un triángulo ABC, halla $\overline{BC}$ conociendo $\overline{AB}$ = 37 cm, $\overline{AC}$ = 50 cm y $\hat{A}$ = 32°.



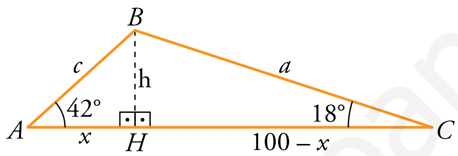
$$cos\ 32° = \frac{x}{37} \to x = 31{,}38 \text{ cm}$$

$$sen\ 32° = \frac{h}{37} \to h = 19{,}61 \text{ cm}$$

$$y = 50 - x = 50 - 31{,}38 = 18{,}62 \text{ cm}$$

$$\overline{BC} = \sqrt{h^2 + y^2} = 27{,}04 \text{ cm}$$

2. Halla los lados $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ de un triángulo ABC en el que sabemos $\overline{AC}$ = 100 cm, $\hat{A}$ = 42° y $\hat{C}$ = 18°.



- Trazamos la altura sobre AC y dividimos el triángulo $\widehat{ABC}$ en dos triángulos rectángulos $\widehat{ABH}$ y $\widehat{BHC}$.

$$\left.\begin{array}{l} \text{En } \widehat{ABH}: \ tg\ 42° = \dfrac{h}{x} \\ \text{En } \widehat{BHC}: \ tg\ 18° = \dfrac{h}{100 - x} \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{l} 0{,}900 = \dfrac{h}{x} \\ 0{,}325 = \dfrac{h}{100 - x} \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{l} h = 0{,}900x \\ h = 0{,}325(100 - x) \end{array}\right\} \to$$

$$\to 0{,}900x = 0{,}325(100 - x) \to 0{,}900x = 32{,}5 - 0{,}325x \to$$

$$\to 1{,}225x = 32{,}5 \to x = \frac{32{,}5}{1{,}225} \to x = 26{,}5 \text{ cm} \to$$

$$\to h = 23{,}85 \text{ cm}$$

- Conociendo x y h podemos hallar los lados $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$.

$$\text{En } \widehat{ABH}: \ cos\ 42° = \frac{26{,}5}{c} \to c = \frac{26{,}5}{cos\ 42°} \to c = 35{,}7 \text{ cm}$$

$$\text{En } \widehat{BHC}: \ cos\ 18° = \frac{100 - 26{,}5}{a} \to a = \frac{73{,}5}{cos\ 18°} \to a = 77{,}3 \text{ cm}$$

Por tanto, $\overline{AB} = c = 35{,}7$ cm y $\overline{BC} = a = 77{,}3$ cm.

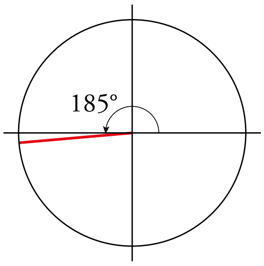
6 Razones trigonométricas de 0° a 360°

Página 153

1. Indica el signo de cada una de estas razones trigonométricas, situando aproximadamente los ángulos en la circunferencia goniométrica:

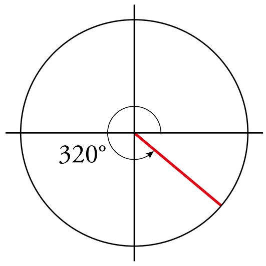
a) ***sen*** **185°**	**b)** ***cos*** **320°**	**c)** ***tg*** **100°**
d) ***cos*** **350°**	**e)** ***cos*** **120°**	**f)** ***tg*** **95°**
g) ***cos*** **275°**	**h)** ***sen*** **85°**	**i)** ***tg*** **265°**

a)



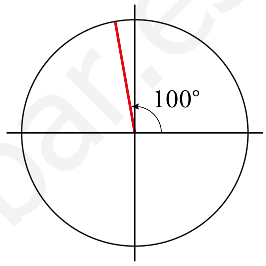
sen 185° < 0

b)



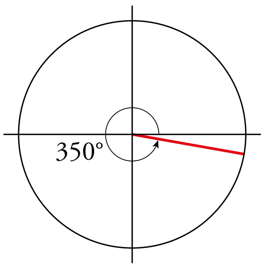
cos 320° > 0

c)



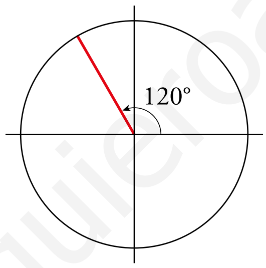
tg 100° < 0

d)



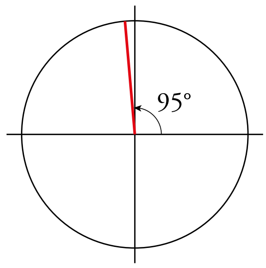
cos 350° > 0

e)



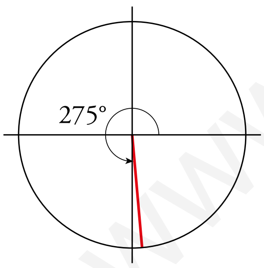
cos 120° < 0

f)



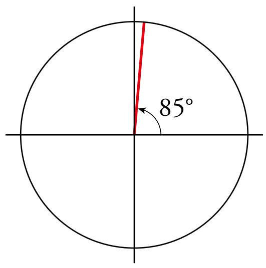
tg 95° < 0

g)



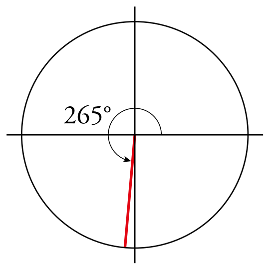
cos 275° > 0

h)



sen 85° > 0

i)



tg 265° > 0

2. Indica en qué cuadrante se encuentra cada uno de los ángulos α, β, γ y ϕ:

a) ***sen*** $\alpha < 0$ **y** ***tg*** $\alpha > 0$ **b)** ***cos*** $\beta > 0$ **y** ***tg*** $\beta < 0$

c) ***sen*** $\gamma < 0$ **y** ***cos*** $\gamma < 0$ **d)** ***cos*** $\phi > 0$ **y** ***sen*** $\phi < 0$

¿Qué signo tiene cada una de las razones trigonométricas que faltan?

a) $\left.\begin{array}{l} sen\ \alpha < 0 \ \rightarrow\ \alpha \in \text{III o IV cuadrante} \\ tg\ \alpha > 0 \ \rightarrow\ \alpha \in \text{I o III cuadrante} \end{array}\right\} \rightarrow \alpha \in \text{III cuadrante}$

Además, *cos* $\alpha < 0$.

b) $\left.\begin{array}{l} \cos\beta > 0 \ \rightarrow\ \beta \in \text{I o IV cuadrante} \\ tg\,\beta < 0 \ \rightarrow\ \beta \in \text{II o IV cuadrante} \end{array}\right\} \rightarrow\ \beta \in \text{IV cuadrante}$

Además, $sen\,\beta < 0$.

c) $\left.\begin{array}{l} sen\,\gamma < 0 \ \rightarrow\ \gamma \in \text{III o IV cuadrante} \\ \cos\gamma < 0 \ \rightarrow\ \gamma \in \text{II o III cuadrante} \end{array}\right\} \rightarrow\ \gamma \in \text{III cuadrante}$

Además, $tg\,\gamma > 0$.

d) $\left.\begin{array}{l} \cos\phi > 0 \ \rightarrow\ \phi \in \text{I o IV cuadrante} \\ sen\,\phi < 0 \ \rightarrow\ \phi \in \text{III o IV cuadrante} \end{array}\right\} \rightarrow\ \phi \in \text{IV cuadrante}$

Además, $tg\,\phi < 0$.

3. Dibuja sobre una circunferencia goniométrica, en papel milimetrado, los ángulos siguientes:

62°, 154°, 243° y 300°

Representa sus razones trigonométricas y da su valor aproximado.

$sen\ 62° = 0,88$	$\cos 62° = 0,47$	$tg\ 62° = 1,88$
$sen\ 154° = 0,44$	$\cos 154° = -0,9$	$tg\ 154° = -0,49$
$sen\ 243° = -0,89$	$\cos 243° = -0,45$	$tg\ 243° = 1,96$
$sen\ 300° = -0,87$	$\cos 300° = 0,5$	$tg\ 300° = -1,73$

4. En la página anterior, en la circunferencia goniométrica sobre la que se han representado el seno y el coseno, hay un triángulo coloreado, $OA'A$.

a) Razonando sobre él y teniendo en cuenta que $\overline{OA} = 1$, justifica que $\cos\alpha = \overline{OA'}$ y $sen\,\alpha = \overline{A'A}$.

b) Aplicando el teorema de Pitágoras en este triángulo, justifica que $(sen\,\alpha)^2 + (\cos\alpha)^2 = 1$.

c) Justifica que $(sen\,\beta)^2 + (\cos\beta)^2 = 1$, razonando sobre el correspondiente triángulo.

a) $\cos\alpha = \dfrac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} = \dfrac{\overline{OA'}}{1} = \overline{OA'}$

b) $(sen\,\alpha)^2 + (\cos\alpha)^2 = \left(\overline{AA'}\right)^2 + \left(\overline{OA'}\right)^2 = \left(\overline{OA}\right)^2 = 1$

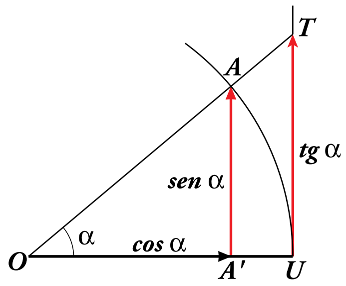
c) $(sen\,\beta)^2 + (\cos\beta)^2 = \overline{OB}^{\,2} = 1$

5. Di el valor de $sen\,\alpha$ y $\cos\alpha$ cuando α vale 0°, 90°, 180°, 270° y 360°.

α	0°	90°	180°	270°	360°
sen α	0	1	0	–1	0
cos α	1	0	–1	0	1

6. Teniendo en cuenta la semejanza de los triángulos $OA'A$ **y** OUT**, y que** $\overline{OU} = 1$**, demuestra que:**

$$\frac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha} = tg\ \alpha$$



Por la semejanza de triángulos:

$$\frac{\overline{OA'}}{\overline{AA'}} = \frac{\overline{OU}}{\overline{UT}} \rightarrow \overline{UT} = \frac{\overline{AA'} \cdot \overline{OU}}{\overline{OA'}} = \frac{\overline{AA'}}{\overline{OA'}} \rightarrow tg\ \alpha = \frac{\overline{AA'}}{\overline{OA'}} = \frac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha}$$

7 Ángulos de medidas cualesquiera. Razones trigonométricas

Página 154

1. Expresa con valores comprendidos entre –180° y 180° estos ángulos:

a) $1837°$ **b)** $3358°$ **c)** $1381°$ **d)** $3805°$

Comprueba con la calculadora que, en cada caso, coinciden las razones trigonométricas de uno y otro ángulo.

a) $\begin{array}{r|l} 1837 & 360 \\ \hline 37 & 5 \end{array}$

$1837° = 5 \cdot 360° + 37° = 37°$

$sen\ 1837° = sen\ 37° = 0{,}602$

$cos\ 1837° = cos\ 37° = 0{,}799$

$tg\ 1837° = tg\ 37° = 0{,}754$

b) $\begin{array}{r|l} 3358 & 360 \\ \hline 118 & 9 \end{array}$

$3358° = 9 \cdot 360° + 118° = 118°$

$sen\ 3358° = sen\ 118° = 0{,}883$

$cos\ 3358° = cos\ 118° = -0{,}469$

$tg\ 3358° = tg\ 118° = -1{,}881$

c) $\begin{array}{r|l} 1381 & 360 \\ \hline 301 & 3 \end{array}$

$1381° = 3 \cdot 360° + 301° = 301° = 301° - 360° = -59°$

$sen\ 1381° = sen\ (-59°) = -0{,}857$

$cos\ 1381° = cos\ (-59°) = 0{,}515$

$tg\ 1381° = tg\ (-59°) = -1{,}664$

d) $\begin{array}{r|l} 3805 & 360 \\ \hline 205 & 10 \end{array}$

$3805° = 10 \cdot 360° + 205° = 205° = 205° - 360° = -155°$

$sen\ 3805° = sen\ (-155°) = -0{,}423$

$cos\ 3805° = cos\ (-155°) = -0{,}906$

$tg\ 3805° = tg\ (-155°) = 0{,}466$

8 Funciones trigonométricas. El radián

Página 155

1. Pasa a radianes los siguientes ángulos:

a) 25° **b) 100°** **c) 150°** **d) 250°**

Expresa el resultado en función de π y, luego, en forma decimal. Por ejemplo: 180° = π rad = 3,14 rad.

a) $25° = \dfrac{25 \cdot 2\pi}{360}$ rad $= \dfrac{5\pi}{36}$ rad = 0,44 rad

b) $100° = \dfrac{100 \cdot 2\pi}{360}$ rad $= \dfrac{5\pi}{9}$ rad = 1,74 rad

c) $150° = \dfrac{150 \cdot 2\pi}{360}$ rad $= \dfrac{5\pi}{6}$ rad = 2,62 rad

d) $250° = \dfrac{250 \cdot 2\pi}{360}$ rad $= \dfrac{25\pi}{18}$ rad = 4,36 rad

2. Pasa a grados los siguientes ángulos:

a) 0,5 rad **b) 1,5 rad** **c) $\dfrac{\pi}{3}$ rad**

d) $\dfrac{3\pi}{4}$ rad **e) 4,8 rad** **f) 3π rad**

a) 0,5 rad $= \dfrac{0,5 \cdot 360°}{2\pi} = 28°\ 39'\ 36''$

b) 1,5 rad $= \dfrac{1,5 \cdot 360°}{2\pi} = 85°\ 59'\ 24''$

c) $\dfrac{\pi}{3}$ rad $= \dfrac{180°}{3} = 60°$

d) $\dfrac{3\pi}{4}$ rad $= \dfrac{3 \cdot 180°}{4} = 135°$

e) 4,8 rad $= \dfrac{4,8 \cdot 360°}{2\pi} = 275°\ 8'\ 36''$

f) 3π rad $= 3 \cdot 180° = 540°$

Página 156

3. ¿Verdadero o falso?

a) El radián es una medida de longitud equivalente al radio.

b) Un radián es un ángulo algo menor que 60°.

c) Puesto que la longitud de la circunferencia es $2\pi r$, un ángulo completo (360°) tiene 2π radianes.

d) 180° es algo menos de 3 radianes.

e) Un ángulo recto mide $\pi/2$ radianes.

f) Las funciones trigonométricas son periódicas.

g) Las funciones *sen x* y *cos x* tienen un periodo de 2π.

h) La función *tg x* tiene periodo π.

i) La función *cos x* es como *sen x* desplazada $\pi/2$ a la izquierda.

a) Falso, el radián es una unidad de medida de ángulos. Se llama radián a un ángulo tal que el arco que abarca tiene la misma longitud que el radio con el que se ha trazado.

b) Verdadero. 1 rad = 57° 17' 45"

c) Verdadero.

d) Falso. $180° = \pi \text{ rad} \approx 3{,}14 \text{ rad}$

e) Verdadero.

f) Verdadero.

g) Verdadero.

h) Verdadero.

i) Verdadero, se cumple $sen\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = cos\ \alpha,\ \forall\ \alpha$.

Página 157

Hazlo tú. **Repite el problema anterior suponiendo que el satélite ve la Tierra bajo un ángulo de 100°.**

a) En este caso, $\widehat{TSO} = 50°$ y, por tanto, $\widehat{SOT} = 40°$.

Siguiendo el mismo razonamiento que en el libro de texto:

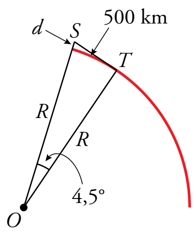
$$d = \frac{6\,371}{cos\ 40°} - 6\,371 \approx 1\,946 \text{ km}$$

b) $h = R \cdot (1 - cos\ 40°) = 6\,371 \cdot (1 - cos\ 40°) = 1\,490{,}53$

Área del casquete $= 2\pi R \cdot h \approx 59\,635\,926 \text{ km}^2$

El área de la porción visible de la Tierra es de unos 60 millones de km^2.

Hazlo tú. **¿A qué altura hemos de subir para ver un lugar situado a 500 km?**



Como el cuadrante de meridiano terrestre tiene 10 000 km y corresponde a un ángulo recto, al arco de 500 km le corresponde un ángulo de 4,5°.

Siguiendo el mismo razonamiento que en el ejercicio resuelto en el libro de texto:

$$d = 6\,371 \cdot \left(\frac{1}{cos\ 4{,}5°} - 1\right) = 19{,}17 \text{ km}$$

Deberíamos elevarnos unos 19 km.

Hazlo tú. **Repite el problema con estos datos: 1.ª medición, 50°; camina 10 m; 2.ª medición, 25°.**

Siguiendo el planteamiento del ejercicio resuelto del libro de texto:

$$\left.\begin{array}{l} tg\ 50° = \dfrac{y}{x} \\ \\ tg\ 25° = \dfrac{y}{x+10} \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} \to\ y = 1{,}19x \\ \to\ y = (x+10) \cdot 0{,}47 \end{array}\right\} \to\ x = 6{,}53;\ \ y = 7{,}77$$

El ancho del río es 6,53 m y la altura del árbol, 7,77 m.

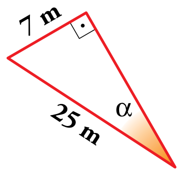
Ejercicios y problemas

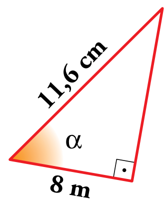
Página 158

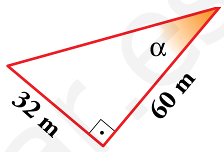
Practica

Razones trigonométricas de un ángulo agudo

1. Halla las razones trigonométricas del ángulo α en cada uno de estos triángulos:

a) 

b) 

c) 

a) $sen\ \alpha = \dfrac{7}{25} = 0{,}28$; $\ cos\ \alpha = \dfrac{\sqrt{25^2 - 7^2}}{25} = \dfrac{24}{25} = 0{,}96$; $\ tg\ \alpha = \dfrac{7}{24} \approx 0{,}29$

b) $sen\ \alpha = \dfrac{\sqrt{11{,}6^2 - 8^2}}{11{,}6} = \dfrac{8{,}4}{11{,}6} \approx 0{,}724$

$cos\ \alpha = \dfrac{8}{11{,}6} \approx 0{,}69$; $\ tg\ \alpha = \dfrac{8{,}4}{8} = 1{,}05$

c) $sen\ \alpha = \dfrac{32}{\sqrt{32^2 + 60^2}} = \dfrac{32}{68} = \dfrac{8}{17} \approx 0{,}47$

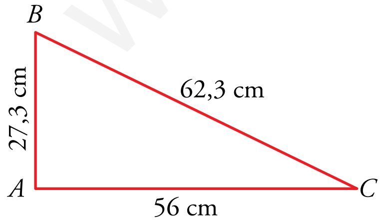
$cos\ \alpha = \dfrac{60}{68} = \dfrac{15}{17} \approx 0{,}88$; $\ tg\ \alpha = \dfrac{32}{60} = \dfrac{8}{15} \approx 0{,}53$

2. Halla las razones trigonométricas de los ángulos agudos de los siguientes triángulos rectángulos ($\hat{A} = 90°$):

a) $b = 56$ cm; $a = 62{,}3$ cm

b) $b = 33{,}6$ cm; $c = 4{,}5$ cm

c) $b = 16$ cm; $a = 36$ cm

a) 

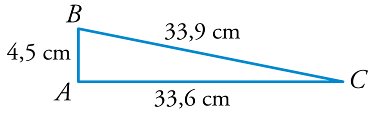
$sen\ \hat{B} = \dfrac{56}{62{,}3} \approx 0{,}90$

$cos\ \hat{B} = \dfrac{\sqrt{62{,}3^2 - 56^2}}{62{,}3} = \dfrac{27{,}3}{62{,}3} \approx 0{,}438$

$tg\ \hat{B} = \dfrac{56}{27{,}3} \approx 2{,}051$

$sen\ \hat{C} = \dfrac{27{,}3}{62{,}3} \approx 0{,}438$; $\ cos\ \hat{C} = \dfrac{56}{62{,}3} \approx 0{,}90$; $\ tg\ \hat{C} = \dfrac{27{,}3}{56} = 0{,}4875$

b)



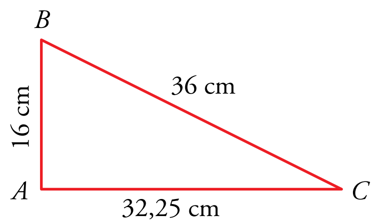
$$sen\ \hat{B} = \frac{33,6}{\sqrt{4,5^2 + 33,6^2}} = \frac{33,6}{33,9} \approx 0{,}991$$

$$cos\ \hat{B} = \frac{4,5}{33,9} \approx 0{,}133$$

$$tg\ \hat{B} = \frac{33,6}{4,5} \approx 7{,}467$$

$$sen\ \hat{C} = \frac{4,5}{33,9} \approx 0{,}133;\quad cos\ \hat{C} = \frac{33,6}{33,9} \approx 0{,}991;\quad tg\ \hat{C} = \frac{4,5}{33,6} \approx 9{,}955$$

c)



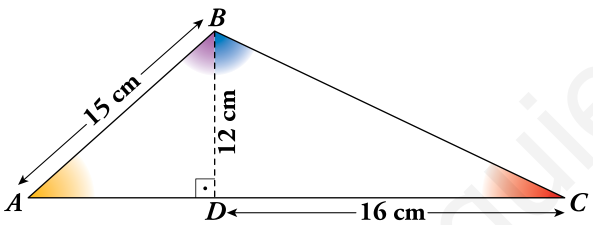
$$sen\ \hat{B} = \frac{\sqrt{36^2 - 16^2}}{36} \approx \frac{32,25}{36} \approx 0{,}896$$

$$cos\ \hat{B} = \frac{16}{36} = 0,\widehat{4}$$

$$tg\ \hat{B} = \frac{32,25}{16} \approx 2{,}016$$

$$sen\ \hat{C} = \frac{16}{36} = 0,\widehat{4};\quad cos\ \hat{C} = \frac{32,25}{36} \approx 0{,}896;\quad tg\ \hat{C} = \frac{16}{32,25} \approx 0{,}496$$

3. **Calcula las razones trigonométricas de los ángulos $\hat{A}$, $\hat{C}$, $\widehat{ABD}$ y $\widehat{CBD}$.**



$$\overline{AD} = \sqrt{15^2 - 12^2} = 9 \text{ cm}$$

$$\overline{BC} = \sqrt{12^2 + 16^2} = 20 \text{ cm}$$

	$\hat{A}$	$\hat{C}$	$\widehat{ABD}$	$\widehat{CBD}$
sen	$\frac{12}{15} = 0{,}8$	$\frac{12}{20} = 0{,}6$	$\frac{9}{15} = 0{,}6$	$\frac{16}{20} = 0{,}8$
cos	$\frac{9}{15} = 0{,}6$	$\frac{16}{20} = 0{,}8$	$\frac{12}{15} = 0{,}8$	$\frac{12}{20} = 0{,}6$
tg	$\frac{12}{9} = 1,\widehat{3}$	$\frac{12}{16} = 0{,}75$	$\frac{9}{12} = 0{,}75$	$\frac{16}{12} = 1,\widehat{3}$

Relaciones fundamentales

4. **Si $sen\ \alpha = 0{,}28$, calcula $cos\ \alpha$ y $tg\ \alpha$ utilizando las relaciones fundamentales ($\alpha < 90°$).**

$$cos\ \alpha = \sqrt{1 - 0,28^2} = 0{,}96;\quad tg\ \alpha = \frac{0,28}{0,96} = 0{,}292$$

5. **Halla el valor exacto (con radicales) de $sen\ \alpha$ y $tg\ \alpha$ sabiendo que $cos\ \alpha = 2/3$ ($\alpha < 90°$).**

$$sen\ \alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3};\quad tg\ \alpha = \frac{\sqrt{5}/3}{2/3} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

6. **Si $tg\,\alpha = \sqrt{5}$, calcula $sen\,\alpha$ y $cos\,\alpha$ $(\alpha < 90°)$.**

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{sen\,\alpha}{cos\,\alpha} = \sqrt{5} \\ sen^2\,\alpha + cos^2\,\alpha = 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} s = \sqrt{5}\,c \\ (\sqrt{5}\,c)^2 + c^2 = 1 \;\rightarrow\; 6c^2 = 1 \;\rightarrow\; cos\,\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{6}} = \dfrac{\sqrt{6}}{6} \end{array}$$

$$sen\,\alpha = \sqrt{5} \cdot \frac{\sqrt{6}}{6} = \frac{\sqrt{30}}{6}$$

7. **Completa en tu cuaderno esta tabla con las razones trigonométricas que faltan siendo $\alpha < 90°$. Utiliza radicales cuando sea posible.**

sen α	**0,92**			**2/3**		
cos α		**0,12**			**$\sqrt{2}/3$**	
tg α			**0,75**			**2**

Como $\alpha < 90° \rightarrow sen\,\alpha > 0$, $cos\,\alpha > 0$ y $tg\,\alpha > 0$ en todos los casos.

- $sen\,\alpha = 0{,}92 \rightarrow cos\,\alpha = \sqrt{1 - 0{,}92^2} = 0{,}39 \rightarrow tg\,\alpha = \dfrac{0{,}92}{0{,}39} = 2{,}36$

- $cos\,\alpha = 0{,}12 \rightarrow sen\,\alpha = \sqrt{1 - 0{,}12^2} = 0{,}99 \rightarrow tg\,\alpha = \dfrac{0{,}99}{0{,}12} = 8{,}25$

- $tg\,\alpha = 0{,}75$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{sen\,\alpha}{cos\,\alpha} = 0{,}75 \\ sen^2\,\alpha + cos^2\,\alpha = 1 \end{array}\right\} \rightarrow sen\,\alpha = 0{,}75 \cdot cos\,\alpha$$

$$(0{,}75 \cdot cos\,\alpha)^2 + cos^2\,\alpha = 1 \rightarrow 0{,}5625 cos^2\,\alpha + cos^2\,\alpha = 1 \rightarrow 1{,}5625 cos^2\,\alpha = 1 \rightarrow$$

$$\rightarrow cos^2\,\alpha = \frac{1}{1{,}5625} \rightarrow cos\,\alpha = 0{,}8$$

$$sen\,\alpha = 0{,}75 \cdot cos\,\alpha \rightarrow sen\,\alpha = 0{,}6$$

- $sen\,\alpha = \dfrac{2}{3} \rightarrow cos\,\alpha = \sqrt{1 - \dfrac{4}{9}} = \sqrt{\dfrac{5}{9}} = \dfrac{\sqrt{5}}{3} \rightarrow tg\,\alpha = \dfrac{2/3}{\sqrt{5}/3} = \dfrac{2}{\sqrt{5}} = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

- $cos\,\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{3} \rightarrow sen\,\alpha = \sqrt{1 - \dfrac{2}{9}} = \sqrt{\dfrac{7}{9}} = \dfrac{\sqrt{7}}{3} \rightarrow tg\,\alpha = \dfrac{\sqrt{7}/3}{\sqrt{2}/3} = \dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{14}}{2}$

- $tg\,\alpha = 2$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{sen\,\alpha}{cos\,\alpha} = 2 \\ sen^2\,\alpha + cos^2\,\alpha = 1 \end{array}\right\} \rightarrow sen\,\alpha = 2 \cdot cos\,\alpha$$

$$(2 \cdot cos\,\alpha)^2 + cos^2\,\alpha = 1 \rightarrow 4cos^2\,\alpha + cos^2\,\alpha = 1 \rightarrow 5cos^2\,\alpha = 1 \rightarrow$$

$$\rightarrow cos^2\,\alpha = \frac{1}{5} \rightarrow cos\,\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$sen\,\alpha = 2 \cdot cos\,\alpha \rightarrow sen\,\alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

Por tanto:

sen α	0,92	0,99	0,6	$2/3$	$\sqrt{7}/3$	$2\sqrt{5}/5$
cos α	0,39	0,12	0,8	$\sqrt{5}/3$	$\sqrt{2}/3$	$\sqrt{5}/5$
tg α	2,36	8,25	0,75	$2\sqrt{5}/5$	$\sqrt{14}/2$	2

8. **Calcula el valor de las siguientes expresiones sin utilizar la calculadora:**

a) ***sen*** **45° – *cos* 45°**

b) ***sen*** **30° + *cos* 60°**

c) ***sen*** **30° + *cos* 30°**

d) ***tg*** **30° + *tg* 60°**

e) ***tg*** **45° – *cos* 60°**

f) ***tg*** **45° + *sen* 45°**

a) $sen\ 45° - cos\ 45° = \dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2} = 0$

b) $sen\ 30° + cos\ 60° = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} = 1$

c) $sen\ 30° + cos\ 30° = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$

d) $tg\ 30° + tg\ 60° = \dfrac{\sqrt{3}}{3} + \sqrt{3} = \dfrac{4\sqrt{3}}{3}$

e) $tg\ 45° - cos\ 60° = 1 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$

f) $tg\ 45° + sen\ 45° = 1 + \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{2+\sqrt{2}}{2}$

Calculadora

9. **Completa en tu cuaderno la tabla siguiente, utilizando la calculadora:**

α	15°	55° 20'	72° 25' 40''	85,5°
sen α	0,26	0,82	0,95	0,997
cos α	0,97	0,57	0,30	0,078
tg α	0,27	1,45	3,16	12,71

10. **Halla el ángulo $\alpha < 90°$ en cada caso. Exprésalo en grados, minutos y segundos.**

a) ***sen*** α **= 0,58**

b) ***cos*** α **= 0,75**

c) ***tg*** α **= 2,5**

d) ***sen*** $\alpha = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$

e) ***cos*** $\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

f) ***tg*** $\alpha = 3\sqrt{2}$

a) α = 35° 27' 2''

b) α = 41° 24' 35''

c) α = 68° 11' 55''

d) α = 48° 11' 23''

e) α = 54° 44' 8''

f) α = 76° 44' 14''

11. **Halla, con la calculadora, las otras razones trigonométricas del ángulo $\alpha < 90°$ en cada uno de los casos siguientes:**

a) ***sen*** α **= 0,23**

b) ***cos*** α **= 0,74**

c) ***tg*** α **= 1,75**

d) ***sen*** $\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

e) ***tg*** $\alpha = \sqrt{3}$

f) ***cos*** $\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

a) *cos* α = 0,97; *tg* α = 0,24

b) *sen* α = 0,67; *tg* α = 0,91

c) *sen* α = 0,87; *cos* α = 0,5

d) *cos* α = 0,71; *tg* α = 1

e) *sen* α = 0,87; *cos* α = 0,5

f) *sen* α = 0,5; *tg* α = 0,58

Resolución de triángulos

12. **Resuelve los siguientes triángulos rectángulos ($\hat{C}$ = 90°) hallando la medida de todos los elementos desconocidos:**

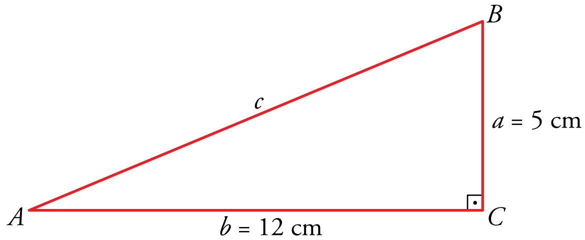
a) a **= 5 cm,** b **= 12 cm.** **Halla** c, $\hat{A}$, $\hat{B}$.

b) a **= 43 m,** $\hat{A}$ **= 37°.** **Halla** b, c, $\hat{B}$.

c) a **= 7 m,** $\hat{B}$ **= 58°.** **Halla** b, c, $\hat{A}$.

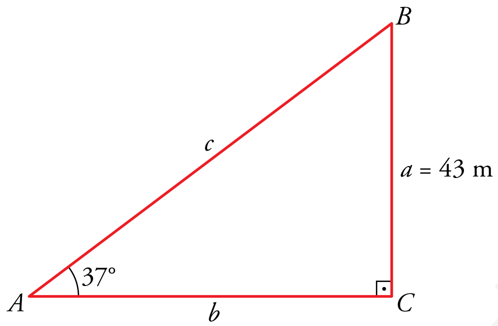
d) c **= 5,8 km,** $\hat{A}$ **= 71°.** **Halla** a, b, $\hat{B}$.

a)



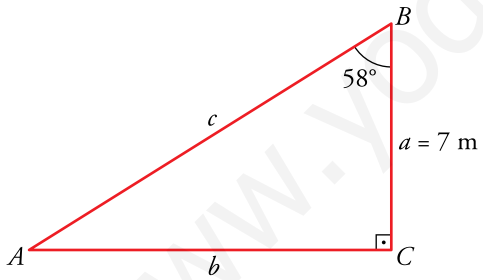
- Por el teorema de Pitágoras:
  $c^2 = 5^2 + 12^2 \rightarrow c^2 = 169 \rightarrow c = 13$ cm
- $tg\,\hat{A} = \dfrac{5}{12} \rightarrow \hat{A} = 22°\ 37'\ 11''$
- $\hat{B} = 90° - \hat{A} \rightarrow \hat{B} = 67°\ 22'\ 49''$

b)



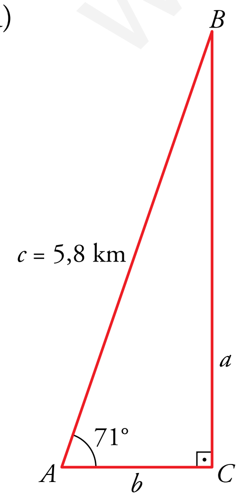
- $\hat{B} = 90° - \hat{A} \rightarrow \hat{B} = 53°$
- $sen\ 37° = \dfrac{43}{c} \rightarrow c = \dfrac{43}{sen\ 37°} \rightarrow$
  $\rightarrow c = 71{,}45$ m
- $tg\ 37° = \dfrac{43}{b} \rightarrow b = \dfrac{43}{tg\ 37°} \rightarrow$
  $\rightarrow b = 57{,}06$ m

c)



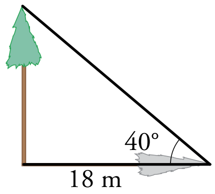
- $\hat{A} = 90° - \hat{B} \rightarrow \hat{A} = 32°$
- $tg\ 58° = \dfrac{b}{7} \rightarrow b = 7 \cdot tg\ 58° \rightarrow$
  $\rightarrow b = 11{,}20$ m
- $cos\ 58° = \dfrac{7}{c} \rightarrow c = \dfrac{7}{cos\ 58°} \rightarrow$
  $\rightarrow c = 13{,}21$ m

d)



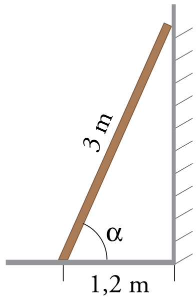
- $\hat{B} = 90° - \hat{A} \rightarrow \hat{B} = 19°$
- $sen\ 71° = \dfrac{a}{5,8} \rightarrow a = 5{,}8 \cdot sen\ 71° \rightarrow$
  $\rightarrow a = 5{,}48$ km
- $cos\ 71° = \dfrac{b}{5,8} \rightarrow b = 5{,}8 \cdot cos\ 71° \rightarrow$
  $\rightarrow b = 1{,}89$ km

13. **Cuando los rayos del sol forman 40° con el suelo, la sombra de un árbol mide 18 m. ¿Cuál es su altura?**



$tg\ 40° = \frac{x}{18} \rightarrow$ El árbol mide $x = 15{,}1$ m.

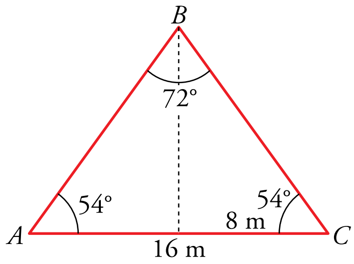
14. **Una escalera de 3 m está apoyada en una pared. ¿Qué ángulo forma la escalera con el suelo si su base está a 1,2 m de la pared?**



$cos\ \alpha = \frac{1{,}2}{3} = 0{,}4 \rightarrow \alpha = 66°\ 25'\ 19''$

Página 159

15. Calcula el perímetro y el área de un triángulo isósceles en el que el ángulo desigual mide 72° y la medida del lado opuesto a ese ángulo es de 16 m.



$$\hat{A} = \frac{180° - 72°}{2} = 54°$$

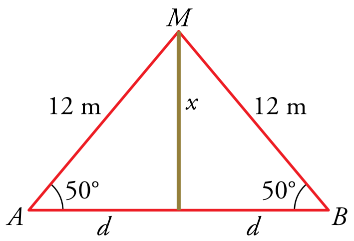
$$\cos 54° = \frac{8}{\overline{BC}} \rightarrow \overline{BC} = \frac{8}{\cos 54°} = 13{,}6 \text{ m}$$

Perímetro = 13,6 · 2 + 16 = 43,2 m

Altura, h: $tg\ 54° = \frac{h}{8} \rightarrow h = 8 \cdot tg\ 54° = 11{,}01$ m

Área = $\frac{16 \cdot 11{,}01}{2} \approx 88{,}1$ m^2

16. Un mástil está sujeto a tierra con dos cables de 12 m que forman ángulos de 50° con el suelo. Calcula la altura del mástil y la distancia de la base a los puntos de sujeción.

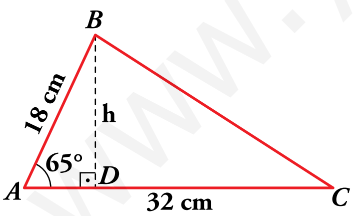


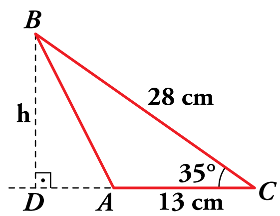
$$sen\ 50° = \frac{x}{12} \rightarrow x = 12 \cdot sen\ 50° \rightarrow x = 9{,}19 \text{ m}$$

$$\cos 50° = \frac{d}{12} \rightarrow d = 12 \cdot \cos 50° \rightarrow d = 7{,}71 \text{ m}$$

El mástil mide 9,19 m y la distancia de la base del mástil a los puntos de sujeción *A* y *B* es 7,71 m.

17. Calcula la altura, h, y el área de los siguientes triángulos:





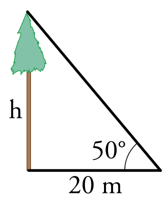
$$sen\ 65° = \frac{h}{18} \rightarrow h \approx 16{,}3 \text{ cm}$$

$$A = \frac{32 \cdot 16{,}3}{2} = 260{,}8 \text{ cm}^2$$

$$sen\ 35° = \frac{h}{18} \rightarrow h \approx 16{,}1 \text{ cm}$$

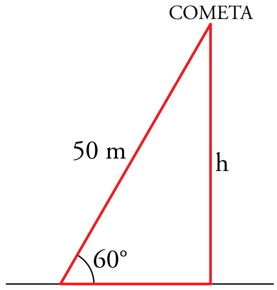
$$A = \frac{13 \cdot 16{,}1}{2} = 104{,}61 \text{ cm}^2$$

18. Para medir la altura de un árbol, nos situamos a 20 m de su base y observamos, desde el suelo, su parte más alta bajo un ángulo de 50°. ¿Cuánto mide el árbol?



$$tg\ 50° = \frac{h}{20} \rightarrow h = 20 \cdot tg\ 50° = 23{,}8 \text{ m}$$

19. **Una cometa está sujeta al suelo mediante un hilo que mide 50 m y que forma con la horizontal un ángulo de 60°. ¿A qué altura está la cometa?**



$$sen\ 60° = \frac{h}{50} \to h = 50 \cdot sen\ 60° \to h = 50 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \to$$

$$\to h = 25\sqrt{3} \text{ m}$$

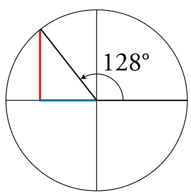
La cometa está a una altura de $25\sqrt{3}$ m.

Razones trigonométricas de ángulos cualesquiera

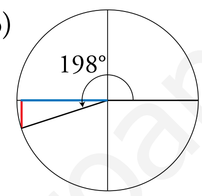
20. **Sitúa en la circunferencia goniométrica los siguientes ángulos e indica el signo de sus razones trigonométricas.**

a) 128° **b) 198°** **c) 87°** **d) 98°** **e) 285°** **f) 305°**

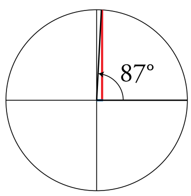
Compruébalo con la calculadora.

a) 

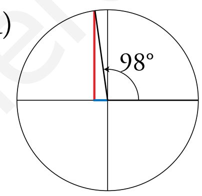
128°	
sen	+
cos	–
tg	–

b) 

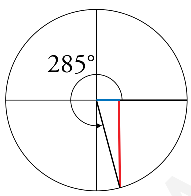
198°	
sen	–
cos	–
tg	+

c) 

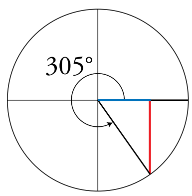
87°	
sen	+
cos	+
tg	+

d) 

98°	
sen	+
cos	–
tg	–

e) 

285°	
sen	–
cos	+
tg	–

f) 

305°	
sen	–
cos	+
tg	–

21. **Explica en qué cuadrante está el ángulo α en cada caso y calcula las razones trigonométricas que faltan:**

a) $sen\ \alpha = 0{,}6;\ \ cos\ \alpha < 0$ **b)** $cos\ \alpha = -1/3;\ \ tg\ \alpha > 0$

c) $tg\ \alpha = -2;\ \ sen\ \alpha > 0$ **d)** $sen\ \alpha = -2/3;\ \ tg\ \alpha < 0$

Representa el ángulo α en una circunferencia goniométrica en cada caso.

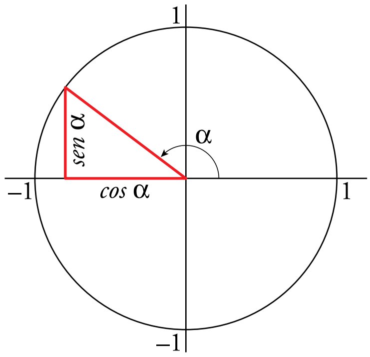
a) $\left.\begin{array}{l} sen\ \alpha = 0{,}6 > 0 \to \alpha \in \text{I o II cuadrante} \\ cos\ \alpha < 0 \to \alpha \in \text{II o III cuadrante} \end{array}\right\} \to \alpha \in \text{II cuadrante}$

- $sen^2\ \alpha + cos^2\ \alpha = 1 \to cos^2\ \alpha = 1 - sen^2\ \alpha \to cos^2\ \alpha = 1 - 0{,}6^2 \to cos^2\ \alpha = 0{,}64 \to$

  $\to cos\ \alpha = -\sqrt{0{,}64} \to cos\ \alpha = -0{,}8$

- $tg\ \alpha = \dfrac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha} \to tg\ \alpha = \dfrac{0{,}6}{-0{,}8} \to tg\ \alpha = -0{,}75$

- Representación de α en una circunferencia goniométrica:



$$sen\ \alpha = 0{,}6 \rightarrow \alpha = \begin{cases} 36°\ 52'\ 12'' \\ 143°\ 7'\ 48'' \end{cases} \rightarrow$$

$$\xrightarrow{\alpha \in \text{ II cuadrante}} \alpha = 143°\ 7'\ 48''$$

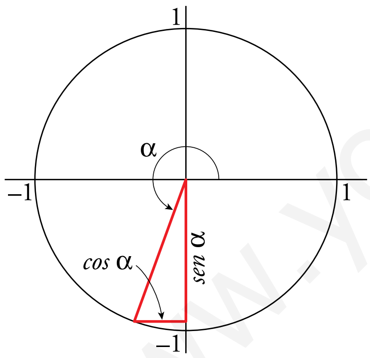
b) $\left.\begin{array}{l} cos\ \alpha = -\dfrac{1}{3} < 0 \rightarrow \alpha \in \text{ II o III cuadrante} \\ tg\ \alpha > 0 \rightarrow \alpha \in \text{ I o III cuadrante} \end{array}\right\} \rightarrow \alpha \in \text{ III cuadrante}$

- $sen^2\ \alpha + cos^2\ \alpha = 1 \rightarrow sen^2\ \alpha = 1 - cos^2\ \alpha \rightarrow sen^2\ \alpha = 1 - \left(-\dfrac{1}{3}\right)^2 \rightarrow sen^2\ \alpha = \dfrac{8}{9} \rightarrow$

$$\rightarrow sen\ \alpha = -\sqrt{\frac{8}{9}} \rightarrow sen\ \alpha = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

- $tg\ \alpha = \dfrac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha} \rightarrow tg\ \alpha = \dfrac{\dfrac{-2\sqrt{2}}{3}}{-\dfrac{1}{3}} \rightarrow tg\ \alpha = 2\sqrt{2}$

- Representación de α en la circunferencia goniométrica:



$$cos\ \alpha = -\frac{1}{3} \rightarrow \alpha = \begin{cases} 109°\ 28'\ 16'' \\ 250°\ 31'\ 44'' \end{cases} \rightarrow$$

$$\xrightarrow{\alpha \in \text{ III cuadrante}} \alpha = 250°\ 31'\ 44''$$

c) $\left.\begin{array}{l} tg\ \alpha = -2 < 0 \rightarrow \alpha \in \text{ II o IV cuadrante} \\ sen\ \alpha > 0 \rightarrow \alpha \in \text{ I o II cuadrante} \end{array}\right\} \rightarrow \alpha \in \text{ II cuadrante}$

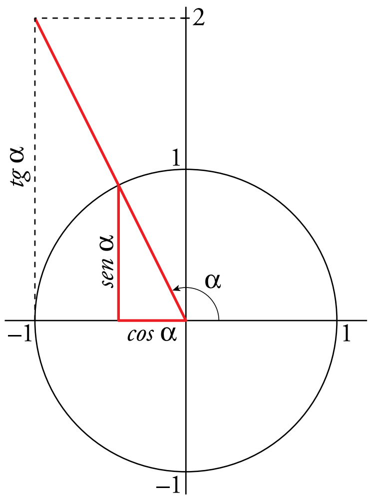
- $\left.\begin{array}{l} \dfrac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha} = -2 \\ sen^2\ \alpha + cos^2\ \alpha = 1 \end{array}\right\} \rightarrow sen\ \alpha = -2\ cos\ \alpha$

$(-2cos\ \alpha)^2 + cos^2\ \alpha = 1 \rightarrow 4cos^2\ \alpha + cos^2\ \alpha = 1 \rightarrow 5cos^2\ \alpha = 1 \rightarrow cos^2\ \alpha = \dfrac{1}{5} \rightarrow$

$$\rightarrow cos\ \alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}} = -\frac{\sqrt{5}}{5}$$

- $sen\ \alpha = -2cos\ \alpha \rightarrow sen\ \alpha = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

- Representación de α en la circunferencia goniométrica:



$$tg\,\alpha = -2 \to \alpha = \begin{cases} 116°\ 33'\ 54'' \\ 296°\ 33'\ 54'' \end{cases} \to$$

$$\xrightarrow{\alpha\,\in\,\text{II cuadrante}} \alpha = 116°\ 33'\ 54''$$

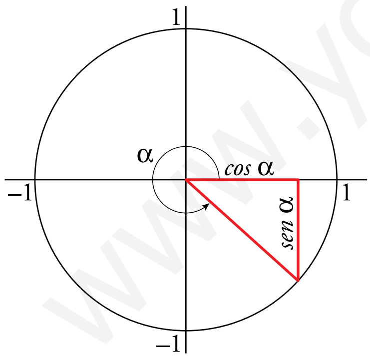
d) $sen\,\alpha = -\dfrac{2}{3} < 0 \to \alpha \in$ III o IV cuadrante
$tg\,\alpha < 0 \to \alpha \in$ II o IV cuadrante
$\to \alpha \in$ IV cuadrante

- $sen^2\,\alpha + cos^2\,\alpha = 1 \to cos^2\,\alpha = 1 - sen^2\,\alpha \to cos^2\,\alpha = 1 - \left(-\dfrac{2}{3}\right)^2 \to$

$$\to cos^2\,\alpha = \frac{5}{9} \to cos\ \alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

- $tg\,\alpha = \dfrac{sen\,\alpha}{cos\,\alpha} \to tg\,\alpha = \dfrac{-\dfrac{2}{3}}{\dfrac{\sqrt{5}}{3}} \to tg\,\alpha = -\dfrac{2}{\sqrt{5}} = -\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

- Representación de α en la circunferencia goniométrica:



$$sen\,\alpha = -\frac{2}{3} \to \alpha = \begin{cases} 318°\ 11'\ 23'' \\ 221°\ 48'\ 37'' \end{cases} \to$$

$$\xrightarrow{\alpha\,\in\,\text{IV cuadrante}} \alpha = 318°\ 11'\ 23''$$

22. **Justifica en qué cuadrante está α, en cada caso, y calcula las restantes razones trigonométricas:**

a) $\boldsymbol{sen\,\alpha = 4/5;\ \alpha < 90°}$

b) $\boldsymbol{cos\,\alpha = 2/3;\ \alpha > 270°}$

c) $\boldsymbol{tg\,\alpha = 3;\ \alpha > 180°}$

d) $\boldsymbol{cos\,\alpha = -3/4;\ \alpha < 180°}$

a) $sen\,\alpha = \dfrac{4}{5},\ \alpha < 90° \to \alpha \in$ I cuadrante y $cos\,\alpha > 0$

- $sen^2\,\alpha + cos^2\,\alpha = 1 \to cos^2\,\alpha = 1 - \left(\dfrac{4}{5}\right)^2 \to cos^2\,\alpha = \dfrac{9}{25} \to cos\ \alpha = \sqrt{\dfrac{9}{25}} = \dfrac{3}{5}$

- $tg\,\alpha = \dfrac{sen\,\alpha}{cos\,\alpha} \to tg\,\alpha = \dfrac{4/5}{3/5} = \dfrac{4}{3}$

b) $cos\ \alpha = \frac{2}{3},\ \alpha > 270° \rightarrow \alpha \in$ IV cuadrante y $sen\ \alpha < 0$

- $sen^2\ \alpha + cos^2\ \alpha = 1 \rightarrow sen^2\ \alpha = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 \rightarrow sen^2\ \alpha = \frac{5}{9} \rightarrow sen\ \alpha = -\sqrt{\frac{5}{9}} = -\frac{\sqrt{5}}{3}$
- $tg\ \alpha = \frac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha} \rightarrow tg\ \alpha = \frac{-\frac{\sqrt{5}}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{-\sqrt{5}}{2}$

c) $tg\ \alpha = 3,\ \alpha > 180° \rightarrow \alpha \in$ III cuadrante

- $\left.\begin{array}{l} \frac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha} = 3 \\ sen^2\ \alpha + cos^2\ \alpha = 1 \end{array}\right\} \rightarrow sen\ \alpha = 3\ cos\ \alpha$

$(3cos\ \alpha)^2 + cos^2\ \alpha = 1 \rightarrow 9cos^2\ \alpha + cos^2\ \alpha = 1 \rightarrow 10cos^2\ \alpha = 1 \rightarrow cos^2\ \alpha = \frac{1}{10} \rightarrow$

$\rightarrow cos\ \alpha = -\sqrt{\frac{1}{10}} = -\frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{-\sqrt{10}}{10}$

- $sen\ \alpha = 3cos\ \alpha \rightarrow sen\ \alpha = -\frac{3\sqrt{10}}{10}$

d) $cos\ \alpha = -\frac{3}{4},\ \alpha < 180° \rightarrow \alpha \in$ II cuadrante y $sen\ \alpha > 0$

- $sen^2\ \alpha + cos^2\ \alpha = 1 \rightarrow sen^2\ \alpha = 1 - cos^2\ \alpha \rightarrow sen^2\ \alpha = 1 - \left(-\frac{3}{4}\right)^2 \rightarrow$

$\rightarrow sen^2\ \alpha = \frac{7}{16} \rightarrow sen\ \alpha = \sqrt{\frac{7}{16}} = \frac{\sqrt{7}}{4}$

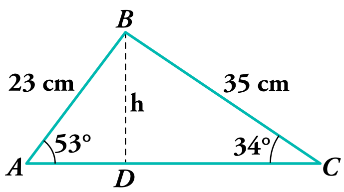
- $tg\ \alpha = \frac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha} \rightarrow tg\ \alpha = \frac{\frac{\sqrt{7}}{4}}{-\frac{3}{4}} = \frac{-\sqrt{7}}{3}$

Aplica lo aprendido

23. **Halla:**

a) La longitud $\overline{AC}$.

b) El área del triángulo *ABC*.



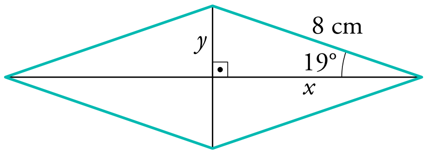
a) $\left.\begin{array}{l} \text{En } \widehat{ABD},\ cos\ 53° = \frac{\overline{AD}}{23} \rightarrow \overline{AD} \approx 13,84 \text{ cm} \\ En\ \widehat{BDC},\ cos\ 34° = \frac{\overline{DC}}{23} \rightarrow \overline{DC} \approx 29 \text{ cm} \end{array}\right\} \overline{AC} \approx 13,84 + 29 = 42,84 \text{ cm}$

b) Hallamos la altura h en el triángulo *ABD*:

$sen\ 53° = \frac{h}{23} \rightarrow h \approx 18,37$ cm

$A_{ABC} = \frac{\overline{AC} \cdot h}{2} = \frac{42,84 \cdot 18,37}{2} \approx 393,49 \text{ cm}^2$

24. **El lado de un rombo mide 8 cm y el ángulo menor es de 38°. ¿Cuánto miden las diagonales del rombo?**



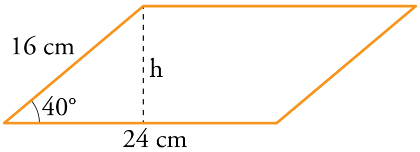
- $sen\ 19° = \dfrac{y}{8} \rightarrow y = 8 \cdot sen\ 19° \rightarrow y = 2{,}60$ cm

  Diagonal menor = $2y = 5{,}20$ cm

- $cos\ 19° = \dfrac{x}{8} \rightarrow x = 8 \cdot cos\ 19° \rightarrow x = 7{,}56$ cm

  Diagonal mayor = $2x = 15{,}12$ cm

25. **Halla el área de un paralelogramo cuyos lados miden 16 cm y 24 cm y forman un ángulo de 40°.**



$sen\ 40° = \dfrac{h}{16} \rightarrow h = 16 \cdot sen\ 40° \rightarrow h = 10{,}28$ cm

Área $= 24 \cdot 10{,}28 = 246{,}72\ \text{cm}^2$

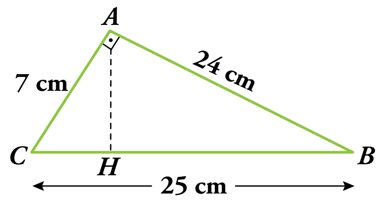
26. **En una carretera de montaña, una señal indica una altitud de 785 m. Tres kilómetros más adelante, la altitud es de 1 065 m. Halla la pendiente media de la carretera y el ángulo que forma con la horizontal.**

$sen\ \alpha = \dfrac{280}{3000} \rightarrow sen\ \alpha = \dfrac{7}{75} \rightarrow \alpha = 5°\ 21'\ 19''$

$tg\ \alpha = 0{,}093 \rightarrow$ pendiente = 9,3 %

27. **a) En el triángulo ABC, rectángulo en A, calcula $\overline{BH}$ y $\overline{AH}$.**

b) Halla las razones trigonométricas del ángulo $\hat{B}$ en el triángulo ABC y en el triángulo ABH y comprueba que coinciden.



a) Por el teorema del cateto:

$24^2 = 25 \cdot \overline{BH} \rightarrow \overline{BH} = \dfrac{24^2}{25} \rightarrow \overline{BH} = 23{,}04$ cm

Por el teorema de Pitágoras:

$\overline{AH}^2 = 24^2 - 23{,}04^2 \rightarrow \overline{AH} = \sqrt{24^2 - 23{,}04^2} \rightarrow \overline{AH} = 6{,}72$ cm

b) Razones trigonométricas de $\hat{B}$ en $\widehat{ABH}$:

$sen\ \hat{B} = \dfrac{\overline{AH}}{\overline{AB}} = \dfrac{6{,}72}{24} = 0{,}28$

$cos\ \hat{B} = \dfrac{\overline{BH}}{\overline{AB}} = \dfrac{23{,}04}{24} = 0{,}96$

$tg\ \hat{B} = \dfrac{\overline{AH}}{\overline{BH}} = \dfrac{6{,}72}{23{,}04} = 0{,}29$

Razones trigonométricas de $\hat{B}$ en $\widehat{ABC}$:

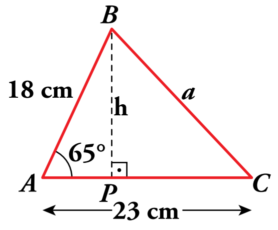
$$sen\ \hat{B} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{7}{25} = 0{,}28$$

$$cos\ \hat{B} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{24}{25} = 0{,}96$$

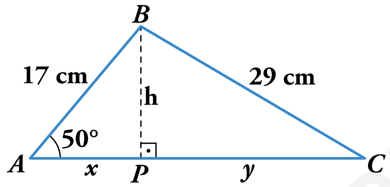
$$tg\ \hat{B} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{7}{24} = 0{,}29$$

28. **Halla, en cada triángulo, la altura y el lado desconocido:**

a)



b)



a) En el triángulo ABP:

$$sen\ 65° = \frac{h}{18} \rightarrow h \approx 16{,}31 \text{ cm}$$

$$cos\ 65° = \frac{\overline{AP}}{18} \rightarrow \overline{AP} \approx 7{,}61$$

$$\overline{PC} = \overline{AC} - \overline{AP} = 23 - 7{,}61 = 15{,}39$$

$$a = \sqrt{h^2 + \overline{PC}^2} = \sqrt{16{,}31^2 + 15{,}39^2} \approx 22{,}42 \text{ cm}$$

b) En el triángulo ABP:

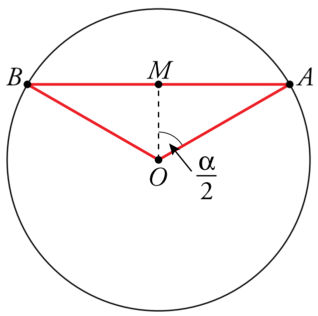
$$cos\ 50° = \frac{x}{17} \rightarrow x \approx 10{,}93 \text{ cm}$$

$$sen\ 50° = \frac{h}{17} \rightarrow h \approx 13{,}02 \text{ cm}$$

En el triángulo BCP: $y = \sqrt{29^2 - h^2} = \sqrt{29^2 - 13{,}02^2} \approx 25{,}91$ cm

$x + y \approx 36{,}84$ cm

29. **En una circunferencia de radio 6 cm trazamos una cuerda AB a 3 cm del centro O. Halla el ángulo $\widehat{AOB}$.**



$$\overline{OA} = \overline{OB} = 6 \text{ cm}; \quad \overline{OM} = 3 \text{ cm}$$

$$cos\ \frac{\alpha}{2} = \frac{3}{6} \rightarrow cos\ \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{\alpha}{2} = 60° \rightarrow$$

$$\rightarrow \alpha = \widehat{AOB} = 120°$$

30. **a) Expresa en radianes los ángulos de 30°, 45°, 60° y 90° a partir de la equivalencia 180° = π rad.**

b) Expresa en radianes los siguientes ángulos teniendo en cuenta que son múltiplos de los anteriores: 150°; 135°; 240°; 300° y 270°.

a) $30° = \dfrac{30\pi}{180} \text{ rad} = \dfrac{\pi}{6} \text{ rad}$

$45° = \dfrac{45\pi}{180} \text{ rad} = \dfrac{\pi}{4} \text{ rad}$

$60° = \dfrac{60\pi}{180} \text{ rad} = \dfrac{\pi}{3} \text{ rad}$

$90° = \dfrac{90\pi}{180} \text{ rad} = \dfrac{\pi}{2} \text{ rad}$

b) $150° = 5 \cdot 30° = \dfrac{5\pi}{6} \text{ rad}$

$135° = 3 \cdot 45° = \dfrac{3\pi}{4} \text{ rad}$

$240° = 4 \cdot 60° = \dfrac{4\pi}{3} \text{ rad}$

$300° = 5 \cdot 60° = \dfrac{5\pi}{3} \text{ rad}$

$270° = 3 \cdot 90° = \dfrac{3\pi}{2} \text{ rad}$

Página 160

31. Expresa en grados los siguientes ángulos dados en radianes:

$$\frac{2\pi}{3};\ \frac{3\pi}{2};\ \frac{5\pi}{4};\ \frac{7\pi}{6};\ \frac{\pi}{9};\ \frac{\pi}{5}$$

Teniendo en cuenta que π rad = 180°:

$\frac{2\pi}{3}\text{ rad} = \frac{2 \cdot 180°}{3} = 120°$ $\qquad$ $\frac{3\pi}{2}\text{ rad} = \frac{3 \cdot 180°}{2} = 270°$

$\frac{5\pi}{4}\text{ rad} = \frac{5 \cdot 180°}{4} = 225°$ $\qquad$ $\frac{7\pi}{6}\text{ rad} = \frac{7 \cdot 180°}{6} = 210°$

$\frac{\pi}{9}\text{ rad} = \frac{180°}{9} = 20°$ $\qquad$ $\frac{\pi}{5}\text{ rad} = \frac{180°}{5} = 36°$

32. a) En una circunferencia de 8 cm de radio, dibujamos un ángulo de 2,5 radianes. ¿Qué longitud tendrá el arco correspondiente?

b) Si en la misma circunferencia, un arco mide 12 cm, halla la medida del ángulo central en grados y en radianes.

a) Sabemos que si un ángulo mide 1 rad entonces el arco correspondiente tendrá una longitud igual al radio, por tanto, a un ángulo de 2,5 rad le corresponde un arco cuya longitud es 2,5 veces el radio. En nuestro caso:

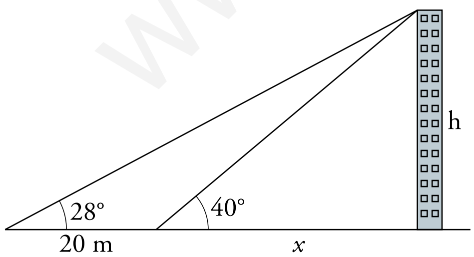
Longitud del arco = $\alpha \cdot r = 2{,}5 \cdot 8 = 20$ cm

b) $\left.\begin{array}{l}\text{Longitud del arco} = 12 \text{ cm}\\ \text{Radio} = 8 \text{ cm}\end{array}\right\} \to \alpha = \frac{\text{Longitud del arco}}{r} = \frac{12}{8}\text{ rad} = 1{,}5\text{ rad}$

$$\left.\begin{array}{lcl}180° & \text{——} & \pi\text{ rad}\\ x & \text{——} & 1{,}5\text{ rad}\end{array}\right\} \to x = \frac{1{,}5 \cdot 180°}{\pi} = 85°\ 59'\ 14''$$

Resuelve problemas

33. Desde el punto donde estoy, la visual al punto más alto del edificio que tengo en frente forma un ángulo de 28° con la horizontal. Si me acerco 20 m, el ángulo es de 40°. ¿Cuál es la altura del edificio?



$$\left.\begin{array}{l} tg\ 40° = \dfrac{h}{x}\\[2mm] tg\ 28° = \dfrac{h}{20 + x}\end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} h = tg\ 40° \cdot x\\ h = tg\ 28° \cdot (20 + x)\end{array}\right\} \to$$

$\to tg\ 40° \cdot x = tg\ 28° \cdot (20 + x) \to tg\ 40° \cdot x = 20 \cdot tg\ 28° + tg\ 28° \cdot x \to$

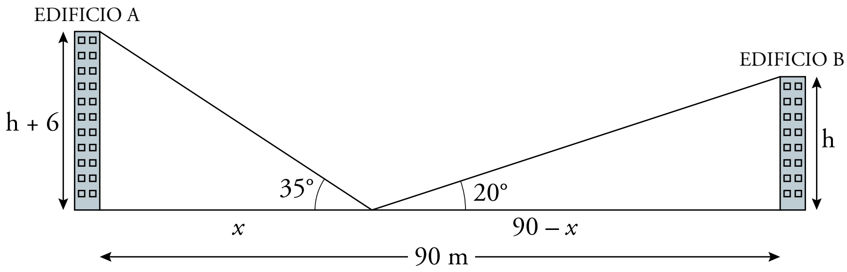
$\to (tg\ 40° - tg\ 28°) \cdot x = 20 \cdot tg\ 28° \to x = \dfrac{20 \cdot tg\ 28°}{tg\ 40° - tg\ 28°} \to x = 34{,}59$ m

h = $tg\ 40° \cdot x \to$ h = 29,02 m

Por tanto, el edificio mide 29,02 m.

34. **Dos edificios distan entre sí 90 m. Desde un punto que está entre los dos edificios vemos que las visuales a los puntos más altos de estos forman con la horizontal ángulos de 35° y 20°. ¿Cuál es la altura de los edificios si sabemos que uno es 6 m más alto que el otro?**

- Primera solución: el edificio A es más alto que el B.



$$\left.\begin{array}{l} tg\ 35° = \dfrac{h+6}{x} \\[2ex] tg\ 20° = \dfrac{h}{90-x} \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{l} h = tg\ 35° \cdot x - 6 \\ h = tg\ 20° \cdot (90-x) \end{array}\right\} \to tg\ 35° \cdot x - 6 = tg\ 20° \cdot (90-x) \to$$

$$\to tg\ 35° \cdot x - 6 = 90 \cdot tg\ 20° - tg\ 20° \cdot x \to tg\ 35° \cdot x + tg\ 20° \cdot x = 90 \cdot tg\ 20° + 6 \to$$

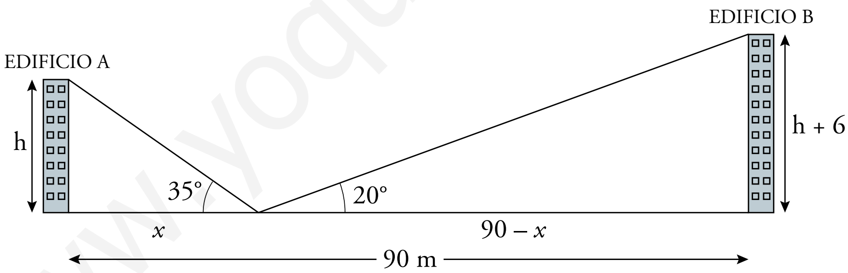
$$\to (tg\ 35° + tg\ 20°) \cdot x = 90 \cdot tg\ 20° + 6 \to x = \frac{90 \cdot tg\ 20° + 6}{tg\ 35° + tg\ 20°} \to x = 36{,}42 \text{ m}$$

$h = tg\ 35° \cdot x - 6 \to h = 19{,}50$ m

Altura del edificio A = h + 6 = 25,50 m

Altura del edificio B = h = 19,50 m

- Segunda solución: el edificio B es más alto que el A.



$$\left.\begin{array}{l} tg\ 35° = \dfrac{h}{x} \\[2ex] tg\ 20° = \dfrac{h+6}{90-x} \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{l} h = x \cdot tg\ 35° \\ tg\ 20° \cdot (90-x) = h + 6 \end{array}\right\} \to tg\ 20° \cdot (90-x) = x \cdot tg\ 35° + 6 \to$$

$$\to 90 \cdot tg\ 20° - x \cdot tg\ 20° = x \cdot tg\ 35° + 6 \to 90 \cdot tg\ 20° - 6 = x \cdot (tg\ 35° + tg\ 20°) \to$$

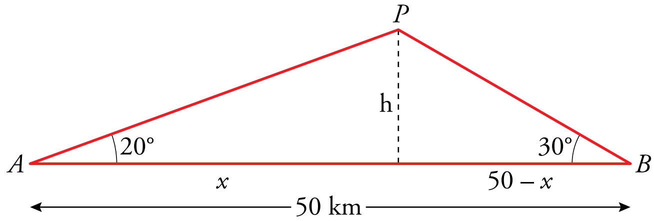
$$\to x = \frac{90 \cdot tg\ 20° - 6}{tg\ 35° + tg\ 20°} \to x = 25{,}14 \text{ m}$$

$h = x \cdot tg\ 35° \to h = 17{,}60$ m

Altura del edificio A = h = 17,60 m

Altura del edificio B = h + 6 = 23,60 m

35. **Un avión *P* vuela entre dos ciudades *A* y *B* que distan entre sí 50 km. Desde el avión se miden los ángulos $\widehat{PAB} = 20°$ y $\widehat{PBA} = 30°$. ¿A qué altura está el avión?**



$$\left.\begin{array}{l} tg\ 20° = \dfrac{h}{x} \\ tg\ 30° = \dfrac{h}{50 - x} \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{l} h = tg\ 20° \cdot x \\ h = tg\ 30° \cdot (50 - x) \end{array}\right\} \to tg\ 20° \cdot x = tg\ 30° \cdot (50 - x) \to$$

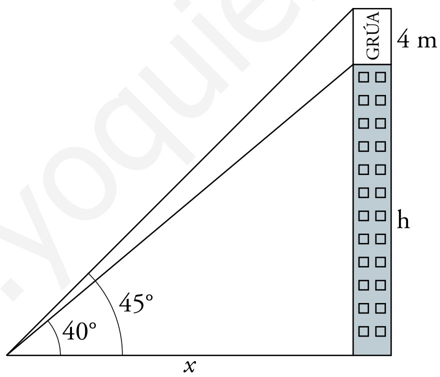
$$\to tg\ 20° \cdot x = 50 \cdot tg\ 30° - tg\ 30° \cdot x \to$$

$$\to x = \frac{50 \cdot tg\ 30°}{tg\ 20° + tg\ 30°} \to x = 30{,}67 \text{ km}$$

$h = tg\ 20° \cdot x \to h = 11{,}16$ km

Por tanto, el avión vuela a 11,16 km de altura.

36. **En lo alto de un edificio en construcción hay una grúa de 4 m. Desde un punto del suelo se ve el punto más alto de la grúa bajo un ángulo de 45° con respecto a la horizontal y el punto más alto del edificio bajo un ángulo de 40° con la horizontal. Calcula la altura del edificio.**



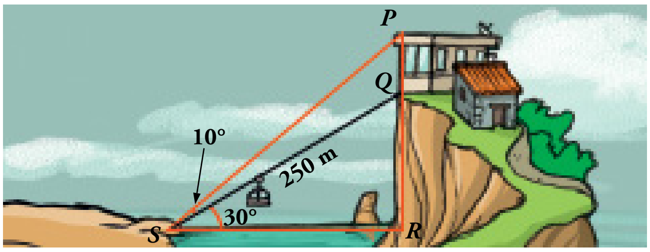
$$\left.\begin{array}{l} tg\ 40° = \dfrac{h}{x} \\ tg\ 45° = \dfrac{h + 4}{x} \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{l} h = tg\ 40° \cdot x \\ h = tg\ 45° \cdot x - 4 \end{array}\right\} \to tg\ 40° \cdot x = tg\ 45° \cdot x - 4 \to$$

$$\to 4 = (tg\ 45° - tg\ 40°) \cdot x \to x = \frac{4}{tg\ 45° - tg\ 40°} \to x = 24{,}86 \text{ m}$$

$h = tg\ 40° \cdot x \to h = 20{,}86$ m

Por tanto, el edificio mide 20,86 m de altura.

37. **Para calcular la altura del edificio, $\overline{PQ}$, hemos medido los ángulos que indica la figura. Sabemos que hay un funicular para ir de S a Q, cuya longitud es de 250 m. Halla $\overline{PQ}$.**



- Calculamos $\overline{SR}$ y $\overline{RQ}$ en el triángulo $\widehat{SRQ}$:

$$sen\ 30° = \frac{\overline{RQ}}{250} \rightarrow \overline{RQ} = 250 \cdot sen\ 30° \rightarrow \overline{RQ} = 125 \text{ m}$$

$$cos\ 30° = \frac{\overline{SR}}{250} \rightarrow \overline{SR} = 250 \cdot cos\ 30° \rightarrow \overline{SR} = 125\sqrt{3} \text{ m}$$

- Calculamos $\overline{RP}$ en el triángulo $\widehat{SPR}$:

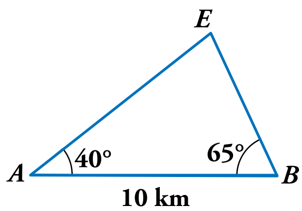
$$tg\ 40° = \frac{\overline{RP}}{\overline{SR}} \rightarrow tg\ 40° = \frac{\overline{RP}}{125\sqrt{3}} \rightarrow \overline{RP} = 125\sqrt{3} \cdot tg\ 40° \rightarrow \overline{RP} = 181{,}67 \text{ m}$$

Luego $\overline{PQ} = \overline{RP} - \overline{RQ} = 181{,}67 \text{ m} - 125 \text{ m} = 56{,}67 \text{ m}$

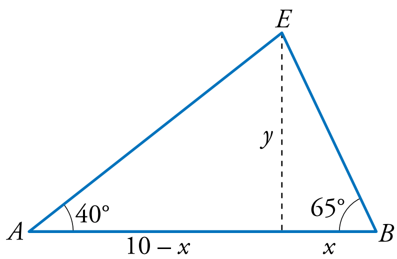
Por tanto, la altura del edificio es de 56,67 m.

38. **Para localizar una emisora clandestina, dos receptores, A y B, que distan entre sí 10 km, orientan sus antenas hacia el punto donde está la emisora.**

Estas direcciones forman con AB ángulos de 40° y 65°. ¿A qué distancia de A y B se encuentra la emisora?



$$\left.\begin{array}{l} tg\ 65° = \dfrac{y}{x} \\ tg\ 40° = \dfrac{y}{10-x} \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} y = tg\ 65° \cdot x \\ y = tg\ 40° \cdot (10-x) \end{array}\right\} \rightarrow$$



$$\rightarrow tg\ 65° \cdot x = tg\ 40° \cdot (10-x) \rightarrow tg\ 65° \cdot x = 10 \cdot tg\ 40° - tg\ 40° \cdot x \rightarrow$$

$$\rightarrow (tg\ 65° + tg\ 40°) \cdot x = 10 \cdot tg\ 40° \rightarrow x = \frac{10 \cdot tg\ 40°}{tg\ 65° + tg\ 40°} \rightarrow x = 2{,}81 \text{ km}$$

$$y = tg\ 65° \cdot x \rightarrow y = 6{,}03 \text{ km}$$

Conocidos x e y podemos hallar las distancias de A y B a la emisora.

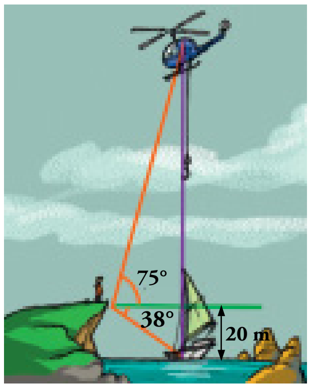
$$sen\ 40° = \frac{y}{\overline{AE}} \rightarrow \overline{AE} = \frac{y}{sen\ 40°} \rightarrow \overline{AE} = 9{,}38 \text{ km}$$

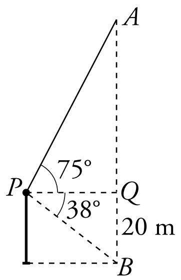
$$sen\ 65° = \frac{y}{\overline{BE}} \rightarrow \overline{BE} = \frac{y}{sen\ 65°} \rightarrow \overline{BE} = 6{,}65 \text{ km}$$

Por tanto, la emisora se encuentra a 9,38 km de A y a 6,65 km de B.

39. **Desde un acantilado a 20 m sobre el nivel del mar, se observa un helicóptero en prácticas de salvamento.**

Una persona desciende verticalmente hasta un barco en el que alguien está en peligro. Si los ángulos de observación son de 75° para el helicóptero y 38° para el barco, ¿cuánto medirá el cable que va desde el helicóptero al barco?



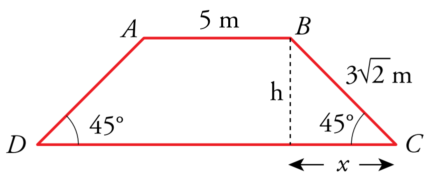


En el triángulo $PQB \to tg\, 38° = \dfrac{20}{\overline{PQ}} \to \overline{PQ} = 25{,}6$ m

En el triángulo $PQA \to tg\, 75° = \dfrac{\overline{AQ}}{\overline{PQ}} \to \overline{AQ} = 25{,}6 \cdot tg\, 75° = 95{,}5$ m

Longitud del cable = 95,5 + 20 = 115,5 m

40. **En un trapecio isósceles de bases AB y DC, conocemos los lados $\overline{AB} = 5$ m y $\overline{BC} = 3\sqrt{2}$ m, y los ángulos que forma la base mayor con los lados oblicuos, que son de 45°. Halla su área.**



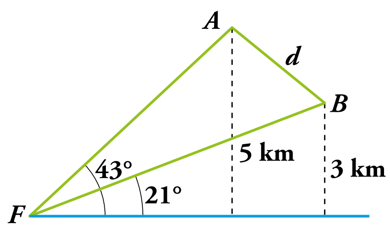
$sen\, 45° = \dfrac{h}{3\sqrt{2}} \to h = 3$ m

$cos\, 45° = \dfrac{x}{3\sqrt{2}} \to x = 3$ m

Base mayor = 5 + 3 + 3 = 11 m

$$\text{Área} = \frac{(5+11)\cdot 3}{2} = 24 \text{ m}^2$$

41. **Desde un faro F se observa un barco A bajo un ángulo de 43° con respecto a la línea de la costa; y un barco B, bajo un ángulo de 21°. El barco A está a 5 km de la costa, y el B, a 3 km. Calcula la distancia entre los barcos.**

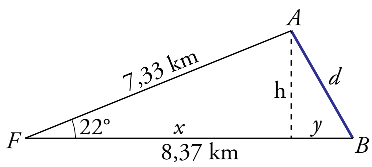


Calculamos $\overline{FA}$ y $\overline{FB}$:

$sen\, 43° = \dfrac{5}{\overline{FA}} \to \overline{FA} = \dfrac{5}{sen\, 43°} = 7{,}33$ km

$sen\, 21° = \dfrac{3}{\overline{FB}} \to \overline{FB} = \dfrac{3}{sen\, 21°} = 8{,}37$ km

Para calcular d utilizamos el triángulo de la derecha:



$sen\, 22° = \dfrac{h}{7{,}33}$

$h = 7{,}33 \cdot sen\, 22° = 2{,}74$ km

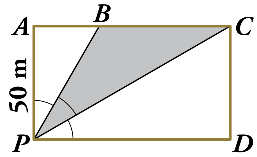
$cos\, 22° = \dfrac{x}{7{,}33} \to x = 7{,}33 \cdot cos\, 22° = 6{,}8$ km

$y = 8{,}37 - x \to y = 8{,}37 - 6{,}8 = 1{,}57$ km

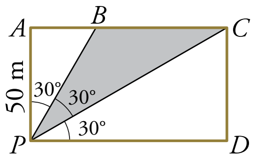
Utilizamos el teorema de Pitágoras: $d = \sqrt{h^2 + y^2} = \sqrt{2{,}74^2 + 1{,}57^2} = 3{,}16$ km

La distancia entre A y B es de 3,16 km.

42. **Para iluminar una parcela rectangular se han colocado tres focos en P de modo que los ángulos de iluminación $\widehat{APB}$, $\widehat{BPC}$ y $\widehat{CPD}$ son iguales.**



Una avería apaga el foco central. ¿Cuál es el área y el perímetro de la zona oscurecida, si $\overline{AP}$ = 50 m?



En el triángulo $PAB \rightarrow tg\ 30° = \dfrac{\overline{AB}}{50} \rightarrow \overline{AB} = 28{,}9$ m

En el triángulo $PAC \rightarrow tg\ 60° = \dfrac{\overline{AC}}{50} \rightarrow \overline{AC} = 86{,}6$ m

En el triángulo $PAC \rightarrow cos\ 60° = \dfrac{50}{\overline{PC}} \rightarrow \overline{PC} = 100$ m

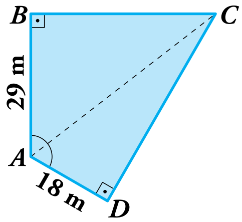
$$\left.\begin{array}{l} \text{Área rectángulo} = 50 \cdot 86{,}6 = 4\,330 \text{ m}^2 \\ \text{Área } APB = \dfrac{28{,}9 \cdot 50}{2} = 722{,}5 \text{ m}^2 \\ \text{Área } PDC = \dfrac{86{,}6 \cdot 50}{2} = 2165 \text{ m}^2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{Área de } PBC\text{:} \\ 4\,330 - (722{,}5 + 2165) = 1\,442{,}5 \text{ m}^2 \end{array}$$

Calculamos ahora el perímetro de PBC:

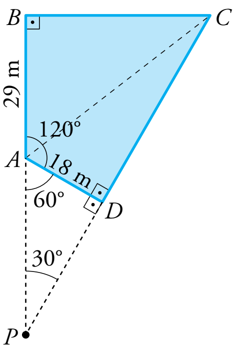
$$\left.\begin{array}{l} \text{En } APB,\ cos\ 30° = \dfrac{50}{\overline{PB}} \rightarrow \overline{PB} = 57{,}7 \text{ m} \\ \overline{BC} = 86{,}6 - 28{,}9 = 57{,}7 \text{ m} \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{Perímetro de } PBC\text{:} \\ \overline{PB} + \overline{BC} + \overline{PC} = 215{,}4 \text{ m} \end{array}$$

Página 161

43. **En la parcela *ABCD* conocemos $\hat{B} = \hat{D} = 90°$; $\hat{A} = 120°$; $\overline{AD} = 18$ m y $\overline{AB} = 29$ m. Queremos averiguar la longitud de la diagonal *AC*.**



Un amigo topógrafo nos sugiere prolongar los lados *BA* y *CD* hasta que se corten en un punto *P* y averiguar cuánto mide el ángulo $\widehat{APD}$. Hazlo tú.



$\widehat{PAD} = 180° - 120° = 60°$

$\widehat{APD} = 90° - 60° = 30°$

En el triángulo *APD*, $sen\ 30° = \dfrac{18}{\overline{AP}} \rightarrow \overline{AP} = 36$ m

$\overline{BP} = 29 + 36 = 65$ m

En el triángulo *BCP*: $tg\ 30° = \dfrac{\overline{BC}}{65} \rightarrow \overline{BC} = 37{,}5$ m

En el triángulo *ABC* $\rightarrow \overline{AC} = \sqrt{29^2 + 37{,}5^2} = 47{,}4$ m

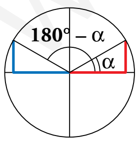
Problemas "+"

44. **Sobre la circunferencia goniométrica señalamos un ángulo α en el primer cuadrante y a partir de él dibujamos los ángulos:**

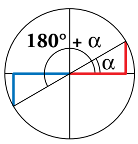
180° – α 180° + α 360° – α

Busca la relación que existre entre:

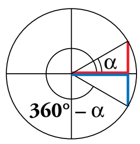
a) ***sen*** **(180° – α) y *sen* α**
cos **(180° – α) y *cos* α**
tg **(180° – α) y *tg* α**



b) ***sen*** **(180° + α) y *sen* α**
cos **(180° + α) y *cos* α**
tg **(180° + α) y *tg* α**



c) ***sen*** **(360° – α) y *sen* α**
cos **(360° – α) y *cos* α**
tg **(360° – α) y *tg* α**



a) $sen\ (180° - \alpha) = sen\ \alpha$
$cos\ (180° - \alpha) = -cos\ \alpha$
$tg\ (180° - \alpha) = -tg\ \alpha$

b) $sen\ (180° + \alpha) = -sen\ \alpha$
$cos\ (180° + \alpha) = -cos\ \alpha$
$tg\ (180° + \alpha) = tg\ \alpha$

c) $sen\ (360° - \alpha) = -sen\ \alpha$
$cos\ (360° - \alpha) = cos\ \alpha$
$tg\ (360° - \alpha) = -tg\ \alpha$

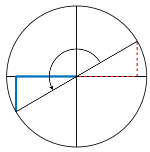
45. **Sitúa el ángulo dado sobre la circunferencia goniométrica y expresa sus razones trigonométricas utilizando un ángulo agudo como en el ejemplo:**

- **Ángulo: 215°**

  sen **215° = –*sen* 35°**

  cos **215° = –*cos* 35°**

  tg **215° = *tg* 35°**



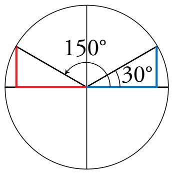
a) 150° **b) 240°** **c) 300°**

d) 225° **e) 100°** **f) 320°**

a) *sen* 150° = *sen* 30°

cos 150° = –*cos* 30°

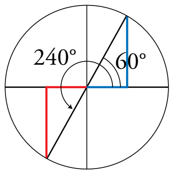
tg 150° = –*tg* 30°



b) *sen* 240° = –*sen* 60°

cos 240° = –*cos* 60°

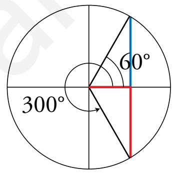
tg 240° = *tg* 60°



c) *sen* 300° = –*sen* 60°

cos 300° = *cos* 60°

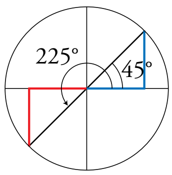
tg 300° = –*tg* 60°



d) *sen* 225° = –*sen* 45°

cos 225° = –*cos* 45°

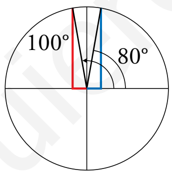
tg 225° = *tg* 45°



e) *sen* 100° = *sen* 80°

cos 100° = –*cos* 80°

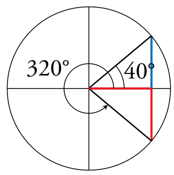
tg 100° = –*tg* 80°



f) *sen* 320° = –*sen* 40°

cos 320° = *cos* 40°

tg 320° = –*tg* 40°



46. **Halla los ángulos comprendidos entre 0° y 360° que verifican las siguientes ecuaciones, como en el ejemplo:**

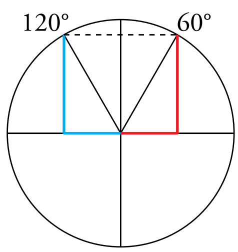
- $\mathbf{1 - 2\,cos\,x = 0 \;\to\; cos\,x = 1/2 \;\to\; x = 60°;\; x = 300°}$

a) $2\,sen\,x = \sqrt{3}$ **b)** $2\,sen\,x = -\sqrt{2}$ **c)** $3\,tg\,x + 3 = 0$

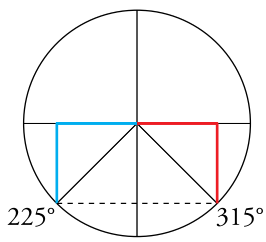
d) $(sen\,x)^2 = 1$ **e)** $(sen\,x)^2 - sen\,x = 0$ **f)** $4(sen\,x)^2 - 1 = 0$

g) $2(cos\,x)^2 - cos\,x - 1 = 0$

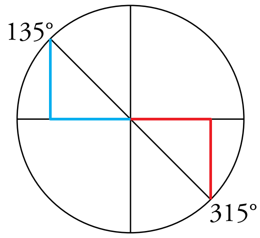
a) $2\,sen\,x = \sqrt{3} \;\to\; sen\,x = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \;\to\; \begin{cases} x = 60° \\ x = 120° \end{cases}$



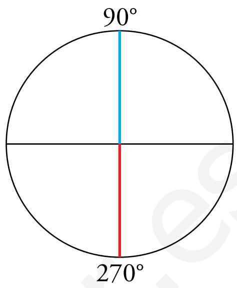
b) $2\,sen\,x = -\sqrt{2} \;\to\; sen\,x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \;\to\; \begin{cases} x = 225° \\ x = 315° \end{cases}$



c) $3tg\, x + 3 = 0 \;\rightarrow\; 3tg\, x = -3 \;\rightarrow\; tg\, x = -1 \;\rightarrow\; \begin{cases} x = 135° \\ x = 315° \end{cases}$



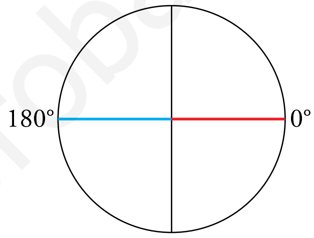
d) $sen^2\, x = 1 \;\rightarrow\; sen\, x = \pm 1 \;\rightarrow\; \begin{cases} sen\, x = 1 & \rightarrow \quad x = 90° \\ sen\, x = -1 & \rightarrow \quad x = 270° \end{cases}$



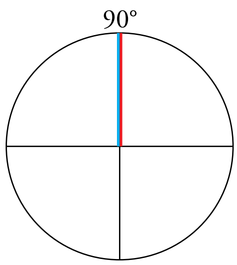
e) $(sen\, x)^2 - sen\, x = 0$

$sen\, x \cdot (sen\, x - 1) = 0$

- $sen\, x = 0 \;\rightarrow\; \begin{cases} x = 0° \\ x = 180° \end{cases}$



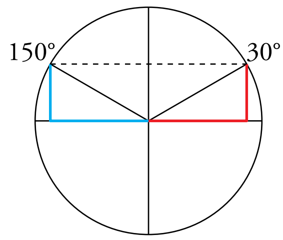
- $sen\, x - 1 = 0 \;\rightarrow\; sen\, x = 1 \;\rightarrow\; x = 90°$



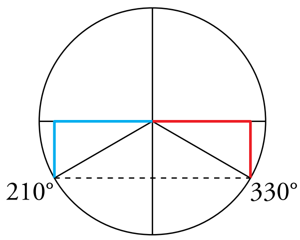
f) $4 \cdot (sen\, x)^2 = 0 \;\rightarrow\; 4sen^2\, x = 1 \;\rightarrow\; sen^2\, x = \dfrac{1}{4} \;\rightarrow$

$\rightarrow\; sen\, x = \pm\dfrac{1}{2}$

- $sen\, x = \dfrac{1}{2} \;\rightarrow\; \begin{cases} x = 30° \\ x = 150° \end{cases}$



- $sen\, x = -\dfrac{1}{2} \;\rightarrow\; \begin{cases} x = 210° \\ x = 330° \end{cases}$



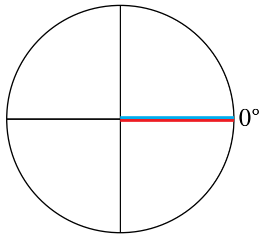
g) $2(cos\ x)^2 - cos\ x - 1 = 0$

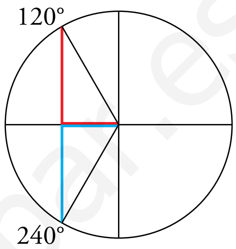
Efectuamos el cambio de variable $cos\ x = t \to 2t^2 - t - 1 = 0 \to$

$$\to t = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{1 \pm 3}{4} = \begin{cases} t = 1 \\ t = -1/2 \end{cases}$$

Deshacemos el cambio de variable:

$t = 1 \to cos\ x = 1 \to x = 0°$





$$t = -\frac{1}{2} \to cos\ x = -\frac{1}{2} \to \begin{cases} x = 120° \\ x = 240° \end{cases}$$

47. **Usando las relaciones fundamentales, demuestra estas igualdades:**

a) $(\boldsymbol{sen}\ \alpha + \boldsymbol{cos}\ \alpha)^2 + (\boldsymbol{sen}\ \alpha - \boldsymbol{cos}\ \alpha)^2 = 2$

b) $\dfrac{(\boldsymbol{sen}\ \alpha)^3 + \boldsymbol{sen}\ \alpha \cdot (\boldsymbol{cos}\ \alpha)^2}{\boldsymbol{sen}\ \alpha} = 1$

c) $\dfrac{(\boldsymbol{sen}\ \alpha)^3 + \boldsymbol{sen}\ \alpha \cdot (\boldsymbol{cos}\ \alpha)^2}{\boldsymbol{cos}\ \alpha} = \boldsymbol{tg}\ \alpha$

d) $1 + (\boldsymbol{tg}\ \alpha)^2 = \dfrac{1}{(\boldsymbol{cos}\ \alpha)^2}$

a) $(sen\ \alpha + cos\ \alpha)^2 + (sen\ \alpha - cos\ \alpha)^2 =$

$$= (\underbrace{sen^2\ \alpha + cos^2\ \alpha}_{1} + 2sen\ \alpha\ cos\ \alpha) + (\underbrace{sen^2\ \alpha + cos^2\ \alpha}_{1} - 2sen\ \alpha\ cos\ \alpha) =$$

$$= 1 + 2sen\ \alpha\ cos\ \alpha + 1 - 2sen\ \alpha\ cos\ \alpha = 2$$

b) $\dfrac{sen^3\ \alpha + sen\ \alpha \cdot cos^2\ \alpha}{sen\ \alpha} = \dfrac{sen\ \alpha \cdot (sen^2\ \alpha + cos^2\ \alpha)}{sen\ \alpha} = sen^2\ \alpha + cos^2\ \alpha = 1$

c) $\dfrac{sen^3\ \alpha + sen\ \alpha \cdot cos^2\ \alpha}{cos\ \alpha} = \dfrac{sen\ \alpha \cdot (sen^2\ \alpha + cos^2\ \alpha)}{cos\ \alpha} = \dfrac{sen\ \alpha \cdot 1}{cos\ \alpha} = \dfrac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha} = tg\ \alpha$

d) $1 + tg^2\ \alpha = 1 + \dfrac{sen^2\ \alpha}{cos^2\ \alpha} = \dfrac{cos^2\ \alpha + sen^2\ \alpha}{cos^2\ \alpha} = \dfrac{1}{cos^2\ \alpha}$

Reflexiona sobre la teoría

48. **¿Verdadero o falso? Justifica y pon ejemplos.**

a) En un ángulo agudo, el seno es siempre mayor que la tangente.

b) No existe ningún ángulo α tal que *sen* $\alpha = 3/5$ y *tg* $\alpha = 1/4$.

c) El coseno de un ángulo de π radianes es igual a –1.

d) El valor máximo de la tangente de un ángulo es 1.

e) Si $270° < \alpha < 360°$, entonces *tg* $\alpha < 0$ y *cos* $\alpha > 0$.

f) No existe ningún ángulo α tal que: *sen* α + 2*cos* $\alpha = 0$

g) La altura de un triángulo es igual al producto de uno de sus lados por el seno del ángulo que forma dicho lado con la base.

a) Falso, por ejemplo, $sen\ 45° = \dfrac{\sqrt{2}}{2} < tg\ 45° = 1$.

b) Verdadero.

Si $sen\ \alpha = \dfrac{3}{5}$ y $tg\ \alpha = \dfrac{1}{4}$ entonces:

$$tg\ \alpha = \frac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha} \to cos\ \alpha = \frac{sen\ \alpha}{tg\ \alpha} \to cos\ \alpha = \frac{12}{5}, \text{ imposible.}$$

c) Verdadero.

d) Falso, la tangente de un ángulo puede tomar cualquier valor real.

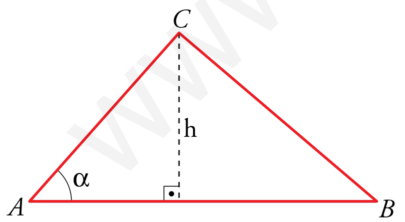
e) Verdadero.

f) Falso:

$$sen\ \alpha + 2cos\ \alpha = 0 \to sen\ \alpha = -2cos\ \alpha \to \frac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha} = -2 \to$$

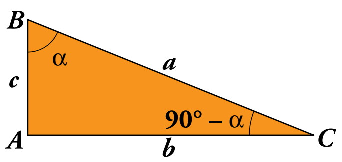
$$\to tg\ \alpha = -2 \to \begin{cases} \alpha = 116°\ 33'\ 54'' \\ \alpha = 296°\ 33'\ 54'' \end{cases}$$

g) Verdadero.



$$sen\ \alpha = \frac{h}{\overline{AC}} \to h = \overline{AC} \cdot sen\ \alpha$$

49. **Los dos ángulos agudos de un triángulo rectángulo se llaman complementarios porque su suma es uno recto. Observa la figura, copia y completa la tabla, y expresa simbólicamente lo que obtienes:**



	α	$90° - \alpha$
sen	b/a	c/a
cos	c/a	b/a
tg	b/c	c/b

$sen\ \alpha = cos\ (90° - \alpha)$

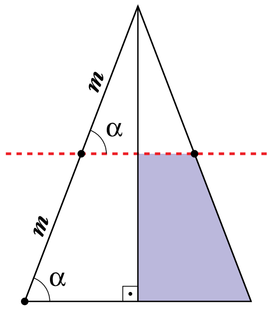
$cos\ \alpha = sen\ (90° - \alpha)$

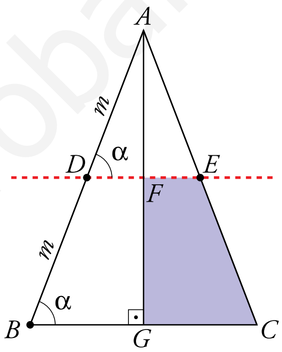
$tg\ \alpha = \dfrac{1}{tg\ (90° - \alpha)}$

Página 162

Entrénate resolviendo problemas

- **¿Qué fracción de la superficie del triángulo se ha coloreado?**





Los triángulos $\widehat{ABC}$ y $\widehat{ADE}$ están en posición de Tales, son semejantes y la razón de semejanza es $\dfrac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \dfrac{m}{2m} = \dfrac{1}{2}$.

Si la razón de semejanza es $\dfrac{1}{2}$:

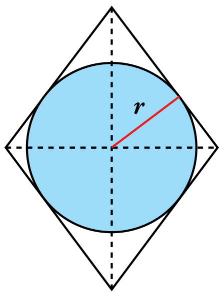
Área $\widehat{ADE} = \dfrac{1}{4}$ Área $\widehat{ABC}$ $\rightarrow$ Área $\widehat{AFE} = \dfrac{1}{4}$Área $\widehat{AGC}$

Por tanto:

$$\text{Área } \widehat{FEGC} = \text{Área } \widehat{AGC} - \text{Área } \widehat{AFE} = \text{Área } \widehat{AGC} - \frac{1}{4} \text{ Área } \widehat{AGC} = \frac{3}{4} \text{ Área } \widehat{AGC} =$$

$$= \frac{3}{4}\left[\frac{1}{2} \text{ Área } \widehat{ABC}\right] = \frac{3}{8} \text{ Área } \widehat{ABC}$$

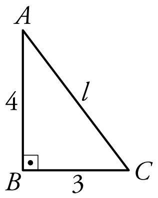
- **El rombo tiene una superficie de 24 cm², y su diagonal menor es igual a los tres cuartos de la mayor. Calcula el área del círculo inscrito.**



- En primer lugar hallaremos la longitud de las diagonales y del lado del rombo.

$$\left.\begin{array}{l} \text{Diagonal mayor} = x \\ \text{Diagonal menor} = \dfrac{3}{4}x \\ \text{Área rombo} = 24 \text{ cm}^2 \end{array}\right\} \rightarrow \frac{1}{2} \cdot \left(x \cdot \frac{3}{4}x\right) = 24 \rightarrow \frac{3x^2}{8} = 24 \rightarrow x^2 = 64 \rightarrow x = 8 \text{ cm}$$

Luego: Diagonal mayor = 8 cm; Diagonal menor = 6 cm

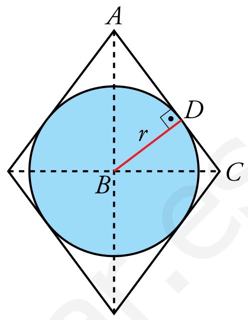


Por el teorema de Pitágoras: $l = \sqrt{4^2 + 3^2} \to l = 5$ cm

Por tanto, el lado del rombo mide 5 cm.

- Ahora hallaremos la longitud del radio del círculo.

  El círculo es tangente al rombo en $D \to BD \perp AC$, es decir, BD es la altura sobre la hipotenusa del triángulo rectángulo $\widehat{ABC}$ y divide a este en otros dos triángulos rectángulos, $\widehat{ABD}$ y $\widehat{BCD}$.



$$\left.\begin{array}{l} \text{En } \widehat{ABC}: sen\ \hat{A} = \dfrac{3}{5} \\ \text{En } \widehat{ABD}: sen\ \hat{A} = \dfrac{\overline{BD}}{4} \end{array}\right\} \to \frac{3}{5} = \frac{\overline{BD}}{4} \to \overline{BD} = \frac{3 \cdot 4}{5} = 2{,}4 \text{ cm} \to$$

El radio del círculo es $\overline{BD} = 2{,}4$ cm.

- Finalmente hallamos el área del círculo: Área $= \pi \cdot 2{,}4^2 = 5{,}76\pi \text{ cm}^2 = 18{,}09 \text{ cm}^2$

Infórmate

Eclipses

- **Completa en tu cuaderno los datos que faltan en la tabla, y comprueba que el ángulo β es similar si se calcula a partir de los datos relativos a la Luna o de los relativos al Sol.**

	DIÁMETRO (km)	DISTANCIA MEDIA A LA TIERRA (km)	*tg* α	β
LUNA	**3 500**	**384 000**	**?**	**?**
SOL	**1 399 000**	**149 600 000**	**?**	**?**

LUNA:

Diámetro = 3 500 km $\to R = 1\,750$ km

$tg\ \alpha = \dfrac{1750}{384\,000} = 0{,}004557 \to \alpha = 0°\ 15'\ 40'' \to \beta = 2\alpha = 0°\ 31'\ 20''$

SOL:

Diámetro = 1 399 000 $\to R' = 699\,500$

$tg\ \alpha = \dfrac{699\,500}{149\,600\,000} = 0{,}004676 \to \alpha = 0°\ 16'\ 4'' \to \beta = 0°\ 32'\ 9''$

	DIÁMETRO (km)	DISTANCIA MEDIA A LA TIERRA (km)	*tg* α	β
LUNA	3 500	384 000	0,004557	0° 31' 20"
SOL	1 399 000	149 600 000	0,004676	0° 32' 9"

Página 163

Autoevaluación

1. a) Si $\cos\alpha = 0{,}52$ y $\alpha < 90°$, calcula $\operatorname{sen}\alpha$ y $\operatorname{tg}\alpha$.

b) Si $\operatorname{tg}\beta = \dfrac{12}{5}$ y $\beta < 90°$, calcula $\operatorname{sen}\beta$ y $\cos\beta$.

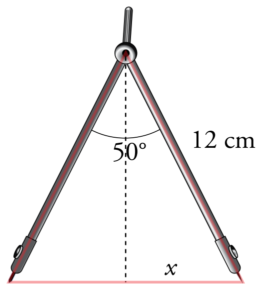
a) $\operatorname{sen}\alpha = \sqrt{1-(\cos\alpha)^2} = \sqrt{1-0,52^2} = 0{,}85$; $\operatorname{tg}\alpha = 0{,}85/0{,}52 = 1{,}63$

b) $$\left.\begin{array}{l} \operatorname{tg}\beta = \dfrac{\operatorname{sen}\beta}{\cos\beta} = \dfrac{12}{5} \\ (\operatorname{sen}\beta)^2 + (\cos\beta)^2 = 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \operatorname{sen}\beta = (12/5)\cos\beta \\ \dfrac{144}{25}(\cos\beta)^2 + (\cos\beta)^2 = 1 \to \dfrac{169}{25}(\cos\beta)^2 = 1 \to \\ \to (\cos\beta)^2 = \dfrac{25}{169} \to \cos\beta = \dfrac{5}{13} \end{array}$$

$$\cos\beta = \frac{5}{13} \to \operatorname{sen}\beta = \frac{12}{5}\cdot\frac{5}{13} = \frac{12}{13}$$

2. Los brazos de un compás, que miden 12 cm, forman un ángulo de 50°.

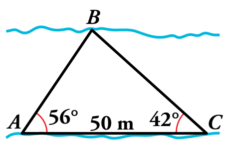
¿Cuál es el radio de la circunferencia que puede trazarse con esa abertura?

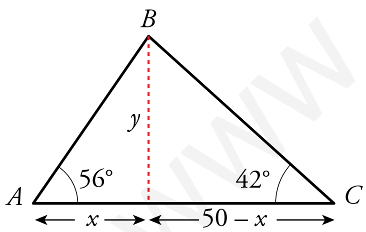


$$\operatorname{sen} 25° = \frac{x}{12} \to x \approx 5{,}07 \text{ cm}$$

Radio de la circunferencia ≈ 10,14 cm

3. Para medir la anchura de un río, hemos tomado las medidas indicadas en la figura. Hállala.





$$\operatorname{tg} 56° = \frac{y}{x} \to y = x\operatorname{tg} 56°$$

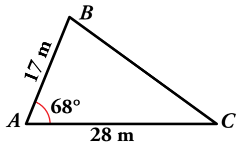
$$\operatorname{tg} 42° = \frac{y}{50-x} \to y = (50-x)\operatorname{tg} 42°$$

$$x\operatorname{tg} 56° = (50-x)\operatorname{tg} 42° \to x = \frac{50\cdot\operatorname{tg} 42°}{\operatorname{tg} 56° + \operatorname{tg} 42°} \approx 18{,}89$$

$y = x\operatorname{tg} 56° \approx 28$ m

El río tiene 28 m de anchura.

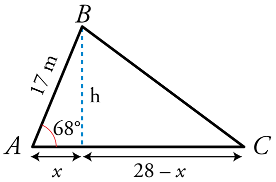
4. En este triángulo, halla la altura sobre AC, el área del triángulo y el ángulo $\hat{C}$.



- Altura sobre $AC \rightarrow$ h

$sen\ 68° = \dfrac{h}{17} \rightarrow h = 15{,}76$ m

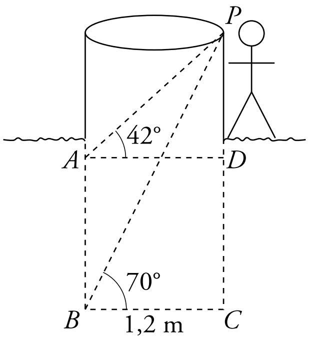
- Área del triángulo $= \dfrac{28 \cdot 15{,}76}{2} = 220{,}64\ m^2$

- 

$cos\ 68° = \dfrac{x}{17} \rightarrow x = 6{,}37$ m; $28 - x = 21{,}63$ m

$tg\ \hat{C} = \dfrac{h}{28 - x} = 0{,}729 \rightarrow \hat{C} = 36°\ 5'\ 31'' \approx 36°$

5. En un huerto hay un pozo de 1,2 m de ancho. Cuando está vacío vemos, desde el brocal, el borde opuesto del fondo bajo un ángulo de 70° con la horizontal. Cuando el agua sube, vemos el borde opuesto del agua bajo un ángulo de 42°. ¿Cuál es la altura del pozo? ¿Cuánto subió el agua?



En el triángulo $PBC \rightarrow tg\ 70° = \dfrac{\overline{PC}}{1{,}2} \rightarrow \overline{PC} = 3{,}3$ m

En el triángulo $PAD \rightarrow tg\ 42° = \dfrac{\overline{PD}}{1{,}2} \rightarrow \overline{PD} = 1{,}1$ m

Altura del pozo: $\overline{PC} = 3{,}3$ m

Altura del agua: $\overline{AB} = \overline{PC} - \overline{PD} = 3{,}3 - 1{,}1 = 2{,}2$ m

6. Si $cos\ \alpha = -1/5$ y $tg\ \alpha < 0$, indica en qué cuadrante está el ángulo α y calcula sus restantes razones trigonométricas.

$$\left.\begin{array}{l} cos\ \alpha = -\dfrac{1}{5} < 0 \rightarrow \alpha \in \text{II o III cuadrante} \\ tg\ \alpha < 0 \rightarrow \alpha \in \text{II o IV cuadrante} \end{array}\right\} \rightarrow \alpha \in \text{II cuadrante}$$

- $sen^2\ \alpha + cos^2\ \alpha = 1 \rightarrow sen^2\ \alpha = 1 - cos^2\ \alpha \rightarrow sen^2\ \alpha = 1 - \left(-\dfrac{1}{5}\right)^2 \rightarrow$

$$\rightarrow sen^2\ \alpha = \frac{24}{25} \rightarrow sen\ \alpha = \sqrt{\frac{24}{25}} \rightarrow sen\ \alpha = \frac{2\sqrt{6}}{5}$$

- $tg\ \alpha = \dfrac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha} \rightarrow tg\ \alpha = \dfrac{\frac{2\sqrt{6}}{5}}{-\frac{1}{5}} \rightarrow tg\ \alpha = -2\sqrt{6}$

Por tanto, $sen\ \alpha = \dfrac{2\sqrt{6}}{5}$, $cos\ \alpha = -\dfrac{1}{5}$ y $tg\ \alpha = -2\sqrt{6}$.

Página 163

Autoevaluación

1. **a) Si $\cos\alpha = 0{,}52$ y $\alpha < 90°$, calcula $\text{sen}\,\alpha$ y $tg\,\alpha$.**

b) Si $tg\,\beta = \dfrac{12}{5}$ y $\beta < 90°$, calcula $\text{sen}\,\beta$ y $\cos\beta$.

a) $\text{sen}\,\alpha = \sqrt{1-(\cos\alpha)^2} = \sqrt{1-0{,}52^2} = 0{,}85$; $tg\,\alpha = 0{,}85/0{,}52 = 1{,}63$

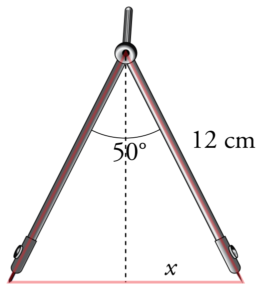
b) $\left.\begin{array}{l} tg\,\beta = \dfrac{\text{sen}\,\beta}{\cos\beta} = \dfrac{12}{5} \\ (\text{sen}\,\beta)^2 + (\cos\beta)^2 = 1 \end{array}\right\}$ $\text{sen}\,\beta = (12/5)\cos\beta$

$\dfrac{144}{25}(\cos\beta)^2 + (\cos\beta)^2 = 1 \to \dfrac{169}{25}(\cos\beta)^2 = 1 \to$

$\to (\cos\beta)^2 = \dfrac{25}{169} \to \cos\beta = \dfrac{5}{13}$

$\cos\beta = \dfrac{5}{13} \to \text{sen}\,\beta = \dfrac{12}{5}\cdot\dfrac{5}{13} = \dfrac{12}{13}$

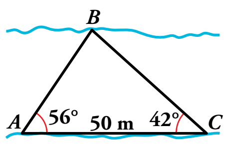
2. **Los brazos de un compás, que miden 12 cm, forman un ángulo de 50°. ¿Cuál es el radio de la circunferencia que puede trazarse con esa abertura?**

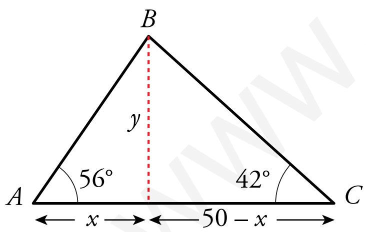


$\text{sen}\,25° = \dfrac{x}{12} \to x \approx 5{,}07$ cm

Radio de la circunferencia ≈ 10,14 cm

3. **Para medir la anchura de un río, hemos tomado las medidas indicadas en la figura. Hállala.**





$tg\,56° = \dfrac{y}{x} \to y = x\,tg\,56°$

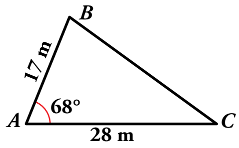
$tg\,42° = \dfrac{y}{50-x} \to y = (50-x)\,tg\,42°$

$x\,tg\,56° = (50-x)\,tg\,42° \to x = \dfrac{50\cdot tg\,42°}{tg\,56° + tg\,42°} \approx 18{,}89$

$y = x\,tg\,56° \approx 28$ m

El río tiene 28 m de anchura.

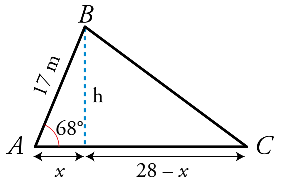
4. **En este triángulo, halla la altura sobre AC, el área del triángulo y el ángulo $\hat{C}$.**



- Altura sobre $AC \to$ h

$sen\ 68° = \dfrac{h}{17} \to h = 15{,}76$ m

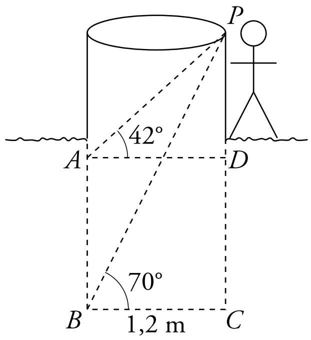
- Área del triángulo $= \dfrac{28 \cdot 15{,}76}{2} = 220{,}64$ m^2

- 

$cos\ 68° = \dfrac{x}{17} \to x = 6{,}37$ m; $28 - x = 21{,}63$ m

$tg\ \hat{C} = \dfrac{h}{28 - x} = 0{,}729 \to \hat{C} = 36°\ 5'\ 31'' \approx 36°$

5. **En un huerto hay un pozo de 1,2 m de ancho. Cuando está vacío vemos, desde el brocal, el borde opuesto del fondo bajo un ángulo de 70° con la horizontal. Cuando el agua sube, vemos el borde opuesto del agua bajo un ángulo de 42°. ¿Cuál es la altura del pozo? ¿Cuánto subió el agua?**



En el triángulo $PBC \to tg\ 70° = \dfrac{\overline{PC}}{1{,}2} \to \overline{PC} = 3{,}3$ m

En el triángulo $PAD \to tg\ 42° = \dfrac{\overline{PD}}{1{,}2} \to \overline{PD} = 1{,}1$ m

Altura del pozo: $\overline{PC} = 3{,}3$ m

Altura del agua: $\overline{AB} = \overline{PC} - \overline{PD} = 3{,}3 - 1{,}1 = 2{,}2$ m

6. **Si $cos\ \alpha = -1/5$ y $tg\ \alpha < 0$, indica en qué cuadrante está el ángulo α y calcula sus restantes razones trigonométricas.**

$$\left.\begin{array}{l} cos\ \alpha = -\dfrac{1}{5} < 0 \to \alpha \in \text{II o III cuadrante} \\ tg\ \alpha < 0 \to \alpha \in \text{II o IV cuadrante} \end{array}\right\} \to \alpha \in \text{II cuadrante}$$

- $sen^2\ \alpha + cos^2\ \alpha = 1 \to sen^2\ \alpha = 1 - cos^2\ \alpha \to sen^2\ \alpha = 1 - \left(-\dfrac{1}{5}\right)^2 \to$

$$\to sen^2\ \alpha = \dfrac{24}{25} \to sen\ \alpha = \sqrt{\dfrac{24}{25}} \to sen\ \alpha = \dfrac{2\sqrt{6}}{5}$$

- $tg\ \alpha = \dfrac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha} \to tg\ \alpha = \dfrac{\frac{2\sqrt{6}}{5}}{-\frac{1}{5}} \to tg\ \alpha = -2\sqrt{6}$

Por tanto, $sen\ \alpha = \dfrac{2\sqrt{6}}{5}$, $cos\ \alpha = -\dfrac{1}{5}$ y $tg\ \alpha = -2\sqrt{6}$.