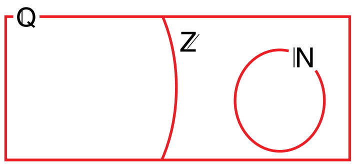
Página 11

Resuelve

1. **a) Escribe tres números naturales y tres números enteros que no sean naturales.**

b) Escribe tres números racionales que no sean enteros y tres números que no sean racionales.

c) Sitúa, en tu cuaderno, los números anteriores en un esquema como el siguiente.



a) Por ejemplo:

NATURALES: 2, 3, 4

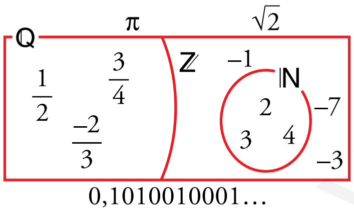
ENTEROS NO NATURALES: –1, –7, –3

b) Por ejemplo:

RACIONALES NO ENTEROS: $\frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \frac{-2}{3}$

NO RACIONALES: π, $\sqrt{2}$; 0,1010010001…

c)



2. **Sabiendo que el verdadero valor de π es 3,14159265359… da una cota del error cometido en cada una de las aproximaciones anteriores.**

Por ejemplo: $\dfrac{377}{120} = \left.\begin{matrix} 3{,}141\boxed{6}66\ldots \\ 3{,}141\boxed{5}92\ldots \end{matrix}\right\}$ **El error es menor que 1 diezmilésima: error < 0,0001**

Antiguos egipcios → (3,16). Error < 0,02

Antiguos babilonios → (25/8 = 3,125). Error < 0,02

Arquímedes → (22/7 = 3,142857…). Error < 0,001

Tolomeo → (377/120 = 3,141666…). Error < 0,0001

Liu Hiu → (355/113 = 3,14159292…). Error < 0,0000003

1 Números irracionales

Página 12

1. Demuestra que los números siguientes son irracionales:

a) $\sqrt{3}$ **b)** $4\sqrt{3}$ **c)** $5 + 4\sqrt{3}$

a) $\sqrt{3}$. Lo haremos por reducción al absurdo. Supongamos que $\sqrt{3}$ sí es racional. Entonces se puede poner como cociente de dos números enteros:

$$\sqrt{3} = \frac{a}{b} \ \rightarrow\ \left(\sqrt{3}\right)^2 = \left(\frac{a}{b}\right)^2 \ \rightarrow\ 3 = \frac{a^2}{b^2}, \text{ luego } a^2 = 3b^2$$

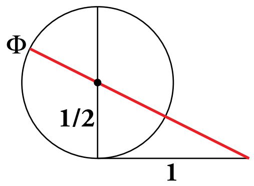
Como b^2 es un cuadrado perfecto, si tuviese 3 como factor lo tendría un número par de veces, luego $3b^2$ tiene el factor 3 un número impar de veces (lo tendría una vez si no fuese factor de b^2). Y esto es imposible porque $3b^2 = a^2$, que es cuadrado perfecto y, por tanto, en su descomposición en factores primos cada número está un número par de veces.

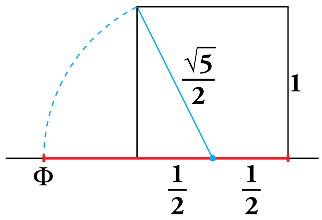
b) $4\sqrt{3}$ es irracional porque el resultado de operar un número racional con uno irracional es irracional.

c) $5 + 4\sqrt{3}$ es irracional por el mismo razonamiento que en b).

Página 13

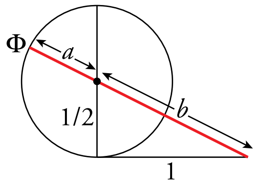
2. Justifica que las construcciones siguientes:

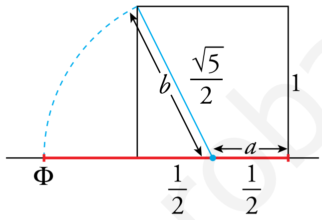




dan un segmento de medida igual al número de oro:

$$\Phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2}$$





$a = \frac{1}{2}$ (radio de la circunferencia)

Aplicando el teorema de Pitágoras:

$$b = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + 1} = \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\Phi = a + b = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\Phi = a + b = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$$

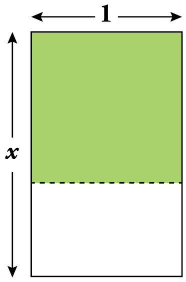
3. Demuestra que el número áureo, Φ, es irracional.

Queremos demostrar que el número de oro, Φ, es irracional. Sabemos que $\sqrt{5}$ lo es (por lo mismo que $\sqrt{2}$).

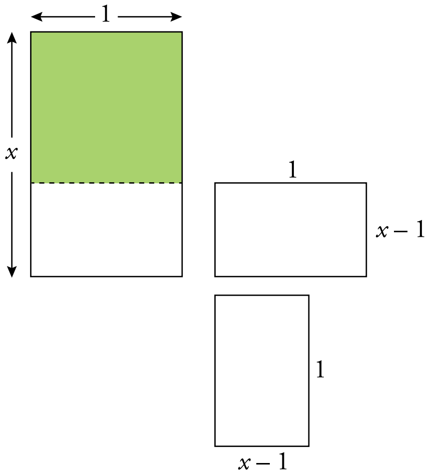
Observa que si $\Phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$, entonces: $2\Phi = \sqrt{5} + 1 \rightarrow \sqrt{5} = 2\Phi - 1$

Si Φ fuese racional, $2\Phi - 1$ también sería racional, lo que contradice el que $\sqrt{5}$ es irracional.

4. Este rectángulo tiene la peculiaridad de que si le suprimimos un cuadrado, el rectángulo que queda es semejante al inicial.



Demuestra que su lado mayor es $x = \Phi$.



Nos dicen que estos dos rectángulos son semejantes, por tanto sus lados son proporcionales.

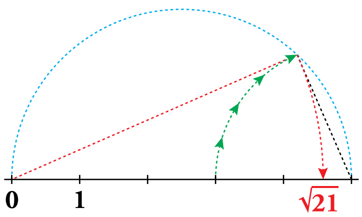
$\dfrac{1}{x-1} = \dfrac{x}{1} \rightarrow 1 = x^2 - x \rightarrow x^2 - x - 1 = 0.$ Resolvemos la ecuación de segundo grado:

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} = \begin{cases} \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} = \Phi \\[2ex] \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \text{ No es una solución válida porque es negativa.} \end{cases}$$

2 Números reales: la recta real

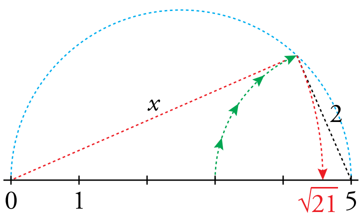
Página 15

1. a) Justifica que el punto representado es $\sqrt{21}$.



b) Representa $\sqrt{27}$ $(27 = 36 - 9)$ y $\sqrt{40}$ $(40 = 36 + 4)$.

a)

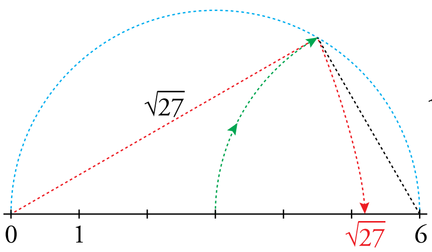


Aplicando Pitágoras:

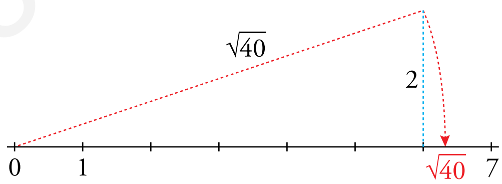
$5^2 = x^2 + 2^2$

$25 = x^2 + 4 \;\rightarrow\; x^2 = 25 - 4 = 21 \;\rightarrow\; x = \sqrt{21}$

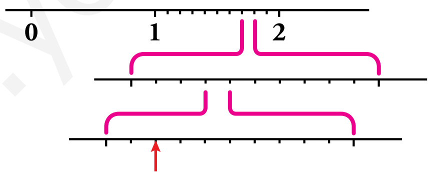
b)



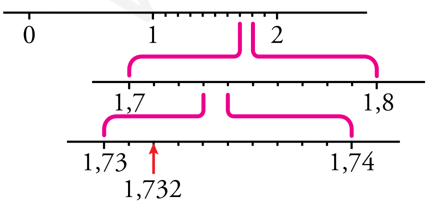
$\sqrt{27} = \sqrt{6^2 - 3^2}$

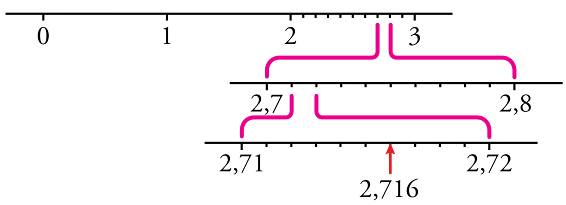


2. ¿Qué número es el que hemos señalado con una flecha?



Representa, del mismo modo, el 2,716.





3 Tramos en la recta real: intervalos y semirrectas

Página 17

1. Escribe los conjuntos siguientes en forma de intervalo y representa los números que cumplen las condiciones indicadas en cada caso:

a) Comprendidos entre 5 y 6, ambos incluidos.

b) Mayores que 7.

c) Menores o iguales que –5.

a) $[5, 6]$

b) $(7, +\infty)$

c) $(-\infty, -5]$

2. Escribe en forma de intervalo y representa:

a) $\{x \,/\, 3 \le x < 5\}$

b) $\{x \,/\, x \ge 0\}$

c) $\{x \,/\, -3 < x < 1\}$

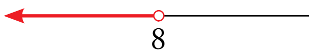
d) $\{x \,/\, x < 8\}$

a) $[3, 5)$

b) $[0, +\infty)$

c) $(-3, 1)$

d) $(-\infty, 8)$



3. Escribe en forma de desigualdad y representa:

a) $(-1, 4]$

b) $[0, 6]$

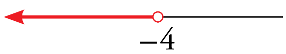
c) $(-\infty, -4)$

d) $[9, +\infty)$

a) $\{x \,/\, -1 < x \le 4\}$

b) $\{x \,/\, 0 \le x \le 6\}$

c) $\{x \,/\, x < -4\}$



d) $\{x \,/\, x \ge 9\}$

4 Raíces y radicales

Página 18

Cálculo mental

1. Di el valor de k en cada caso:

a) $\sqrt[3]{k} = 2$ **b)** $\sqrt[k]{-243} = -3$

c) $\sqrt[4]{k} = \frac{2}{3}$ **d)** $\sqrt[k]{1\,024} = 2$

a) $k = 2^3 = 8$

b) $-243 = (-3)^5 \rightarrow k = 5$

c) $k = \frac{2^4}{3^4}$

d) $1\,024 = 2^{10} \rightarrow k = 10$

2. Calcula las raíces siguientes:

a) $\sqrt[3]{-8}$ **b)** $\sqrt[5]{32}$ **c)** $\sqrt[5]{-32}$

d) $\sqrt[8]{0}$ **e)** $\sqrt[4]{81}$ **f)** $\sqrt[3]{125}$

a) -2 b) 2 c) -2

d) 0 e) 3 f) 5

1. Expresa en forma exponencial cada una de las siguientes raíces:

a) $\sqrt[5]{x}$ **b)** $\left(\sqrt[3]{x^2}\right)^5$ **c)** $\sqrt[15]{a^6}$

d) $\sqrt{\frac{a^{13}}{a^6}}$ **e)** $\sqrt[3]{\sqrt{x}}$ **f)** $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a^k}}$

a) $x^{1/5}$ b) $x^{10/3}$ c) $a^{6/15}$

d) $(a^{13-6})^{1/2} = a^{7/2}$ e) $(x^{1/2})^{1/3} = x^{1/6}$ f) $(a^{k/m})^{1/n} = a^{k/m \cdot n}$

2. Calcula.

a) $4^{1/2}$ **b)** $125^{1/3}$ **c)** $625^{1/4}$

d) $8^{2/3}$ **e)** $64^{5/6}$ **f)** $36^{3/2}$

a) $4^{1/2} = \sqrt{4} = 2$ b) $125^{1/3} = \sqrt[3]{125} = 5$ c) $625^{1/4} = \sqrt[4]{625} = 5$

d) $8^{2/3} = \sqrt[3]{8^2} = 4$ e) $64^{5/6} = \sqrt[6]{64^5} = 2^5 = 32$ f) $36^{3/2} = \sqrt{36^3} = 6^3 = 216$

3. Expresa en forma radical.

a) $x^{7/9}$ **b)** $(m^5 \cdot n^5)^{1/3}$ **c)** $a^{1/2} \cdot b^{1/3}$

d) $[(x^2)^{1/3}]^{1/5}$ **e)** $[(x^{1/2})^5]^{1/3}$ **f)** $(y^3 \cdot z^2)^{2/3}$

a) $\sqrt[9]{x^7}$ b) $\sqrt[3]{(m \cdot n)^5}$ c) $\sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{b} = \sqrt[6]{a^3 b^2}$

d) $\sqrt[5]{\sqrt[3]{x^2}} = \sqrt[15]{x^2}$ e) $\sqrt[3]{x^{5/2}} = \sqrt[6]{x^5}$ f) $\sqrt[3]{y^6 \cdot z^4}$

Página 20

4. Simplifica.

a) $\sqrt[12]{x^9}$ **b)** $\sqrt[12]{x^8}$

c) $\sqrt[5]{y^{10}}$ **d)** $\sqrt[6]{8}$

e) $\sqrt[9]{64}$ **f)** $\sqrt[8]{81}$

a) $\sqrt[12]{x^9} = x^{9/12} = x^{3/4} = \sqrt[4]{x^3}$

b) $\sqrt[12]{x^8} = x^{8/12} = x^{2/3} = \sqrt[3]{x^2}$

c) $\sqrt[5]{y^{10}} = y^2$

d) $\sqrt[6]{8} = \sqrt[6]{2^3} = 2^{1/2} = \sqrt{2}$

e) $\sqrt[9]{64} = \sqrt[9]{2^6} = 2^{6/9} = 2^{2/3} = \sqrt[3]{4}$

f) $\sqrt[8]{81} = \sqrt[8]{3^4} = 3^{1/2} = \sqrt{3}$

5. ¿Cuál de los dos es mayor en cada caso?

a) $\sqrt[4]{31}$ **y** $\sqrt[3]{13}$ **b)** $\sqrt[3]{51}$ **y** $\sqrt[9]{132\,650}$

a) $\left.\begin{array}{l} \sqrt[4]{31} = \sqrt[12]{31^3} = \sqrt[12]{29\,791} \\ \sqrt[3]{13} = \sqrt[12]{13^4} = \sqrt[12]{28\,561} \end{array}\right\} \sqrt[4]{31} > \sqrt[3]{13}$

b) $\left.\begin{array}{l} \sqrt[3]{51} = \sqrt[9]{51^3} = \sqrt[9]{132\,651} \\ \sqrt[9]{132\,650} \end{array}\right\} \sqrt[3]{51} > \sqrt[9]{132\,650}$

6. Reduce.

a) $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[5]{2}$ **b)** $\sqrt[3]{6} \cdot \sqrt[6]{3}$ **c)** $\sqrt[10]{a^4 b^6}$

a) $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[5]{2} = \sqrt[15]{2^5} \cdot \sqrt[15]{2^3} = \sqrt[15]{2^8}$

b) $\sqrt[3]{6} \cdot \sqrt[6]{3} = \sqrt[6]{6^2} \cdot \sqrt[6]{3} = \sqrt[6]{6^2 \cdot 3} = \sqrt[6]{2^2 \cdot 3^3} = \sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{2}$

c) $\sqrt[10]{a^4 b^6} = \sqrt[5]{a^2 b^3}$

7. Saca del radical los factores que sea posible.

a) $\sqrt[3]{32x^4}$ **b)** $\sqrt[3]{81a^3b^5c}$ **c)** $\sqrt[5]{64}$

a) $\sqrt[3]{32x^4} = \sqrt[3]{2^5 x^4} = 2x\sqrt[3]{4x}$

b) $\sqrt[3]{81a^3 b^5 c} = \sqrt[3]{3^4 a^3 b^5 c} = 3ab\sqrt[3]{3b^2 c}$

c) $\sqrt[5]{64} = \sqrt[5]{2^6} = 2\sqrt[5]{2}$

8. Simplifica.

a) $\dfrac{\sqrt{9}}{\sqrt[3]{3}}$ **b)** $\dfrac{\sqrt[5]{16}}{\sqrt{2}}$ **c)** $\dfrac{\sqrt[4]{a^3b^5c}}{\sqrt{ab^3c^3}}$

d) $\left(\sqrt[3]{a^2}\right)^6$ **e)** $\left(\sqrt{x}\right)^3 \cdot \left(\sqrt[3]{x}\right)$ **f)** $\left(\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}\right)^8$

a) $\dfrac{\sqrt{9}}{\sqrt[3]{3}} = \sqrt[6]{\dfrac{9^3}{3^2}} = \sqrt[6]{\dfrac{3^6}{3^2}} = \sqrt[6]{3^4} = \sqrt[3]{3^2}$

b) $\dfrac{\sqrt[5]{16}}{\sqrt{2}} = \sqrt[10]{\dfrac{16^2}{2^5}} = \sqrt[10]{\dfrac{2^8}{2^5}} = \sqrt[10]{2^3}$

c) $\dfrac{\sqrt[4]{a^3b^5c}}{\sqrt{ab^3c^3}} = \sqrt[4]{\dfrac{a^3b^5c}{a^2b^6c^6}} = \sqrt[4]{\dfrac{a}{bc^5}} = \dfrac{1}{c}\sqrt[4]{\dfrac{a}{bc}}$

d) $\left(\sqrt[3]{a^2}\right)^6 = a^{12/3} = a^4$

e) $\left(\sqrt{x}\right)^3 \cdot \left(\sqrt[3]{x}\right) = x^{3/2} \cdot x^{1/3} = x^{11/6} = \sqrt[6]{x^{11}}$

f) $\left(\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}\right)^8 = \left(\left((2^{1/2})^{1/2}\right)^{1/2}\right)^8 = (2^{1/2})^8 = 2$

9. Efectúa.

$\sqrt{18} + \sqrt{50} - \sqrt{2} - \sqrt{8}$

$\sqrt{18} + \sqrt{50} - \sqrt{2} - \sqrt{8} = \sqrt{2 \cdot 3^2} + \sqrt{2 \cdot 5^2} - \sqrt{2} - \sqrt{2^3} = 3\sqrt{2} + 5\sqrt{2} - \sqrt{2} - 2\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$

Página 21

10. Racionaliza los denominadores.

a) $\dfrac{5}{\sqrt{2}}$

b) $\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{7}}$

c) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$

d) $\dfrac{2}{\sqrt[5]{3^2}}$

e) $\dfrac{4}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$

f) $\dfrac{3}{2-\sqrt{3}}$

a) $\dfrac{5}{\sqrt{2}} = \dfrac{5\sqrt{2}}{2}$

b) $\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{7}} = \dfrac{\sqrt{5}\sqrt{7}}{7}$

c) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}} = \dfrac{\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2}\sqrt[3]{2^2}} = \dfrac{\sqrt[3]{4}}{2}$

d) $\dfrac{2}{\sqrt[5]{3^2}} = \dfrac{2\sqrt[5]{3^3}}{\sqrt[5]{3^2}\sqrt[5]{3^3}} = \dfrac{2\sqrt[5]{3^3}}{3}$

e) $\dfrac{4}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = \dfrac{4\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)}{3-2} = 4\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)$

f) $\dfrac{3}{2-\sqrt{3}} = \dfrac{3\left(2+\sqrt{3}\right)}{4-3} = 6+3\sqrt{3}$

5 Números aproximados. Errores

Página 23

1. ¿Verdadero o falso? Justifica tus respuestas.

a) Decir que en una cierta piscina caben 147 253 892 miles de gotas de agua es correcto si las mediciones se han hecho con mucha precisión.

b) Decir que en una cierta piscina caben 147 253 892 miles de gotas de agua no es nada razonable, pues es imposible conseguir tantísima precisión en las mediciones. Sería mucho más sensato afirmar que caben 15 decenas de miles de millones de gotas.

c) Si estimamos correctamente que el número de gotas de agua que caben en una piscina es 15 decenas de miles de millones, estamos cometiendo un error absoluto menor que media decena de miles de millones de gotas; es decir, E. abs. < 5 000 000 000 gotas.

d) Si el error relativo cometido en una cierta medición es menor que 0,019, podemos decir que es menor que el 19 %.

e) Si el error relativo cometido en una cierta medición es menor que 0,019, podemos afirmar que es menor que el 2 %.

f) La calculadora nos dice que $\pi = 3{,}14159265$. Si tomamos $\pi = 3{,}14$, podemos afirmar que cometemos un error absoluto menor que 0,00159266, pero es más razonable decir que E. abs. < 0,0016 o, incluso, E. abs. < 0,002.

a) Falso. Sería mucho más sensato hacer la afirmación b).

b) Verdadero.

c) Verdadero.

d) Falso. Sería menor que 1,9 %.

e) Verdadero.

f) Verdadero.

2. Explica por qué no es razonable decir que en un saco hay 11 892 583 granos de arroz.

Exprésalo de forma adecuada y acota el error absoluto y el error relativo que se cometen con esa expresión.

No es razonable porque es imposible conseguir tantísima precisión en las mediciones. Sería mucho más sensato afirmar que caben 12 millones de granos de arroz.

Error absoluto < 500 000

Error relativo $< \dfrac{500\,000}{12\,000\,000} < 0{,}042 = 4{,}2\,\%$

3. Da una cota del error absoluto y otra del error relativo que cometes cuando pones $\pi = 3{,}1416$.

Error absoluto < 0,00005

Error relativo $< \dfrac{0{,}00005}{3{,}1416} < 0{,}00002 = 0{,}002\,\%$

6 Números en notación científica. Control del error

Página 24

Ejercítate

Expresa en notación científica los siguientes números:

a) $340\,000$ **b)** $0{,}00000319$ **c)** $25 \cdot 10^6$

d) $0{,}04 \cdot 10^9$ **e)** $480 \cdot 10^{-8}$ **f)** $0{,}05 \cdot 10^{-8}$

a) $340\,000 = 3{,}4 \cdot 10^5$ b) $0{,}00000319 = 3{,}19 \cdot 10^{-6}$ c) $25 \cdot 10^6 = 2{,}5 \cdot 10^7$

d) $0{,}04 \cdot 10^9 = 4 \cdot 10^7$ e) $480 \cdot 10^{-8} = 4{,}8 \cdot 10^{-6}$ f) $0{,}05 \cdot 10^{-8} = 5 \cdot 10^{-10}$

1. Efectúa. Después, repasa con la calculadora:

a) $(6{,}4 \cdot 10^5) \cdot (5{,}2 \cdot 10^{-6})$ **b)** $(2{,}52 \cdot 10^4) : (4 \cdot 10^{-6})$

c) $7{,}92 \cdot 10^6 + 3{,}58 \cdot 10^7$ **d)** $6{,}43 \cdot 10^{10} + 8{,}113 \cdot 10^{12} - 8 \cdot 10^{11}$

a) $(6{,}4 \cdot 10^5) \cdot (5{,}2 \cdot 10^{-6}) = 33{,}28 \cdot 10^{5-6} = 3{,}328 \cdot 10 \cdot 10^{-1} = 3{,}328$

b) $(2{,}52 \cdot 10^4) : (4 \cdot 10^{-6}) = 0{,}63 \cdot 10^{4-(-6)} = 6{,}3 \cdot 10^{-1} \cdot 10^{10} = 6{,}3 \cdot 10^9$

c) $(7{,}92 \cdot 10^6) + (3{,}58 \cdot 10^7) = 0{,}792 \cdot 10^7 + 3{,}58 \cdot 10^7 = (0{,}792 + 3{,}58) \cdot 10^7 = 4{,}372 \cdot 10^7$

d) $(6{,}43 \cdot 10^{10}) + (8{,}113 \cdot 10^{12}) - (8 \cdot 10^{11}) = 6{,}43 \cdot 10^{10} + 811{,}3 \cdot 10^{10} - 80 \cdot 10^{10} =$

$= (6{,}43 + 811{,}3 - 80) \cdot 10^{10} = 737{,}73 \cdot 10^{10} = 7{,}3773 \cdot 10^{12}$

2. La distancia de la Tierra al Sol es 149 000 000 km.

a) Exprésala en notación científica.

b) Exprésala en cm con dos cifras significativas.

c) Exprésala en cm con cuatro cifras significativas.

d) Acota los errores absoluto y relativo en los tres casos anteriores.

a) $1{,}49 \cdot 10^8$ km

b) $1{,}5 \cdot 10^{13}$ cm

c) $1{,}490 \cdot 10^{13}$ cm

d) CASO a) $\begin{cases} \text{E.A.} < 0{,}005 \text{ cientos de millones de kilómetros.} \\ \text{E.R.} < \dfrac{0{,}005}{1{,}49} < 0{,}00336 \end{cases}$

CASO b) $\begin{cases} \text{E.A.} < 0{,}05 \text{ decenas de billones de centímetros.} \\ \text{E.R.} < \dfrac{0{,}005}{1{,}5} < 0{,}033 \end{cases}$

CASO c) $\begin{cases} \text{E.A.} < 0{,}0005 \text{ decenas de billones de centímetros.} \\ \text{E.R.} < \dfrac{0{,}0005}{1{,}490} < 0{,}000336 \end{cases}$

7 Logaritmos

Página 26

1. Halla estos logaritmos basándote en la definición:

a) $log_5\ 125$ **b)** $log_5\ 0{,}04$ **c)** $log_2\ 128$ **d)** $log_2\ 0{,}0625$ **e)** $log_a\ 1$

f) $log_{10}\ 0{,}0001$ **g)** $log_2\ (1/\sqrt{2})$ **h)** $log_3\ (1/3)$ **i)** $log_3\ \sqrt[5]{9}$

a) $log_5\ 125 = x \rightarrow 5^x = 125 \rightarrow x = 3$

b) $log_5\ 0{,}04 = x \rightarrow 5^x = 0{,}04 = \dfrac{4}{100} = \dfrac{1}{25} \rightarrow x = -2$

c) $log_2\ 128 = x \rightarrow 2^x = 128 = 2^7 \rightarrow x = 7$

d) $log_2\ 0{,}0625 = x \rightarrow 2^x = 0{,}0625 = \dfrac{625}{10\,000} = \dfrac{1}{16} \rightarrow x = -4$

e) $log_a\ 1 = x \rightarrow a^x = 1 \rightarrow x = 0$

f) $log_{10}\ 0{,}0001 = x \rightarrow 10^x = 0{,}0001 = \dfrac{1}{10\,000} \rightarrow x = -4$

g) $log_2 \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = x \rightarrow 2^x = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \rightarrow x = -\dfrac{1}{2}$

h) $log_3\ \sqrt[5]{9} = x \rightarrow 3^x = \sqrt[5]{9} = 3^{2/5} \rightarrow x = \dfrac{2}{5}$

2. Averigua la base de los siguientes logaritmos:

a) $log_a\ 10\,000 = 2$ **b)** $log_b\ 216 = 3$ **c)** $log_c\ 125 = 6$ **d)** $log_d\ 3 = \dfrac{1}{2}$

a) $log_a\ 10\,000 = 2 \rightarrow a^2 = 10\,000 \rightarrow a = 100$

b) $log_b\ 216 = 3 \rightarrow b^3 = 216 \rightarrow b = 6$

c) $log_c\ 125 = 6 \rightarrow c^6 = 125 \rightarrow c = \sqrt{5}$

d) $log_d\ 3 = \dfrac{1}{2} \rightarrow d^{1/2} = 3 \rightarrow d = 9$

3. Halla, con la tecla log **de la calculadora:**

a) $log_2\ 740$ **b)** $log_3\ 100$ **c)** $log_5\ 0{,}533$ **d)** $log_8\ 0{,}004$

Comprueba la validez de cada solución con la tecla x^y**.**

a) $log_2\ 740 = \dfrac{log_{10}\ 740}{log_{10}\ 2} = 9{,}53138...$ log 740 ÷ log 2 =

b) $log_3\ 100 = \dfrac{log_{10}\ 100}{log_{10}\ 3} = 4{,}19180...$

c) $log_5\ 0{,}533 = \dfrac{log_{10}\ 0{,}533}{log_{10}\ 5} = -0{,}39096...$

d) $log_8\ 0{,}004 = \dfrac{log_{10}\ 0{,}004}{log_{10}\ 8} = -2{,}65526...$

4. Halla con la calculadora $log_{10}\ 7$ y $log_{10}\ 70$ y explica por qué ambos tienen la misma parte decimal.

$log_{10}\ 7 = 0{,}84509804$

$log_{10}\ 70 = 1{,}84509804$

$$log_{10}\ 7 = log_{10}\left(\frac{70}{10}\right) = log_{10}\ 70 - log_{10}\ 10 = 1{,}84509804 - 1 = 0{,}84509804$$

$$log_{10}\ 70 = log_{10}\ (7 \cdot 10) = log_{10}\ 7 + log_{10}\ 10 = 0{,}84509804 + 1 = 1{,}84509804$$

Como se observa, tienen la misma parte decimal porque:

$log_{10}\ 7 = log_{10}\ 70 - 1 \leftrightarrow log_{10}\ 70 = log_{10}\ 7 + 1$

5. a) Expresa $A = \dfrac{\sqrt[5]{8} \cdot \sqrt[3]{4}}{1\,024}$ como potencia de base 2.

b) Halla $log_2 A$ y comprueba que coincide con: $log_2 \sqrt[5]{8} + log_2 \sqrt[3]{4} - log_2 1\,024$

a) $A = \dfrac{\sqrt[5]{8} \cdot \sqrt[3]{4}}{1024} = \dfrac{2^{3/5} \cdot 2^{2/3}}{2^{10}} = \dfrac{2^{19/15}}{2^{10}} = 2^{-131/15}$

b) $log_2 A = log_2 2^{-131/15} = -\dfrac{131}{15}$

$log_2 \sqrt[5]{8} + log_2 \sqrt[3]{4} - log_2 1024 =$

$= log_2 2^{3/5} + log_2 2^{2/3} - log_2 2^{10} = \dfrac{3}{5} + \dfrac{2}{3} - 10 = \dfrac{9 + 10 - 150}{15} = -\dfrac{131}{15}$

Página 27

Hazlo tú.

a) Expresa como potencia: $\dfrac{\sqrt{3^x}}{9} : \sqrt{\dfrac{1}{3}}$

b) Simplifica: $\dfrac{\sqrt[4]{4}}{\sqrt{2}+1} - \dfrac{\sqrt{162}}{2}$

a) $\dfrac{\sqrt{3^x}}{9} : \sqrt{\dfrac{1}{3}} = \dfrac{3^{x/2}}{3^2} : 3^{-1/2} = 3^{(x-4)/2} : 3^{-1/2} = 3^{((x-4)/2)+(1/2))} = 3^{(x-3)/2}$

b) $\dfrac{\sqrt[4]{4}}{\sqrt{2}+1} - \dfrac{\sqrt{162}}{2} = 2 - \sqrt{2} - \dfrac{9\sqrt{2}}{2} = \dfrac{4-2\sqrt{2}-9\sqrt{2}}{2} = \dfrac{4-11\sqrt{2}}{2} = 2 - \dfrac{11}{2}\sqrt{2}$

- $\sqrt[4]{4} = \sqrt[4]{2^2} = 2^{2/4} = \sqrt{2}$
- $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1} = \dfrac{\sqrt{2}\cdot\left(\sqrt{2}-1\right)}{\left(\sqrt{2}+1\right)\cdot\left(\sqrt{2}-1\right)} = \dfrac{2-\sqrt{2}}{2-1} = 2-\sqrt{2}$
- $\sqrt{162} = \sqrt{2\cdot 3^4} = 9\sqrt{2}$

Hazlo tú. **¿En cuánto se convertiría ese capital al mismo interés anual durante 5 años con periodo de capitalización mensual?**

$$C_F = C\cdot\left(1+\frac{r}{1200}\right)^n = 2\cdot 10^7\cdot\left(1+\frac{3,6}{1200}\right)^{60} = 2\cdot 10^7\cdot\left(\frac{1203,6}{1200}\right)^{60} =$$

$$= 2\cdot 10^7\cdot (1,003)^{60} \approx 2,394\cdot 10^7 \text{ yenes}$$

Hazlo tú. **Calcula x en cada caso:**

a) $\boldsymbol{\log_3 x = \dfrac{1}{2}}$

b) $\boldsymbol{2\log x - \log 4 = -2}$

a) $\log_3 x = \dfrac{1}{2} \rightarrow 3^{1/2} = x \rightarrow x = \sqrt{3}$

b) $2\log x - \log 4 = -2 \rightarrow \log x^2 - \log 4 = -2 \rightarrow \log\dfrac{x^2}{4} = -2 \rightarrow \dfrac{x^2}{4} = 10^{-2} \rightarrow$

$\rightarrow x^2 = \dfrac{4}{10^2} \rightarrow x = \dfrac{2}{10} = \dfrac{1}{5}$

Ejercicios y problemas

Página 28

Practica

Números racionales e irracionales

1. **a) ¿Cuáles de los siguientes números no pueden expresarse como cociente de dos números enteros?**

$$-2;\ 1{,}7;\ \sqrt{3};\ 4{,}\widehat{2};\ -3{,}7\widehat{5};\ 3\pi;\ -2\sqrt{5}$$

b) Expresa como fracción aquellos que sea posible.

c) ¿Cuáles son irracionales?

a) No pueden expresarse como cociente: $\sqrt{3}$; 3π y $-2\sqrt{5}$.

b) $-2 = \dfrac{-4}{2}$; $1{,}7 = \dfrac{17}{10}$; $4{,}\widehat{2} = \dfrac{42-4}{9} = \dfrac{38}{9}$; $-3{,}7\widehat{5} = -\dfrac{375-37}{90} = -\dfrac{338}{90} = -\dfrac{169}{45}$

c) Son irracionales: $\sqrt{3}$, $-2\sqrt{5}$ y 3π.

2. **a) Clasifica en racionales o irracionales.**

$$\frac{\sqrt{3}}{2};\ 0{,}8\widehat{7};\ -\sqrt{4};\ -\frac{7}{3};\ \frac{1}{\sqrt{2}};\ 2\pi$$

b) Ordénalos de menor a mayor.

c) ¿Cuáles son números reales?

a) Racionales: $0{,}8\widehat{7}$; $-\sqrt{4}$; $-\dfrac{7}{3}$ Irracionales: $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$; 2π

b) $-\dfrac{7}{3} < -\sqrt{4} < \dfrac{1}{\sqrt{2}} < \dfrac{\sqrt{3}}{2} < 0{,}8\widehat{7} < 2\pi$

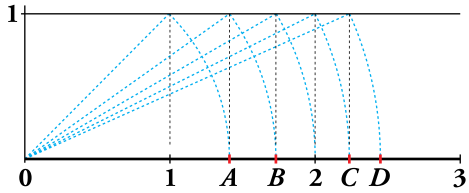
c) Todos son números reales.

3. **Clasifica los siguientes números indicando a cuáles de los conjuntos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ o $\mathbb{R}$ pertenecen:**

$$-4;\ \frac{13}{6};\ \sqrt{5};\ 2{,}\widehat{7};\ 152;\ \pi;\ \frac{1+\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{REALES } (\mathbb{R}) \begin{cases} \text{RACIONALES } (\mathbb{Q}) \begin{cases} \text{ENTEROS } (\mathbb{Z}) \begin{cases} \text{NATURALES } (\mathbb{N}) \rightarrow 152 \\ \text{ENTEROS NEGATIVOS} \rightarrow -4 \end{cases} \\ \text{FRACCIONARIOS} \rightarrow \dfrac{13}{6};\ 2{,}\widehat{7} \end{cases} \\ \text{IRRACIONALES} \rightarrow \sqrt{5};\ \pi;\ \dfrac{1+\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

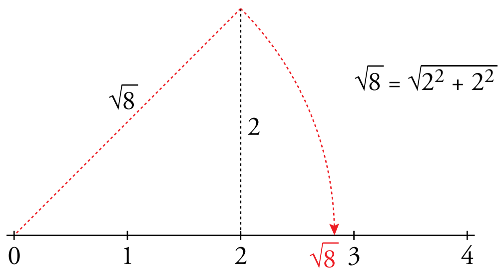
4. **a) ¿Qué números irracionales representan los puntos *A*, *B*, *C* y *D*?**

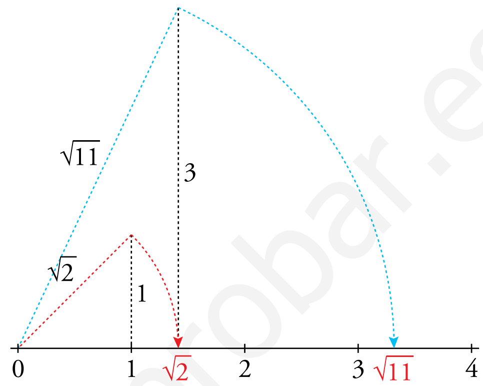


b) Representa $\sqrt{8}$ y $\sqrt{11}$.

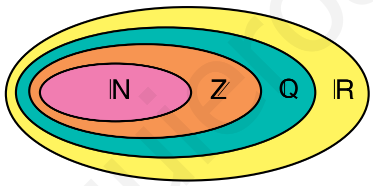
a) $A = \sqrt{2}$ $\qquad B = \sqrt{3}$ $\qquad C = \sqrt{5}$ $\qquad D = \sqrt{6}$

b)





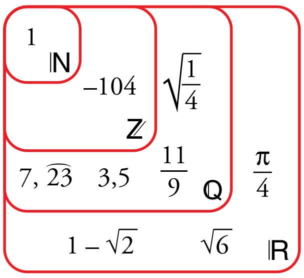
5. **Sitúa los siguientes números en un diagrama como el adjunto:**



1; $7,\widehat{23}$; $1 - \sqrt{2}$;

3,5; $\dfrac{11}{9}$; $\sqrt{\dfrac{1}{4}}$;

$\sqrt{6}$; $\dfrac{\pi}{4}$; –104



Intervalos y semirrectas

6. **Escribe los siguientes conjuntos de números en forma de intervalo o semirrecta:**

a) Mayores que 2 y menores que 7.

b) Comprendidos entre –1 y 3, ambos incluidos.

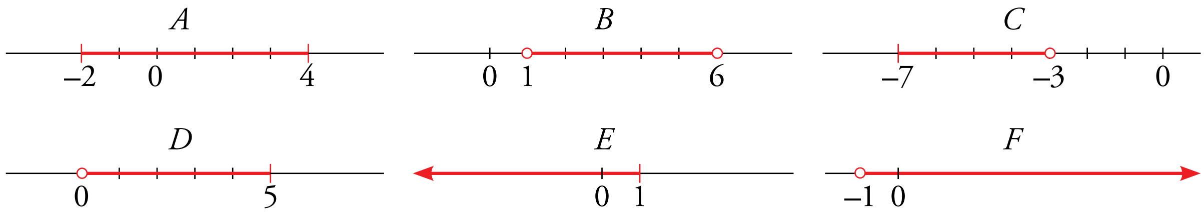
c) Mayores o iguales que 5.

d) Menores que 10.

a) (2, 7) $\qquad$ b) [–1, 3] $\qquad$ c) [5, +∞) $\qquad$ d) (–∞, 10)

7. **Representa en la recta real cada uno de los siguientes intervalos y semirrectas:**

$$A = [-2, 4] \qquad B = (1, 6) \qquad C = [-7, -3)$$
$$D = (0, 5] \qquad E = (-\infty, 1] \qquad F = (-1, +\infty)$$

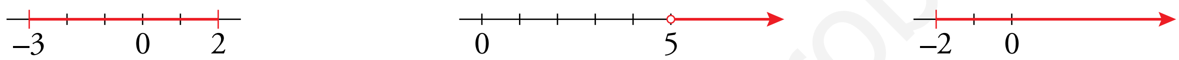


8. **Representa gráficamente y expresa como intervalo o semirrecta estas desigualdades:**

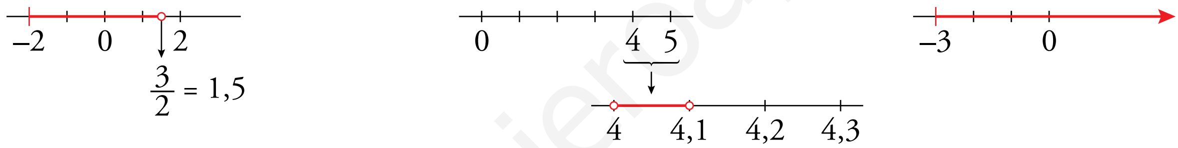
a) $-3 \le x \le 2$ **b)** $5 < x$ **c)** $x \ge -2$

d) $-2 \le x < 3/2$ **e)** $4 < x < 4{,}1$ **f)** $-3 \le x$

a) $-3 \le x \le 2$ $[-3, 2]$ b) $5 < x$ $(5, +\infty)$ c) $x \ge -2$ $[-2, +\infty)$



d) $-2 \le x < \frac{3}{2}$ $\left[-2, \frac{3}{2}\right)$ e) $4 < x < 4{,}1$ $(4; 4{,}1)$ f) $-3 \le x$ $[-3, +\infty)$



9. **Expresa como intervalo o semirrecta y como una desigualdad cada uno de los conjuntos de números representados:**

a) $[-1, 3]$; $-1 \le x \le 3$ b) $(1, 5]$; $1 < x \le 5$

c) $[-2, +\infty)$; $x \ge -2$ d) $(-\infty, 4)$; $x < 4$

10. **a) Indica cuáles de los números siguientes están incluidos en $A = [-3, 7)$ o en $B = (5, +\infty)$:**

$$-3;\ 10;\ 0{,}5;\ 7;\ -4;\ \sqrt{5};\ 6{,}\widehat{3};\ \pi;\ \frac{27}{5};\ \sqrt{48};\ 1-\sqrt{2}$$

b) ¿Cuál de estos intervalos representa a los números incluidos en A y en B?

$$(-3, 5) \qquad [2, 7) \qquad [5, 7] \qquad (5, 7)$$

a) $A = [-3, 7)$ $B = (5, +\infty)$ $A \cup B = [-3, +\infty)$

Los números incluidos en A o en B son: $-3;\ 10;\ 0{,}5;\ 7;\ \sqrt{5};\ 6{,}\widehat{3};\ \pi;\ \frac{27}{5};\ \sqrt{48};\ 1-\sqrt{2}$

Es decir, todos excepto -4.

b) $A \cap B = (5, 7)$

11. **Escribe en forma de intervalo los números que verifican la desigualdad en cada caso:**

a) $-3 < x + 1 < 3$ **b)** $-1 \le x - 4 \le 7$

c) $0 \le x - 5 < 2$ **d)** $5 < 2x - 1 \le 9$

a) $-3 < x + 1 < 3$

$-4 < x < 2$

$(-4, 2)$

b) $-1 \le x - 4 \le 7$

$+3 \le x \le 11$

$[3, 11]$

c) $0 \le x - 5 < 2$

$5 \le x < 7$

$[5, 7)$

d) $5 < 2x - 1 \le 9$

$6 < 2x \le 10$

$3 < x \le 5$

$(3, 5]$

Potencias y raíces

12. **Expresa en forma exponencial.**

a) $\sqrt[5]{x^2}$ **b)** $\sqrt{2}$ **c)** $\sqrt[3]{10^6}$ **d)** $\sqrt[4]{20^2}$

e) $\sqrt[5]{(-3)^3}$ **f)** $\sqrt[4]{a}$ **g)** $\left(\sqrt[5]{x^{-2}}\right)^3$ **h)** $\sqrt[15]{a^5}$

a) $x^{2/5}$ b) $2^{1/2}$ c) 10^2 d) $20^{1/2}$

e) $(-3)^{3/5}$ f) $a^{1/4}$ g) $x^{-6/5}$ h) $a^{1/3}$

13. **Pon en forma de raíz.**

a) $5^{1/2}$ **b)** $(-3)^{2/3}$ **c)** $\left(\frac{4}{3}\right)^{1/3}$

d) $(a^3)^{1/4}$ **e)** $(a^{1/2})^{1/3}$ **f)** $(a^{-1})^{3/5}$

a) $\sqrt{5}$ b) $\sqrt[3]{(-3)^2}$ c) $\sqrt[3]{\frac{4}{3}}$

d) $\sqrt[4]{a^3}$ e) $\sqrt[3]{\sqrt{a}}$ f) $\sqrt[5]{a^{-3}}$

14. **Expresa como potencia y efectúa.**

a) $\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{4}$ **b)** $\sqrt{3} \cdot \sqrt[4]{9}$

c) $3\sqrt[3]{9}$ **d)** $\sqrt{5} : \sqrt[4]{5}$

e) $\sqrt[3]{16} : \sqrt[3]{4}$ **f)** $\sqrt[3]{25} : \sqrt{5}$

a) $\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{2^2} = 2^{1/2} \cdot 2^{2/3} = 2^{7/6}$

b) $\sqrt{3} \cdot \sqrt[4]{3^2} = 3^{1/2} \cdot 3^{2/4} = 3$

c) $3 \cdot \sqrt[3]{3^2} = 3 \cdot 3^{2/3} = 3^{5/3}$

d) $5^{1/2} : 5^{1/4} = 5^{1/4}$

e) $\sqrt[3]{2^4} : \sqrt[3]{2^2} = 2^{4/3} : 2^{2/3} = 2^{2/3}$

f) $\sqrt[3]{5^2} : \sqrt{5} = 5^{2/3} : 5^{1/2} = 5^{1/6}$

Página 29

15. **Expresa los siguientes radicales mediante potencias de exponente fraccionario y simplifica:**

a) $\sqrt[5]{a^2} \cdot \sqrt{a}$ **b)** $\dfrac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{x}}$ **c)** $\dfrac{1}{\sqrt[4]{a^3}}$

a) $\sqrt[5]{a^2} \cdot \sqrt{a} = a^{2/5} \cdot a^{1/2} = a^{9/10}$

b) $\dfrac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{x}} = \dfrac{x^{2/3}}{x^{1/2}} = x^{(2/3)-(1/2)} = x^{1/6}$

c) $\dfrac{1}{\sqrt[4]{a^3}} = a^{-3/4}$

16. **Expresa como potencia y calcula x en cada caso igualando los exponentes de los dos miembros:**

a) $\sqrt{3^{x+1}} = \dfrac{1}{27}$ **b)** $\dfrac{(\sqrt{3})^{-x}}{81} = 1$ **c)** $\dfrac{2^x\sqrt{2}}{\sqrt[3]{4}} = 2$

a) $\sqrt{3^{x+1}} = \dfrac{1}{27} \rightarrow 3^{(x+1)/2} = 3^{-3} \rightarrow \dfrac{x+1}{2} = -3 \rightarrow x = -7$

b) $\dfrac{(\sqrt{3})^{-x}}{81} = 1 \rightarrow 3^{-(x/2)} = 3^4 \rightarrow -\dfrac{x}{2} = 4 \rightarrow x = -8$

c) $\dfrac{2^x\sqrt{2}}{\sqrt[3]{4}} = 2 \rightarrow \dfrac{2^{x+(1/2)}}{2^{2/3}} = 2 \rightarrow x + \dfrac{1}{2} - \dfrac{2}{3} = 1 \rightarrow x = \dfrac{7}{6}$

Radicales

17. **Simplifica.**

a) $\sqrt[4]{3^2}$ **b)** $\sqrt[12]{a^8}$ **c)** $\sqrt[5]{a^{15}}$

d) $\sqrt[8]{a^2b^4}$ **e)** $\sqrt[3]{\sqrt[4]{a^8}}$ **f)** $\sqrt[3]{a^6b^9}$

a) $\sqrt{3}$ b) $\sqrt[3]{a^2}$ c) a^3

d) $\sqrt[4]{ab^2}$ e) $\sqrt[12]{a^8} = \sqrt[3]{a^2}$ f) a^2b^3

18. **Multiplica y simplifica.**

a) $\sqrt{2}\,\sqrt{3}\,\sqrt{6}$ **b)** $\sqrt{a}\,\sqrt[3]{a^4}\,\sqrt[4]{a}$ **c)** $\sqrt{a^{-1}}\,\sqrt[3]{a^{-3}}\,\sqrt[6]{a^5}$

a) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{6} = \sqrt{2 \cdot 3 \cdot 6} = \sqrt{36} = 6$

b) $\sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{a^4} \cdot \sqrt[4]{a} = \sqrt[12]{a^6} \cdot \sqrt[12]{a^{16}} \cdot \sqrt[12]{a^3} = \sqrt[12]{a^{25}} = a^2\,\sqrt[12]{a}$

c) $\sqrt{a^{-1}} \cdot \sqrt[3]{a^{-3}} \cdot \sqrt[6]{a^5} = \sqrt[6]{a^{-3}} \cdot \sqrt[6]{a^{-6}} \cdot \sqrt[6]{a^5} = \sqrt[6]{a^{-4}} = \sqrt[3]{a^{-2}}$

19. **Extrae del radical los factores que sea posible.**

a) $\sqrt[3]{16a^3}$ **b)** $\sqrt[4]{81a^5b^3}$ **c)** $\sqrt{8a^5}$

d) $\sqrt[3]{\dfrac{24}{a^4}}$ **e)** $\sqrt{\dfrac{162}{75}}$ **f)** $\sqrt[5]{\dfrac{9}{32}}$

a) $2a\sqrt[3]{2}$ b) $3a\sqrt[4]{ab^3}$ c) $2a^2\sqrt{2a}$

d) $\dfrac{2}{a}\sqrt[3]{\dfrac{3}{a}}$ e) $\dfrac{9}{5}\sqrt{\dfrac{2}{3}}$ f) $\dfrac{1}{2}\sqrt[5]{9}$

20. **Reduce a índice común y ordena de menor a mayor los radicales siguientes:**

$$\sqrt{7},\ \sqrt[3]{30},\ \sqrt[4]{40},\ \sqrt[6]{81}$$

mín.c.m. (2, 3, 4, 6) = 12

$\sqrt{7} = \sqrt[12]{7^6} = \sqrt[12]{117\,649}$ $\sqrt[3]{30} = \sqrt[12]{30^4} = \sqrt[12]{810\,000}$

$\sqrt[4]{40} = \sqrt[12]{40^3} = \sqrt[12]{64\,000}$ $\sqrt[6]{81} = \sqrt[12]{81^2} = \sqrt[12]{6\,561}$

$$\sqrt[6]{81} < \sqrt[4]{40} < \sqrt{7} < \sqrt[3]{30}$$

21. **Reduce a índice común y efectúa.**

a) $\sqrt[5]{6}\cdot\sqrt{3}$ **b)** $\sqrt[3]{4}:\sqrt{2}$

c) $\sqrt[6]{20}:\sqrt[4]{10}$ **d)** $\left(\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{3}\right):\left(\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt{3}\right)$

a) $\sqrt[10]{6^2\cdot 3^5} = \sqrt[10]{8\,748}$ b) $\sqrt[6]{\dfrac{4^2}{2^3}} = \sqrt[6]{2}$

c) $\sqrt[12]{20^2:10^3} = \sqrt[12]{\dfrac{4}{10}} = \sqrt[12]{\dfrac{2}{5}}$ d) $\sqrt[6]{(2^3\cdot 3^2):(2^2\cdot 3^3)} = \sqrt[6]{\dfrac{2}{3}}$

22. **Divide y simplifica.**

a) $\sqrt{7}:\sqrt{\dfrac{21}{5}}$ **b)** $\sqrt{\dfrac{3}{5}}:\sqrt[4]{\dfrac{5}{3}}$ **c)** $\sqrt{\dfrac{5}{6}}:\sqrt[3]{\dfrac{45}{4}}$

a) $\sqrt{7}:\sqrt{\dfrac{21}{5}} = \sqrt{\dfrac{35}{21}} = \sqrt{\dfrac{5}{3}}$

b) $\sqrt{\dfrac{3}{5}}:\sqrt[4]{\dfrac{5}{3}} = \sqrt[4]{\dfrac{3^2}{5^2}}:\sqrt[4]{\dfrac{5}{3}} = \sqrt[4]{\dfrac{3^3}{5^3}}$

c) $\sqrt{\dfrac{5}{6}}:\sqrt[3]{\dfrac{45}{4}} = \sqrt[6]{\dfrac{5^3}{2^3\cdot 3^3}}:\sqrt[6]{\dfrac{3^4\cdot 5^2}{2^4}} = \sqrt[6]{\dfrac{5^3\cdot 2^4}{2^3\cdot 3^7\cdot 5^2}} = \sqrt[6]{\dfrac{5\cdot 2}{3^7}}$

23. **Efectúa.**

a) $3\sqrt{28}-\sqrt{7}-\sqrt{63}$ **b)** $\sqrt[5]{96}+\sqrt[5]{\frac{3}{32}}$

c) $\frac{\sqrt[3]{81}}{2}+\sqrt[3]{375}-\frac{\sqrt[3]{72}}{\sqrt[3]{3}}$ **d)** $\sqrt{\frac{7}{64}}+\sqrt{\frac{7}{4}}+\sqrt{\frac{4}{7}}$

a) $3\sqrt{28}-\sqrt{7}-\sqrt{63}=3\cdot\sqrt{2^2\cdot 7}-\sqrt{7}-\sqrt{7\cdot 3^2}=3\cdot 2\cdot\sqrt{7}-\sqrt{7}-3\sqrt{7}=2\sqrt{7}$

b) $\sqrt[5]{96}+\sqrt[5]{\frac{3}{32}}=\sqrt[5]{2^5\cdot 3}+\sqrt[5]{\frac{3}{2^5}}=2\sqrt[5]{3}+\frac{\sqrt[5]{3}}{2}=\frac{5\sqrt[5]{3}}{2}$

c) $\frac{\sqrt[3]{81}}{2}+\sqrt[3]{375}-\frac{\sqrt[3]{72}}{\sqrt[3]{3}}=\frac{\sqrt[3]{3^4}}{2}+\sqrt[3]{3\cdot 5^3}-\frac{\sqrt[3]{2^3\cdot 3^2}}{\sqrt[3]{3}}=$

$=\frac{3\sqrt[3]{3}}{2}+5\sqrt[3]{3}-\frac{2\left(\sqrt[3]{3}\right)^{\cancel{2}}}{\cancel{\sqrt[3]{3}}}=\frac{3\sqrt[3]{3}+10\sqrt[3]{3}-4\sqrt[3]{3}}{2}=\frac{9\sqrt[3]{3}}{2}$

d) $\sqrt{\frac{7}{64}}+\sqrt{\frac{7}{4}}+\sqrt{\frac{4}{7}}=\frac{\sqrt{7}}{8}+\frac{\sqrt{7}}{2}+\frac{2}{\sqrt{7}}=\frac{\sqrt{7}}{8}+\frac{\sqrt{7}}{2}+\frac{2\sqrt{7}}{7}=\frac{7\sqrt{7}+28\sqrt{7}+16\sqrt{7}}{56}=\frac{51\sqrt{7}}{56}$

24. **Introduce dentro de la raíz y simplifica.**

a) $5\sqrt{\frac{3}{5}}$ **b)** $\frac{\sqrt{18}}{3}$ **c)** $2\sqrt[3]{\frac{7}{4}}$

d) $2\sqrt[4]{\frac{5}{12}}$ **e)** $\frac{1}{2}\sqrt{12}$ **f)** $\frac{2}{3}\sqrt[3]{\frac{9}{4}}$

a) $\sqrt{\frac{5^2\cdot 3}{5}}=\sqrt{15}$ b) $\sqrt{\frac{18}{3^2}}=\sqrt{2}$ c) $\sqrt[3]{\frac{2^3\cdot 7}{4}}=\sqrt[3]{14}$

d) $\sqrt[4]{\frac{2^4\cdot 5}{12}}=\sqrt[4]{\frac{20}{3}}$ e) $\sqrt{\frac{12}{2^2}}=\sqrt{3}$ f) $\sqrt[3]{\frac{2^3\cdot 9}{3^3\cdot 4}}=\sqrt[3]{\frac{2}{3}}$

25. **Efectúa.**

a) $\left(\sqrt{5}-2\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{5}+2\sqrt{3}\right)$ **b)** $\left(2\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)^2$ **c)** $\left(\sqrt{3\sqrt{2}-4}-\sqrt{3\sqrt{2}+4}\right)^2$

a) $5-4\cdot 3=-7$

b) $4\cdot 5+3-4\sqrt{15}=23-4\sqrt{15}$

c) $\left(\sqrt{3\sqrt{2}-4}\right)^2+\left(\sqrt{3\sqrt{2}+4}\right)^2-2\cdot\sqrt{3\sqrt{2}-4}\cdot\sqrt{3\sqrt{2}+4}=$

$=3\sqrt{2}-4+3\sqrt{2}+4-2\cdot\sqrt{\left(3\sqrt{2}\right)^2-4^2}=6\sqrt{2}-2\cdot\sqrt{18-16}=6\sqrt{2}-2\sqrt{2}=4\sqrt{2}$

26. **Simplifica:**

a) $\dfrac{\sqrt{2}\sqrt[3]{81}}{\sqrt[4]{18}}$ b) $\dfrac{\sqrt{8a}\sqrt[3]{4a^2}}{(\sqrt[4]{2a^5})^2}$ c) $\dfrac{\sqrt{2a\sqrt[3]{2a^2}}}{\sqrt[4]{4a^3}}$

a) $\dfrac{\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{81}}{\sqrt[4]{18}} = \dfrac{\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{3^4}}{\sqrt[4]{3^2\cdot 2}} = \dfrac{2^{1/2}\cdot 3^{4/3}}{2^{1/4}\cdot 3^{1/2}} = 2^{1/4}\cdot 3^{5/6}$

b) $\dfrac{\sqrt{8a}\,\sqrt[3]{4a^2}}{\left(\sqrt[4]{2a^5}\right)^2} = \dfrac{2^{3/2}\cdot a^{1/2}\cdot 2^{2/3}\cdot a^{2/3}}{2^{1/2}\cdot a^{5/2}} = 2^{\frac{3}{2}+\frac{2}{3}-\frac{1}{2}}\cdot a^{\frac{1}{2}+\frac{2}{3}-\frac{5}{2}} = 2^{\frac{5}{3}}\cdot a^{-\frac{4}{3}}$

c) $\dfrac{\sqrt{2a\sqrt[3]{2a^2}}}{\sqrt[4]{4a^3}} = \dfrac{2^{1/2}\cdot a^{1/2}\cdot 2^{1/6}\cdot a^{2/6}}{2^{2/4}\cdot a^{3/4}} = 2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{6}-\frac{2}{4}}\cdot a^{\frac{1}{2}+\frac{2}{6}-\frac{3}{4}} = 2^{\frac{1}{6}}\cdot a^{\frac{1}{12}}$

27. **Racionaliza, y simplifica si es posible.**

a) $\dfrac{3}{\sqrt{3}}$ b) $\dfrac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}$ c) $\dfrac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{10}}$ d) $\dfrac{2}{\sqrt[3]{5}}$ e) $\dfrac{3}{2\sqrt[3]{6^2}}$ f) $\dfrac{2}{\sqrt[5]{81}}$

a) $\dfrac{3}{\sqrt{3}} = \dfrac{3\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}} = \dfrac{3\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}$

b) $\dfrac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}} = \dfrac{2\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}}{3\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \dfrac{2\sqrt{6}}{3\cdot 2} = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$

c) $\dfrac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{10}} = \dfrac{\left(2+\sqrt{2}\right)\cdot\sqrt{10}}{\sqrt{10}\cdot\sqrt{10}} = \dfrac{2\sqrt{10}+\sqrt{20}}{10}$

d) $\dfrac{2}{\sqrt[3]{5}} = \dfrac{2\sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt[3]{5^2}} = \dfrac{2\cdot\sqrt[3]{5^2}}{5}$

e) $\dfrac{3}{2\sqrt[3]{6^2}} = \dfrac{3\sqrt[3]{6}}{2\cdot\sqrt[3]{6^2}\cdot\sqrt[3]{6}} = \dfrac{3\sqrt[3]{6}}{2\cdot 6} = \dfrac{\sqrt[3]{6}}{4}$

f) $\dfrac{2}{\sqrt[5]{81}} = \dfrac{2}{\sqrt[5]{3^4}} = \dfrac{2\cdot\sqrt[5]{3}}{\sqrt[5]{3^4}\cdot\sqrt[5]{3}} = \dfrac{2\cdot\sqrt[5]{3}}{3}$

28. **Racionaliza, y simplifica si es posible.**

a) $\dfrac{3}{1+\sqrt{3}}$ b) $\dfrac{1+\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}$ c) $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+1}$

d) $\dfrac{11}{2\sqrt{2}+3}$ e) $\dfrac{4a}{\sqrt[4]{2a^3b^2}}$ f) $\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$

a) $\dfrac{3}{1+\sqrt{3}} = \dfrac{3\cdot(1-\sqrt{3})}{(1+\sqrt{3})\,(1-\sqrt{3})} = \dfrac{3\cdot(1-\sqrt{3})}{1-3} = -\dfrac{3\cdot(1-\sqrt{3})}{2}$

b) $\dfrac{1+\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}} = \dfrac{(1+\sqrt{2})\cdot(1+\sqrt{2})}{(1-\sqrt{2})\cdot(1+\sqrt{2})} = \dfrac{(1+\sqrt{2})^2}{1-2} = -(1+\sqrt{2})^2 = -3+2\sqrt{2}$

c) $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+1} = \dfrac{\sqrt{a}\,(\sqrt{a}-1)}{(\sqrt{a}+1)\cdot(\sqrt{a}-1)} = \dfrac{a-\sqrt{a}}{a-1}$

d) $\dfrac{11}{2\sqrt{2}+3} = \dfrac{11\cdot(2\sqrt{2}-3)}{(2\sqrt{2}+3)\cdot(2\sqrt{2}-3)} = \dfrac{11\cdot(2\sqrt{2}-3)}{(2\sqrt{2})^2-3^2} = \dfrac{11\cdot(2\sqrt{2}-3)}{8-9} = -11\,(2\sqrt{2}-3)$

e) $\dfrac{4a}{\sqrt[4]{2a^3b^2}} = \dfrac{4a\sqrt[4]{2^3ab^2}}{\sqrt[4]{2a^3b^2}\cdot\sqrt[4]{2^3ab^2}} = \dfrac{4a\sqrt[4]{2^3ab^2}}{2ab} = \dfrac{2\sqrt[4]{2^2ab^2}}{b}$

f) $\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} = \dfrac{(\sqrt{5}-\sqrt{3})\cdot(\sqrt{5}-\sqrt{3})}{(\sqrt{5}+\sqrt{3})\cdot(\sqrt{5}-\sqrt{3})} = \dfrac{(\sqrt{5}-\sqrt{3})^2}{5-3} = \dfrac{(\sqrt{5}-\sqrt{3})^2}{2} = \dfrac{8-2\sqrt{15}}{2} = 4-\sqrt{15}$

29. **Simplifica.**

a) $\frac{6}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{6}\sqrt{2}}{4} - \frac{5}{2\sqrt{3}} - \sqrt[4]{9}$

b) $\frac{1}{\sqrt{2}} + \sqrt[6]{8} - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3$

c) $\frac{(\sqrt{3}-1)^2}{\sqrt{3}-1} - \frac{\sqrt{24}-\sqrt{6}}{\sqrt{2}}$

d) $\frac{\sqrt[3]{8a}+\sqrt[3]{a^4}}{\sqrt[3]{a}}$

a) • $\frac{6}{\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}$

• $\frac{5}{2\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{2\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{6}$

• $\frac{\sqrt{6}\cdot\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{3\cdot 2\cdot 2}}{4} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

• $\sqrt[4]{9} = \sqrt[4]{3^2} = 3^{1/2} = \sqrt{3}$

$$\frac{6}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{6}\sqrt{2}}{4} - \frac{5}{2\sqrt{3}} - \sqrt[4]{9} = 2\sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{5\sqrt{3}}{6} - \sqrt{3} = \left(2 + \frac{1}{2} - \frac{5}{6} - 1\right)\cdot\sqrt{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

b) • $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

• $\sqrt[6]{8} = \sqrt[6]{2^3} = 2^{1/2} = \sqrt{2}$

• $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 = \frac{2\sqrt{2}}{8} = \frac{\sqrt{2}}{4}$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} + \sqrt[6]{8} - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 = \frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{4} = \left(\frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{4}\right)\cdot\sqrt{2} = \frac{5}{4}\sqrt{2}$$

c) • $\frac{(\sqrt{3}-1)^2}{\sqrt{3}-1} = \sqrt{3}-1$

• $\frac{\sqrt{24}-\sqrt{6}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2^3\cdot 3}-\sqrt{6}}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2\cdot 3}-\sqrt{6}}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{6}-\sqrt{6}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{12}}{2} =$

$= \frac{\sqrt{2^2\cdot 3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$

$$\frac{(\sqrt{3}-1)^2}{\sqrt{3}-1} - \frac{\sqrt{24}-\sqrt{6}}{\sqrt{2}} = \sqrt{3} - 1 - \sqrt{3} = -1$$

d) $\frac{\sqrt[3]{8a}+\sqrt[3]{a^4}}{\sqrt[3]{a}} = \frac{\sqrt[3]{2^3 a}+\sqrt[3]{a^3\cdot a}}{\sqrt[3]{a}} = \frac{2\sqrt[3]{a}+a\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{a}} = \frac{(2+a)\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{a}} = 2 + a$

Números aproximados. Notación científica

30. **Da una cota del error absoluto y una cota del error relativo de las siguientes aproximaciones:**

a) $\frac{22}{7} \approx 3$ **b)** $\pi \approx 3{,}14$ **c)** $\sqrt{3} \approx 1{,}732$ **d)** $\Phi \approx 1{,}6$

a) E.A. < 0,5
E.R. < 0,16

b) E.A. < 0,005
E.R. < 0,0016

c) E.A. < 0,0005
E.R. < 0,00016

d) E.A. < 0,05
E.R. < 0,016

31. **Da una cota del error absoluto y una cota del error relativo de estas aproximaciones sobre los presupuestos de algunos equipos deportivos:**

a) 128 mil euros **b) 25 millones de euros**

c) 648 500 € **d) 3 200 €**

a) Error absoluto < 500 €
Error relativo < 0,0039

b) Error absoluto < 500 000 €
Error relativo < 0,02

c) Error absoluto < 50 €
Error relativo < 0,000077

d) Error absoluto < 50 €
Error relativo < 0,0156

32. **Da una cota del error absoluto de estas aproximaciones y compara sus errores relativos:**

a) $8 \cdot 10^5$ **b)** $5{,}23 \cdot 10^6$ **c)** $1{,}372 \cdot 10^7$

d) $2{,}5 \cdot 10^{-4}$ **e)** $1{,}7 \cdot 10^{-6}$ **f)** $4 \cdot 10^{-5}$

a) $5 \cdot 10^4$ b) $5 \cdot 10^3$ c) $5 \cdot 10^3$

d) $5 \cdot 10^{-6}$ e) $5 \cdot 10^{-8}$ f) $5 \cdot 10^{-6}$

El menor error relativo se da en c), y el mayor, en f).

33. **Calcula mentalmente.**

a) $(1{,}5 \cdot 10^7) \cdot (2 \cdot 10^5)$ **b)** $(3 \cdot 10^6) : (2 \cdot 10^{11})$

c) $(4 \cdot 10^{-7}) : (2 \cdot 10^{-12})$ **d)** $\sqrt{4 \cdot 10^8}$

a) $3 \cdot 10^{12}$ b) $1{,}5 \cdot 10^{-5}$

c) $2 \cdot 10^5$ d) $2 \cdot 10^4$

Página 30

34. **Efectúa a mano utilizando la notación científica y comprueba, después, con la calculadora con 3 cifras significativas dando una cota del error absoluto cometido.**

a) $(3{,}5 \cdot 10^7) \cdot (4 \cdot 10^8)$ **b)** $(5 \cdot 10^{-8}) \cdot (2{,}5 \cdot 10^5)$

c) $(1{,}2 \cdot 10^7) : (5 \cdot 10^{-6})$ **d)** $(6 \cdot 10^{-7})^2$

e) $5{,}3 \cdot 10^{12} - 3 \cdot 10^{11}$ **f)** $3 \cdot 10^{-5} + 8{,}2 \cdot 10^{-6}$

g) $6 \cdot 10^{-9} - 5 \cdot 10^{-8}$ **h)** $7{,}2 \cdot 10^8 + 1{,}5 \cdot 10^{10}$

a) $14 \cdot 10^{15} = 1{,}4 \cdot 10^{16}$

b) $12{,}5 \cdot 10^{-3} = 1{,}25 \cdot 10^{-2}$

c) $0{,}24 \cdot 10^{13} = 2{,}4 \cdot 10^{12}$

d) $36 \cdot 10^{-14} = 3{,}6 \cdot 10^{-13}$

e) $53 \cdot 10^{11} - 3 \cdot 10^{11} = 50 \cdot 10^{11} = 5 \cdot 10^{12}$

f) $30 \cdot 10^{-6} + 8{,}2 \cdot 10^{-6} = 38{,}2 \cdot 10^{-6} = 3{,}82 \cdot 10^{-5}$

g) $6 \cdot 10^{-9} - 50 \cdot 10^{-9} = -44 \cdot 10^{-9} = -4{,}4 \cdot 10^{-8}$

h) $7{,}2 \cdot 10^8 + 150 \cdot 10^8 = 157{,}2 \cdot 10^8 = 1{,}572 \cdot 10^{10}$

Logaritmos

35. **Aplica la definición de logaritmo y calcula.**

a) $log_2\, 64$ **b)** $log_2\, 16$ **c)** $log_2 \frac{1}{4}$

d) $log_2 \sqrt{2}$ **e)** $log_3\, 243$ **f)** $log_3 \frac{1}{27}$

g) $log_3 \sqrt[3]{9}$ **h)** $log\, 0{,}001$ **i)** $log_5\, 0{,}2$

a) $log_2\, 64 = x \rightarrow 2^x = 64 \rightarrow x = 6$

b) $log_2\, 16 = x \rightarrow 2^x = 16 \rightarrow x = 4$

c) $log_2 \frac{1}{4} = x \rightarrow 2^x = \frac{1}{4} \rightarrow x = -2$

d) $log_2 \sqrt{2} = x \rightarrow 2^x = \sqrt{2} \rightarrow x = \frac{1}{2}$

e) $log_3\, 243 = x \rightarrow 3^x = 243 \rightarrow x = 5$

f) $log_3 \frac{1}{27} = x \rightarrow 3^x = \frac{1}{27} \rightarrow x = -3$

g) $log_3 \sqrt[3]{9} = x \rightarrow 3^x = \sqrt[3]{9} = 3^{2/3} \rightarrow x = \frac{2}{3}$

h) $log\, 0{,}001 = x \rightarrow 10^x = 0{,}001 \rightarrow x = -3$

i) $log_5\, 0{,}2 = x \rightarrow 5^x = 0{,}2 = \frac{1}{5} \rightarrow x = -1$

36. **Halla con la calculadora.**

a) $\boldsymbol{log_2 23{,}4}$ **b)** $\boldsymbol{log_3 543}$

c) $\boldsymbol{log_5 0{,}06}$ **d)** $\boldsymbol{log_6 20{,}8}$

e) $\boldsymbol{log_5 \sqrt{123}}$ **f)** $\boldsymbol{log_2 0{,}87^2}$

a) $log_2 23{,}4 = \dfrac{log\ 23{,}4}{log\ 2} = 4{,}548$

b) $log_3 543 = \dfrac{log\ 543}{log\ 3} = 5{,}732$

c) $log_5 0{,}06 = \dfrac{log\ 0{,}06}{log\ 5} = -1{,}748$

d) $log_6 20{,}8 = \dfrac{log\ 20{,}8}{log\ 6} = 1{,}694$

e) $log_5 \sqrt{123} = \dfrac{log \sqrt{123}}{log\ 5} = \dfrac{\frac{1}{2} \cdot log\ 123}{log\ 5} = 1{,}495$

f) $log_2 0{,}87^2 = \dfrac{2\ log\ 0{,}87}{log\ 2} = -0{,}402$

37. **Calcula la base de los siguientes logaritmos:**

a) $\boldsymbol{log_b 10\,000 = 2}$ **b)** $\boldsymbol{log_b 125 = 3}$

c) $\boldsymbol{log_b \frac{1}{4} = -1}$ **d)** $\boldsymbol{log_b 2\sqrt{2} = \frac{1}{2}}$

a) $log_b 10\,000 = 2 \rightarrow b^2 = 10\,000 \rightarrow b = 100$

b) $log_b 125 = 3 \rightarrow b^3 = 125 \rightarrow b = 5$

c) $log_b \dfrac{1}{4} = -1 \rightarrow b^{-1} = \dfrac{1}{4} \rightarrow b = 4$

d) $log_b 2\sqrt{2} = \dfrac{1}{2} \rightarrow b^{1/2} = 2\sqrt{2} \rightarrow b = 8$

38. **Calcula aplicando la definición de logaritmo:**

$$\boldsymbol{log_4 16^3 + log_4 2 + log\ 0{,}0001 + log \frac{\sqrt[3]{10}}{100}}$$

- $log_4 16^3 = 3 \cdot log_4 16 = 3 \cdot log_4 4^2 = 3 \cdot 2 = 6$
- $log_4 2 = \dfrac{1}{2}$ ya que $4^{1/2} = \sqrt{4} = 2$
- $log\ 0{,}0001 = -4$ ya que $10^{-4} = 0{,}0001$
- $log \dfrac{\sqrt[3]{10}}{100} = \dfrac{1}{3} log\ 10 - log\ 100 = \dfrac{1}{3} - 2 = -\dfrac{5}{3}$

Luego el resultado será: $6 + \dfrac{1}{2} - 4 - \dfrac{5}{3} = \dfrac{5}{6}$

39. **Utiliza las propiedades de los logaritmos, como en el ejemplo, para obtener el valor de las expresiones siguientes:**

• $\boldsymbol{log\ 20 + log\ 50 = log\ 20 \cdot 50 = log\ 1\,000 = 3}$

a) $\boldsymbol{log_2\ 400 - log_2\ 25}$

b) $\boldsymbol{log_2\ 288 - 2log_2\ 6}$

c) $\boldsymbol{log\ 4 + log\ 0{,}025}$

d) $\boldsymbol{log_3\ 0{,}2 + log_3\ 405}$

a) $log_2\ 400 - log_2\ 25 = log_2 \dfrac{400}{25} = log_2\ 16 = 4$

b) $log_2\ 288 - 2log_2\ 6 = log_2 \dfrac{288}{6^2} = log_2\ 8 = 3$

c) $log\ 4 + log\ 0{,}025 = log\ (4 \cdot 0{,}025) = log\ (0{,}1) = -1$

d) $log_3\ 0{,}2 + log_3\ 405 = log_3\ (0{,}2 \cdot 405) = log_3\ 81 = 4$

Aplica lo aprendido

40. **El volumen de un cilindro de 5 cm de altura es 60 π cm³.**

a) ¿Cuánto mide su radio?

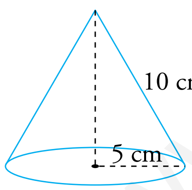
b) Calcula su área lateral. Da en ambos casos el valor exacto (utiliza radicales y π).

a) Volumen cilindro = Área de la base × altura

$$60\pi = \pi \cdot r^2 \cdot 5 \rightarrow r^2 = \frac{60\pi}{5\pi} = 12 \rightarrow r = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}\ \text{cm}$$

b) Área lateral $= 2\pi r h = 2 \cdot \pi \cdot 2\sqrt{3} \cdot 5 = 20\sqrt{3}\pi\ \text{cm}^2$

41. **Calcula el área total y el volumen de un cono de 5 cm de radio y 10 de generatriz. Da el valor exacto.**



Altura $= \sqrt{10^2 - 5^2} = \sqrt{75} = 5\sqrt{3}\ \text{cm}$

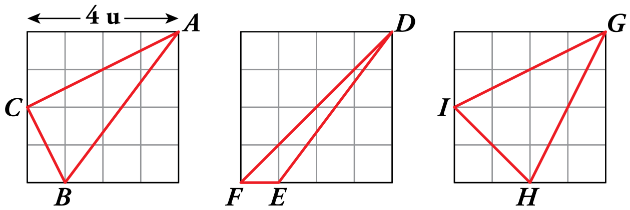
Área lateral $= \pi R g = \pi \cdot 5 \cdot 10 = 50\pi\ \text{cm}^2$

Área base $= \pi R^2 = 25\pi\ \text{cm}^2$

Área total $= 50\pi + 25\pi = 75\pi\ \text{cm}^2$

$$\text{Volumen} = \frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{1}{3}\pi \cdot 25 \cdot 5\sqrt{3} = \frac{125\sqrt{3}\pi}{3}\ \text{cm}^3$$

42. **Calcula el perímetro de los triángulos *ABC*, *DEF* y *GHI*. Expresa el resultado con radicales.**



ABC $\overline{AC} = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$; $\overline{AB} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$; $\overline{BC} = \sqrt{2^2 + 1} = \sqrt{5}$

Perímetro de $ABC = 2\sqrt{5} + 5 + \sqrt{5} = 5 + 3\sqrt{5}$ u

DFE $\overline{DF} = \sqrt{4^2 + 4^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$; $\overline{DE} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$; $\overline{FE} = 1$

Perímetro de $DFE = 4\sqrt{2} + 5 + 1 = 6 + 4\sqrt{2}$ u

GHI $\overline{GH} = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$; $\overline{GI} = \overline{GH} = 2\sqrt{5}$; $\overline{HI} = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$

Perímetro de $GHI = 2\sqrt{5} + 2\sqrt{5} + 2\sqrt{2} = 4\sqrt{5} + 2\sqrt{2}$ u

43. **Expresa como intervalo los números que verifican cada una de las siguientes desigualdades:**

a) $|x| < 3$ **b)** $|x - 1| \le 5$ **c)** $|x + 3| < 4$

¿Cómo expresarías los números que verifican las desigualdades contrarias a las anteriores? Es decir:

$$|x| \ge 3 \qquad |x - 1| > 5 \qquad |x + 3| \ge 4$$

a) $|x| < 3 \to -3 < x < 3 \to x \in (-3, 3)$

b) $|x - 1| \le 5 \to -5 \le x - 1 \le 5 \to -4 \le x \le 6 \to x \in [-4, 6]$

c) $|x + 3| < 4 \to -4 < x + 3 < 4 \to -7 < x < 1 \to x \in (-7, 1)$

Cuando las desigualdades son contrarias a las anteriores, se representarán mediante la unión de dos intervalos:

$$|x| \ge 3 \to \left\{\begin{matrix} x \ge 3 & \to & x \in [3, +\infty) \\ x \le -3 & \to & x \in (-\infty, -3] \end{matrix}\right\} \to x \in (-\infty, -3] \cup [3, +\infty)$$

$$|x - 1| > 5 \to \left\{\begin{matrix} x - 1 > 5 & \to & x > 6 & \to & x \in (6, +\infty) \\ x - 1 < -5 & \to & x < -4 & \to & x \in (-\infty, -4) \end{matrix}\right\} \to x \in (-\infty, -4) \cup (6, +\infty)$$

$$|x + 3| \ge 4 \to \left\{\begin{matrix} x + 3 \ge 4 & \to & x \ge 1 & \to & x \in [1, +\infty) \\ x + 3 \le -4 & \to & x \le -7 & \to & x \in (-\infty, -7] \end{matrix}\right\} \to x \in (-\infty, -7] \cup [1, +\infty)$$

Fíjate que al coger las desigualdades contrarias, cogemos todos los números reales excepto los que hemos cogido en los intervalos definidos anteriormente.

44. **Averigua para qué valor de *x* se pueden calcular las siguientes raíces:**

a) $\sqrt{x - 7}$ **b)** $\sqrt{5 - x}$ **c)** $\sqrt{-x}$ **d)** $\sqrt{x^2 + 1}$

a) $x - 7 \ge 0 \to x \ge 7 \to x \in [7, +\infty)$

b) $5 - x \ge 0 \to -x \ge -5 \to x \le 5 \to x \in (-\infty, 5]$

c) $-x \ge 0 \to x \le 0 \to x \in (-\infty, 0]$

d) $x^2 + 1 \ge 0 \to x \in (-\infty, +\infty)$

45. **¿Cuál de los números $1 - \sqrt{3}$ o $3 + \sqrt{2}$ es solución de la ecuación $x^2 - 6x + 7 = 0$?**

- $(1 - \sqrt{3})^2 - 6 \cdot (1 - \sqrt{3}) + 7 = 1 + 3 - 2\sqrt{3} - 6 + 6\sqrt{3} + 7 = 5 + 4\sqrt{3} \neq 0$

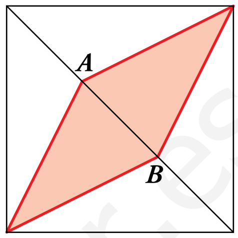
  El número $(1 - \sqrt{3})$ no es solución.

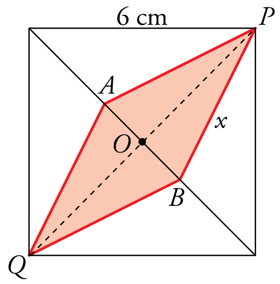
- $(3 + \sqrt{2})^2 - 6 \cdot (3 + \sqrt{2}) + 7 = 9 + 2 + 6\sqrt{2} - 18 - 6\sqrt{2} + 7 = 0$

  El número $(3 + \sqrt{2})$ es solución.

46. **Los puntos A y B dividen la diagonal del cuadrado en tres partes iguales.**

Si el área del cuadrado es 36 cm², ¿cuánto medirá el lado del rombo? Da el valor exacto.





Área del cuadrado $= l^2 = 36 \to l = 6$ cm

Diagonal del cuadrado: $d = \sqrt{6^2 + 6^2} = 6\sqrt{2}$ cm

$\overline{AB} = \frac{1}{3} 6\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$ cm $\to$ $\overline{OB} = \frac{1}{2} 2\sqrt{2} = \sqrt{2}$ cm

$\overline{OP} = \frac{d}{2} = \frac{6\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$ cm

Lado del rombo: $x = \sqrt{\overline{OP}^2 + \overline{OB}^2} = \sqrt{(3\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$ cm

47. **Si $log\, x = 1{,}3$ y $log\, y = 0{,}8$, calcula:**

a) $log\,(x \cdot y)$ **b)** $log\,(x\sqrt{y})$ **c)** $log\,\frac{y}{x^2}$ **d)** $log\,\sqrt{\frac{x}{y}}$

a) $log\,(x \cdot y) = log\,x + log\,y = 1{,}3 + 0{,}8 = 2{,}1$

b) $log\,(x\sqrt{y}) = log\,x + \frac{1}{2}\,log\,y = 1{,}3 + \frac{0{,}8}{2} = 1{,}3 + 0{,}4 = 1{,}7$

c) $log\left(\frac{y}{x^2}\right) = log\,y - 2log\,x = 0{,}8 - 2 \cdot 1{,}3 = 0{,}8 - 2{,}6 = -1{,}8$

d) $log\,\sqrt{\frac{x}{y}} = \frac{1}{2}\,log\,\frac{x}{y} = \frac{1}{2}\,(log\,x - log\,y) = \frac{1}{2}(1{,}3 - 0{,}8) = \frac{1}{2} \cdot 0{,}5 = 0{,}25$

48. **Si $A = \frac{8x^2}{\sqrt{y}}$, calcula $log_2 A$ sabiendo que $log_2 x = 1{,}5$ y $log_2 y = -0{,}6$.**

$log_2 \frac{8x^2}{\sqrt{y}} = log_2 8x^2 - log_2 \sqrt{y} = log_2 8 + 2log_2 x - \frac{1}{2} log_2 y =$

$= 3 + 2 \cdot 1{,}5 - \frac{1}{2} \cdot (-0{,}6) = 3 + 3 + 0{,}3 = 6{,}3$

49. **Transforma estas expresiones en otras equivalentes tomando logaritmos:**

a) $M = 10xy^3$ **b)** $N = \dfrac{z^3 y}{x^2}$ **c)** $P = x^2\sqrt{yz}$

a) $log\ M = log\ (10xy^3) = log\ 10 + log\ x + 3log\ y = 1 + log\ x + 3log\ y$

b) $log\ N = log\ \dfrac{z^3 y}{x^2} = log\ (z^3 y) - log\ (x^2) = log\ (z^3) + log\ (y) - 2log\ x = 3log\ z + log\ y - 2log\ x$

c) $log\ P = log\ (x^2\sqrt{yz}) = log\ x^2 + log\ (\sqrt{yz}) = 2log\ x + \dfrac{1}{2}log\ (yz) = 2log\ x + \dfrac{1}{2}(log\ y + log\ z) =$

$= 2log\ x + \dfrac{1}{2}log\ y + \dfrac{1}{2}log\ z$

50. **Expresa** M, **en cada caso, sin logaritmos:**

a) $log\ M = log\ (x - 3) + 2log\ x$

b) $log\ M = log\ (x + 1) - log\ y + log\ 3$

a) $log\ M = log\ (x - 3) + 2log\ x = log\ (x - 3) + log\ (x^2) = log\ [(x - 3) \cdot x^2]$

Luego: $M = x^2(x - 3)$

b) $log\ M = log\ (x + 1) - log\ y + log\ 3 = log\ \dfrac{3\,(x + 1)}{y}$

Luego: $M = \dfrac{3\,(x + 1)}{y}$

Página 31

Resuelve problemas

51. **Una roca de piedra caliza pesa 830 g. La masa de cada molécula de esta piedra es, aproximadamente, $1{,}66 \cdot 10^{-22}$ g. A causa de la erosión, la piedra pierde 10^{13} moléculas cada segundo. Si la erosión se mantiene constante, ¿cuándo desaparecerá la piedra por completo? Da una cota del error absoluto.**

Cada segundo pierde $10^{13} \cdot (1{,}66 \cdot 10^{-22})$ g $= 1{,}66 \cdot 10^{-9}$ g

Para que desaparezca la piedra: $830 = 1{,}66 \cdot 10^{-9} \cdot x$, donde x son los segundos que pasan.

$$x = \frac{830}{1{,}66 \cdot 10^{-9}} = 500 \cdot 10^{9} = 5 \cdot 10^{11} \text{ s}$$

Tardará en desaparecer, aproximadamente, $5 \cdot 10^{11}$ segundos.

Error absoluto $< 5 \cdot 10^{10}$

52. **Durante los años de la crisis financiera, una vivienda, que costaba 250 000 € en 2008, se fue devaluando un 4 % anual durante 5 años. A partir de 2013 subió un 3,5 % hasta que se vendió 2 años después.**

a) ¿Cuál fue el precio de venta? Exprésalo en miles de euros y da una cota del error absoluto y una cota del error relativo cometido.

b) ¿Cuál fue el índice de variación? Di si corresponde a un aumento o a una disminución.

a) $250\,000 \cdot (0{,}96)^5 \cdot (1{,}035)^2 = 218\,361{,}90$ €

El precio de venta fue de unos 218 mil euros.

Error absoluto < 500 €

Error relativo $< 0{,}002 = 0{,}2\,\%$

b) Índice de variación total $= (0{,}96)^5 \cdot (1{,}035)^2 = 0{,}873$, que corresponde a una disminución.

53. **Durante 2012, el volumen de agua distribuido a los hogares españoles fue 2 309 hm³, que supuso el 69,2 % del total. La industria utilizó el 21,3 %, y el resto fue para el consumo municipal.**

a) Si la población española era de 46,77 millones, ¿cuál fue el consumo medio por habitante y día?

b) ¿Cuántos litros utilizaron los ayuntamientos?

Da una cota del error absoluto y otra del error relativo en cada medida.

a) $\dfrac{2\,309}{46{,}77 \cdot 10^{6}} = 49{,}37 \cdot 10^{-6}$ hm³/habitante durante 2012

2012 fue bisiesto $\rightarrow$ 266 días

$49{,}37 \cdot 10^{-6}$ hm³ $= 49{,}37 \cdot 10^{-6} \cdot 10^{6}$ m³ $= 49{,}37$ m³

$\dfrac{49{,}37}{366} = 0{,}13$ m³/habitante y día

Error absoluto $< 0{,}005$ m³

Error relativo $< \dfrac{0{,}005}{0{,}13} < 0{,}038 = 3{,}8\,\%$

b) $69{,}2\,\%$ de $x = 2\,309\ \text{hm}^3 \ \rightarrow\ x = 3\,336{,}71\ \text{hm}^3$

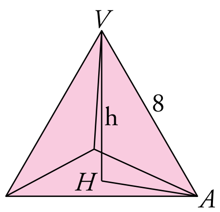
Los ayuntamientos utilizaron el $100 - 69{,}2 - 21{,}3 = 9{,}5\,\%$.

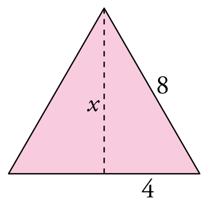
$9{,}5\,\%$ de $3\,336{,}71\ \text{hm}^3 = 317\ \text{hm}^3 = 317 \cdot 10^9$ litros

Error absoluto $< 0{,}0005 \cdot 10^9 = 5 \cdot 10^5$ litros

Error relativo $< \dfrac{5 \cdot 10^5}{317 \cdot 10^9} = 0{,}016 \cdot 10^{-4} = 0{,}00015\,\%$

54. **Calcula la altura de un tetraedro regular de 8 cm de arista. Expresa el resultado con radicales.**





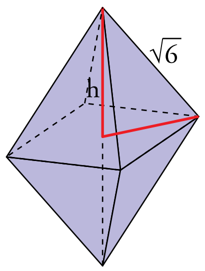
Altura de una cara:

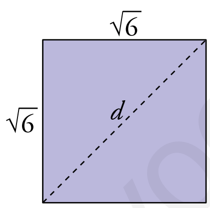
$x = \sqrt{64 - 16} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$ cm

$\overline{AH} = \dfrac{2}{3} \cdot 4\sqrt{3} = \dfrac{8\sqrt{3}}{3}$ cm

Altura del tetraedro: $\text{h} = \sqrt{8^2 - \left(\dfrac{8\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{64 - \dfrac{192}{4}} = \sqrt{64 - 48} = \sqrt{16} = 4$ cm

55. **Calcula el volumen de un octaedro regular cuya arista mide $\sqrt{6}$ cm. Expresa el resultado con radicales.**





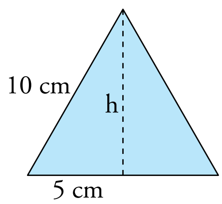
$d = \sqrt{6 + 6} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ cm

$\dfrac{d}{2} = \sqrt{3}$ cm

Altura de la pirámide $= \sqrt{(\sqrt{6})^2 - (\sqrt{3})^2} = \sqrt{3}$ cm

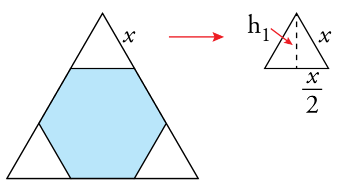
Volumen del octaedro $= 2\left(\dfrac{1}{3}(\sqrt{6})^2\sqrt{3}\right) = 4\sqrt{3}\ \text{cm}^3$

56. **En un triángulo equilátero de 10 cm de lado, se cortan de las esquinas triángulos equiláteros de lado x y así se obtiene un hexágono. Calcula el valor de x para que el área de ese hexágono sea $10\sqrt{3}\ \text{cm}^2$.**



$10^2 = \text{h}^2 + 5^2 \ \rightarrow\ \text{h}^2 = 100 - 25 = 75 \ \rightarrow\ \text{h} = \sqrt{75} = \sqrt{5^2 \cdot 3} = 5\sqrt{3}$

Área triángulo $= \dfrac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2} = \dfrac{10 \cdot 5\sqrt{3}}{2} = 25\sqrt{3}\ \text{cm}^2$



$x^2 = \text{h}_1{}^2 + \left(\dfrac{x}{2}\right)^2$

$\text{h}_1{}^2 = x^2 - \dfrac{x^2}{4} = \dfrac{3x^2}{4}$

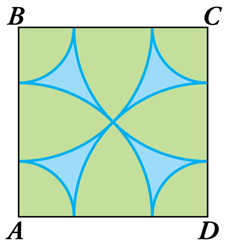
$\text{h}_1 = \sqrt{\dfrac{3x^2}{4}} = \dfrac{\sqrt{3}\,x}{2}$

$$\text{Área triángulo que quitamos} = \frac{b \cdot h_1}{2} = \frac{x \cdot \frac{\sqrt{3}x}{2}}{2} = \frac{\sqrt{3} \cdot x^2}{4}$$

Área hexágono = Área triángulo inicial – 3 · Área triángulo de lado $x \to$

$$\to 10\sqrt{3} = 25\sqrt{3} - \frac{3\sqrt{3} \cdot x^2}{4} \to \frac{3\sqrt{3} \cdot x^2}{4} = 15\sqrt{3} \to x^2 = \frac{60\sqrt{3}}{3\sqrt{3}} = 20 \to x = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}\ \text{cm}$$

57. **Este es el logotipo de un club deportivo. La figura será reproducida en diferentes tamaños.**

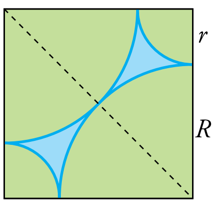


a) Halla el radio de cada arco en un cuadrado de lado 2 m.

b) Comprueba que la relación entre los radios de los arcos es $\sqrt{2} - 1$.

c) Halla el perímetro y el área de la parte sombreada en un cuadrado de 2 m de lado.

a)



Diagonal del cuadrado: $d = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$ m

$R = \frac{d}{2} = \sqrt{2}$ m

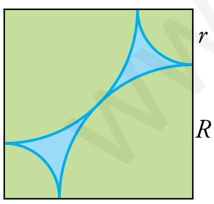
$r = 2 - R = 2 - \sqrt{2}$ m

b) $\frac{r}{R} = \frac{2 - \sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} - 1 = \frac{2\sqrt{2}}{2} - 1 = \sqrt{2} - 1$

c) PERÍMETRO

$$\left.\begin{array}{l} \text{Cuatro arcos grandres: } 4\frac{2\pi R}{4} = 2\pi\sqrt{2} \\ \text{Cuatro arcos pequeños: } 4\frac{2\pi r}{4} = 2\pi(2 - \sqrt{2}) \end{array}\right\} \text{Total: } 2\pi\sqrt{2} + 4\pi - 2\pi\sqrt{2} = 4\pi \text{ m}$$

ÁREA



$$2^2 - 4\frac{\pi R^2}{4} - 4\frac{\pi r^2}{4} = 4 - \frac{2\pi}{2} - \frac{\pi(2 - \sqrt{2})^2}{2} =$$

$$= 4 - \pi - \pi(3 - 2\sqrt{2}) = 4 - \pi(4 - 2\sqrt{2})$$

$$\text{Área total} = 2\left(4 - \pi(4 - 2\sqrt{2})\right) = 8 - 8\pi + 4\pi\sqrt{2}\ \text{m}^2$$

Reflexiona sobre la teoría

58. **Si x es un número del intervalo $[-1, 3)$ e y es un número del intervalo $(0, 4]$, explica en qué intervalo puede estar $x + y$.**

$$\left.\begin{array}{l} x \in [-1, 3) \\ y \in (0, 4] \end{array}\right\} x + y \in (-1, 7)$$

x puede ser –1. y es siempre mayor que 0. Por tanto, $x + y$ es siempre mayor que –1.

x es siempre menor que 3. y puede ser 4. Por tanto, $x + y$ es siempre menor que 7.

59. **Razona si son verdaderas o falsas estas igualdades:**

a) $\sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{b} = \sqrt[6]{a \cdot b}$ **b)** $\sqrt[3]{a+b} = \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}$

c) $a\sqrt[3]{b^2} = \sqrt[3]{(a \cdot b)^2}$ **d)** $\sqrt[4]{a^{12} \cdot b^2} = a^3\sqrt{b}$

a) Falso. $\sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{b} = \sqrt[6]{a^3 \cdot b^2}$

b) Falso.

c) Verdadero. $a\sqrt[3]{b^2} = \sqrt[3]{a^2 \cdot b^2} = \sqrt[3]{(a \cdot b)^2}$

d) Verdadero. $\sqrt[4]{a^{12} \cdot b^2} = a^{12/4} \cdot b^{2/4} = a^3 \cdot b^{1/2} = a^3 \cdot \sqrt{b}$

60. **¿Verdadero o falso? Explica y pon ejemplos.**

a) Todo número decimal es racional.

b) Entre dos números racionales hay infinitos irracionales.

c) El inverso de un número decimal periódico puede ser un decimal exacto.

d) El número $0{,}83 \cdot 10^9$ no está expresado en notación científica.

e) Todos los números irracionales son reales.

f) Algunos números enteros son irracionales.

g) Los números irracionales tienen infinitas cifras decimales.

h) La suma de dos números irracionales es siempre un número irracional.

a) Falso. El número π es decimal pero es irracional.

b) Verdadero.

c) Verdadero. Por ejemplo: $\frac{10}{9} = 1{,}\widehat{1}$; $\frac{9}{10} = 0{,}9$

d) Verdadero. La parte entera del número decimal tiene que ser mayor o igual que 1 y menor que 10.

e) Verdadero.

f) Falso. Todos los números enteros son racionales.

g) Verdadero.

h) Verdadero.

61. **Explica si son verdaderas o falsas estas igualdades:**

a) $log\,(a \cdot b) = log\,a \cdot log\,b$ **b)** $log\left(\frac{a}{b}\right) = log\,a - log\,b$

c) $log\sqrt[3]{a} = \frac{1}{3}log\,a$ **d)** $log\,(a^2 \cdot b) = 2(log\,a + log\,b)$

a) Falso. $log\,(a \cdot b) = log\,a + log\,b$

b) Verdadero.

c) Verdadero.

d) Falso. $log\,(a^2 \cdot b) = log\,(a^2) + log\,b = 2log\,a + log\,b$

62. **¿Cuánto debe valer x para que se verifique esta igualdad?**

$$\sqrt{11 \cdot 3^{85} + 4 \cdot 9^{42} + 27^{29}} = 8 \cdot 3^x$$

Utiliza las propiedades de las potencias.

$\sqrt{11 \cdot 3^{85} + 4 \cdot 9^{42} + 27^{29}} = 8 \cdot 3^x$

$\sqrt{11 \cdot 3^{85} + 4 \cdot 3^{84} + 3^{87}} = \sqrt{3^{84} \cdot (11 \cdot 3 + 4 + 3^3)} = 3^{42} \cdot \sqrt{64} = 8 \cdot 3^{42}$

Por tanto: $x = 42$

63. **Comprueba que no es posible utilizar la calculadora para obtener $5^{129} \cdot 4^{63}$ porque es un número demasiado grande. Utiliza las propiedades de las potencias para expresarlo en notación científica.**

$5^{129} \cdot 4^{63} = 5^{63} \cdot 5^{63} \cdot 5^3 \cdot 2^{63} \cdot 2^{63} = (5 \cdot 2)^{63} \cdot (5 \cdot 2)^{63} \cdot 5^3 = 5^3 \cdot 10^{63} \cdot 10^{63} =$

$= 5^3 \cdot 10^{126} = 125 \cdot 10^{126} = 1{,}25 \cdot 10^{128}$

Página 32

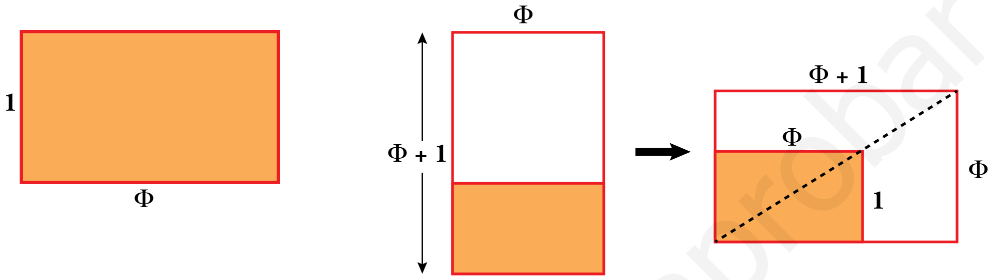
Aprende, prueba, investiga...

Rectángulos áureos

Se dice que un rectángulo es áureo cuando sus lados guardan la divina proporción. Es decir, si tomando el lado menor como unidad, la medida del mayor es el número de oro.

- **Estos rectángulos tienen una curiosa propiedad: si les adosas un cuadrado sobre el lado largo, obtienes otro rectángulo áureo; es decir, una ampliación del anterior. Pruébalo:**

$$\frac{\Phi+1}{\Phi}=1+\frac{1}{\Phi}=1+\frac{2}{\sqrt{5}+1}=\dots$$

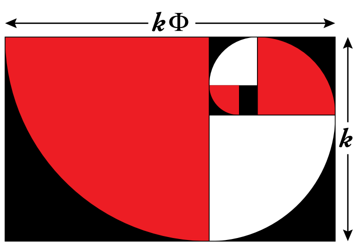


Al adosar un cuadrado sobre el lado largo de un rectángulo aúreo, se obtiene otro rectángulo áureo. Efectivamente:

$$\frac{\Phi+1}{\Phi}=1+\frac{1}{\Phi}=1+\frac{2}{\sqrt{5}+1}=1+\frac{2(\sqrt{5}-1)}{(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-1)}=$$

$$=1+\frac{2(\sqrt{5}-1)}{5-1}=\frac{2}{2}+\frac{\sqrt{5}-1}{2}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}=\Phi$$

Y si continúas adosando cuadrados, cada vez más grandes, obtendrás una sucesión de rectángulos áureos sobre los que se puede construir una bella espiral formada por arcos de circunferencia y que, sorprendentemente, aparece de forma natural en numerosas especies animales y vegetales.



- **Los radios de los primeros arcos de la espiral son:**

$$\Phi;\ \ \Phi+1;\ \ 2\Phi+1;\ \dots$$

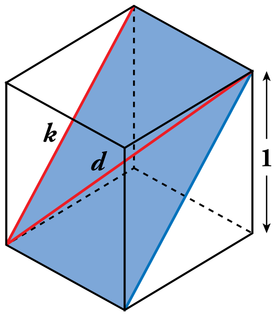
¿Podrías calcular los siguientes? ¿Qué observas?

$R_1=\Phi$ $\quad$ $R_2=\Phi+1$ $\quad$ $R_3=2\Phi+1$ $\quad$ $R_4=3\Phi+2$ $\quad$ $R_5=5\Phi+3$

La sucesión de coeficientes en la serie de los radios de la espiral coincide con la sucesión de Fibonacci: 1 - 1 - 2 - 3 - 5 - …

Calcula y deduce

Racionales e irracionales en el cubo



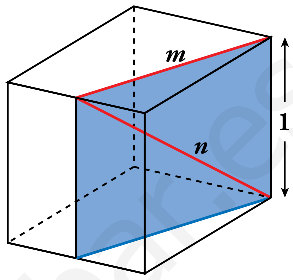
En un cubo de arista 1, la diagonal de una cara,

$$\boldsymbol{k = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2},}$$

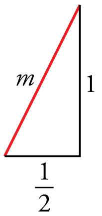
y la diagonal del cubo,

$$\boldsymbol{d = \sqrt{1^2 + (\sqrt{2})^2} = \sqrt{3},}$$

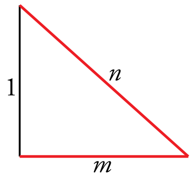
son números irracionales.



- **Averigua si son racionales o irracionales las distancias *m* y *n* señaladas en la figura.**



$$m = \sqrt{1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{2} \text{ es irracional.}$$



$$n = \sqrt{1^2 + m^2} = \sqrt{1 + \frac{5}{4}} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}$$

n es racional.

Página 33

Entrénate resolviendo problemas

- **Aunque te parezca extraño, el número K que ves aquí es un número entero:**

$$K = \sqrt{4 + \frac{\sqrt{63}}{2}} + \sqrt{4 - \frac{\sqrt{63}}{3}}$$

¿Puedes decir de qué número se trata?

Elevamos al cuadrado:

$$K^2 = 4 + \cancel{\frac{\sqrt{63}}{2}} + 4 - \cancel{\frac{\sqrt{63}}{2}} + 2\left(\sqrt{4 + \frac{\sqrt{63}}{2}}\right)\left(\sqrt{4 - \frac{\sqrt{63}}{2}}\right) =$$

$$= 8 + 2\sqrt{4^2 - \frac{63}{4}} = 8 + 2\sqrt{\frac{1}{4}} = 8 + 2 \cdot \frac{1}{2} = 9$$

$K^2 = 9 \rightarrow K = 3$

- **Ordena de menor a mayor:**

De los números que hay, las potencias de base 2 son:

$$\left.\begin{array}{r} 2^{900} \\ 8^{99} = (2^3)^{99} = 2^{297} \\ 16^{75} = (2^4)^{75} = 2^{300} \\ 32^{120} = (2^5)^{120} = 2^{600} \end{array}\right\} \; 2^{297} < 2^{300} < 2^{600} < 2^{900}$$

¿Dónde se sitúa 7^{300}?

Observamos que $2^{900} = (2^3)^{300} = 8^{300}$

$2^{600} = (2^2)^{300} = 4^{300}$

Es claro que $4^{300} < 7^{300} < 8^{300}$. Es decir, $2^{600} < 7^{300} < 2^{900}$

Ordenamos: $2^{297} < 2^{300} < 2^{600} < 7^{300} < 2^{900}$

¿Dónde se sitúa 25^{150}?

Observamos que $25^{150} = (5^2)^{150} = 5^{300}$

$2^{600} = 4^{300}$

7^{300}

Es claro que $4^{300} < 5^{300} < 7^{300}$. Es decir, $2^{600} < 5^{300} < 7^{300}$

Ordenamos: $2^{297} < 2^{300} < 2^{600} < 5^{300} < 7^{300} < 2^{900}$

Así pues, los números quedan ordenados, de menor a mayor, así:

$$8^{99} < 16^{75} < 32^{120} < 25^{150} < 7^{300} < 2^{900}$$

- **Un número primo solamente tiene dos divisores, él mismo y la unidad.**

  a) ¿Qué números tienen solo tres divisores?

  b) ¿Qué números tienen una cantidad impar de divisores?

  a) El cuadrado de un número primo solo tiene tres divisores.

  Por ejemplo: $49 = 7^2$. Sus divisores son 1, 7 y 49.

  b) Los divisores de un número pueden emparejarse. Por ejemplo:

  $$12 \left\{ \begin{matrix} 1 & \to & 12 \\ 2 & \to & 6 \\ 3 & \to & 4 \end{matrix} \right\} \text{El producto de cada dos de ellos es 12.}$$

  Sin embargo, si el número es cuadrado perfecto, en este emparejamiento hay uno que se repite.

  $$36 \left\{ \begin{matrix} 1 & \to & 36 \\ 2 & \to & 18 \\ 3 & \to & 12 \\ 4 & \to & 9 \\ 6 & \to & 6 \end{matrix} \right\}$$

  Como ese número que se repite no podemos contarlo dos veces, el número de divisores es impar. Por ejemplo, el número 36 tiene 9 divisores.

  Conclusión: los cuadrados perfectos, y solo ellos, tienen un número impar de divisores.

- **¿Qué números tienen todos sus divisores pares, excepto el 1?**

  Las potencias de base 2.

  Por ejemplo, el $2^4 = 16$. Sus divisores son 16, 8, 4, 2 y 1. El único impar es el 1.

Autoevaluación

1. **a) Clasifica los siguientes números como naturales, enteros, racionales y reales:**

$$\sqrt[6]{3^{-4}};\ 2\pi;\ \sqrt{log_2 0{,}5};\ 3{,}\widehat{47};$$

$$2{,}03333\ldots;\ \sqrt{81};\ \sqrt[3]{4};\ \frac{\sqrt{5}}{3};\ -\frac{13}{9};\ -8$$

b) Indica cuáles son irracionales.

c) Ordénalos de menor a mayor.

a) y b) $\sqrt[6]{3^{-4}} = 3^{-4/6} = 3^{-2/3} = \sqrt[3]{3^{-2}} \rightarrow$ Real (Irracional).

$2\pi \rightarrow$ Real (Irracional)

$\sqrt{log_2 0{,}5} = \sqrt{log_2 \dfrac{5}{10}} = \sqrt{log_2 \dfrac{1}{2}} = \sqrt{-1} \rightarrow$ No existe.

$3{,}\widehat{47} \rightarrow$ Racional

$2{,}0333\ldots \rightarrow$ Racional

$\sqrt{81} = 9 \rightarrow$ Natural

$\sqrt[3]{4} \rightarrow$ Real (Irracional)

$\dfrac{\sqrt{5}}{3} \rightarrow$ Real (Irracional)

$-\dfrac{13}{9} \rightarrow$ Racional

$-8 \rightarrow$ Entero

c) $-8 < -\dfrac{13}{9} < \sqrt[6]{3^{-4}} < \dfrac{\sqrt{5}}{3} < \sqrt[3]{4} < 2{,}0333\ldots < 3{,}\widehat{47} < 2\pi < \sqrt{81}$

2. **a) Escribe en forma de intervalo los siguientes conjuntos numéricos y represéntalos gráficamente:**

i) $\{x \mathbin{/} -2 \le x < 7\}$

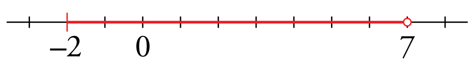
ii) $\{x \mathbin{/} x > -1\}$

iii) $|x - 3| < 1$

b) Escribe como desigualdad los intervalos siguientes:

$$A = [-3, 4) \qquad B = (-\infty, \sqrt{3})$$

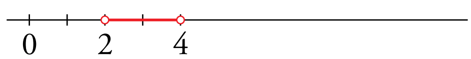
a) $\{x \mathbin{/} -2 \le x \le 7\} = [-2, 7)$



$\{x \mathbin{/} x > -1\} = (-1, +\infty)$

$|x - 3| < 1 \rightarrow -1 < x - 3 < 1$

$2 < x < 4 \rightarrow (2, 4)$



b) $A = [-3, 4) = \{x \mathbin{/} -3 \le x < 4\}$

$B = (-\infty, \sqrt{3}) = \{x \mathbin{/} x < \sqrt{3}\}$

3. **Expresa en notación científica y, con ayuda de la calculadora, opera. Escribe el resultado con tres cifras significativas.**

$$\frac{1500\,000 \cdot 25 \cdot 10^{17}}{0{,}00007 \cdot (2\,000)^4}$$

Después, da una cota del error absoluto y otra del error relativo del valor aproximado obtenido.

$\dfrac{1{,}5 \cdot 10^6 \cdot 2{,}5 \cdot 10^{18}}{7 \cdot 10^{-5} \cdot 1{,}6 \cdot 10^{13}} \approx 3{,}35 \cdot 10^{15}$

Error absoluto $< 0{,}005 \cdot 10^{15}$

Error relativo $< \dfrac{0{,}005 \cdot 10^{15}}{3{,}35 \cdot 10^{15}} < 0{,}0015 = 0{,}15\,\%$

4. **Extrae del radical todos los factores posibles:**

$$\sqrt[3]{\frac{81a^2b^5}{16z^4}}$$

$\sqrt[3]{\dfrac{3^4a^2b^5}{2^4z^4}} = \dfrac{3b}{2z}\sqrt[3]{\dfrac{3a^2b^2}{2z}}$

5. **Opera y simplifica.**

a) $\dfrac{(3\sqrt{2}+\sqrt{3})^2}{3}$

b) $\sqrt{54} - 2\sqrt{6} + \sqrt{150}$

c) $\dfrac{5}{\sqrt{50}} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

d) $\dfrac{10}{2\sqrt{3}-\sqrt{2}}$

a) $\dfrac{(3\sqrt{2}+\sqrt{3})^2}{3} = \dfrac{9 \cdot 2 + 3 + 6\sqrt{6}}{3} = \dfrac{21 + 6\sqrt{6}}{3} = 7 + 2\sqrt{6}$

b) $\sqrt{54} - 2\sqrt{6} + \sqrt{150} = \sqrt{3^3 \cdot 2} - 2\sqrt{6} + \sqrt{5^2 \cdot 6} = 3\sqrt{6} - 2\sqrt{6} + 5\sqrt{6} = 6\sqrt{6}$

c) $\dfrac{5}{\sqrt{50}} - \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{5}{\sqrt{5^2 \cdot 2}} - \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{5}{5\sqrt{2}} - \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} - \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2} = 0$

d) $\dfrac{10}{2\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \dfrac{10(2\sqrt{3}+\sqrt{2})}{(2\sqrt{3}-\sqrt{2})(2\sqrt{3}+\sqrt{2})} = \dfrac{10(2\sqrt{3}+\sqrt{2})}{4 \cdot 3 - 2} = 2\sqrt{3} + \sqrt{2}$

6. **Calcula aplicando la definición de logaritmo o con la calculadora.**

a) $\log_3 \sqrt[3]{\dfrac{1}{9}}$

b) $\log_2 \left(\sqrt[4]{\dfrac{1}{32}}\sqrt{2}\right)$

a) $\log_3 \sqrt[3]{\dfrac{1}{9}} = \dfrac{1}{3}\log_3 3^{-2} = \dfrac{1}{3} \cdot (-2) = \dfrac{-2}{3}$

b) $\log_2 \left(\sqrt[4]{\dfrac{1}{32}} \cdot \sqrt{2}\right) \overset{(*)}{=} \log_2 (2^{-3/4}) = -\dfrac{3}{4}$

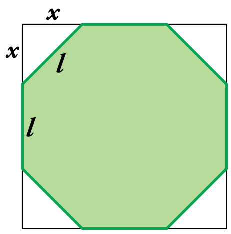
(*) $2^{-\frac{5}{4}} \cdot 2^{\frac{1}{2}} = 2^{-\frac{5}{4}+\frac{1}{2}} = 2^{\frac{-5+2}{4}} = 2^{-\frac{3}{4}}$

7. **Expresa $log \frac{4\sqrt{6}}{9}$ en función de $log\, 2$ y $log\, 3$.**

$$log \frac{4\sqrt{6}}{9} \overset{(*)}{=} log\left(2^{5/2} \cdot 3^{-3/2}\right) = \frac{5}{2} \cdot log_2 - \frac{3}{2} \cdot log\ 3$$

$$(*)\ \frac{4\sqrt{6}}{9} = \frac{2^2 \cdot \sqrt{2 \cdot 3}}{3^2} = \frac{2^2 \cdot 2^{1/2} \cdot 3^{1/2}}{3^2} = 2^{5/2} \cdot 3^{-3/2}$$

8. **En un cuadrado de 10 cm de lado, recortamos en cada esquina un triángulo rectángulo isósceles de forma que obtenemos un octógono regular.**



a) Halla la medida exacta del lado del octógono.

b) Calcula su área.

a) $\left.\begin{array}{l} 2x + l = 10 \\ x^2 + x^2 = l^2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \to\ l = 10 - 2x \\ \to\ 2x^2 = (10 - 2x)^2 \ \to\ 2x^2 = 100 - 40x + 4x^2 \ \to\ x^2 - 20x + 50 = 0 \end{array}$

$$x = \frac{20 \pm \sqrt{20^2 - 4 \cdot 50}}{2} = \frac{20 \pm \sqrt{200}}{2} = \frac{20 \pm 10\sqrt{2}}{2} = \begin{cases} 10 - 5\sqrt{2} \\ 10 + 5\sqrt{2} \ \text{(no vale)} \end{cases}$$

$$l = 10 - 2(10 - 5\sqrt{2}) = 10 - 20 + 10\sqrt{2} = 10\sqrt{2} - 10 = 10(\sqrt{2} - 1) \text{ cm}$$

b) Área $= 10^2 - 4\frac{x^2}{2} = 100 - 2(10 - 5\sqrt{2})^2 = 200\sqrt{2} - 200 = 200(\sqrt{2} - 1)$ cm^2

Autoevaluación

1. a) Clasifica los siguientes números como naturales, enteros, racionales y reales:

$$\sqrt[6]{3^{-4}};\ 2\pi;\ \sqrt{log_2 0,5};\ 3,\overset{\frown}{47};$$

$$2,03333...;\ \sqrt{81};\ \sqrt[3]{4};\ \frac{\sqrt{5}}{3};\ -\frac{13}{9};\ -8$$

b) Indica cuáles son irracionales.

c) Ordénalos de menor a mayor.

a) y b) $\sqrt[6]{3^{-4}} = 3^{-4/6} = 3^{-2/3} = \sqrt[3]{3^{-2}} \rightarrow$ Real (Irracional).

$2\pi \rightarrow$ Real (Irracional)

$\sqrt{log_2 0,5} = \sqrt{log_2 \frac{5}{10}} = \sqrt{log_2 \frac{1}{2}} = \sqrt{-1} \rightarrow$ No existe.

$3,\overset{\frown}{47} \rightarrow$ Racional

$2,0333... \rightarrow$ Racional

$\sqrt{81} = 9 \rightarrow$ Natural

$\sqrt[3]{4} \rightarrow$ Real (Irracional)

$\frac{\sqrt{5}}{3} \rightarrow$ Real (Irracional)

$-\frac{13}{9} \rightarrow$ Racional

$-8 \rightarrow$ Entero

c) $-8 < -\frac{13}{9} < \sqrt[6]{3^{-4}} < \frac{\sqrt{5}}{3} < \sqrt[3]{4} < 2,0333... < 3,\overset{\frown}{47} < 2\pi < \sqrt{81}$

2. a) Escribe en forma de intervalo los siguientes conjuntos numéricos y represéntalos gráficamente:

i) $\{x \,/\, -2 \le x < 7\}$

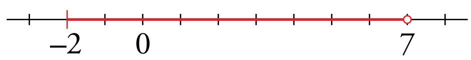
ii) $\{x \,/\, x > -1\}$

iii) $|x - 3| < 1$

b) Escribe como desigualdad los intervalos siguientes:

$$A = [-3, 4) \qquad B = (-\infty, \sqrt{3})$$

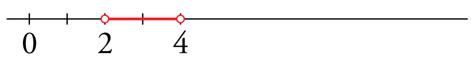
a) $\{x \,/\, -2 \le x \le 7\} = [-2, 7)$



$\{x \,/\, x > -1\} = (-1, +\infty)$

$|x - 3| < 1 \rightarrow -1 < x - 3 < 1$

$2 < x < 4 \rightarrow (2, 4)$



b) $A = [-3, 4) = \{x \,/\, -3 \le x < 4\}$

$B = (-\infty, \sqrt{3}) = \{x \,/\, x < \sqrt{3}\}$

3. **Expresa en notación científica y, con ayuda de la calculadora, opera. Escribe el resultado con tres cifras significativas.**

$$\frac{1500000 \cdot 25 \cdot 10^{17}}{0{,}00007 \cdot (2000)^4}$$

Después, da una cota del error absoluto y otra del error relativo del valor aproximado obtenido.

$$\frac{1{,}5 \cdot 10^6 \cdot 2{,}5 \cdot 10^{18}}{7 \cdot 10^{-5} \cdot 1{,}6 \cdot 10^{13}} \approx 3{,}35 \cdot 10^{15}$$

Error absoluto $< 0{,}005 \cdot 10^{15}$

Error relativo $< \dfrac{0{,}005 \cdot 10^{15}}{3{,}35 \cdot 10^{15}} < 0{,}0015 = 0{,}15\,\%$

4. **Extrae del radical todos los factores posibles:**

$$\sqrt[3]{\frac{81a^2b^5}{16z^4}}$$

$$\sqrt[3]{\frac{3^4a^2b^5}{2^4z^4}} = \frac{3b}{2z}\sqrt[3]{\frac{3a^2b^2}{2z}}$$

5. **Opera y simplifica.**

a) $\dfrac{(3\sqrt{2}+\sqrt{3})^2}{3}$

b) $\sqrt{54} - 2\sqrt{6} + \sqrt{150}$

c) $\dfrac{5}{\sqrt{50}} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

d) $\dfrac{10}{2\sqrt{3}-\sqrt{2}}$

a) $\dfrac{(3\sqrt{2}+\sqrt{3})^2}{3} = \dfrac{9 \cdot 2 + 3 + 6\sqrt{6}}{3} = \dfrac{21 + 6\sqrt{6}}{3} = 7 + 2\sqrt{6}$

b) $\sqrt{54} - 2\sqrt{6} + \sqrt{150} = \sqrt{3^3 \cdot 2} - 2\sqrt{6} + \sqrt{5^2 \cdot 6} = 3\sqrt{6} - 2\sqrt{6} + 5\sqrt{6} = 6\sqrt{6}$

c) $\dfrac{5}{\sqrt{50}} - \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{5}{\sqrt{5^2 \cdot 2}} - \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{5}{5\sqrt{2}} - \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} - \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2} = 0$

d) $\dfrac{10}{2\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \dfrac{10\,(2\sqrt{3}+\sqrt{2})}{(2\sqrt{3}-\sqrt{2})\,(2\sqrt{3}+\sqrt{2})} = \dfrac{10\,(2\sqrt{3}+\sqrt{2})}{4 \cdot 3 - 2} = 2\sqrt{3} + \sqrt{2}$

6. **Calcula aplicando la definición de logaritmo o con la calculadora.**

a) $\log_3 \sqrt[3]{\dfrac{1}{9}}$

b) $\log_2 \left(\sqrt[4]{\dfrac{1}{32}}\,\sqrt{2}\right)$

a) $\log_3 \sqrt[3]{\dfrac{1}{9}} = \dfrac{1}{3}\log_3 3^{-2} = \dfrac{1}{3} \cdot (-2) = \dfrac{-2}{3}$

b) $\log_2 \left(\sqrt[4]{\dfrac{1}{32}} \cdot \sqrt{2}\right) \overset{(*)}{=} \log_2 (2^{-3/4}) = -\dfrac{3}{4}$

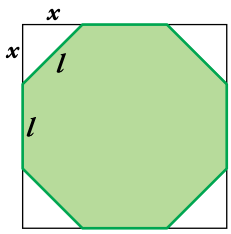
(*) $2^{-\frac{5}{4}} \cdot 2^{\frac{1}{2}} = 2^{-\frac{5}{4}+\frac{1}{2}} = 2^{\frac{-5+2}{4}} = 2^{-\frac{3}{4}}$

7. Expresa $\log \frac{4\sqrt{6}}{9}$ en función de $\log 2$ y $\log 3$.

$$\log \frac{4\sqrt{6}}{9} \overset{(*)}{=} \log \left(2^{5/2} \cdot 3^{-3/2}\right) = \frac{5}{2} \cdot \log_2 - \frac{3}{2} \cdot \log 3$$

$$(*)\ \frac{4\sqrt{6}}{9} = \frac{2^2 \cdot \sqrt{2 \cdot 3}}{3^2} = \frac{2^2 \cdot 2^{1/2} \cdot 3^{1/2}}{3^2} = 2^{5/2} \cdot 3^{-3/2}$$

8. En un cuadrado de 10 cm de lado, recortamos en cada esquina un triángulo rectángulo isósceles de forma que obtenemos un octógono regular.



a) Halla la medida exacta del lado del octógono.

b) Calcula su área.

a) $\left.\begin{array}{l} 2x + l = 10 \\ x^2 + x^2 = l^2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \to\ l = 10 - 2x \\ \to\ 2x^2 = (10 - 2x)^2 \ \to\ 2x^2 = 100 - 40x + 4x^2 \ \to\ x^2 - 20x + 50 = 0 \end{array}$

$$x = \frac{20 \pm \sqrt{20^2 - 4 \cdot 50}}{2} = \frac{20 \pm \sqrt{200}}{2} = \frac{20 \pm 10\sqrt{2}}{2} = \begin{cases} 10 - 5\sqrt{2} \\ 10 + 5\sqrt{2}\ \text{(no vale)} \end{cases}$$

$$l = 10 - 2(10 - 5\sqrt{2}) = 10 - 20 + 10\sqrt{2} = 10\sqrt{2} - 10 = 10(\sqrt{2} - 1) \text{ cm}$$

b) $\text{Área} = 10^2 - 4\frac{x^2}{2} = 100 - 2(10 - 5\sqrt{2})^2 = 200\sqrt{2} - 200 = 200(\sqrt{2} - 1) \text{ cm}^2$

Página 35

Resuelve

1. **Expresa con nuestra notación el siguiente polinomio dado con la nomenclatura de Diofanto:**

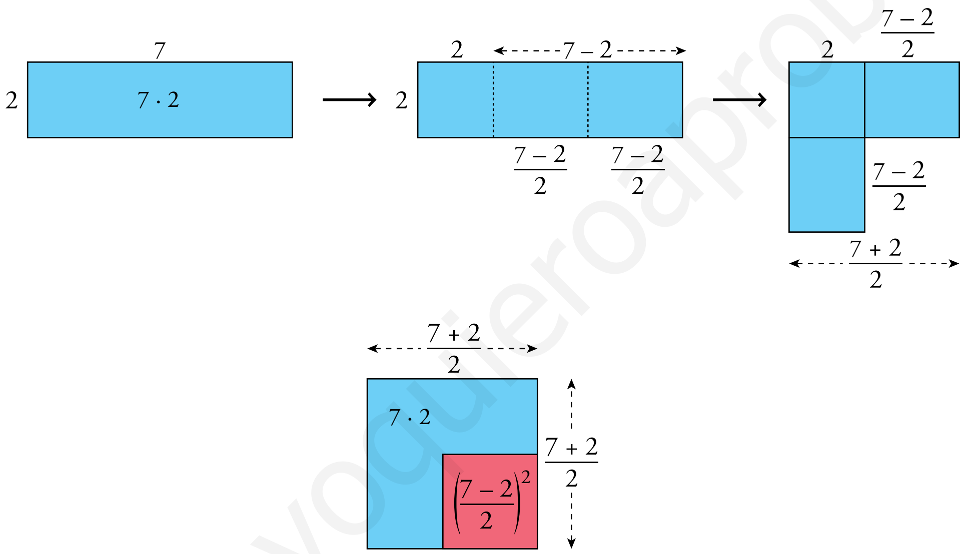
ss3 s5 M c8 x9 u1

$3x^4 - 8x^3 + 5x^2 - 9x - 1$

2. **Expresa con la nomenclatura de Diofanto:** $-2x^4 + 5x^3 - 3x^2 - 6x + 8$

c5 u8 M ss2 s3 x6

3. **Repite gráficamente el razonamiento utilizado por Pitágoras para demostrar la igualdad de arriba, tomando** $a = 7$ **y** $b = 2$**.**



$$\left.\begin{array}{l} A_{\text{azul}}: 7 \cdot 2 \\ A_{\text{roja}}: \left(\dfrac{7-2}{2}\right)^2 \\ A_{\text{azul + roja}}: \left(\dfrac{7+2}{2}\right)^2 \end{array}\right\} \quad A_{\text{azul}} = A_{\text{azul + roja}} - A_{\text{roja}} \;\to\; 7 \cdot 2 = \left(\dfrac{7+2}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{7-2}{2}\right)^2 \;\to\; 14 = 14$$

2 Regla de Ruffini

Página 38

1. **Calcula el cociente y el resto de la división de $x^4 + 3x^3 - 3x^2 + 3x - 4$ entre los siguientes polinomios:**

a) $x - 1$ **b)** $x + 1$ **c)** $x - 2$

d) $x - 4$ **e)** $x + 4$ **f)** $x - 3$

Indica en cada caso si la división es entera o exacta.

a)
$$\begin{array}{r|rrrr|r} & 1 & 3 & -3 & 3 & -4 \\ 1 & & 1 & 4 & 1 & 4 \\ \hline & 1 & 4 & 1 & 4 & 0 \end{array}$$

Se trata de una división exacta.

Cociente: $x^3 + 4x^2 + x + 4$

Resto: 0

b)
$$\begin{array}{r|rrrr|r} & 1 & 3 & -3 & 3 & -4 \\ -1 & & -1 & -2 & 5 & -8 \\ \hline & 1 & 2 & -5 & 8 & -12 \end{array}$$

Se trata de una división entera.

Cociente: $x^3 + 2x^2 - 5x + 8$

Resto: -12

c)
$$\begin{array}{r|rrrr|r} & 1 & 3 & -3 & 3 & -4 \\ 2 & & 2 & 10 & 14 & 34 \\ \hline & 1 & 5 & 7 & 17 & 30 \end{array}$$

Se trata de una división entera.

Cociente: $x^3 + 5x^2 + 7x + 17$

Resto: 30

d)
$$\begin{array}{r|rrrr|r} & 1 & 3 & -3 & 3 & -4 \\ 4 & & 4 & 28 & 100 & 412 \\ \hline & 1 & 7 & 25 & 103 & 408 \end{array}$$

Se trata de una división entera.

Cociente: $x^3 + 7x^2 + 25x + 103$

Resto: 408

e)
$$\begin{array}{r|rrrr|r} & 1 & 3 & -3 & 3 & -4 \\ -4 & & -4 & 4 & -4 & 4 \\ \hline & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \end{array}$$

Se trata de una división exacta.

Cociente: $x^3 - x^2 + x - 1$

Resto: 0

f)
$$\begin{array}{r|rrrr|r} & 1 & 3 & -3 & 3 & -4 \\ 3 & & 3 & 18 & 45 & 144 \\ \hline & 1 & 6 & 15 & 48 & 140 \end{array}$$

Se trata de una división entera.

Cociente: $x^3 + 6x^2 + 15x + 48$

Resto: 140

2. **Realiza la división de $P(x) = 4x^3 + 12x^2 + 5x - 6$ entre cada uno de los siguientes polinomios y expresa el resultado así: cociente + $\frac{\text{resto}}{\text{divisor}}$.**

a) $x - 1$ **b)** $2x - 1$ **c)** $x + 2$

d) $2x + 4$ **e)** $2x + 3$ **f)** $x - 2$

a)
$$\begin{array}{r|rrrr} & 4 & 12 & 5 & -6 \\ 1 & & 4 & 16 & 21 \\ \hline & 4 & 16 & 21 & \boxed{15} \end{array}$$

$$\frac{4x^3 + 12x^2 + 5x - 6}{x - 1} = 4x^2 + 16x + 21 + \frac{15}{x - 1}$$

b)
$$\begin{array}{r|rrrr} & 4 & 12 & 5 & -6 \\ 1/2 & & 2 & 7 & 6 \\ \hline & 4 & 14 & 12 & \boxed{0} \end{array}$$

$$\frac{4x^3 + 12x^2 + 5x - 6}{2x - 1} = \frac{4x^2 + 14x + 12}{2} = 2x^2 + 7x + 6$$

c)
$$\begin{array}{r|rrrr} & 4 & 12 & 5 & -6 \\ -2 & & -8 & -8 & 6 \\ \hline & 4 & 4 & -3 & \boxed{0} \end{array}$$

$$\frac{4x^3 + 12x^2 + 5x - 6}{x + 2} = 4x^2 + 4x - 3$$

d)
$$\begin{array}{r|rrrr} & 4 & 12 & 5 & -6 \\ -2 & & -8 & -8 & 6 \\ \hline & 4 & 4 & -3 & \boxed{0} \end{array}$$

$$\frac{4x^3 + 12x^2 + 5x - 6}{2x + 4} = \frac{4x^2 + 4x - 3}{2}$$

e)
$$\begin{array}{r|rrrr} & 4 & 12 & 5 & -6 \\ -3/2 & & -6 & -9 & 6 \\ \hline & 4 & 6 & -4 & \boxed{0} \end{array}$$

$$\frac{4x^3 + 12x^2 + 5x - 6}{2x + 3} = \frac{4x^2 + 6x - 4}{2} = 2x^2 + 3x - 2$$

f)
$$\begin{array}{r|rrrr} & 4 & 12 & 5 & -6 \\ 2 & & 8 & 40 & 90 \\ \hline & 4 & 20 & 45 & \boxed{84} \end{array}$$

$$\frac{4x^3 + 12x^2 + 5x - 6}{x - 2} = 4x^2 + 20x + 45 + \frac{84}{x - 2}$$

Página 39

3. Utiliza la regla de Ruffini para hallar $P(a)$ en los siguientes casos:

a) $P(x) = 7x^4 - 5x^2 + 2x - 24$, $a = 2$, $a = -5$, $a = 10$

b) $P(x) = 3x^3 - 8x^2 + 3x$, $a = -3$, $a = 1$, $a = 8$

a)
$$\begin{array}{r|rrrrr} & 7 & 0 & -5 & 2 & -24 \\ 2 & & 14 & 28 & 46 & 96 \\ \hline & 7 & 14 & 23 & 48 & \boxed{72} \end{array} \qquad P(2) = 72$$

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 7 & 0 & -5 & 2 & -24 \\ -5 & & -35 & 175 & -850 & 4240 \\ \hline & 7 & -35 & 170 & -848 & \boxed{4216} \end{array} \qquad P(-5) = 4216$$

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 7 & 0 & -5 & 2 & -24 \\ 10 & & 70 & 700 & 6950 & 69520 \\ \hline & 7 & 70 & 695 & 6952 & \boxed{69496} \end{array} \qquad P(10) = 69496$$

b)
$$\begin{array}{r|rrrr} & 3 & -8 & 3 & 0 \\ -3 & & -9 & 51 & -162 \\ \hline & 3 & -17 & 54 & \boxed{-162} \end{array} \qquad P(-3) = -162$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 3 & -8 & 3 & 0 \\ 1 & & 3 & -5 & -2 \\ \hline & 3 & -5 & -2 & \boxed{-2} \end{array} \qquad P(1) = -2$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 3 & -8 & 3 & 0 \\ 8 & & 24 & 128 & 1048 \\ \hline & 3 & 16 & 131 & \boxed{1048} \end{array} \qquad P(8) = 1048$$

3 Raíz de un polinomio. Búsqueda de raíces

Página 41

1. Indica, sin realizar las operaciones, si $x = -3$ puede ser raíz de cada uno de estos polinomios:

a) $P(x) = x^2 - x - 12$ **b) $P(x) = x^4 + 2x^2 - x + 8$**

c) $P(x) = x^3 + 3x^2 - 5x - 27$ **d) $P(x) = x^3 + 3x^2 + x + 3$**

En caso afirmativo, comprueba si es o no raíz.

a) $x = -3$ puede ser raíz de $P(x) = x^2 - x - 12$, puesto que su término independiente, –12, es múltiplo de –3. Veamos si lo es:

$$\begin{array}{r|rrr} & 1 & -1 & -12 \\ -3 & & -3 & 12 \\ \hline & 1 & -4 & \boxed{0} \end{array} \qquad x = -3 \text{ sí es raíz de } P(x).$$

b) $x = -3$ no puede ser raíz de $P(x) = x^4 + 2x^2 - x + 8$, puesto que su término independiente, +8, no es múltiplo de –3.

c) $x = -3$ puede ser raíz de $P(x) = x^3 + 3x^2 - 5x - 27$, puesto que su término independiente, –27, es múltiplo de –3. Veamos si lo es:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 3 & -5 & -27 \\ -3 & & -3 & 0 & 15 \\ \hline & 1 & 0 & -5 & \boxed{-12} \end{array} \qquad x = -3 \text{ no es raíz de } P(x).$$

d) $x = -3$ puede ser raíz de $P(x) = x^3 + 3x^2 + x + 3$, puesto que su término independiente, +3, es múltiplo de –3. Veamos si lo es:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 3 & +1 & +3 \\ -3 & & -3 & 0 & -3 \\ \hline & 1 & 0 & 1 & \boxed{0} \end{array} \qquad x = -3 \text{ sí es raíz de } P(x).$$

2. Indica las posibles raíces enteras de cada uno de los polinomios del ejercicio anterior. Comprueba cuáles lo son.

a) $P(x) = x^2 - x - 12$

Las posibles raíces enteras son: +1; –1; +2; –2; +3; –3; +4; –4; +6; –6; + 12; –12.

Comprobamos cuáles lo son:

$$\begin{array}{r|rrr} & 1 & -1 & -12 \\ 1 & & 1 & 0 \\ \hline & 1 & 0 & \boxed{-12} \end{array} \qquad \begin{array}{r|rrr} & 1 & -1 & -12 \\ -1 & & -1 & 2 \\ \hline & 1 & -2 & \boxed{-10} \end{array} \qquad \begin{array}{r|rrr} & 1 & -1 & -12 \\ 2 & & 2 & 2 \\ \hline & 1 & 1 & \boxed{-10} \end{array} \qquad \begin{array}{r|rrr} & 1 & -1 & -12 \\ -2 & & -2 & 6 \\ \hline & 1 & -3 & \boxed{-6} \end{array}$$

$x = 1$ no es raíz. $x = -1$ no es raíz. $x = 2$ no es raíz. $x = -2$ no es raíz.

$$\begin{array}{r|rrr} & 1 & -1 & -12 \\ 3 & & 3 & 6 \\ \hline & 1 & 2 & \boxed{-6} \end{array} \qquad \begin{array}{r|rrr} & 1 & -1 & -12 \\ -3 & & -3 & 12 \\ \hline & 1 & -4 & \boxed{0} \end{array} \qquad \begin{array}{r|rrr} & 1 & -1 & -12 \\ 4 & & 4 & 12 \\ \hline & 1 & 3 & \boxed{0} \end{array}$$

$x = 3$ no es raíz. $x = -3$ sí es raíz. $x = 4$ sí es raíz.

Como el polinomio es de grado 2 y ya hemos encontrado sus dos raíces, el resto no serán raíces.

b) $P(x) = x^4 + 2x^2 - x + 8$

Las posibles raíces enteras son: $+1; -1; +2; -2; +4; -4; +8; -8$.

Comprobamos cuáles lo son:

$$\begin{array}{r|rrrr|r} & 1 & 0 & 2 & -1 & 8 \\ 1 & & 1 & 1 & 3 & 2 \\ \hline & 1 & 1 & 3 & 2 & \boxed{10} \end{array}$$

$x = 1$ no es raíz.

$$\begin{array}{r|rrrr|r} & 1 & 0 & 2 & -1 & 8 \\ -1 & & -1 & 1 & -3 & 4 \\ \hline & 1 & -1 & 3 & -4 & \boxed{12} \end{array}$$

$x = -1$ no es raíz.

$$\begin{array}{r|rrrr|r} & 1 & 0 & 2 & -1 & 8 \\ 2 & & 2 & 4 & 12 & 22 \\ \hline & 1 & 2 & 6 & 11 & \boxed{30} \end{array}$$

$x = 2$ no es raíz.

$$\begin{array}{r|rrrr|r} & 1 & 0 & 2 & -1 & 8 \\ -2 & & -2 & 4 & -12 & 26 \\ \hline & 1 & -2 & 6 & -13 & \boxed{34} \end{array}$$

$x = -2$ no es raíz.

$$\begin{array}{r|rrrr|r} & 1 & 0 & 2 & -1 & 8 \\ 4 & & 4 & 16 & 72 & 284 \\ \hline & 1 & 4 & 18 & 71 & \boxed{292} \end{array}$$

$x = 4$ no es raíz.

$$\begin{array}{r|rrrr|r} & 1 & 0 & 2 & -1 & 8 \\ -4 & & -4 & 16 & -72 & 292 \\ \hline & 1 & -4 & 18 & -73 & \boxed{300} \end{array}$$

$x = -4$ no es raíz.

$$\begin{array}{r|rrrr|r} & 1 & 0 & 2 & -1 & 8 \\ 8 & & 8 & 64 & 528 & 4216 \\ \hline & 1 & 8 & 66 & 527 & \boxed{4224} \end{array}$$

$x = 8$ no es raíz.

$$\begin{array}{r|rrrr|r} & 1 & 0 & 2 & -1 & 8 \\ -8 & & -8 & 64 & -528 & 4232 \\ \hline & 1 & -8 & 66 & -529 & \boxed{4240} \end{array}$$

$x = -8$ no es raíz.

El polinomio no tiene raíces enteras dado que ya no hay más posibilidades.

c) $P(x) = x^3 + 3x^2 - 5x - 27$

Las posibles raíces enteras son: $+1; -1; +3; -3; +9; -9; +27; -27$.

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 1 & 3 & -5 & -27 \\ 1 & & 1 & 4 & -1 \\ \hline & 1 & 4 & -1 & \boxed{-28} \end{array}$$

$x = 1$ no es raíz.

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 1 & 3 & -5 & -27 \\ -1 & & -1 & -2 & 7 \\ \hline & 1 & 2 & -7 & \boxed{-20} \end{array}$$

$x = -1$ no es raíz.

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 1 & 3 & -5 & -27 \\ 3 & & 3 & 18 & 39 \\ \hline & 1 & 6 & 13 & \boxed{12} \end{array}$$

$x = 3$ no es raíz.

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 1 & 3 & -5 & -27 \\ -3 & & -3 & 0 & 15 \\ \hline & 1 & 0 & -5 & \boxed{-12} \end{array}$$

$x = -3$ no es raíz.

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 1 & 3 & -5 & -27 \\ 9 & & 9 & 108 & 927 \\ \hline & 1 & 12 & 103 & \boxed{900} \end{array}$$

$x = 9$ no es raíz.

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 1 & 3 & -5 & -27 \\ -9 & & -9 & 54 & -441 \\ \hline & 1 & -6 & 49 & \boxed{-468} \end{array}$$

$x = -9$ no es raíz.

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 1 & 3 & -5 & -27 \\ 27 & & 27 & 810 & 21735 \\ \hline & 1 & 30 & 805 & \boxed{21708} \end{array}$$

$x = 27$ no es raíz.

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 1 & 3 & -5 & -27 \\ -27 & & -27 & 648 & -17361 \\ \hline & 1 & -24 & 643 & \boxed{17388} \end{array}$$

$x = -27$ no es raíz.

El polinomio no tiene raíces enteras.

d) $P(x) = x^3 + 3x^2 + x + 3$

Las posibles raíces enteras son: $+1; -1; +3; -3$.

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 1 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & & 1 & 4 & 5 \\ \hline & 1 & 4 & 5 & \boxed{8} \end{array}$$

$x = 1$ no es raíz.

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 1 & 3 & 1 & 3 \\ -1 & & -1 & -2 & 1 \\ \hline & 1 & 2 & -1 & \boxed{4} \end{array}$$

$x = -1$ no es raíz.

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 1 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & & 3 & 18 & 57 \\ \hline & 1 & 6 & 19 & \boxed{60} \end{array}$$

$x = 3$ no es raíz.

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 1 & 3 & 1 & 3 \\ -3 & & -3 & 0 & -3 \\ \hline & 1 & 0 & 1 & \boxed{0} \end{array}$$

$x = -3$ sí es raíz.

Como ya hemos probado todas las posibilidades, el polinomio solo tiene una raíz entera, $x = -3$.

3. El polinomio $x^4 + 3x^3 - 2x^2 - 10x - 12$ es divisible por $x - a$ para dos valores enteros de a.

Localízalos y da el cociente en ambos casos.

El polinomio $P(x) = x^4 + 3x^3 - 2x^2 - 10x - 12$ es divisible por $(x - 2)$ y por $(x + 3)$.

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 3 & -2 & -10 & -12 \\ 2 & & 2 & 10 & 16 & 12 \\ \hline & 1 & 5 & 8 & 6 & \boxed{0} \end{array} \qquad \frac{x^4 + 3x^3 - 2x^2 - 10x - 12}{x - 2} = x^3 + 5x^2 + 8x + 6$$

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 3 & -2 & -10 & -12 \\ -3 & & -3 & 0 & 6 & 12 \\ \hline & 1 & 0 & -2 & -4 & \boxed{0} \end{array} \qquad \frac{x^4 + 3x^3 - 2x^2 - 10x - 12}{x + 3} = x^3 - 2x - 4$$

4. Comprueba que el polinomio $x^4 + x^3 + 7x^2 + 2x + 10$ no es divisible por $x - a$ para ningún valor de a entero.

Las posibles raíces enteras de $x^4 + x^3 + 7x^2 + 2x + 10$ son: +1, –1; +2; –2: +5; –5; +10 y –10. Comprobamos que ninguna de ellas lo es:

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 1 & 7 & 2 & 10 \\ 1 & & 1 & 2 & 9 & 11 \\ \hline & 1 & 2 & 9 & 11 & \boxed{21} \end{array} \qquad \begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 1 & 7 & 2 & 10 \\ -1 & & -1 & 0 & -7 & 5 \\ \hline & 1 & 0 & 7 & -5 & \boxed{15} \end{array} \qquad \begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 1 & 7 & 2 & 10 \\ 2 & & 2 & 6 & 26 & 56 \\ \hline & 1 & 3 & 13 & 28 & \boxed{66} \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 1 & 7 & 2 & 10 \\ -2 & & -2 & 2 & -18 & 32 \\ \hline & 1 & -1 & 9 & -16 & \boxed{42} \end{array} \qquad \begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 1 & 7 & 2 & 10 \\ 5 & & 5 & 30 & 185 & 935 \\ \hline & 1 & 6 & 37 & 187 & \boxed{945} \end{array} \qquad \begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 1 & 7 & 2 & 10 \\ -5 & & -5 & 20 & -135 & 665 \\ \hline & 1 & -4 & 27 & -133 & \boxed{675} \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 1 & 7 & 2 & 10 \\ 10 & & 10 & 110 & 1\,170 & 11\,720 \\ \hline & 1 & 11 & 117 & 1\,172 & \boxed{11\,730} \end{array} \qquad \begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 1 & 7 & 2 & 10 \\ -10 & & -10 & 90 & -970 & 9\,680 \\ \hline & 1 & -9 & 97 & -968 & \boxed{9\,690} \end{array}$$

5. Inventa un polinomio de tercer grado cuyas raíces sean 3, –2 y –1.

Una posible solución es: $P(x) = (x - 3) \cdot (x + 2) \cdot (x + 1) = x^3 - 7x - 6$

6. Inventa un polinomio de cuarto grado que no tenga raíces.

Una posible solución es: $P(x) = (x^2 + 1)^2 = x^4 + 2x^2 + 1$

7. Inventa un polinomio de cuarto grado que tenga solo dos raíces: $x = 2$ y $x = -3$.

Una posible solución es: $P(x) = (x^2 + 1) \cdot (x - 2) \cdot (x + 3) = x^4 + x^3 - 5x^2 + x - 6$

8. Inventa un polinomio de segundo grado que tenga como raíz doble $x = -3$.

Una posible solución es: $P(x) = (x + 3)^2 = x^2 + 6x + 9$

9. Inventa un polinomio que no tenga raíces:

a) Que sea de grado 5.

b) Que sea de 4.º grado.

a) Un polinomio de grado impar seguro que tiene alguna raíz.

b) Una posible solución: $P(x) = (x^2 + 1)^2 = x^4 + 2x^2 + 1$

4 Factorización de polinomios

Página 43

1. Factoriza los siguientes polinomios:

a) $3x^2 + 2x - 8$ **b)** $3x^5 - 48x$

c) $2x^3 + x^2 - 5x + 12$ **d)** $x^3 - 7x^2 + 8x + 16$

e) $x^4 + 2x^3 - 23x^2 - 60x$ **f)** $9x^4 - 36x^3 + 26x^2 + 4x - 3$

a) $x = \dfrac{-2 \pm \sqrt{4 + 4 \cdot 8 \cdot 3}}{6} = \dfrac{-2 \pm 10}{6} = \begin{cases} 4/3 \\ -2 \end{cases}$

$3x^2 + 2x - 8 = 3\left(x - \dfrac{4}{3}\right)(x + 2) = (3x - 4)(x + 2)$

b) $3x^5 - 48x = x(3x^4 - 48) = 3x(x^4 - 16) = 3x(x^2 + 4)(x^2 - 4) = 3x(x + 2)(x - 2)(x^2 + 4)$

c) Probamos con los divisores enteros de 12 y no encontramos ningún resto cero.

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & 1 & -5 & 12 \\ -3 & & -6 & 15 & -30 \\ \hline & 2 & -5 & 10 & \boxed{-18} \end{array}$$

No podemos factorizar el polinomio $2x^3 + x^2 - 5x + 12$.

d)

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -7 & 8 & 16 \\ 4 & & 4 & -12 & -16 \\ \hline & 1 & -3 & -4 & \boxed{0} \end{array}$$

$x^2 - 3x - 4 = 0$

$x = \dfrac{3 \pm \sqrt{9 + 16}}{2} = \dfrac{3 \pm 5}{2} = \begin{cases} 4 \\ -1 \end{cases}$

$x^3 - 7x^2 + 8x + 16 = (x - 4)^2(x + 1)$

e) $x^4 + 2x^3 - 23x^2 - 60x = x(x^3 + 2x^2 - 23x - 60)$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 2 & -23 & -60 \\ 5 & & 5 & 35 & 60 \\ \hline & 1 & 7 & 12 & \boxed{0} \end{array}$$

$x^2 + 7x + 12 = 0$

$x = \dfrac{-7 \pm \sqrt{49 - 48}}{2} = \dfrac{-7 \pm 1}{2} = \begin{cases} -4 \\ -3 \end{cases}$

$x^4 + 2x^3 - 23x^2 - 60x = x(x - 5)(x + 4)(x + 3)$

f)

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 9 & -36 & 26 & 4 & -3 \\ 1 & & 9 & -27 & -1 & 3 \\ \hline & 9 & -27 & -1 & 3 & \boxed{0} \\ 3 & & 27 & 0 & -3 & \\ \hline & 9 & 0 & -1 & \boxed{0} & \end{array}$$

$9x^2 - 1 = 0 \;\to\; x = \pm\dfrac{1}{3}$

$9x^2 - 1 = (3x + 1)(3x - 1)$

$9x^4 - 36x^3 + 26x^2 + 4x - 3 = (x - 1)(x - 3)(3x + 1)(3x - 1)$

5 Divisibilidad de polinomios

Página 45

1. Razona si existe alguna relación de divisibilidad entre los siguientes pares de polinomios:

a) $P(x) = x^3 - 7x^2$ **y** $Q(x) = x^3 - 7x$

b) $P(x) = x^3 - 7x^2$ **y** $Q(x) = x^2 - 7x$

c) $P(x) = x^4 - 3x - 10$ **y** $Q(x) = x - 2$

a) $\left.\begin{array}{l} P(x) = x^2(x-7) \\ Q(x) = x(x^2-7) \end{array}\right\}$ No existe ninguna relación de divisibilidad.

b) $\left.\begin{array}{l} P(x) = x^2(x-7) \\ Q(x) = x(x-7) \end{array}\right\}$ $Q(x)$ divide a $P(x)$.

c)

	1	0	0	–3	–10
2		2	4	8	10
	1	2	4	5	0

$\left.\begin{array}{l} P(x) = (x-2)(x^3 + 2x^2 + 4x + 5) \\ Q(x) = x - 2 \end{array}\right\}$ $Q(x)$ divide a $P(x)$.

2. Busca dos polinomios de 3.[er] **grado que sean divisibles por** $x - 5$ **y** x**. Calcula su máx.c.d. y su mín.c.m.**

Por ejemplo:

$x(x-5)(x-2) = x^3 - 7x^2 + 10x$

$x(x-5)x = x^3 - 5x^2$

máx.c.d. $[x^3 - 7x^2 + 10x,\ x^3 - 5x^2] = x(x-5)$

mín.c.m. $[x^3 - 7x^2 + 10x,\ x^3 - 5x^2] = x^2(x-5)(x-2)$

3. Indica cuáles de los siguientes polinomios son irreducibles. Descompón en factores los que no lo sean.

a) $x^2 - 3x + 2$ **b)** $x^2 - 5x + 6$ **c)** $3x^2 + 5x$

d) $3x^2 - 5x - 2$ **e)** $3x^2 - 5x + 3$ **f)** $3x^3 - 5x^2 + 3x$

a) $x = \dfrac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \dfrac{3 \pm 1}{2} = \begin{cases} 2 \\ 1 \end{cases}$ $\quad x^2 - 3x + 2 = (x-2)(x-1)$

b) $x = \dfrac{5 \pm \sqrt{25-24}}{2} = \dfrac{5 \pm 1}{2} = \begin{cases} 3 \\ 2 \end{cases}$ $\quad x^2 - 5x + 6 = (x-3)(x-2)$

c) $3x^2 + 5x = x(3x+5)$

d) $x = \dfrac{5 \pm \sqrt{25+24}}{6} = \dfrac{5 \pm 7}{6} = \begin{cases} 2 \\ -1/3 \end{cases}$ $\quad 3x^2 - 5x - 2 = (x-2)(3x+1)$

e) $x = \dfrac{5 \pm \sqrt{26-36}}{6}$ No tiene solución. $\quad 3x^2 - 5x + 3$ es irreducible.

f) $3x^3 - 5x^2 + 3x = x(3x^2 - 5x + 3)$ $\quad 3x^2 - 5x + 3$ es irreducible (apartado e).

4. **Halla mentalmente (sin operar) el máx.c.d. y el mín.c.m. de los siguientes pares de polinomios:**

a) $x^2 - 1$ **y** $(x + 1)^2$

b) $x^2 + x$ **y** $x^2 - x$

c) $x^3 - x$ **y** $x^2 - 1$

d) $x^2 + 1$ **y** x^2

a) máx.c.d. $= (x + 1)$

mín.c.m. $= (x + 1)^2(x - 1)$

b) máx.c.d. $= x$

mín.c.m. $= x(x + 1)(x - 1)$

c) máx.c.d. $= (x + 1)(x - 1)$

mín.c.m. $= x(x + 1)(x - 1)$

d) máx.c.d. $= 1$

mín.c.m. $= (x^2 + 1)x^2$

5. **Halla el máx.c.d. y el mín.c.m. de** P **y** Q **en cada caso:**

a) $P(x) = x^2 - 9,\ \ Q(x) = x^2 - 6x + 9$

b) $P(x) = x^3 - 7x^2 + 12x,\ \ Q(x) = x^4 - 3x^3 - 4x^2$

c) $P(x) = x(x - 3)^2(x + 5),\ \ Q(x) = x^3(x - 3)(x^2 + x + 2)$

a) $P(x) = (x + 3)(x - 3) \qquad Q(x) = (x - 3)^2$

máx.c.d. $[P(x),\ Q(x)] = x - 3$

mín.c.m. $[P(x),\ Q(x)] = (x - 3)^2(x + 3)$

b) $P(x) = x(x^2 - 7x + 12) = x(x - 4)(x - 3) \qquad Q(x) = x^2(x - 4)(x + 1)$

máx.c.d. $[P(x),\ Q(x)] = x(x - 4)$

mín.c.m. $[P(x),\ Q(x)] = x^2(x - 4)(x - 3)(x + 1)$

c) $P(x) = x(x - 3)^2(x + 5) \qquad Q(x) = x^3(x - 3)(x^2 + x + 2)$

máx.c.d. $[P(x),\ Q(x)] = x(x - 3)$

mín.c.m. $[P(x),\ Q(x)] = x^3(x - 3)^2(x + 5)(x^2 + x + 2)$

6. $P(x) = (x - 2)^2 x^2$. **Busca un polinomio de tercer grado,** $Q(x)$, **que cumpla las dos condiciones siguientes:**

a) **máx.c.d.** $[P(x),\ Q(x)] = x^2 - 2x$

b) **mín.c.m.** $[P(x),\ Q(x)] = (x - 2)^2 x^2 (x + 5)$

$P(x) = (x - 2)^2x^2$

Si máx.c.d. $[P(x),\ Q(x)] = x^2 - 2x = x(x - 2)$ y

mín.c.m. $[P(x),\ Q(x)] = (x - 2)^2x^2(x + 5)$,

debe ser $Q(x) = x(x - 2)(x + 5)$

6 Fracciones algebraicas

Página 46

Cálculo mental

1. Simplifica estas fracciones:

a) $\dfrac{2x}{x^2+x}$ b) $\dfrac{x+1}{(x+1)^2}$ c) $\dfrac{x+1}{x^2-1}$ d) $\dfrac{x^2-6x+9}{x-3}$ e) $\dfrac{x^2-2x}{x^2-3x}$ f) $\dfrac{x^3-4x^2}{x^3}$

a) $\dfrac{2}{x+1}$ b) $\dfrac{1}{x+1}$ c) $\dfrac{1}{x-1}$ d) $x-3$ e) $\dfrac{x-2}{x-3}$ f) $\dfrac{x-4}{x}$

2. Di si cada par de fracciones son equivalentes o no.

a) $\dfrac{x-3}{x^2-3x}$ y $\dfrac{x}{x^2}$ b) $\dfrac{x}{x-1}$ y $\dfrac{x-1}{x}$ c) $\dfrac{1}{x-1}$ y $\dfrac{x+1}{x^2-1}$

a) $\dfrac{x-3}{x^2-3x}=\dfrac{1}{x}=\dfrac{x}{x^2}$ → Son equivalentes.

b) $\dfrac{x}{x-1}\neq\dfrac{x-1}{x}$ → $x^2\neq(x-1)^2$. No son equivalentes.

c) $\dfrac{1}{x-1}=\dfrac{x+1}{(x-1)(x+1)}=\dfrac{x+1}{x^2-1}$ → Son equivalentes.

1. Simplifica las siguientes fracciones:

a) $\dfrac{2x^2-6x}{4x^3-2x}$ b) $\dfrac{(x-3)^2\,x(x+3)}{(x-3)\,x^2(x+2)}$ c) $\dfrac{x^3+3x^2+x+3}{x^3+3x^2}$ d) $\dfrac{x^3-5x^2+6x}{x^3-x^2-14x+24}$

a) $\dfrac{2x^2-6x}{4x^3-2x}=\dfrac{2x(x-3)}{2x(2x^2-1)}=\dfrac{x-3}{2x^2-1}$

b) $\dfrac{(x-3)^2x(x+3)}{(x-3)x^2(x+2)}=\dfrac{(x-3)(x+3)}{x(x+2)}$

c) $\dfrac{x^3+3x^2+x+3}{x^3+3x^2}=\dfrac{(x+3)(x^2+1)}{x^2(x+3)}=\dfrac{x^2+1}{x^2}$

d) $\dfrac{x^3-5x^2+6x}{x^3-x^2-14x+24}=\dfrac{x(x^2-5x+6)}{x^3-x^2-14x+24}=\dfrac{x(x-2)(x-3)}{(x-2)(x-3)(x+4)}=\dfrac{x}{x+4}$

2. Comprueba si cada par de fracciones son equivalentes:

a) $\dfrac{x^3-x}{x^3+x^2}$ y $\dfrac{3x-3}{3x}$ b) $\dfrac{(x+5)^2}{x^3+10x^2+25x}$ y $\dfrac{x-3}{3x-x^2}$

a) $\dfrac{x^3-x}{x^3+x^2}=\dfrac{x(x^2-1)}{x(x^2+x)}=\dfrac{(x+1)(x-1)}{x(x+1)}=\dfrac{x-1}{x}=\dfrac{3x-3}{3x}$. Son equivalentes.

b) $\dfrac{(x+5)^2}{x^3+10x^2+25x}=\dfrac{(x+5)^2}{x(x+5)^2}=\dfrac{1}{x}=\dfrac{x-3}{x(x-3)}=\dfrac{x-3}{x^2-3x}\neq\dfrac{x-3}{3x-x^2}$. No son equivalentes.

Página 47

Cálculo mental

1. Reduce a común denominador.

a) $\dfrac{3x+1}{x^2}$ y $\dfrac{3}{x}$ **b)** $\dfrac{5}{x-1}$ y $\dfrac{x}{(x+1)(x-1)}$ **c)** $\dfrac{3}{x+1}$ y $\dfrac{2}{x^2-1}$

a) $\dfrac{3x+1}{x^2}$; $\dfrac{3x}{x^2}$ b) $\dfrac{5(x+1)}{(x-1)(x+1)}$; $\dfrac{x}{(x-1)(x+1)}$ c) $\dfrac{3(x-1)}{(x+1)(x-1)} = \dfrac{3(x-1)}{x^2-1}$; $\dfrac{2}{x^2-1}$

2. Opera.

a) $\dfrac{3x+1}{x^2} - \dfrac{3}{x}$ **b)** $\dfrac{3}{x+1} + \dfrac{2}{x^2-1}$

c) $\dfrac{2x}{x+2} \cdot \dfrac{x^2-4}{x}$ **d)** $\dfrac{x^2}{x^2-25} : \dfrac{x}{x-5}$

a) $\dfrac{1}{x^2}$ b) $\dfrac{3x-1}{x^2-1}$

c) $2(x-2)$ d) $\dfrac{x}{x+5}$

3. Efectúa las operaciones y simplifica el resultado.

a) $\dfrac{2x+1}{x+3} - \dfrac{x^2+5}{x^2+3x}$ **b)** $\dfrac{3}{x}\left(\dfrac{x}{x+1} - \dfrac{x^2}{x^2-1}\right)$

c) $\dfrac{5x-10}{x+3} \cdot \dfrac{x^2-9}{x-2}$ **d)** $\dfrac{3x-1}{x} - \dfrac{x+3}{x^2-2x} + \dfrac{2x+5}{x-2}$

e) $\dfrac{2x+1}{2x-1} : \dfrac{x^2}{4x-2}$ **f)** $\dfrac{x^2}{x-1} : \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x-1}\right)$

a) $\dfrac{2x+1}{x+3} - \dfrac{x^2+5}{x^2+3x} = \dfrac{(2x+1)\cdot x - (x^2+5)}{x^2+3x} = \dfrac{2x^2+x-x^2-5}{x^2+3x} = \dfrac{x^2+x-5}{x^2+3x}$

b) $\dfrac{3}{x}\left(\dfrac{x}{x+1} - \dfrac{x^2}{x^2-1}\right) = \dfrac{3}{x}\left(\dfrac{x(x-1)-x^2}{x^2-1}\right) = \dfrac{3(x-1-x)}{x^2-1} = \dfrac{-3}{x^2-1}$

c) $\dfrac{5x-10}{x+3} \cdot \dfrac{x^2-9}{x-2} = \dfrac{5(x-2)(x+3)(x-3)}{(x+3)(x-2)} = 5(x-3)$

d) $\dfrac{3x-1}{x} - \dfrac{x+3}{x^2-2x} + \dfrac{2x+5}{x-2} = \dfrac{(3x-1)(x-2)-(x+3)+x(2x+5)}{x(x-2)} =$

$= \dfrac{3x^2-7x+2-x-3+2x^2+5x}{x(x-2)} = \dfrac{5x^2-3x-1}{x(x-2)}$

e) $\dfrac{2x+1}{2x-1} : \dfrac{x^2}{4x-2} = \dfrac{(2x+1)\cdot 2\cdot(2x-1)}{x^2(2x-1)} = \dfrac{2(2x+1)}{x^2}$

f) $\dfrac{x^2}{x-1} : \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x-1}\right) = \dfrac{x^2}{x-1} : \left(\dfrac{x-1-x}{x(x-1)}\right) = \dfrac{x^3(x-1)}{-(x-1)} = -x^3$

Página 48

Hazlo tú. Opera y simplifica.

$$\left(\frac{3x}{(x-2)^2}-\frac{3}{x-2}\right):\frac{1}{x-2}$$

$$\left(\frac{3x}{(x-2)^2}-\frac{3}{x-2}\right):\frac{1}{x-2}=\left(\frac{3x}{(x-2)^2}-\frac{3x-6}{(x-2)^2}\right):\frac{1}{x-2}=\frac{6}{(x-2)^2}:\frac{1}{x-2}=$$

$$=\frac{6(x-2)}{(x-2)^2}=\frac{6}{x-2}$$

Hazlo tú. Calcula el valor de k para que esta división sea exacta:

$(2x^4-5x^3+kx^2-12):(x+2)$

Para que $P(x)=2x^4-5x^3+kx^2-12$ sea divisible entre $(x+2)$, ha de verificarse que $P(-2)=0$:

$P(-2)=2(-2)^4-5(-2)^3+k(-2)^2-12=0 \rightarrow 60+4k=0 \rightarrow k=-15$

Hazlo tú. Factoriza.

a) $x^2m+x^2n-ym-yn$ **b) x^3+a^3**

a) $x^2m+x^2n-ym-yn=x^2(m+n)-y(m+n)=(x^2-y)(m+n)$

b) x^3+a^3 puede tener como raíces: a; $-a$; a^2; $-a^2$; a^3; $-a^3$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & 0 & a^3 \\ -a & & -a & a^2 & -a^3 \\ \hline & 1 & -a & a^2 & \boxed{0} \end{array} \rightarrow x^2-ax+a^2,$$ como en el ejemplo resuelto, vemos que no tiene solución si $a\neq 0$.

$x=-a$ es raíz

$x^3+a^3=(x+a)(x^2-ax+a^2)$

Ejercicios y problemas

Página 49

Practica

Polinomios. Operaciones

1. **Dados los polinomios $P(x) = x^3 - 5x^2 - 3$; $Q(x) = -\frac{1}{3}x^2 + 2x - 1$ y $R(x) = x^3 - \frac{1}{2}x^2$, calcula:**

a) $P(x) + Q(x) - R(x)$

b) $2P(x) - 3Q(x)$

c) $P(x) \cdot Q(x)$

d) $Q(x) \cdot R(x)$

a) $P(x) + Q(x) - R(x)$

$$\begin{array}{rrrr}
x^3 & -\ 5x^2 & & -\ 3 \\
 & -\frac{1}{3}x^2 & +\ 2x & -\ 1 \\
-x^3 & +\ \frac{1}{2}x^2 & & \\
\hline
 & -\frac{29}{6}x^2 & +\ 2x & -\ 4
\end{array}$$

b) $2P(x) - 3Q(x)$

$$\begin{array}{rrrr}
2x^3 & -\ 10x^2 & & -\ 6 \\
 & x^2 & -\ 6x & +\ 3 \\
\hline
2x^3 & -\ 9x^2 & -\ 6x & -\ 3
\end{array}$$

c) $P(x) \cdot Q(x)$

$$\begin{array}{rrrrrr}
 & & x^3 & -\ 5x^2 & & -\ 3 \\
 & & & -\frac{1}{3}x^2 & +\ 2x & -\ 1 \\
\hline
 & & -x^3 & +\ 5x^2 & & +\ 3 \\
 & 2x^4 & -\ 10x^3 & & -\ 6x & \\
-\frac{1}{3}x^5 & +\ \frac{5}{3}x^4 & & +\ x^2 & & \\
\hline
-\frac{1}{3}x^5 & +\ \frac{11}{3}x^4 & -\ 11x^3 & +\ 6x^2 & -\ 6x & +\ 3
\end{array}$$

d) $Q(x) \cdot R(x)$

$$\begin{array}{rrrr}
 & & -\frac{1}{3}x^2 & +\ 2x\ -\ 1 \\
 & & x^3 & -\ \frac{1}{2}x^2 \\
\hline
 & \frac{1}{6}x^4 & -\ x^3 & +\ \frac{1}{2}x^2 \\
-\frac{1}{3}x^5 & +\ 2x^4 & -\ x^3 & \\
\hline
-\frac{1}{3}x^5 & +\ \frac{13}{6}x^4 & -\ 2x^3 & +\ \frac{1}{2}x^2
\end{array}$$

2. **Efectúa y simplifica el resultado.**

a) $(2y + x)(2y - x) + (x + y)^2 - x(y + 3)$

b) $3x(x + y) - (x - y)^2 + (3x + y)y$

c) $(2y + x + 1)(x - 2y) - (x + 2y)(x - 2y)$

d) $(x + y)(2x - y)(x + 2y)$

a) $4y^2 - x^2 + x^2 + 2xy + y^2 - xy - 3x = 5y^2 + xy - 3x$

b) $3x^2 + 3xy - x^2 + 2xy - y^2 + 3xy + y^2 = 2x^2 + 8xy$

c) $2yx - 4y^2 + x^2 + 2xy + x - 2y - x^2 + 4y^2 = x - 2y$

d) $(2x^2 - xy + 2xy - y^2)(x + 2y) = (2x^2 + xy - y^2)(x + 2y) =$

$= 2x^3 + 4x^2y + x^2y + 2xy^2 - xy^2 - 2y^3 = 2x^3 + 5x^2y + xy^2 - 2y^3$

3. **Multiplica cada expresión por el mín.c.m. de los denominadores y simplifica:**

a) $\dfrac{3x(x+5)}{5} - \dfrac{(2x+1)^2}{4} + \dfrac{(x-4)(x+4)}{2}$

b) $\dfrac{(8x^2-1)(x^2+2)}{10} - \dfrac{(3x^2+2)^2}{15} + \dfrac{(2x+3)(2x-3)}{6}$

c) $\dfrac{(x-1)^3}{8} + \dfrac{3}{4}x(x+2)^2 - \dfrac{x^3}{10}$

a) $20\left[\dfrac{3x(x+5)}{5} - \dfrac{(2x+1)^2}{4} + \dfrac{(x-4)(x+4)}{2}\right] = 12x^2 + 60x - 5(4x^2 + 4x + 1) + 10(x^2 - 16) =$

$= 12x^2 + 60x - 20x^2 - 20x - 5 + 10x^2 - 160 = 2x^2 + 40x - 165$

b) $3(8x^4 + 15x^2 - 2) - 2(9x^4 + 12x^2 + 4) + 5(4x^2 - 9) =$

$= 24x^4 + 45x^2 - 6 - 18x^4 - 24x^2 - 8 + 20x^2 - 45 = 6x^4 + 41x^2 - 59$

c) $40\left(\dfrac{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}{8} + \dfrac{3x^3 + 12x^2 + 12x}{4} - \dfrac{x^3}{10}\right) =$

$= 5x^3 - 15x^2 + 15x - 5 + 30x^3 + 120x^2 + 120x - 4x^3 = 31x^3 + 105x^2 + 135x - 5$

4. **Expresa como producto de dos binomios.**

a) $49x^2 - 16$

b) $9x^4 - y^2$

c) $81x^4 - 64x^2$

d) $25x^2 - 3$

e) $2x^2 - 100$

f) $5x^2 - 2$

a) $(7x + 4)(7x - 4)$

b) $(3x^2 + y)(3x^2 - y)$

c) $(9x^2 + 8x)(9x^2 - 8x)$

d) $(5x + \sqrt{3})(5x - \sqrt{3})$

e) $(\sqrt{2}x + 10)(\sqrt{2}x - 10)$

f) $(\sqrt{5}x + \sqrt{2})(\sqrt{5}x - \sqrt{2})$

5. **Completa cada expresión para que sea el cuadrado de un binomio:**

a) $16x^2 + (\ldots) - 8xy$

b) $(\ldots) + 25y^2 + 60xy$

c) $\dfrac{9}{16}x^2 + 4y^2 + (\ldots)$

d) $(\ldots) + \dfrac{y^2}{9} - \dfrac{4}{3}x^2y$

a) $16x^2 + y^2 - 8xy = (4x - y)^2$

b) $36x^2 + 25y^2 + 60xy = (5y + 6x)^2$

c) $\dfrac{9}{16}x^2 + 4y^2 + 3xy = \left(\dfrac{3}{4}x + 2y\right)^2$

d) $4x^4 + \dfrac{y^2}{9} - \dfrac{4}{3}x^2y = \left(2x^2 - \dfrac{y}{3}\right)^2$

6. **Saca factor común e identifica los productos notables como en el ejemplo.**

- $2x^4 + 12x^3 + 18x^2 = 2x^2(x^2 + 6x + 9) = 2x^2(x + 3)^2$

a) $20x^3 - 60x^2 + 45x$

b) $27x^3 - 3xy^2$

c) $3x^3 + 6x^2y + 3y^2x$

d) $4x^4 - 81x^2y^2$

a) $5x(4x^2 - 12x + 9) = 5x(2x - 3)^2$

b) $3x(9x^2 - y^2) = 3x(3x + y)(3x - y)$

c) $3x(x^2 + 2xy + y^2) = 3x(x + y)^2$

d) $x^2(4x^2 - 81y^2) = x^2(2x + 9y)(2x - 9y)$

7. **Halla el cociente y el resto de cada una de estas divisiones:**

a) $(7x^2 - 5x + 3) : (x^2 - 2x + 1)$

b) $(2x^3 - 7x^2 + 5x - 3) : (x^2 - 2x)$

c) $(x^3 - 5x^2 + 2x + 4) : (x^2 - x + 1)$

a)
$$\begin{array}{rrrr|l}
7x^2 & -\ \ 5x & +\ 3 & & x^2-2x+1 \\ \cline{5-5}
-7x^2 & +\ 14x & -\ 7 & & 7 \\ \cline{1-3}
 & 9x & -\ 4 & &
\end{array}$$

COCIENTE: 7

RESTO: $9x - 4$

b)
$$\begin{array}{rrrr|l}
2x^3 & -7x^2 & +5x & -\ 3 & x^2-2x \\ \cline{5-5}
-2x^3 & +4x^2 & & & 2x-3 \\ \cline{1-2}
 & -3x^2 & & & \\
 & 3x^2 & -6x & & \\ \cline{2-4}
 & & -x & -\ 3 &
\end{array}$$

COCIENTE: $2x - 3$

RESTO: $-x - 3$

c)
$$\begin{array}{rrrr|l}
x^3 & -5x^2 & +2x & +\ 4 & x^2-x+1 \\ \cline{5-5}
-x^3 & +\ x^2 & -\ x & & x-4 \\ \cline{1-3}
 & -4x^2 & +\ x & & \\
 & 4x^2 & -4x & +\ 4 & \\ \cline{2-4}
 & & -3x & +\ 8 &
\end{array}$$

COCIENTE: $x - 4$

RESTO: $-3x + 8$

8. **Divide y expresa en cada caso así:**

$$\frac{\textbf{dividendo}}{\textbf{divisor}} = \textbf{cociente} + \frac{\textbf{resto}}{\textbf{divisor}}$$

a) $(3x^5 - 2x^3 + 4x - 1) : (x^3 - 2x + 1)$

b) $(x^4 - 5x^3 + 3x - 2) : (x^2 + 1)$

c) $(4x^5 + 3x^3 - 2x) : (x^2 - x + 1)$

d) $(x^3 - 5x^2 + 3x + 1) : (x^2 - 5x + 1)$

a)
$$\begin{array}{rrrrr|l}
3x^5 & -2x^3 & & +\ \ 4x & -\ 1 & x^3-2x+1 \\ \cline{6-6}
-3x^5 & +6x^3 & -3x^2 & & & 3x^2+4 \\ \cline{1-3}
 & 4x^3 & -3x^2 & & & \\
 & -4x^3 & & +\ \ 8x & -\ 4 & \\ \cline{2-5}
 & & -3x^2 & +\ 12x & -\ 5 &
\end{array}$$

$$\frac{3x^5 - 2x^3 + 4x - 1}{x^3 - 2x + 1} = 3x^2 + 4 + \frac{-3x^2 + 12x - 5}{x^3 - 2x + 1}$$

b)
$$\begin{array}{rrrrr|l}
x^4 & -5x^3 & & +\ 3x & -\ 2 & x^2+1 \\ \cline{6-6}
-x^4 & & -\ x^2 & & & x^2-5x-1 \\ \cline{1-3}
 & -5x^3 & -\ x^2 & & & \\
 & 5x^3 & & +\ 5x & & \\ \cline{2-4}
 & & -\ x^2 & +\ 8x & & \\
 & & x^2 & & +\ 1 & \\ \cline{3-5}
 & & & 8x & -\ 1 &
\end{array}$$

$$\frac{x^4 - 5x^3 + 3x - 2}{x^2 + 1} = x^2 - 5x - 1 + \frac{8x - 1}{x^2 + 1}$$

c)

$$\begin{array}{rrrrrr|l}
4x^5 & & +3x^3 & & -2x & & x^2-x+1 \\ \cline{7-7}
-4x^5 & +4x^4 & -4x^3 & & & & 4x^3+4x^2+3x-1 \\ \cline{1-3}
 & 4x^4 & -x^3 & & & & \\
 & -4x^4 & +4x^3 & -4x^2 & & & \\ \cline{2-4}
 & & 3x^3 & -4x^2 & & & \\
 & & -3x^3 & +3x^2 & -3x & & \\ \cline{3-5}
 & & & -x^2 & -5x & & \\
 & & & x^2 & -x & +1 & \\ \cline{4-6}
 & & & & -6x & +1 &
\end{array}$$

$$\frac{4x^5+3x^3-2x}{x^2-x+1} = 4x^3+4x^2+3x-1+\frac{-6x+1}{x^2-x+1}$$

d)

$$\begin{array}{rrrr|l}
x^3 & -5x^2 & +3x & +1 & x^2-5x+1 \\ \cline{5-5}
-x^3 & +5x^2 & -x & & x \\ \cline{1-3}
 & & 2x & +1 &
\end{array}$$

$$\frac{x^3-5x^2+3x+1}{x^2-5x+1} = x+\frac{2x+1}{x^2-5x+1}$$

9. **Expresa las siguientes divisiones de la forma $D = d \cdot c + r$.**

a) $(6x^3+5x^2-9x) : (3x-2)$

b) $(x^4-4x^2+12x-9) : (x^2-2x+3)$

c) $(4x^4+2x^3-2x^2+9x+5) : (-2x^3+x-5)$

a)

$$\begin{array}{rrrr|l}
6x^3 & +5x^2 & -9x & & 3x-2 \\ \cline{5-5}
-6x^3 & +4x^2 & & & 2x^2+3x-1 \\ \cline{1-2}
 & 9x^2 & & & \\
 & -9x^2 & +6x & & \\ \cline{2-3}
 & & -3x & & \\
 & & 3x & -2 & \\ \cline{3-4}
 & & & -2 &
\end{array}$$

$6x^3+5x^2-9x = (3x-2)(2x^2+3x-1)-2$

b)

$$\begin{array}{rrrrr|l}
x^4 & & -4x^2 & +12x & -9 & x^2-2x+3 \\ \cline{6-6}
-x^4 & +2x^3 & -3x^2 & & & x^2+2x-3 \\ \cline{1-3}
 & 2x^3 & -7x^2 & & & \\
 & -2x^3 & +4x^2 & -6x & & \\ \cline{2-4}
 & & -3x^2 & +6x & & \\
 & & 3x^2 & -6x & +9 & \\ \cline{3-5}
 & & & & 0 &
\end{array}$$

$x^4-4x^2+12x-9 = (x^2-2x+3)(x^2+2x-3)$

c)

$$\begin{array}{rrrrr|l}
4x^4 & +2x^3 & -2x^2 & +9x & +5 & -2x^3+x-5 \\ \cline{6-6}
-4x^4 & & +2x^2 & -10x & & -2x-1 \\ \cline{1-4}
 & 2x^3 & & -x & & \\
 & -2x^3 & & +x & -5 & \\ \cline{2-5}
 & & & & 0 &
\end{array}$$

$4x^4+2x^3-2x^2+9x+5 = (-2x^3+x-5)(-2x-1)$

10. **Efectúa las siguientes divisiones:**

a) $(2x^3 - x^2 + 3x - 1) : (2x^2 + 2x)$

b) $(x^4 - x^3 - 3x + 1) : (2x^2 - 1)$

a)
$$\begin{array}{rrrr|l}
2x^3 & -\ x^2 & +\ 3x & -\ 1 & 2x^2 + 2x \\
\cline{5-5}
-2x^3 & -\ 2x^2 & & & x - \frac{3}{2} \\
\cline{1-2}
 & -\ 3x^2 & +\ 3x & -\ 1 & \\
 & +\ 3x^2 & +\ 3x & & \\
\cline{2-4}
 & & 6x & -\ 1 &
\end{array}$$

b)
$$\begin{array}{rrrrr|l}
x^4 & -\ x^3 & & -\ 3x & +\ 1 & 2x^2 - 1 \\
\cline{6-6}
-x^4 & & +\ \frac{1}{2}x^2 & & & \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} \\
\cline{1-5}
 & -\ x^3 & +\ \frac{1}{2}x^2 & -\ 3x & +\ 1 & \\
 & +\ x^3 & & -\ \frac{1}{2}x & & \\
\cline{2-5}
 & & +\ \frac{1}{2}x^2 & -\ \frac{7}{2}x & +\ 1 & \\
 & & -\ \frac{1}{2}x^2 & & +\ \frac{1}{4} & \\
\cline{3-5}
 & & & -\ \frac{7}{2}x & +\ \frac{5}{4} &
\end{array}$$

Regla de Ruffini. Aplicaciones

11. **Aplica la regla de Ruffini para hallar el cociente y el resto de las siguientes divisiones:**

a) $(5x^3 - 3x^2 + x - 2) : (x - 2)$

b) $(x^4 - 5x^3 + 7x + 3) : (x + 1)$

c) $(-x^3 + 4x) : (x - 3)$

d) $(x^4 - 3x^3 + 5) : (x + 2)$

a)
$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 5 & -3 & 1 & -2 \\
2 & & 10 & 14 & 30 \\
\hline
 & 5 & 7 & 15 & \boxed{28}
\end{array}$$

COCIENTE: $5x^2 + 7x + 15$

RESTO: 28

b)
$$\begin{array}{r|rrrrr}
 & 1 & -5 & 0 & 7 & 3 \\
-1 & & -1 & 6 & -6 & -1 \\
\hline
 & 1 & -6 & 6 & 1 & \boxed{2}
\end{array}$$

COCIENTE: $x^3 - 6x^2 + 6x + 1$

RESTO: 2

c)
$$\begin{array}{r|rrrr}
 & -1 & 0 & 4 & 0 \\
3 & & -3 & -9 & -15 \\
\hline
 & -1 & -3 & -5 & \boxed{-15}
\end{array}$$

COCIENTE: $-x^2 - 3x - 5$

RESTO: -15

d)
$$\begin{array}{r|rrrrr}
 & 1 & -3 & 0 & 0 & 5 \\
-2 & & -2 & 10 & -20 & 40 \\
\hline
 & 1 & -5 & 10 & -20 & \boxed{45}
\end{array}$$

COCIENTE: $x^3 - 5x^2 + 10x - 20$

RESTO: 45

12. **Utiliza la regla de Ruffini para calcular $P(3)$, $P(-5)$ y $P(7)$ en los siguientes casos:**

a) $P(x) = 2x^3 - 5x^2 + 7x + 3$

b) $P(x) = x^4 - 3x^2 + 7$

a)
$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 2 & -5 & 7 & 3 \\
3 & & 6 & 3 & 30 \\
\hline
 & 2 & 1 & 10 & \boxed{33}
\end{array}$$

$P(3) = 33$

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 2 & -5 & 7 & 3 \\
-5 & & -10 & 75 & -410 \\
\hline
 & 2 & -15 & 82 & \boxed{-407}
\end{array}$$

$P(-5) = -407$

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 2 & -5 & 7 & 3 \\
7 & & 14 & 63 & 490 \\
\hline
 & 2 & 9 & 70 & \boxed{493}
\end{array}$$

$P(7) = 493$

b)
$$\begin{array}{r|rrrrr}
 & 1 & 0 & -3 & 0 & 7 \\
3 & & 3 & 9 & 18 & 54 \\
\hline
 & 1 & 3 & 6 & 18 & \boxed{61}
\end{array}$$

$P(3) = 61$

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 & 1 & 0 & -3 & 0 & 7 \\
-5 & & -5 & 25 & -110 & 550 \\
\hline
 & 1 & -5 & 22 & -110 & \boxed{557}
\end{array}$$

$P(-5) = 557$

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 & 1 & 0 & -3 & 0 & 7 \\
7 & & 7 & 49 & 322 & 2254 \\
\hline
 & 1 & 7 & 46 & 322 & \boxed{2261}
\end{array}$$

$P(7) = 2261$

13. **Averigua cuáles de los números 1, –1, 2, –2, 3, –3 son raíces de los polinomios siguientes:**

a) $P(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ **b)** $Q(x) = x^3 - 3x^2 + x - 3$

a)
$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -2 & -5 & 6 \\ 1 & & 1 & -1 & -6 \\ \hline & 1 & -1 & -6 & \boxed{0} \end{array} \qquad \begin{array}{r|rrrr} & 1 & -2 & -5 & 6 \\ -1 & & -1 & 3 & 2 \\ \hline & 1 & -3 & -2 & \boxed{8 \neq 0} \end{array} \qquad \begin{array}{r|rrrr} & 1 & -2 & -5 & 6 \\ 2 & & 2 & 0 & -10 \\ \hline & 1 & 0 & -5 & \boxed{-4 \neq 0} \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -2 & -5 & 6 \\ -2 & & -2 & 8 & -6 \\ \hline & 1 & -4 & 3 & \boxed{0} \end{array} \qquad \begin{array}{r|rrrr} & 1 & -2 & -5 & 6 \\ 3 & & 3 & 3 & -6 \\ \hline & 1 & 1 & -2 & \boxed{0} \end{array} \qquad \begin{array}{r|rrrr} & 1 & -2 & -5 & 6 \\ -3 & & -3 & 15 & -30 \\ \hline & 1 & -5 & 10 & \boxed{-24 \neq 0} \end{array}$$

Son raíces de $P(x)$: 1, –2 y 3.

b)
$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -3 & 1 & -3 \\ 1 & & 1 & -2 & -1 \\ \hline & 1 & -2 & -1 & \boxed{-4 \neq 0} \end{array} \qquad \begin{array}{r|rrrr} & 1 & -3 & 1 & -3 \\ -1 & & -1 & 4 & -5 \\ \hline & 1 & -4 & 5 & \boxed{-8 \neq 0} \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -3 & 1 & -3 \\ 3 & & 3 & 0 & 3 \\ \hline & 1 & 0 & 1 & \boxed{0} \end{array} \qquad \begin{array}{r|rrrr} & 1 & -3 & 1 & -3 \\ -3 & & -3 & 18 & -57 \\ \hline & 1 & -6 & 19 & \boxed{-60 \neq 0} \end{array}$$

3 es una raíz de $Q(x)$ (no probamos con 2 y –2 porque no son divisores de –3).

14. **Utiliza la regla de Ruffini para hallar el cociente y el resto de las siguientes divisiones:**

a) $(4x^2 - 8x + 3) : (4x - 2)$

b) $(2x^3 - 4x^2 + 3x - 2) : (2x - 3)$

c) $(3x^3 - 2x - 1) : (3x + 1)$

a)
$$\begin{array}{r|rrr} & 4 & -8 & 3 \\ \frac{1}{2} & & 2 & -3 \\ \hline & 4 & -6 & \boxed{0} \end{array}$$

$4x - 2 = 4\left(x - \frac{1}{2}\right)$

Cociente $= \frac{1}{4} \cdot (4x - 6)$

Resto = 0

b)
$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & -4 & 3 & -2 \\ \frac{3}{2} & & 3 & -\frac{3}{2} & \frac{9}{4} \\ \hline & 2 & -1 & \frac{3}{2} & \boxed{\frac{1}{4}} \end{array}$$

$2x - 3 = 2\left(x - \frac{3}{2}\right)$

Cociente $= \frac{1}{2} \cdot \left(2x^2 - x + \frac{3}{2}\right)$

Resto $= \frac{1}{4}$

c)
$$\begin{array}{r|rrrr} & 3 & 0 & -2 & -1 \\ -\frac{1}{3} & & -1 & \frac{1}{3} & \frac{5}{9} \\ \hline & 3 & -1 & -\frac{5}{3} & \boxed{-\frac{4}{9}} \end{array}$$

$3x + 1 = 3\left(x + \frac{1}{3}\right)$

Cociente $= \frac{1}{3} \cdot \left(3x^2 - x - \frac{5}{3}\right)$

Resto $= -\frac{4}{9}$

Página 50

15. Calcula el valor de m para que las siguientes divisiones tengan el resto que se indica en cada caso:

a) $(x^2 - 5x + m) : (x - 2)$ **Resto = 0**

b) $(x^3 - 2x^2 - x + m) : (x + 1)$ **Resto = –1**

c) $(2x^3 - 12x + 2m) : (x - 3)$ **Resto = –5**

d) $(x^2 - mx + 3) : (x + 3)$ **Resto = 0**

a) Utilizamos el teorema del resto.

$P(2) = 0$

$2^2 - 5 \cdot 2 + m = 0$

$4 - 10 + m = 0$, luego $m = 6$

b) $P(-1) = -1$

$(-1)^3 - 2 \cdot (-1)^2 - (-1) + m = -1$

$-1 - 2 \cdot 1 + 1 + m = -1$

$-1 - 2 + 1 + m = -1$, luego $m = 1$

c) $P(3) = -5$

$2 \cdot 3^3 - 12 \cdot 3 + 2m = -5$

$2 \cdot 27 - 36 + 2m = -5$

$54 - 36 + 2m = -5$

$2m = -5 - 18$, luego $m = -\dfrac{23}{2}$

d) $P(-3) = 0$

$(-3)^2 - m \cdot (-3) + 3 = 0$

$9 + 3m + 3 = 0$

$3m = -12$, luego $m = -4$

16. Busca los valores de a para los cuales el polinomio $P(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$ es divisible por $x - a$.

Las posibles raíces de $P(x)$ son: +1; –1; +2; –2; +3; –3; +6; –6. Veamos cuáles son raíces:

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 1 & -4 & 1 & 6 \\ 1 & & 1 & -3 & -2 \\ \hline & 1 & -3 & -2 & 4 \end{array} \qquad \begin{array}{r|rrr|r} & 1 & -4 & 1 & 6 \\ -1 & & -1 & 5 & -6 \\ \hline & 1 & -5 & 6 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{r|rrr|r} & 1 & -4 & 1 & 6 \\ 2 & & 2 & -4 & -6 \\ \hline & 1 & -2 & -3 & 0 \end{array}$$

$x = 1$ no es raíz. $\quad x = -1$ sí es raíz. $\quad x = 2$ sí es raíz.

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 1 & -4 & 1 & 6 \\ -2 & & -2 & 12 & -26 \\ \hline & 1 & -6 & 13 & -20 \end{array} \qquad \begin{array}{r|rrr|r} & 1 & -4 & 1 & 6 \\ 3 & & 3 & -3 & -6 \\ \hline & 1 & -1 & -2 & 0 \end{array}$$

$x = -2$ no es raíz. $\quad x = 3$ sí es raíz.

Como el polinomio es de grado 3, puede tener como máximo tres raíces, y ya las hemos encontrado. Por tanto, $P(x)$ es divisible por $(x + 1)$, $(x - 2)$ y $(x - 3)$.

Factorización de polinomios

17. Saca factor común y utiliza las identidades notables para factorizar los siguientes polinomios:

a) $3x^3 - 12x$ **b)** $4x^3 - 24x^2 + 36x$ **c)** $45x^2 - 5x^4$

d) $x^4 + x^2 + 2x^3$ **e)** $x^6 - 16x^2$ **f)** $16x^4 - 9$

a) $3x^3 - 12x = 3x(x^2 - 4) = 3x(x + 2)(x - 2)$

b) $4x^3 - 24x^2 + 36x = 4x(x^2 - 6x + 9) = 4x(x - 3)^2$

c) $45x^2 - 5x^4 = 5x^2(9 - x^2) = 5x^2(3 + x)(3 - x)$

d) $x^4 + x^2 + 2x^3 = x^2(x^2 + 1 + 2x) = x^2(x + 1)^2$

e) $x^6 - 16x^2 = x^2(x^4 - 16) = x^2(x^2 + 4)(x^2 - 4) = x^2(x^2 + 4)(x + 2)(x - 2)$

f) $16x^4 - 9 = (4x^2 + 3)(4x^2 - 3) = (4x^2 + 3)(2x + \sqrt{3})(2x - \sqrt{3})$

18. **Factoriza los siguientes polinomios:**

a) $x^2 + 4x - 5$ **b)** $x^2 + 8x + 15$

c) $7x^2 - 21x - 280$ **d)** $3x^2 + 9x - 210$

e) $2x^2 - 9x - 5$ **f)** $3x^2 - 2x - 5$

g) $4x^2 + 17x + 15$ **h)** $-x^2 + 17x - 72$

a) $x^2 + 4x - 5 = 0 \rightarrow x = -5,\ x = 1$

$x^2 + 4x - 5 = (x + 5)(x - 1)$

b) $x^2 + 8x + 15 = 0 \rightarrow x = -5,\ x = -3$

$x^2 + 8x + 15 = (x + 5)(x + 3)$

c) $7x^2 - 21x - 280 = 0 \rightarrow x = 8,\ x = -5$

$7x^2 - 21x - 280 = 7(x - 8)(x + 5)$

d) $3x^2 + 9x - 210 = 0 \rightarrow x = -10,\ x = 7$

$3x^2 + 9x - 210 = 3(x + 10)(x - 7)$

e) $2x^2 - 9x - 5 = (x - 5)(2x + 1)$

f) $3x^2 - 2x - 5 = (x + 1)(3x - 5)$

g) $4x^2 + 17x + 15 = (x + 3)(4x + 5)$

h) $-x^2 + 17x - 72 = -(x - 8)(x - 9)$

19. **Completa la descomposición en factores de los polinomios siguientes:**

a) $(x^2 - 25)(x^2 - 6x + 9)$ **b)** $(x^2 - 7x)(x^2 - 13x + 40)$

a) $(x^2 - 25)(x^2 - 6x + 9) = (x + 5)(x - 5)(x - 3)^2$

b) $(x^2 - 7x)(x^2 - 13x + 40) = x(x - 7)(x - 8)(x - 5)$

20. **Descompón en factores y di cuáles son las raíces de los siguientes polinomios:**

a) $x^3 + 2x^2 - x - 2$ **b)** $3x^3 - 15x^2 + 12x$

c) $x^3 - 9x^2 + 15x - 7$ **d)** $x^4 - 13x^2 + 36$

a)

	1	2	–1	–2
1		1	3	2
	1	3	2	0
–1		–1	–2	
	1	2	0	

$x^3 + 2x^2 - x - 2 = (x - 1)(x + 1)(x + 2)$

Sus raíces son 1, –1 y –2.

b)

	3	–15	12
1		3	–12
	3	–12	0
4		12	
	3	0	

$3x^3 - 15x^2 + 12x = 3x(x - 1)(x - 4)$

Sus raíces son 0, 1 y 4.

c)

	1	–9	15	–7
1		1	–8	7
	1	–8	7	0
1		1	–7	
	1	–7	0	

$x^3 - 9x^2 + 15x - 7 = (x - 1)^2(x - 7)$

Sus raíces son 1 y 7.

d) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0 \rightarrow x = 2;\ x = -2;\ x = 3;\ x = -3$

$x^4 - 13x^2 + 36 = (x - 2)(x + 2)(x - 3)(x + 3)$

Sus raíces son 2, 3 y –3.

21. **Factoriza los siguientes polinomios y di cuáles son sus raíces:**

a) $x^3 - 2x^2 - 2x - 3$ **b)** $2x^3 - 7x^2 - 19x + 60$

c) $x^3 - x - 6$ **d)** $4x^4 + 4x^3 - 3x^2 - 4x - 1$

e) $6x^3 + 13x^2 - 4$ **f)** $4x^3 + 12x^2 - 25x - 75$

a)
$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -2 & -2 & -3 \\ 3 & & 3 & 3 & 3 \\ \hline & 1 & 1 & 1 & \boxed{0} \end{array}$$

$x^3 - 2x^2 - 2x - 3 = (x - 3)(x^2 + x + 1)$

Raíz: 3

b)
$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & -7 & -19 & 60 \\ -3 & & -6 & 39 & -60 \\ \hline & 2 & -13 & 20 & \boxed{0} \\ 4 & & 8 & -20 & \\ \hline & 2 & -5 & \boxed{0} & \end{array}$$

$2x^3 - 7x^2 - 19x + 60 = (x + 3)(x - 4)(2x - 5)$

Raíces: -3, 4 y $\frac{5}{2}$

c)
$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & -1 & -6 \\ 2 & & 2 & 4 & 6 \\ \hline & 1 & 2 & 3 & \boxed{0} \end{array}$$

$x^3 - x - 6 = (x - 2)(x^2 + 2x + 3)$

Raíz: 2

d)
$$\begin{array}{r|rrrrr} & 4 & 4 & -3 & -4 & -1 \\ 1 & & 4 & 8 & 5 & 1 \\ \hline & 4 & 8 & 5 & 1 & \boxed{0} \\ -1 & & -4 & -4 & -1 & \\ \hline & 4 & 4 & 1 & \boxed{0} & \end{array}$$

$4x^4 + 4x^3 - 3x^2 - 4x - 1 =$

$= (x - 1)(x + 1)(4x^2 + 4x + 1) = (x - 1)(x + 1)(2x + 1)^2$

Raíces: 1, -1 y $\frac{1}{2}$

e)
$$\begin{array}{r|rrrr} & 6 & 13 & 0 & -4 \\ -2 & & -12 & -2 & 4 \\ \hline & 6 & 1 & -2 & \boxed{0} \end{array}$$

$6x^3 + 13x^2 - 4 = 6(x + 2)\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{2}{3}\right) = (x + 2)(2x - 1)(3x + 2)$

Raíces: -2, $\frac{1}{2}$ y $-\frac{2}{3}$

$$6x^2 + x - 2 = 0; \quad x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 48}}{12} = \frac{-1 \pm 7}{12} = \begin{cases} \frac{6}{12} = \frac{1}{2} \\ -\frac{8}{12} = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

f)
$$\begin{array}{r|rrrr} & 4 & 12 & -25 & -75 \\ -3 & & -12 & 0 & 75 \\ \hline & 4 & 0 & -25 & \boxed{0} \end{array}$$

$4x^3 + 12x^2 - 25x - 75 = (x + 3)(2x + 5)(2x - 5)$

Raíces: -3, $-\frac{5}{2}$ y $\frac{5}{2}$

$4x^2 - 25 = (2x + 5)(2x - 5)$

22. **Escribe un polinomio de grado 3 que tenga las raíces dadas, en cada caso:**

a) **0, 1 y 2** **b)** **-1 y 3** **c)** **0 y 5**

a) $P(x) = x(x - 1)(x - 2) \;\rightarrow$ Una posible solución.

b) $P(x) = (x + 1)^2(x - 3) \;\rightarrow$ Una posible solución.

c) $P(x) = x^2(x - 5) \;\rightarrow$ Una posible solución.

23. **Escribe, en cada caso, un polinomio que cumpla la condición dada:**

a) De cuarto grado sin raíces.

b) Que tenga dos raíces dobles, 2 y –2.

c) De tercer grado con una sola raíz.

d) De cuarto grado y con tres raíces.

a) $P(x) = (x^2 + 1)^2 = x^4 + 2x^2 + 1 \rightarrow$ Una posible solución.

b) $P(x) = (x - 2)^2(x + 2)^2 \rightarrow$ Una posible solución.

c) $P(x) = (x - 1)(x^2 + 1) \rightarrow$ Una posible solución.

d) $P(x) = (x - 2)^2(x - 1)(x - 3) \rightarrow$ Una posible solución.

24. **Descompón en factores y di cuáles son las raíces de los polinomios siguientes:**

a) $x^4 - 2x^2 + 1$ **b)** $x^3 - 2x^2 - 9x + 18$ **c)** $x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6$

d) $8x^3 + 6x^2 - 11x - 3$ **e)** $3x^3 + 8x^2 + 3x - 2$ **f)** $x^3 - 2x^2 + 2x - 4$

a) $(x - 1)^2(x + 1)^2$

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & & 1 & 1 & -1 & -1 \\ \hline & 1 & 1 & -1 & -1 & \boxed{0} \\ 1 & & 1 & 2 & 1 & \\ \hline & 1 & 2 & 1 & \boxed{0} & \end{array}$$

$x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2$

Raíces: 1 y –1 (dobles)

b) $(x - 2)(x + 3)(x - 3)$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -2 & -9 & 18 \\ 2 & & 2 & 0 & -18 \\ \hline & 1 & 0 & -9 & \boxed{0} \end{array}$$

$x^2 - 9 = (x + 3)(x - 3)$

Raíces: 2, –3 y +3

c) $(x - 1)(x + 1)(x + 2)(x - 3)$

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & -1 & -7 & 1 & 6 \\ 1 & & 1 & 0 & -7 & -6 \\ \hline & 1 & 0 & -7 & -6 & \boxed{0} \\ -1 & & -1 & 1 & 6 & \\ \hline & 1 & -1 & -6 & \boxed{0} & \end{array}$$

$x^2 - x - 6 = (x + 2)(x - 3)$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 24}}{2} = \begin{cases} -2 \\ 3 \end{cases}$$

Raíces: 1, –1, –2 y 3

d) $(x - 1)\left(x + \frac{1}{4}\right)\left(x + \frac{3}{2}\right) = (x - 1)(4x + 1)(2x + 3)$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 8 & 6 & -11 & -3 \\ 1 & & 8 & 14 & 3 \\ \hline & 8 & 14 & 3 & \boxed{0} \end{array}$$

$8x^2 + 14x + 3 = 0$

$$x = \frac{-14 \pm \sqrt{196 - 96}}{16} = \frac{-14 \pm 10}{16} = \begin{cases} -\dfrac{4}{16} = -\dfrac{1}{4} \\ -\dfrac{24}{16} = -\dfrac{3}{2} \end{cases}$$

Raíces: 1, $-\frac{1}{4}$ y $-\frac{3}{2}$

e) $(x + 1)\left(x - \frac{1}{3}\right)(x + 2) = (x + 1)(3x - 1)(x + 2)$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 3 & 8 & 3 & -2 \\ -1 & & -3 & -5 & 2 \\ \hline & 3 & 5 & -2 & \boxed{0} \end{array}$$

Raíces: –1, $\frac{1}{3}$ y –2

$3x^2 + 5x - 2 = 0$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 24}}{6} = \frac{-5 \pm 7}{6} = \begin{cases} \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3} \\ \dfrac{-12}{6} = -2 \end{cases}$$

f) $(x - 2)(x^2 + 2)$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -2 & 2 & -4 \\ 2 & & 2 & 0 & 4 \\ \hline & 1 & 0 & 2 & \boxed{0} \end{array}$$

Raíces: 2

Fracciones algebraicas

25. **Comprueba, en cada caso, si las fracciones dadas son equivalentes:**

a) $\dfrac{x-4}{3x-12}$ y $\dfrac{1}{3}$ b) $\dfrac{x^2+x}{2x}$ y $\dfrac{x}{2}$

c) $\dfrac{x+y}{x^2-y^2}$ y $\dfrac{1}{x-y}$ d) $\dfrac{x}{x^2-x}$ y $\dfrac{2}{2x-2}$

a) Sí son equivalentes, porque $3(x-4) = 3x-12$.

b) No son equivalentes, ya que $2(x^2+x) \neq 2x^2$.

c) Sí son equivalentes, porque $(x+y)(x-y) = x^2-y^2$.

d) Sí son equivalentes, porque $(2x-2)x = 2x^2-2x$.

26. **Descompón en factores y simplifica.**

a) $\dfrac{x^2-9}{(x+3)^2}$ b) $\dfrac{x+2}{x^2-4}$ c) $\dfrac{x^2+25-10x}{x^2-25}$

d) $\dfrac{x^2+xy}{x^2-2xy+y^2}$ e) $\dfrac{x-2}{x^2+x-6}$ f) $\dfrac{x^2y-3xy^2}{2xy^2}$

a) $\dfrac{x^2-9}{(x+3)^2} = \dfrac{(x-3)(x+3)}{(x+3)(x+3)} = \dfrac{x-3}{x+3}$

b) $\dfrac{x+2}{x^2-4} = \dfrac{x+2}{(x+2)(x-2)} = \dfrac{1}{x-2}$

c) $\dfrac{x^2+25-10x}{x^2-25} = \dfrac{(x-5)^2}{(x+5)(x-5)} = \dfrac{x-5}{x+5}$

d) $\dfrac{x^2+xy}{x^2-2xy+y^2} = \dfrac{x(x+y)}{(x-y)^2}$

e) $\dfrac{x-2}{x^2+x-6} = \dfrac{x-2}{(x-2)(x+3)} = \dfrac{1}{x+3}$

f) $\dfrac{x^2y-3xy^2}{2xy^2} = \dfrac{xy(x-3y)}{2xy^2} = \dfrac{x-3y}{2y}$

27. **Descompón en factores el dividendo y el divisor, y, después, simplifica.**

a) $\dfrac{x^2-2x}{x^2-5x+6}$ b) $\dfrac{x^2-3x-4}{x^3+x^2}$ c) $\dfrac{x^3-3x^2+2x}{3x^2-9x+6}$ d) $\dfrac{x^2-x-42}{x^2-8x+7}$

a) $\dfrac{x^2-2x}{x^2-5x+6} = \dfrac{x(x-2)}{(x-3)(x-2)} = \dfrac{x}{x-3}$

b) $\dfrac{x^2-3x-4}{x^3+x^2} = \dfrac{(x+1)(x-4)}{x^2(x+1)} = \dfrac{x-4}{x^2}$

c) $\dfrac{x^3-3x^2+2x}{3x^2-9x+6} = \dfrac{x(x^2-3x+2)}{3(x^2-3x+2)} = \dfrac{x}{3}$

d) $\dfrac{x^2-x-42}{x^2-8x+7} = \dfrac{(x+6)(x-7)}{(x-1)(x-7)} = \dfrac{x+6}{x-1}$

28. **Simplifica las siguientes fracciones:**

a) $\dfrac{x^3-4x}{x^3+x^2-2x}$ b) $\dfrac{x^4-5x^2+4}{x^4-1}$ c) $\dfrac{x^4+2x^3-3x^2}{2x^4-3x^3+x^2}$ d) $\dfrac{2x^3-5x^2+3x}{2x^4+x^3-6x^2}$

a) $\dfrac{x^3-4x}{x^3+x^2-2x}=\dfrac{x(x^2-4)}{x(x^2+x-2)}=\dfrac{x(x+2)(x-2)}{x(x-1)(x+2)}=\dfrac{x-2}{x-1}$

$x^2+x-2=0;\ x=\dfrac{-1\pm\sqrt{1+8}}{2}=\dfrac{-1\pm 3}{2}=\begin{cases}\dfrac{2}{2}=1\\[2mm] -\dfrac{4}{2}=-2\end{cases}$

b) $\dfrac{x^4-5x^2+4}{x^4-1}=\dfrac{(x+1)(x-1)(x+2)(x-2)}{(x^2+1)(x+1)(x-1)}=\dfrac{(x+2)(x-2)}{x^2+1}$

$x^4-5x^2+4=(x-1)(x+1)(x+2)(x-2)$ $x^4-1=(x^2+1)(x^2-1)=(x^2+1)(x+1)(x-1)$

	1	0	–5	0	4
1		1	1	–4	–4
	1	1	–4	–4	0
–1		–1	0	4	
	1	0	–4	0	

$x^4-4=(x+2)(x-2)$

c) $\dfrac{x^4+2x^3-3x^2}{2x^4-3x^3+x^2}=\dfrac{x^2(x-1)(x+3)}{x^2(x-1)(2x-1)}=\dfrac{x+3}{2x-1}$

$x^4+2x^3-3x^2=x^2(x^2+2x-3)=x^2(x-1)(x+3)$

$x^2+2x-3=0;\ x=\dfrac{-2\pm\sqrt{4+12}}{2}=\dfrac{-2\pm 4}{2}=\begin{cases}\dfrac{2}{2}=1\\[2mm] -\dfrac{6}{2}=-3\end{cases}$

$2x^4-3x^3+x^2=x^2(2x^2-3x+1)=x^2(x-1)\left(x-\dfrac{1}{2}\right)=x^2(x-1)(2x-1)$

$2x^2-3x+1=0;\ x=\dfrac{3\pm\sqrt{9-8}}{4}=\dfrac{3\pm 1}{4}=\begin{cases}\dfrac{4}{4}=1\\[2mm] \dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2}\end{cases}$

d) $\dfrac{2x^3-5x^2+3x}{2x^4+x^3-6x^2}=\dfrac{x(2x-3)(x-1)}{x^2(2x-3)(x+2)}=\dfrac{x-1}{x(x+2)}$

$2x^3-5x^2+3x=x(2x^2-5x+3)=x\left(x-\dfrac{3}{2}\right)(x-1)=x(2x-3)(x-1)$

$2x^2-5x+3=0;\ x=\dfrac{5\pm\sqrt{25-24}}{4}=\dfrac{5\pm 1}{4}=\begin{cases}\dfrac{6}{4}=\dfrac{3}{2}\\[2mm] \dfrac{4}{4}=1\end{cases}$

$2x^4+x^3-6x^2=x^2(2x^2+x-6)=x^2\left(x-\dfrac{3}{2}\right)(x+2)=x^2(2x-3)(x+2)$

$2x^2+x-6=0;\ x=\dfrac{-1\pm\sqrt{1+48}}{4}=\dfrac{-1\pm 7}{4}=\begin{cases}\dfrac{6}{4}=\dfrac{3}{2}\\[2mm] -\dfrac{8}{4}=-2\end{cases}$

Página 51

29. **Reduce a común denominador y opera.**

a) $\frac{1}{2x}-\frac{1}{4x}+\frac{1}{x}$

b) $\frac{1}{x^2}-\frac{1}{3x}+\frac{1}{x}$

c) $\frac{x}{2}+\frac{3}{x}-1$

d) $\frac{2}{x^2}-\frac{x+1}{3x}$

e) $\frac{x}{x-3}-\frac{3}{x}$

f) $\frac{x-3}{x+1}-\frac{x}{x+3}$

a) $\frac{1}{2x}-\frac{1}{4x}+\frac{1}{x}=\frac{2}{4x}-\frac{1}{4x}+\frac{4}{4x}=\frac{2-1+4}{4x}=\frac{5}{4x}$

mín.c.m. $(2x, 4x, x) = 4x$

b) $\frac{1}{x^2}-\frac{1}{3x}+\frac{1}{x}=\frac{3}{3x^2}-\frac{x}{3x^2}+\frac{3x}{3x^2}=\frac{3-x+3x}{3x^2}=\frac{3+2x}{3x^2}$

mín.c.m. $(x^2, 3x, x) = 3x^2$

c) $\frac{x}{2}+\frac{3}{x}-1=\frac{x^2}{2x}+\frac{6}{2x}-\frac{2x}{2x}=\frac{x^2-2x+6}{2x}$

mín.c.m. $(2, x, 1) = 2x$

d) $\frac{2}{x^2}-\frac{x+1}{3x}=\frac{6}{3x^2}-\frac{x(x+1)}{3x^2}=\frac{6}{3x^2}-\frac{x^2+x}{3x^2}=\frac{6-x^2-x}{3x^2}=\frac{-x^2-x+6}{3x^2}$

mín.c.m. $(x^2, 3x) = 3x^2$

e) $\frac{x}{x-3}-\frac{3}{x}=\frac{x^2}{x(x-3)}-\frac{3x-9}{x(x-3)}=\frac{x^2-3x+9}{x(x-3)}$

mín.c.m. $(x-3, x) = x(x-3)$

f) $\frac{x-3}{x+1}-\frac{x}{x+3}=\frac{x^2-9}{(x+1)(x+3)}-\frac{x^2+x}{(x+1)(x+3)}=\frac{x^2-9-x^2-x}{(x+1)(x+3)}=\frac{-x-9}{(x+1)(x+3)}$

mín.c.m. $[(x+1), (x+3)] = (x+1)(x+3)$

30. **Reduce a común denominador y opera.**

a) $\frac{x-1}{x+3}-\frac{2}{x-3}+\frac{x}{x^2-9}$

b) $\frac{2}{x-2}-\frac{x+1}{x^2-2x}-\frac{3}{x^2-4}$

c) $\frac{1}{2x+2}+\frac{3x-3}{x^2-x-2}-\frac{x}{x-2}$

a) $\frac{x-1}{x+3}-\frac{2}{x-3}+\frac{x}{x^2-9}=\frac{(x-1)(x-3)}{(x+3)(x-3)}-\frac{2(x+3)}{(x+3)(x-3)}+\frac{x}{(x+3)(x-3)}=$

$=\frac{x^2-4x+3-2x-6+x}{(x+3)(x-3)}=\frac{x^2-5x-3}{(x+3)(x-3)}$

$$\left.\begin{array}{l}(x+3)\\(x-3)\\x^2-9=(x+3)(x-3)\end{array}\right\}\rightarrow \text{mín.c.m.} = (x+3)(x-3)$$

b) $\dfrac{2}{x-2} - \dfrac{x+1}{x^2-2x} - \dfrac{3}{x^2-4} = \dfrac{2x(x+2)}{x(x+2)(x-2)} - \dfrac{(x+1)(x+2)}{x(x+2)(x-2)} - \dfrac{3x}{x(x+2)(x-2)} =$

$= \dfrac{2x^2+4x-x^2-3x-2-3x}{x(x+2)(x-2)} = \dfrac{x^2-2x-2}{x(x+2)(x-2)}$

$$\left.\begin{array}{l}(x-2)\\ x^2-2x = x(x-2)\\ x^2-4=(x+2)(x-2)\end{array}\right\} \to \text{mín.c.m.} = x(x+2)(x-2)$$

c) $\dfrac{1}{2x+2} + \dfrac{3x-3}{x^2-x-2} - \dfrac{x}{x-2} = \dfrac{(x-2)}{2(x+1)(x-2)} + \dfrac{2(3x-3)}{2(x+1)(x-2)} - \dfrac{2x(x+1)}{2(x+1)(x-2)} =$

$= \dfrac{x-2+6x-6-2x^2-2x}{2(x+1)(x-2)} = \dfrac{-2x^2+5x-8}{2(x+1)(x-2)}$

$$\left.\begin{array}{l}2x+2=2(x+1)\\ x^2-x-2=(x-2)(x+1)\\ (x-2)\end{array}\right\} \to \text{mín.c.m.} = 2(x+1)(x-2)$$

31. **Efectúa.**

a) $\dfrac{x-2}{x^2} + \dfrac{x+2}{x^2-x} - \dfrac{1}{x^2-1}$

b) $\dfrac{2x}{x^2+x-2} - \dfrac{5}{x+2} - \dfrac{x-4}{3x+6}$

c) $\dfrac{x+2}{2x+1} - \dfrac{2}{4x^2-1} + \dfrac{x+1}{2x}$

a) $\dfrac{x-2}{x^2} + \dfrac{x+2}{x^2-x} - \dfrac{1}{x^2-1} =$

$= \dfrac{(x-2)(x-1)(x+1)}{x^2(x-1)(x+1)} + \dfrac{(x+2)(x+1)x}{x^2(x-1)(x+1)} - \dfrac{x^2}{x^2(x-1)(x+1)} =$

$= \dfrac{(x-2)(x^2-1)+(x+2)(x^2+x)-x^2}{x^2(x^2-1)} =$

$= \dfrac{x^3-2x^2-x+2+x^3+2x^2+x^2+2x-x^2}{x^2(x^2-1)} = \dfrac{2x^3+x+2}{x^2(x^2-1)} = \dfrac{2x^3+x+2}{x^4-x^2}$

b) $\dfrac{2x}{x^2+x-2} - \dfrac{5}{x+2} - \dfrac{x-4}{3x+6} =$

$= \dfrac{6x}{3(x+2)(x-1)} - \dfrac{15(x-1)}{3(x+2)(x-1)} - \dfrac{(x-4)(x-1)}{3(x+2)(x-1)} =$

$= \dfrac{6x-15x+15-x^2+5x-4}{3(x+2)(x-1)} = \dfrac{-x^2-4x+11}{3(x+2)(x-1)}$

c) $\dfrac{x+2}{2x+1} - \dfrac{2}{4x^2-1} + \dfrac{x+1}{2x} =$

$= \dfrac{2x(x+2)(2x-1)}{2x(2x+1)(2x-1)} - \dfrac{4x}{2x(2x+1)(2x-1)} + \dfrac{(x+1)(2x+1)(2x-1)}{2x(2x+1)(2x-1)} =$

$= \dfrac{(2x^2+4x)(2x-1)-4x+(x+1)(4x^2-1)}{2x(4x^2-1)} =$

$= \dfrac{4x^3+8x^2-2x^2-4x-4x+4x^3+4x^2-x-1}{2x(4x^2-1)} = \dfrac{8x^3+10x^2-9x-1}{2x(4x^2-1)}$

32. **Efectúa.**

a) $\dfrac{x+1}{x-1}+\dfrac{3}{x+1}-\dfrac{x-2}{x^2-1}$ b) $\dfrac{x^2}{x^2-2x+1}+\dfrac{2x+3}{x-1}-3$ c) $\dfrac{2x-3}{x^2-9}-\dfrac{x+1}{x-3}-\dfrac{x+2}{x+3}$

a) $\dfrac{x+1}{x-1}+\dfrac{3}{x+1}-\dfrac{x-2}{x^2-1}=\dfrac{(x+1)^2}{x^2-1}+\dfrac{3(x-1)}{x^2-1}-\dfrac{x-2}{x^2-1}=$

$=\dfrac{x^2+2x+1+3x-3-x+2}{x^2-1}=\dfrac{x^2+4x}{x^2-1}$

b) $\dfrac{x^2}{x^2-2x+1}+\dfrac{2x+3}{x-1}-3=\dfrac{x^2}{(x-1)^2}+\dfrac{(2x+3)(x-1)}{(x-1)^2}-\dfrac{3(x-1)^2}{(x-1)^2}=$

$=\dfrac{x^2+2x^2+3x-2x-3-3(x^2-2x+1)}{(x-1)^2}=\dfrac{7x-6}{(x-1)^2}$

c) $\dfrac{2x-3}{x^2-9}-\dfrac{x+1}{x-3}-\dfrac{x+2}{x+3}=\dfrac{2x-3}{x^2-9}-\dfrac{(x+1)(x+3)}{x^2-9}-\dfrac{(x+2)(x-3)}{x^2-9}=$

$=\dfrac{2x-3-x^2-4x-3-x^2+x+6}{x^2-9}=\dfrac{-2x^2-x}{x^2-9}$

33. **Opera, y simplifica si es posible.**

a) $\left(\dfrac{1}{x}:\dfrac{1}{x+1}\right)\cdot\dfrac{x}{2}$ b) $\left(\dfrac{2}{x}-\dfrac{2}{x+2}\right):\dfrac{x-2}{x}$ c) $\left(1-\dfrac{2}{2-x}\right)\cdot\dfrac{2-x}{x^2}$ d) $\dfrac{2x}{x+1}:\left(\dfrac{2x}{x+1}-1\right)$

a) $\left(\dfrac{1}{x}:\dfrac{1}{x+1}\right)\cdot\dfrac{x}{2}=\dfrac{x+1}{x}\cdot\dfrac{x}{2}=\dfrac{(x+1)x}{2x}=\dfrac{x+1}{2}$

b) $\left(\dfrac{2}{x}-\dfrac{2}{x+2}\right):\dfrac{x-2}{x}=\left(\dfrac{2x+4-2x}{x(x+2)}\right):\dfrac{x-2}{x}=\dfrac{4x}{x(x+2)(x-2)}=\dfrac{4}{x^2-4}$

c) $\left(1-\dfrac{2}{2-x}\right)\left(\dfrac{2-x}{x^2}\right)=\left(\dfrac{2-x}{2-x}-\dfrac{2}{2-x}\right)\cdot\dfrac{2-x}{x^2}=\dfrac{-x}{2-x}\cdot\dfrac{2-x}{x^2}=\dfrac{-x(2-x)}{(2-x)x^2}=-\dfrac{1}{x}$

d) $\dfrac{2x}{x+1}:\left(\dfrac{2x}{x+1}-1\right)=\dfrac{2x}{x+1}:\left(\dfrac{2x}{x+1}-\dfrac{x+1}{x+1}\right)=\dfrac{2x}{x+1}:\dfrac{x-1}{x+1}=\dfrac{2x(x+1)}{(x+1)(x-1)}=\dfrac{2x}{x-1}$

34. **Opera y simplifica.**

a) $\left(\dfrac{3}{x}-\dfrac{x}{3}\right):\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{3}\right)$ b) $\dfrac{x+1}{(x-1)^2}\cdot\dfrac{x^2-1}{x}$

c) $\left[\left(x+\dfrac{1}{x}\right):\left(x-\dfrac{1}{x}\right)\right]\cdot(x-1)$ d) $\dfrac{2}{x}\cdot\left(\dfrac{1}{x}:\dfrac{1}{x-1}\right)$

a) $\left(\dfrac{3}{x}-\dfrac{x}{3}\right):\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{9-x^2}{3x}:\dfrac{3+x}{3x}=\dfrac{9-x^2}{3x}=\dfrac{(3-x)(3+x)}{3+x}=3-x$

b) $\dfrac{x+1}{(x-1)^2}\cdot\dfrac{x^2-1}{x}=\dfrac{(x+1)(x+1)(x-1)}{(x-1)^2\cdot x}=\dfrac{(x+1)^2}{x(x-1)}$

c) $\left[\left(x+\dfrac{1}{x}\right):\left(x-\dfrac{1}{x}\right)\right]\cdot(x-1)=\left(\dfrac{x^2+1}{x}:\dfrac{x^2-1}{x}\right)\cdot(x-1)=\dfrac{x^2+1}{x^2-1}\cdot(x-1)=\dfrac{x^2+1}{x+1}$

d) $\dfrac{2}{x}\cdot\left(\dfrac{1}{x}:\dfrac{1}{x-1}\right)=\dfrac{2}{x}\cdot\dfrac{x-1}{x}=\dfrac{2(x-1)}{x^2}$

35. **Opera y simplifica.**

a) $\left(1-\dfrac{x-1}{x}\right)\dfrac{x^2}{x+3}-1$ **b)** $\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+3}\right):\dfrac{3}{x^2}$ **c)** $4-\dfrac{1}{2x-1}\left(\dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{x^2}\right)$

d) $\left(1+\dfrac{y}{x}\right):\left(1+\dfrac{x}{y}\right)$ **e)** $\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{3x-4}{2x}\right)\cdot\dfrac{6x}{6-2x}$

a) $\left(1-\dfrac{x-1}{x}\right)\dfrac{x^2}{x+3}-1=\left(\dfrac{x-x+1}{x}\right)\cdot\dfrac{x^2}{x+3}-1=\dfrac{x^2}{x(x+3)}-1=$

$=\dfrac{x^2-x(x+3)}{x(x+3)}=\dfrac{x^2-x^2-3x}{x(x+3)}=\dfrac{-3x}{x(x+3)}=\dfrac{-3}{x+3}$

b) $\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+3}\right):\dfrac{3}{x^2}=\dfrac{x+3-x}{x(x+3)}:\dfrac{3}{x^2}=\dfrac{3}{x(x+3)}:\dfrac{3}{x^2}=\dfrac{x^2}{x(x+3)}=\dfrac{x}{x+3}$

c) $4-\dfrac{1}{2x-1}\left(\dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{x^2}\right)=4-\dfrac{1}{2x-1}\cdot\dfrac{2x-1}{x^2}=4-\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{4x^2-1}{x^2}$

d) $\left(1+\dfrac{y}{x}\right):\left(1+\dfrac{x}{y}\right)=\dfrac{x+y}{x}:\dfrac{y+x}{y}=\dfrac{(x+y)\,y}{(x+y)\,x}=\dfrac{y}{x}$

e) $\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{3x-4}{2x}\right)\cdot\dfrac{6x}{6-2x}=\left(\dfrac{2+x-3x+4}{2x}\right)\cdot\dfrac{6x}{2(3-x)}=$

$=\dfrac{6-2x}{2x}\cdot\dfrac{6x}{2(3-x)}=\dfrac{2(3-x)}{2x}\cdot\dfrac{6x}{2(3-x)}=\dfrac{2(3-x)\,6x}{2x\cdot 2(3-x)}=3$

Aplica lo aprendido

36. **Halla, en cada caso, el mínimo común múltiplo y el máximo común divisor de los polinomios siguientes:**

a) $x^2;\ x^2-x;\ x^2-1$ **b)** $x-3;\ x^2-9;\ x^2-6x+9$

c) $x+2;\ 3x+6;\ x^2+x-2$ **d)** $2x;\ 2x+1;\ 4x^2-1$

a) $\left.\begin{array}{l} x^2 \\ x^2-x=x(x-1) \\ x^2-1=(x+1)(x-1)\end{array}\right\}$ máx.c.d. $[x^2, x^2-x, x^2-1]=1$
mín.c.m. $[x^2, x^2-x, x^2-1]=x^2(x-1)(x+1)$

b) $\left.\begin{array}{l} x-3 \\ x^2-9=(x+3)(x-3) \\ x^2-6x+9=(x-3)^2\end{array}\right\}$ máx.c.d. $[x-3, x^2-9, x^2-6x+9]=x-3$
mín.c.m. $[x-3, x^2-9, x^2-6x+9]=(x-3)^2(x+3)$

c) $\left.\begin{array}{l} x+2 \\ 3x+6=3(x+2) \\ x^2+x-2=(x+2)(x-1)\end{array}\right\}$ máx.c.d. $[x+2, 3x+6, x^2+x-2]=x+2$
mín.c.m. $[x+2, 3x+6, x^2+x-2]=3(x+2)(x-1)$

d) $\left.\begin{array}{l} 2x \\ 2x+1 \\ 4x^2-1=(2x+1)(2x-1)\end{array}\right\}$ máx.c.d. $[2x, 2x+1, 4x^2-1]=1$
mín.c.m. $[2x, 2x+1, 4x^2-1]=2x(4x^2-1)$

37. **Sustituye, en cada caso, los puntos suspensivos por la expresión adecuada para que las fracciones sean equivalentes:**

a) $\dfrac{x^2-x}{x^2-1}=\dfrac{\dots}{x+1}$ **b)** $\dfrac{x}{2x+1}=\dfrac{x^2}{\dots}$

c) $\dfrac{x}{x-3}=\dfrac{\dots}{x^2-9}$ **d)** $\dfrac{2}{x+2}=\dfrac{\dots}{x^2+4x+4}$

a) $\dfrac{x^2-x}{x^2-1}=\dfrac{x}{x+1}$ b) $\dfrac{x}{2x+1}=\dfrac{x^2}{x(2x+1)}$

c) $\dfrac{x}{x-3}=\dfrac{x(x+3)}{x^2-9}$ d) $\dfrac{2}{x+2}=\dfrac{2(x+2)}{x^2+4x+4}$

38. **Halla el valor de m para que el polinomio $mx^3-3x^2+5x+9m$ sea divisible por $x+2$.**

Llamamos $P(x)=mx^3-3x^2+5x+9m$. Dicho polinomio ha de ser divisible por $x+2$, luego el resto ha de ser 0:

$P(-2)=0 \to m(-2)^3-3(-2)^2+5\cdot(-2)+9m=0 \to$

$\to -8m-12-10+9m=0 \to m=22$

39. **Calcula el valor de a y b para que el polinomio $P(x)=2x^3+7x^2+ax+b$ sea divisible por $x-1$ y por $x+2$.**

Como $P(x)$ es divisible por $x-1$, $P(1)=0 \to 2+7+a+b=0 \to a+b=-9$

Como $P(x)$ es divisible por $x+2$, $P(-2)=0 \to 2\cdot(-2)^3+7\cdot(-2)^2+a\cdot(-2)+b=0 \to$

$\to -16+28-2a+b=0 \to -2a+b=-12$

Tenemos un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$\begin{cases} a+b=-9 \\ -2a+b=-12 \end{cases} \to \begin{array}{r} a+\cancel{b}=-9 \\ 2a-\cancel{b}=12 \\ \hline 3a \quad =3 \end{array} \to a=1$$

$1+b=-9 \to b=-10$

40. **Halla el valor de m y n para que el polinomio**

$$P(x)=x^3-mx^2+nx+4$$

sea divisible por $x-2$ y $x+2$.

¿Cuáles son las raíces de $P(x)$?

Para que $P(x)$ sea divisible por $x-2$, ha de ser $P(2)=0$.

Para que $P(x)$ sea divisible por $x+2$, ha de ser $P(-2)=0$.

$$\begin{array}{ll} P(2)=2^3-m\cdot 2^2+n\cdot 2+4 & \to \ \ 12-4m+2n=0 \\ P(-2)=(-2)^3-m(-2)^2+n(-2)+4 & \to \ -4-4m-2n=0 \\ \hline & \quad 8-8m \quad =0 \to m=1 \end{array}$$

$12-4+2n=0 \to 8+2n=0 \to n=-4$

$P(x)=x^3-x^2-4x+4=(x-2)(x+2)(x-1)$

Las raíces de $P(x)$ son $x_1=2$, $x_2=-2$ y $x_3=1$.

41. **El resto de la siguiente división es igual a –8:**

$$(2x^4 + kx^3 - 7x + 6) : (x - 2)$$

¿Cuánto vale k**?**

Llamamos $P(x) = 2x^4 + kx^3 - 7x + 6$.

El resto de la división $P(x) : (x - 2)$ es $P(2)$, luego:

$P(2) = -8 \;\rightarrow\; 2 \cdot 2^4 + k \cdot 2^3 - 7 \cdot 2 + 6 = -8 \;\rightarrow$

$\rightarrow\; 32 + 8k - 14 + 6 = -8 \;\rightarrow\; 8k = -32 \;\rightarrow\; k = -4$

42. **Halla el valor que deben tener** a **y** b **para que al dividir el polinomio** $P(x) = 3x^3 + ax^2 - 5x + b$ **entre** $(x - 1)$ **el resto sea 14, y al dividir el mismo polinomio entre** $(x + 3)$ **el resto sea –2.**

$P(1) = 14 = 3 + a - 5 + b$, luego $a + b = 16$

$P(-3) = -2 = 3 \cdot (-3)^3 + a \cdot (-3)^2 - 5 \cdot (-3) + b$

$-2 = -81 + 9a + 15 + b$, luego $9a + b = 64$

Tenemos un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$\begin{cases} a + b = 16 \\ 9a + b = 64 \end{cases} \rightarrow \begin{array}{l} -a - \cancel{b} = -16 \\ 9a + \cancel{b} = 64 \\ \hline 8a \qquad = 48 \end{array} \rightarrow a = 6$$

$6 + b = 16 \;\rightarrow\; b = 10$

Página 52

43. **Si $P(x) = 3x^3 - 11x^2 - 81x + 245$, halla los valores $P(8,75)$, $P(10,25)$ y $P(-7)$ con ayuda de la calculadora.**

Describe la secuencia de teclas utilizadas como en la página 39.

8,75 $\boxed{\text{Min}}$ 3 $\boxed{\times}$ $\boxed{\text{MR}}$ $\boxed{-}$ 11 $\boxed{=}$ $\boxed{\times}$ $\boxed{\text{MR}}$ $\boxed{-}$ 81 $\boxed{=}$ $\boxed{\times}$ $\boxed{\text{MR}}$ $\boxed{+}$ 245 $\boxed{=}$ $\boxed{703.82}$ $\rightarrow$ $P(8,75) = 703,82\ldots$

10,25 $\boxed{\text{Min}}$ 3 $\boxed{\times}$ $\boxed{\text{MR}}$ $\boxed{-}$ 11 $\boxed{=}$ $\boxed{\times}$ $\boxed{\text{MR}}$ $\boxed{-}$ 81 $\boxed{=}$ $\boxed{\times}$ $\boxed{\text{MR}}$ $\boxed{+}$ 245 $\boxed{=}$ $\boxed{1489.7347\ldots}$ $\rightarrow$ $P(10,25) = 1\,489,73\ldots$

7 $\boxed{+/-}$ $\boxed{\text{Min}}$ 3 $\boxed{\times}$ $\boxed{\text{MR}}$ $\boxed{-}$ 11 $\boxed{=}$ $\boxed{\times}$ $\boxed{\text{MR}}$ $\boxed{-}$ 81 $\boxed{=}$ $\boxed{\times}$ $\boxed{\text{MR}}$ $\boxed{+}$ 245 $\boxed{=}$ $\boxed{-756}$ $\rightarrow$ $P(-7) = -756$

44. **Comprueba si existe alguna relación de divisibilidad entre los siguientes pares de polinomios:**

a) $P(x) = x^4 - 4x^2$ y $Q(x) = x^2 - 2x$

b) $P(x) = x^2 - 10x + 25$ y $Q(x) = x^2 - 5x$

c) $P(x) = x^3 + x^2 - 12x$ y $Q(x) = x - 3$

a) $\left.\begin{array}{l} P(x) = x^2(x-2)(x+2) \\ Q(x) = x(x-2) \end{array}\right\}$ $Q(x)$ es divisor de $P(x)$.

b) $\left.\begin{array}{l} P(x) = (x-5)^2 \\ Q(x) = x(x-5) \end{array}\right\}$ No hay relación de divisibilidad.

c) $\left.\begin{array}{l} P(x) = x(x-3)(x+4) \\ Q(x) = x-3 \end{array}\right\}$ $Q(x)$ es divisor de $P(x)$.

45. **Saca factor común en cada expresión:**

a) $(x+2)(x-3) + 2x(x+2)$

b) $(x-2)(2x+3) - (5-x)(x-2)$

c) $(x+5)(2x-1) + (x-5)(2x-1)$

d) $(3-y)(a+b) - (a-b)(3-y)$

a) $(x+2)[(x-3) + 2x] = (x+2)(3x-3) = 3(x+2)(x-1)$

b) $(x-2)[(2x+3) - (5-x)] = (x-2)(3x-2)$

c) $(2x-1)[(x+5) + (x-5)] = (2x-1)(2x)$

d) $(3-y)[(a+b) - (a-b)] = (3-y)(2b)$

46. **Factoriza las siguientes expresiones:**

a) $ax - ay + bx - by$

b) $2x^2y + y + 2x^2 + 1$

c) $3x^2y + xy + 3xy^2 + y^2$

d) $2ab^3 - ab + 2b^2 - 1$

a) $ax - ay + bx - by$

$a(x-y) + b(x-y)$

$(a+b)(x-y)$

b) $2x^2y + y + 2x^2 + 1$

$2x^2(y+1) + (y+1)$

$(2x^2+1)(y+1)$

c) $3x^2y + xy + 3xy^2 + y^2$

$3xy(x+y) + y(x+y)$

$(3xy+y)(x+y)$

d) $2ab^3 - ab + 2b^2 - 1$

$2b^2(ab+1) - (ab+1)$

$(2b^2-1)(ab+1)$

47. **Simplifica las siguientes fracciones algebraicas:**

a) $\dfrac{2x^2y - xy^2}{10x - 5y}$ b) $\dfrac{3a^2b^2 - 6ab^3}{3a^3b - 6a^2b^2}$ c) $\dfrac{4a^2b^2 - 2a^2bx}{-4x^2 + 8bx + 2ba - ax}$

a) $\dfrac{2x^2y - xy^2}{10x - 5y} = \dfrac{xy(2x - y)}{5(2x - y)} = \dfrac{xy}{5}$

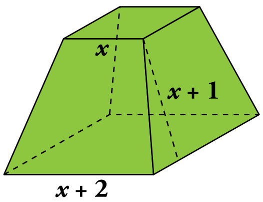
b) $\dfrac{3a^2b^2 - 6ab^3}{3a^3b - 6a^2b^2} = \dfrac{3ab^2(a - 2b)}{3a^2b(a - 2b)} = \dfrac{b}{a}$

c) $\dfrac{4a^2b^2 - 2a^2bx}{-4x^2 + 8bx + 2ba - ax} = \dfrac{2a^2b(2b - x)}{2b(a + 4x) - x(a + 4x)} = \dfrac{2a^2b(2b - x)}{(2b - x)(a + 4x)} = \dfrac{2a^2b}{a + 4x}$

Resuelve problemas

48. **Expresa, en función de x, el área total de este tronco de pirámide:**

$x + 1$ es la altura de una cara lateral.



Área lateral $= 4\left[\dfrac{(x + 2 + x)}{2} \cdot (x + 1)\right] = 4(x + 1)^2$

Área de las bases $= x^2 + (x + 2)^2$

Área total $= 4(x + 1)^2 + x^2 + (x + 2)^2 = 6x^2 + 12x + 8$

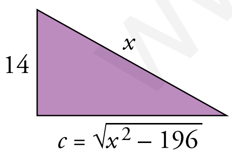
49. **Un grifo tarda x minutos en llenar un depósito. Otro grifo tarda 3 minutos menos en llenar el mismo depósito. Expresa en función de x la parte del depósito que se llena abriendo los dos durante un minuto.**

$\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x - 3}$

50. **Se mezclan x kg de pintura de 5 €/kg con y kg de otra de 3 €/kg. ¿Cuál será el precio de 1 kg de la mezcla? Exprésalo en función de x e y.**

$\dfrac{5x + 3y}{x + y}$

51. **En un triángulo rectángulo, un cateto mide 14 cm. Escribe el perímetro y el área del triángulo en función de la hipotenusa x.**



Perímetro: $P = 14 + x + \sqrt{x^2 - 196}$

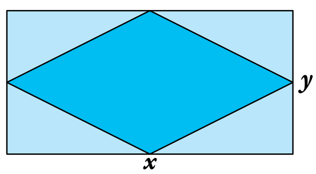
Área: $A = \dfrac{14\sqrt{x^2 - 196}}{2} = 7\sqrt{x^2 - 196}$

Pitágoras: $x^2 = 14^2 + c^2 \rightarrow c = \sqrt{x^2 - 196}$

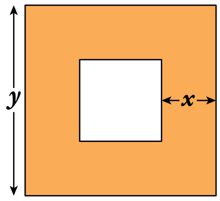
52. **En un rectángulo de lados x e y inscribimos un rombo. Escribe el perímetro del rombo en función de los lados del rectángulo.**

El lado del rombo es $l = \sqrt{\left(\dfrac{x}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{y}{2}\right)^2} = \dfrac{1}{2}\sqrt{x^2 + y^2}$

Perímetro $= 4\left(\dfrac{1}{2}\sqrt{x^2 + y^2}\right) = 2\sqrt{x^2 + y^2}$



53. **Expresa algebraicamente el área de la parte coloreada utilizando x e y.**



Área cuadrado grande = y^2

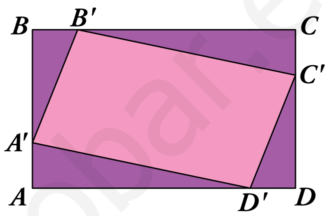
Área cuadrado pequeño = $(y - 2x)^2$

Área parte coloreada = $y^2 - (y - 2x)^2 = 4xy - 4x^2$

54. **Dos pueblos, A y B, distan 60 km. De A sale un coche hacia B con velocidad v. Al mismo tiempo sale otro de B en dirección a A con velocidad $v + 3$. Expresa en función de v el tiempo que tardan en encontrarse.**

$t = \dfrac{60}{2v + 3}$

55. **En el rectángulo $ABCD$ de lados $\overline{AB} = 3$ cm y $\overline{BC} = 5$ cm, hemos inscrito el cuadrilátero $A'B'C'D'$ haciendo $\overline{AA'} = \overline{BB'} = \overline{CC'} = \overline{DD'} = x$. Escribe el área de $A'B'C'D'$ en función de x.**



Sabiendo que $\overline{AD'} = \overline{B'C} = 5 - x$ y $\overline{A'B} = \overline{C'D} = 3 - x$, se tendrá:

El área del triángulo $B'CC'$ es $\dfrac{x(5-x)}{2}$.

El área del triángulo $A'AD'$ es $\dfrac{x(5-x)}{2}$.

El área del triángulo $B'BA'$ es $\dfrac{x(3-x)}{2}$.

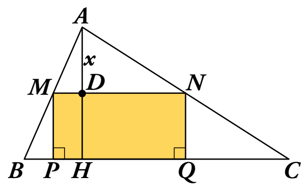
El área del triángulo $D'DC'$ es $\dfrac{x(3-x)}{2}$.

El área del rectángulo $ABCD$ es $3 \cdot 5 = 15$ cm^2.

$$A_{\text{PARALELOGRAMO}} = 15 - \left[2 \cdot \frac{x(5-x)}{2} + 2 \cdot \frac{x(3-x)}{2}\right] = 15 - [x(5-x) + x(3-x] =$$

$$= 15 - (-2x^2 + 8x) = 2x^2 - 8x + 15$$

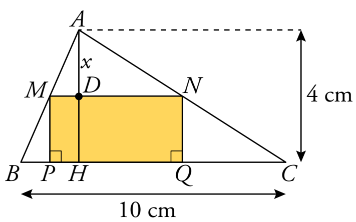
56. **En el triángulo de la figura conocemos $\overline{BC} = 10$ cm y $\overline{AH} = 4$ cm.**



Por un punto D de la altura, tal que $\overline{AD} = x$, se traza una paralela MN a BC. Desde M y N se trazan perpendiculares a BC.

a) Expresa $\overline{MN}$ en función de x. (Utiliza la semejanza de los triángulos AMN y ABC).

b) Escribe el área del rectángulo $MNPQ$ mediante un polinomio en x.



a) Por la semejanza de triángulos:

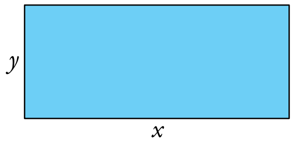
$$\frac{\overline{BC}}{\overline{AH}} = \frac{\overline{MN}}{x} \rightarrow \overline{MN} = \frac{\overline{BC} \cdot x}{\overline{AH}} \rightarrow$$

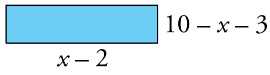
$$\rightarrow \overline{MN} = \frac{10 \cdot x}{4} \rightarrow \overline{MN} = \frac{5}{2}x$$

b) $\overline{MP} = 4 - x \rightarrow A_{\text{RECTÁNGULO}} = \overline{MN} \cdot \overline{MP} = \dfrac{5}{2}x(4-x) = 10x - \dfrac{5}{2}x^2$

Página 53

57. **Tenemos un rectángulo de 20 cm de perímetro. Si la base disminuye en 2 cm y la altura en 3 cm, ¿cuánto disminuye el área del rectángulo? Exprésalo en función de la base.**





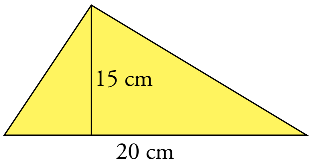
$x + y = 10 \;\rightarrow\; y = 10 - x$

$\text{Área}_1 = x(10 - x)$

$\text{Área}_2 = (x - 2)(7 - x)$

Diferencia de las áreas: $x(10 - x) - (x - 2)(7 - x) = 10x - x^2 - 7x + x^2 + 14 - 2x = x + 14$

58. **La base de un triángulo mide 20 cm, y la altura, 15 cm. Si la altura aumenta un x % y la base un $(x + 2)$ %, expresa el área del nuevo triángulo en función de x.**



$$20 \text{ cm} \;\rightarrow\; 20 + \frac{x+2}{100} \cdot 20 = 20 + \frac{x+2}{5} = \frac{x+102}{5}$$

$$15 \text{ cm} \;\rightarrow\; 15 + \frac{x}{100} \cdot 15 = 15 + \frac{3x}{20} = \frac{300+3x}{20}$$

$$\text{Área} = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x+102}{5} \cdot \frac{300+3x}{20}\right)$$

59. **Un comerciante vendió dos bicicletas. En una ganó un 20 % y en la otra perdió el 10 % sobre el precio de compra en ambos casos. En total obtuvo una ganancia de un 15 % sobre lo que le costaron. Expresa algebraicamente este enunciado.**

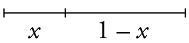
La primera bicicleta le cuesta x, la vende por $1{,}2x$ $\left(+20\,\% = 1 + \frac{20}{100} = 1{,}2\right)$.

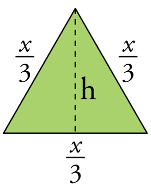
La segunda bicicleta le cuesta y, la vende por $0{,}9y$ $\left(-10\,\% = 1 - \frac{10}{100} = 0{,}9\right)$.

Las dos bicicletas juntas le cuestan $(x + y)$ y las vende por $1{,}15 \cdot (x + y)$.

Por tanto: $1{,}2x + 0{,}9y = 1{,}15(x + y) \;\rightarrow\; 0{,}05x = 0{,}25y \;\rightarrow\; x = 5y$

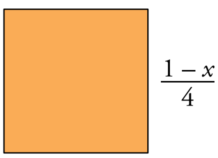
60. **Dividimos un alambre de 1 m de longitud en dos partes desiguales. Con una de ellas formamos un triángulo equilátero, y con la otra, un cuadrado. Escribe la suma de las áreas de ambas figuras.**





$$h = \sqrt{\left(\frac{x}{3}\right)^2 - \left(\frac{x}{6}\right)^2} = \sqrt{\frac{x^2}{12}} = \frac{x}{\sqrt{12}}$$

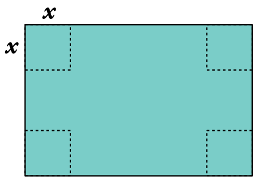
$$A_T = \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{3} \cdot \frac{x}{\sqrt{12}} = \frac{x^2}{6\sqrt{12}}$$

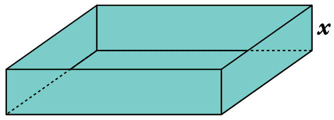


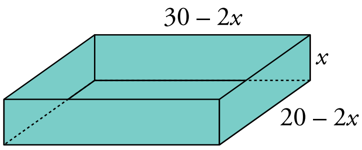
$$A_C = \left(\frac{1-x}{4}\right)^2$$

$$\text{Suma de las áreas} = \left(\frac{1-x}{4}\right)^2 + \frac{x^2}{6\sqrt{12}}$$

61. **De una cartulina rectangular cuyas dimensiones son 30 cm y 20 cm, recortamos un cuadrado de lado x en cada esquina para construir una caja sin tapa. Escribe el volumen de la caja en función de x.**







$V = x \cdot (30 - 2x) \cdot (20 - 2x)$

Reflexiona sobre la teoría

62. **En una división:**

Dividendo = $P(x) = x^4 - 5x^3 + 3x - 2$

Cociente = $C(x) = x^2 - 5x - 1$

Resto = $R(x) = 8x - 1$

¿Cuál es el divisor?

Como debe verificarse que $P(x) = D(x) \cdot C(x) + R(x)$, donde $D(x)$ es el divisor:

$$P(x) - R(x) = x^4 - 5x^3 + 3x - 2 - 8x + 1 = x^4 - 5x^3 - 5x - 1$$

$$\begin{array}{rrrrr|l}
x^4 & -5x^3 & & -5x & -1 & x^2 - 5x - 1 \\ \cline{6-6}
-x^4 & +5x^3 & +x^2 & & & x^2 + 1 \\ \cline{1-3}
 & & x^2 & -5x & -1 & \\
 & & -x^2 & +5x & +1 & \\ \cline{3-5}
 & & & & 0 &
\end{array}$$

$\to$ Luego: $D(x) = x^2 + 1$

63. **¿Cuál debe ser el valor de a y de b para que los polinomios $P(x)$ y $Q(x)$ sean iguales?**

$P(x) = x^3 - (4 + a)x + (1 + b)$ **$Q(x) = (a + 3)x^3 + (a + 2)x^2 - 2x + 5$**

Igualamos coeficiente a coeficiente:

$$\left.\begin{array}{l} a + 3 = 1 \\ a + 2 = 0 \\ 4 + a = 2 \end{array}\right\} \to a = -2 \qquad 1 + b = 5 \to b = 4$$

64. **Las raíces de $P(x)$ son 0, 2 y –3.**

a) Escribe tres divisores de $P(x)$ de primer grado.

b) Escribe un divisor de $P(x)$ de segundo grado.

a) x; $x - 2$; $x + 3$

b) Por ejemplo: $x(x - 2)$

65. **a) Si la división $P(x) : (x - 2)$ es exacta, ¿qué puedes afirmar del valor $P(2)$?**

b) Si –5 es una raíz del polinomio $P(x)$, ¿qué puedes afirmar de la división $P(x) : (x + 5)$?

c) ¿En qué resultado te has basado para responder a las dos preguntas anteriores?

a) Si la división es exacta, el resto es 0, luego $P(2) = 0$.

b) La división $P(x) : (x + 5)$ es exacta, el resto es 0.

c) En el teorema del resto.

66. **Inventa dos polinomios de segundo grado que cumplan la condición indicada en cada caso:**

a) mín.c.m. $[P(x), Q(x)] = x^2(x - 3)(x + 2)$

b) máx.c.d. $[P(x), Q(x)] = 2x + 1$

a) Por ejemplo: $P(x) = x^2$; $Q(x) = (x - 3)(x + 2)$

b) Por ejemplo: $P(x) = x(2x + 1)$; $Q(x) = (2x + 1)(x - 2)$

67. **Tenemos un polinomio $P(x) = (x - 1)^2(x + 3)$. Busca un polinomio de segundo grado, $Q(x)$, que cumpla las dos condiciones siguientes:**

a) máx.c.d. $[P(x), Q(x)] = x - 1$

b) mín.c.m. $[P(x), Q(x)] = (x - 1)^2(x^2 - 9)$

$Q(x) = (x - 1)(x - 3)$

68. **¿Por qué fracción hay que multiplicar a $\dfrac{x-5}{x-1}$ para obtener $\dfrac{x^2-5x}{x^2+3x-4}$?**

Habrá que multiplicar por $\dfrac{x}{x+4}$ ya que:

$$\begin{array}{rr|l} x^2 & -5x & x-5 \\ \cline{3-3} -x^2 & +5x & x \\ \hline & 0 & \end{array} \qquad \text{y} \qquad \begin{array}{rrr|l} x^2 & +3x & -4 & x-1 \\ \cline{4-4} -x^2 & +x & & x+4 \\ \hline & 4x & -4 & \\ & -4x & +4 & \\ \hline & & 0 & \end{array}$$

69. **Prueba que el polinomio $x^2 + (a + b)x + ab$ es divisible por $x + a$ y por $x + b$ para cualquier valor de a y b. ¿Cuál será su descomposición factorial?**

$$\begin{array}{r|rrr} & 1 & a+b & ab \\ -a & & -a & -ab \\ \hline & 1 & b & \boxed{0} \end{array} \qquad \begin{array}{r|rrr} & 1 & a+b & ab \\ -b & & -b & -ab \\ \hline & 1 & a & \boxed{0} \end{array}$$

$x^2 + (a + b)x + ab = (x + a)(x + b)$

70. **¿Verdadero o falso? Justifica y pon ejemplos.**

a) Si un polinomio es de grado 3, y otro, de grado 2, su producto es de grado 6.

b) Si $P(0) = 1$, entonces $P(x)$ es divisible por $(x - 1)$.

c) Si sumamos dos polinomios de grado 3, siempre obtenemos un polinomio de grado 3.

d) Si $P(3) \neq 0$, entonces el polinomio $P(x)$ no es divisible por $x - 3$.

e) Si $P(-2) = 0$, entonces $x + 2$ es un factor de $P(x)$.

f) Si $P(x) = ax^2 + bx + 2$ y $P(\pm 2) \neq 0$, entonces $P(x)$ no puede tener raíces enteras.

g) No es posible escribir un polinomio de cuarto grado que solo tenga una raíz triple.

h) El resultado de operar y simplificar la expresión siguiente es un número:

$$\left(\frac{2x+y}{x} - \frac{x^2+y^2}{xy}\right) : \left(\frac{4y}{x} - \frac{x}{y}\right) + \frac{2y}{x+2y}$$

a) Falso. Su grado será 5. Por ejemplo: $x^3 \cdot (x^2 + 2) = x^5 + 2x^3$

b) Falso. Por ejemplo: $P(x) = x^2 + 1$, $P(0) = 1$, pero no es divisible por $(x - 1)$

c) Falso. Por ejemplo: $P(x) = x^3 + 1$; $Q(x) = -x^3 + x^2 - 3$

$P(x) + Q(x) = x^2 - 2$, que tiene grado 2.

d) Verdadero.

e) Verdadero.

f) Falso. Si $a = -1 = b$, por ejemplo, tenemos $-x^2 - x + 2$, que tiene raíz en $x = 1$.

g) Verdadero.

h) Verdadero.

$$\left(\frac{2x+y}{x} - \frac{x^2+y^2}{xy}\right) : \left(\frac{4y}{x} - \frac{x}{y}\right) + \frac{2y}{x+2y} = \left(\frac{2xy + y^2 - x^2 - y^2}{xy}\right) : \left(\frac{4y^2 - x^2}{xy}\right) + \frac{2y}{x+2y} =$$

$$= \frac{(2xy - x^2) \cdot xy}{xy(4y^2 - x^2)} + \frac{2y}{x+2y} = \frac{2xy - x^2}{(x+2y)(2y-x)} + \frac{2y}{x+2y} = \frac{2xy - x^2 + 4y^2 - 2xy}{(2y+x)(2y-x)} =$$

$$= \frac{4y^2 - x^2}{(2y+x)(2y-x)} = \frac{(2y+x)(2y-x)}{(2y+x)(2y-x)} = 1$$

Página 54

Busca regularidades y generaliza

Triángulos y potencias

Observa, comprueba y compara:

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & 1 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 2 & & 1 & & \\ & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\ 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \end{array} \longleftrightarrow \begin{array}{l} (a+b)^1 = 1a + 1b \\ (a+b)^2 = 1a^2 + 2ab + 1b^2 \\ (a+b)^3 = 1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3 \\ (a+b)^4 = 1a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + 1b^4 \end{array}$$

- **¿Sabrías añadir una fila más a este triángulo numérico?**

  (Se conoce como triángulo de Tartaglia).

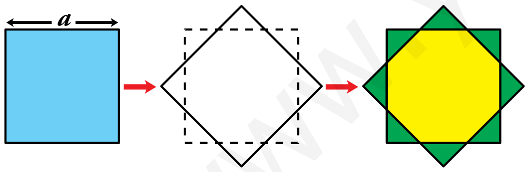
- **¿Sabrías escribir el desarrollo polinómico de $(a+b)^5$ sin necesidad de multiplicar el binomio $(a+b)$ por sí mismo cinco veces?**

$$\begin{array}{ccccccccccc} & & & & 1 & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\ & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\ 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \end{array} \to (a+b)^5 = 1a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + 1b^5$$

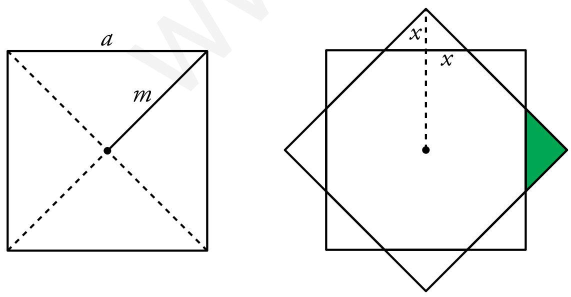
Utiliza el lenguaje algebraico

Cuadrado y octógono

Suponiendo conocida la longitud, *a*, del lado del cuadrado azul:



- **Calcula el área del octógono amarillo.**
- **Calcula, también, el área de la estrella.**



$$m^2 + m^2 = a^2 \to m = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

$$x = m - \frac{a}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2} - \frac{a}{2} = \frac{a}{2}(\sqrt{2} - 1)$$

Área del triángulo sombreado $\to A_T = \dfrac{2x \cdot x}{2} = x^2 = \dfrac{a^2}{4}(3 - 2\sqrt{2})$

Área del cuadrado $\to A_C = a^2$

Área del octógono $\to A_O = A_C - 4A_T = a^2 - 4 \cdot \dfrac{a^2}{4}(3 - 2\sqrt{2}) = 2a^2(\sqrt{2} - 1)$

Área de la estrella $\to A_E = A_C + 4A_T = a^2 + 4 \cdot \dfrac{a^2}{4}(3 - 2\sqrt{2}) = 2a^2(2 - \sqrt{2})$

Reflexiona y exprésate

¡Curioso!

Piensa tres dígitos que no sean los tres iguales → **Por ejemplo, 5, 8 y 3.**

Forma con ellos el mayor número ..... $\boxed{x}\boxed{y}\boxed{z}$ → **El número mayor 853**

Forma el menor .... $\boxed{z}\boxed{y}\boxed{x}$ → **El número menor 358**

Réstalos .... $\boxed{x}\boxed{y}\boxed{z} - \boxed{z}\boxed{y}\boxed{x}$ → **La diferencia .... 853 – 358 = 495**

- **Comprueba que la diferencia es siempre múltiplo de 9 y de 11.**
- **Demuestra, utilizando el lenguaje algebraico, que la observación anterior es cierta para cualquier trío de cifras, x, y, z, siendo distintas al menos dos de ellas.**

Ayuda:

$\boxed{x}\boxed{y}\boxed{z} = 100x + 10y + z$

$\boxed{z}\boxed{y}\boxed{x} = 100z + 10y + x$

$\boxed{x}\boxed{y}\boxed{z} - \boxed{z}\boxed{y}\boxed{x} = (100x + 10y + z) - (100z + 10y + x) = 99x - 99z = 99(x - z)$

La diferencia siempre es múltiplo de 99 y, por tanto, lo es de 9 y de 11.

Página 55

Entrénate resolviendo problemas

- **En cada operación, sustituye cada letra por una cifra distinta de cero.**

$$\begin{array}{r} yz \\ yz \\ yz \\ yz \\ +\ yz \\ \hline xyz \end{array}$$

Atendiendo a la columna de las unidades, vemos que el valor $5z$ termina en 0 o en 5.

Como $z \neq 0 \rightarrow z = 5$ y "nos llevamos 2".

Atendiendo a la columna de las decenas, $5y + 2$ termina en y. Esa condición solo se cumple para $y = 2$ e $y = 7$.

Si $y = 2$, $5y + 2 = 12$. Sería $x = 1$. Si $y = 7$, y $5y + 2 = 37$. Sería $x = 3$.

Concluimos que hay dos soluciones: $x = 1$, $y = 2$, $z = 5$ y $x = 3$, $y = 7$, $z = 5$.

$$\begin{array}{r} ab \\ \times\ \ c \\ \hline de \\ +\ fg \\ \hline hi \end{array}$$

Por tanteo, se llega a la solución:

$$a = 1,\ b = 7,\ c = 4,\ d = 6,\ e = 8,\ f = 2,\ g = 5,\ h = 9,\ i = 3$$

- **Resuelve estos problemas sin utilizar el álgebra:**

a) Un estanque se alimenta de dos bocas de agua. Abriendo solamente la primera, el estanque se llena en 8 horas y, abriendo ambas, en 3 horas. ¿Cuánto tarda en llenarse si se abre solo la segunda boca?

b) En una balsa hay un grifo y un sumidero. El sumidero vacía la balsa en 2 horas.

Un día, sin darnos cuenta, y estando la balsa llena, abrimos el sumidero pero dejamos el grifo abierto. La balsa tardó 5 horas en vaciarse.

¿Cuánto tarda el grifo en llenar la balsa?

a) La primera boca llena el estanque en 8 horas. Por tanto, cada hora llena $\frac{1}{8}$ de estanque.

Las dos bocas juntas llenan el estanque en 3 horas. Por tanto, cada hora llenan $\frac{1}{3}$ de estanque.

La segunda boca llenará, cada hora, $\frac{1}{3} - \frac{1}{8} = \frac{5}{24}$ de estanque.

Si en una hora la segunda boca llena $\frac{5}{24}$ de estanque, en llenarlo tardará:

$\frac{24}{5}$ horas = 4 h 48 min

b) El sumidero vacía la balsa en 2 horas $\rightarrow$ En una hora vacía $\frac{1}{2}$ de balsa.

La balsa se vacía, con sumidero y grifo abiertos, en 5 horas $\rightarrow$ Cada hora se vacía $\frac{1}{5}$ de balsa.

El grifo llena, cada hora, $\frac{1}{2} - \frac{1}{5} = \frac{3}{10}$ de balsa.

El grifo tarda en llenar la balsa $\frac{10}{3}$ horas = 3 h + $\frac{1}{3}$ de hora = 3 h 20 min.

Autoevaluación

1. **Multiplica por el mín.c.m. de los denominadores y simplifica.**

$$\frac{(x-2)(x+1)}{3}-\frac{(3x-1)^2}{8}+\frac{(2x-3)(2x+3)}{12}$$

mín.c.m. $(3, 8, 12) = 24$

$$24\left[\frac{(x-2)(x+1)}{3}-\frac{(3x-1)^2}{8}+\frac{(2x-3)(2x+3)}{12}\right]=$$

$= 8(x^2-x-2)-3(9x^2-6x+1)+2(4x^2-9) =$

$= 8x^2-8x-16-27x^2+18x-3+8x^2-18 = -11x^2+10x-37$

2. **Halla el cociente y el resto de esta división:**

$$(3x^4-5x^3+4x^2-1):(x^2+2)$$

$$\begin{array}{rrrrr|l}
3x^4 & -5x^3 & +4x^2 & & -1 & x^2+2 \\ \cline{6-6}
-3x^4 & & -6x^2 & & & 3x^2-5x-2 \\ \cline{1-3}
& -5x^3 & -2x^2 & & & \\
& 5x^3 & & +10x & & \\ \cline{2-4}
& & -2x^2 & +10x & & \\
& & 2x^2 & & +4 & \\ \cline{3-5}
& & & 10x & +3 &
\end{array}$$

COCIENTE: $3x^2-5x-2$

RESTO: $10x+3$

3. **El polinomio $x^4-2x^3-23x^2-2x-24$ es divisible por $x-a$ para dos valores enteros de a. Búscalos y da el cociente en ambos casos.**

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 & 1 & -2 & -23 & -2 & -24 \\
-4 & & -4 & 24 & -4 & 24 \\ \hline
 & 1 & -6 & 1 & -6 & \boxed{0}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|rrrrr}
 & 1 & -2 & -23 & -2 & -24 \\
6 & & 6 & 24 & 6 & 24 \\ \hline
 & 1 & 4 & 1 & 4 & \boxed{0}
\end{array}$$

Es divisible por $x+4$.

COCIENTE: x^3-6x^2+x-6

Es divisible por $x-6$.

COCIENTE: x^3+4x^2+x+4

4. **Calcula el valor del parámetro m para que el polinomio $P(x) = 7x^3-mx^2+3x-2$ sea divisible por $x+1$.**

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 7 & -m & 3 & -2 \\
-1 & & -7 & 7+m & -10-m \\ \hline
 & 7 & -7-m & 10+m & \boxed{-12-m}
\end{array}$$

$-12-m=0 \;\rightarrow\; m=-12$

5. **Descompón en factores los siguientes polinomios:**

a) $x^4-12x^3+36x^2$

b) $2x^3+5x^2-4x-3$

a) $x^4-12x^3+36x^2 = x^2(x^2-12x+36)$

$x^2-12x+36=0 \;\rightarrow\; x=\dfrac{12\pm\sqrt{144-144}}{2}=\dfrac{12}{2}=6$

$x^4-12x^3+36x^2 = x^2(x-6)^2$

b)
$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 2 & 5 & -4 & -3 \\
1 & & 2 & 7 & 3 \\
\hline
 & 2 & 7 & 3 & \boxed{0} \\
-3 & & -6 & -3 & \\
\hline
 & 2 & 1 & \boxed{0} &
\end{array}$$

$$2x^3 + 5x^2 - 4x - 3 = (x - 1)(x + 3)(2x + 1)$$

6. Simplifica las siguientes fracciones algebraicas:

a) $\dfrac{2x^2y - xy^2}{10x - 5y}$ **b)** $\dfrac{3a^2b^2 - 6ab^3}{3a^3b - 6a^2b^2}$

a) $\dfrac{2x^2y - xy^2}{10x - 5y} = \dfrac{xy(2x - y)}{5(2x - y)} = \dfrac{xy}{5}$

b) $\dfrac{3a^2b^2 - 6ab^3}{3a^3b - 6a^2b^2} = \dfrac{3ab^2(a - 2b)}{3a^2b(a - 2b)} = \dfrac{b}{a}$

7. Efectúa, y simplifica si es posible.

a) $\dfrac{2x^2}{x - 3} : \dfrac{8}{x^3 - 3x^2}$ **b)** $\dfrac{x^2 - 6}{(x - 2)^2} - \dfrac{x - 3}{x - 2}$ **c)** $\dfrac{1}{a} - \dfrac{a}{a^2 - 1} + \dfrac{2a + 1}{a^3 - a}$

a) $\dfrac{2x^2}{x - 3} : \dfrac{8}{x^3 - 3x^2} = \dfrac{2x^2 \cdot x^2(x - 3)}{8 \cdot (x - 3)} = \dfrac{x^4}{4}$

b) $\dfrac{x^2 - 6}{(x - 2)^2} - \dfrac{x - 3}{x - 2} = \dfrac{x^2 - 6 - (x - 3)(x - 2)}{(x - 2)^2} = \dfrac{x^2 - 6 - x^2 + 5x - 6}{(x - 2)^2} = \dfrac{5x - 12}{(x - 2)^2}$

c) $\dfrac{1}{a} - \dfrac{a}{a^2 - 1} + \dfrac{2a + 1}{a(a^2 - 1)} = \dfrac{a^2 - 1}{a(a^2 - 1)} - \dfrac{a^2}{a(a^2 - 1)} + \dfrac{2a + 1}{a(a^2 - 1)} =$

$= \dfrac{a^2 - 1 - a^2 + 2a + 1}{a(a^2 - 1)} = \dfrac{2}{a^2 - 1}$

8. Halla a y b para que al dividir $x^3 + ax^2 + bx - 4$ entre $x + 1$ el resto sea –10, y al dividirlo entre $x - 2$ el resto sea 2.

$P(-1) = -10 = (-1)^3 + a(-1)^2 + b(-1) - 4 = -1 + a - b - 4 \rightarrow a - b = -5$

$P(2) = 2 = 2^3 + a \cdot 2^2 + b \cdot 2 - 4 = 8 + 4a + 2b - 4 \rightarrow 4a + 2b = -2$

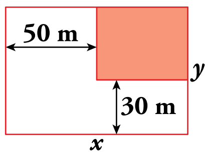
Tenemos un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$\begin{cases} a - b = -5 \\ 4a + 2b = -2 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \rightarrow \; 2a - \cancel{2b} = -10 \\ 4a + \cancel{2b} = -2 \\ \hline 6a = -12 \;\rightarrow\; a = -2 \end{array}$$

$-2 - b = -5 \rightarrow -2 + 5 = b \rightarrow b = 3$

9. En una parcela de lados x e y se construye una casa, en la zona que se indica en el dibujo.

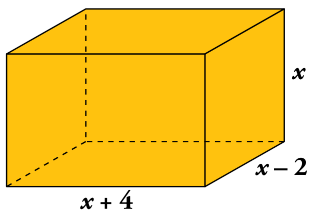
Expresa, en función de x e y, el área de la zona no edificada.



$A = xy - (x - 50)(y - 30) = xy - xy + 50y + 30x - 1\,500 = 50y + 30x - 1\,500$

$A = (30x + 50y - 1\,500)\ \text{m}^2$

10. Expresa mediante polinomios el área y el volumen de este ortoedro:



Volumen: $V = x \cdot (x - 2) \cdot (x + 4)$

Área: $A = 2(x + 4)(x - 2) + 2(x - 2)x + 2(x + 4)x$

Autoevaluación

1. Multiplica por el mín.c.m. de los denominadores y simplifica.

$$\frac{(x-2)(x+1)}{3}-\frac{(3x-1)^2}{8}+\frac{(2x-3)(2x+3)}{12}$$

mín.c.m. (3, 8, 12) = 24

$$24\left[\frac{(x-2)(x+1)}{3}-\frac{(3x-1)^2}{8}+\frac{(2x-3)(2x+3)}{12}\right]=$$

$$= 8(x^2-x-2)-3(9x^2-6x+1)+2(4x^2-9) =$$

$$= 8x^2-8x-16-27x^2+18x-3+8x^2-18=-11x^2+10x-37$$

2. Halla el cociente y el resto de esta división:

$$(3x^4-5x^3+4x^2-1):(x^2+2)$$

$$\begin{array}{rrrrr|l}
3x^4 & -5x^3 & +4x^2 & & -1 & x^2+2 \\
\cline{6-6}
-3x^4 & & -6x^2 & & & 3x^2-5x-2 \\
\cline{1-3}
 & -5x^3 & -2x^2 & & & \\
 & 5x^3 & & +10x & & \\
\cline{2-4}
 & & -2x^2 & +10x & & \\
 & & 2x^2 & & +4 & \\
\cline{3-5}
 & & & 10x & +3 &
\end{array}$$

COCIENTE: $3x^2-5x-2$

RESTO: $10x+3$

3. El polinomio $x^4-2x^3-23x^2-2x-24$ es divisible por $x-a$ para dos valores enteros de a. Búscalos y da el cociente en ambos casos.

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 & 1 & -2 & -23 & -2 & -24 \\
-4 & & -4 & 24 & -4 & 24 \\
\hline
 & 1 & -6 & 1 & -6 & \boxed{0}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|rrrrr}
 & 1 & -2 & -23 & -2 & -24 \\
6 & & 6 & 24 & 6 & 24 \\
\hline
 & 1 & 4 & 1 & 4 & \boxed{0}
\end{array}$$

Es divisible por $x+4$.

COCIENTE: x^3-6x^2+x-6

Es divisible por $x-6$.

COCIENTE: x^3+4x^2+x+4

4. Calcula el valor del parámetro m para que el polinomio $P(x)=7x^3-mx^2+3x-2$ sea divisible por $x+1$.

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 7 & -m & 3 & -2 \\
-1 & & -7 & 7+m & -10-m \\
\hline
 & 7 & -7-m & 10+m & \boxed{-12-m}
\end{array}$$

$-12-m=0 \rightarrow m=-12$

5. Descompón en factores los siguientes polinomios:

a) $x^4-12x^3+36x^2$ **b)** $2x^3+5x^2-4x-3$

a) $x^4-12x^3+36x^2=x^2(x^2-12x+36)$

$$x^2-12x+36=0 \rightarrow x=\frac{12\pm\sqrt{144-144}}{2}=\frac{12}{2}=6$$

$$x^4-12x^3+36x^2=x^2(x-6)^2$$

b)
$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 2 & 5 & -4 & -3 \\
1 & & 2 & 7 & 3 \\
\hline
 & 2 & 7 & 3 & \boxed{0} \\
-3 & & -6 & -3 & \\
\hline
 & 2 & 1 & \boxed{0} &
\end{array}$$

$$2x^3 + 5x^2 - 4x - 3 = (x - 1)(x + 3)(2x + 1)$$

6. Simplifica las siguientes fracciones algebraicas:

a) $\mathbf{\dfrac{2x^2y - xy^2}{10x - 5y}}$ b) $\mathbf{\dfrac{3a^2b^2 - 6ab^3}{3a^3b - 6a^2b^2}}$

a) $\dfrac{2x^2y - xy^2}{10x - 5y} = \dfrac{xy(2x - y)}{5(2x - y)} = \dfrac{xy}{5}$

b) $\dfrac{3a^2b^2 - 6ab^3}{3a^3b - 6a^2b^2} = \dfrac{3ab^2(a - 2b)}{3a^2b(a - 2b)} = \dfrac{b}{a}$

7. Efectúa, y simplifica si es posible.

a) $\mathbf{\dfrac{2x^2}{x - 3} : \dfrac{8}{x^3 - 3x^2}}$ b) $\mathbf{\dfrac{x^2 - 6}{(x - 2)^2} - \dfrac{x - 3}{x - 2}}$ c) $\mathbf{\dfrac{1}{a} - \dfrac{a}{a^2 - 1} + \dfrac{2a + 1}{a^3 - a}}$

a) $\dfrac{2x^2}{x - 3} : \dfrac{8}{x^3 - 3x^2} = \dfrac{2x^2 \cdot x^2(x - 3)}{8 \cdot (x - 3)} = \dfrac{x^4}{4}$

b) $\dfrac{x^2 - 6}{(x - 2)^2} - \dfrac{x - 3}{x - 2} = \dfrac{x^2 - 6 - (x - 3)(x - 2)}{(x - 2)^2} = \dfrac{x^2 - 6 - x^2 + 5x - 6}{(x - 2)^2} = \dfrac{5x - 12}{(x - 2)^2}$

c) $\dfrac{1}{a} - \dfrac{a}{a^2 - 1} + \dfrac{2a + 1}{a(a^2 - 1)} = \dfrac{a^2 - 1}{a(a^2 - 1)} - \dfrac{a^2}{a(a^2 - 1)} + \dfrac{2a + 1}{a(a^2 - 1)} =$

$= \dfrac{a^2 - 1 - a^2 + 2a + 1}{a(a^2 - 1)} = \dfrac{2}{a^2 - 1}$

8. Halla a y b para que al dividir $x^3 + ax^2 + bx - 4$ entre $x + 1$ el resto sea –10, y al dividirlo entre $x - 2$ el resto sea 2.

$P(-1) = -10 = (-1)^3 + a(-1)^2 + b(-1) - 4 = -1 + a - b - 4 \to a - b = -5$

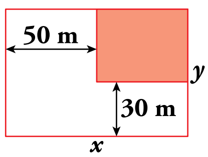
$P(2) = 2 = 2^3 + a \cdot 2^2 + b \cdot 2 - 4 = 8 + 4a + 2b - 4 \to 4a + 2b = -2$

Tenemos un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$\begin{cases} a - b = -5 \\ 4a + 2b = -2 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \to \; 2a - \cancel{2b} = -10 \\ 4a + \cancel{2b} = -2 \\ \hline 6a = -12 \to a = -2 \end{array}$$

$-2 - b = -5 \to -2 + 5 = b \to b = 3$

9. En una parcela de lados x e y se construye una casa, en la zona que se indica en el dibujo.

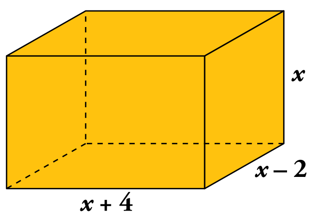


Expresa, en función de x e y, el área de la zona no edificada.

$A = xy - (x - 50)(y - 30) = xy - xy + 50y + 30x - 1\,500 = 50y + 30x - 1\,500$

$A = (30x + 50y - 1\,500) \text{ m}^2$

10. Expresa mediante polinomios el área y el volumen de este ortoedro:



Volumen: $V = x \cdot (x - 2) \cdot (x + 4)$

Área: $A = 2(x + 4)(x - 2) + 2(x - 2)x + 2(x + 4)x$

Página 57

Resuelve

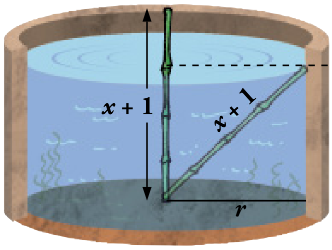
1. **Halla el lado de un cuadrado tal que el número de metros cuadrados de su área menos el número de metros de su lado es igual a 870. Resuélvelo sin aplicar la fórmula de una ecuación de segundo grado, teniendo en cuenta que $x^2 - x = x(x - 1)$ es el producto de dos números consecutivos. (Descompón 870 en factores).**

$870 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 29 = 30 \cdot 29$

Así vemos que: $x^2 - x = x(x - 1)$

Por tanto, $x = 30$ unidades.

2. **Halla la profundidad del estanque del primer problema chino.**

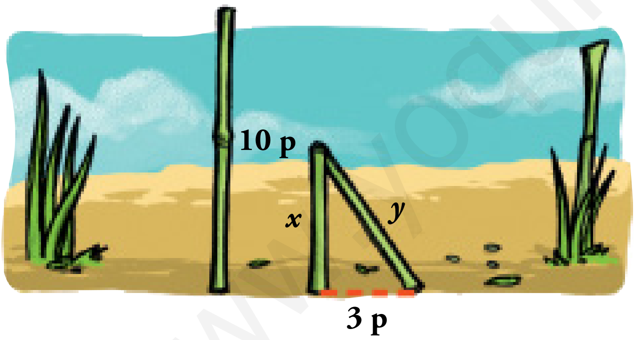


$A_{\text{CÍRCULO}} = \pi r^2 = 10\pi \ \rightarrow \ r = \sqrt{10}$

$(x + 1)^2 = x^2 + r^2 \ \rightarrow \ x^2 + 2x + 1 = x^2 + 10 \ \rightarrow \ x = \dfrac{9}{2}$

El estanque tiene una profundidad de $\dfrac{9}{2}$ pies.

3. **Halla la altura de la rotura en el segundo problema chino.**



$x + y = 10 \ \rightarrow \ y = 10 - x$

$y^2 = x^2 + 9 \ \rightarrow \ 100 + x^2 - 20x = x^2 + 9 \ \rightarrow$

$\rightarrow \ 100 - 9 = 20x \ \rightarrow$

$\rightarrow \ x = \dfrac{91}{20} = 4{,}55$

La rotura se ha producido a 4,55 pies de la base.

1 Ecuaciones

Página 58

1. Resuelve:

a) $\mathbf{2x^2 - 50 = 0}$ **b)** $\mathbf{3x^2 + 5 = 0}$ **c)** $\mathbf{7x^2 + 5x = 0}$

a) $2x^2 - 50 = 0 \rightarrow x^2 = 25 \rightarrow x = \pm 5$

Soluciones: $x_1 = 5,\ x_2 = -5$

b) $3x^2 + 5 = 0 \rightarrow x^2 = -\dfrac{5}{3}$. No tiene solución.

c) $7x^2 + 5x = 0 \rightarrow x(7x + 5) = 0 \rightarrow x = 0,\ 7x + 5 = 0 \rightarrow x = -\dfrac{5}{7}$

Soluciones: $x_1 = 0,\ x_2 = -\dfrac{5}{7}$

2. Resuelve:

a) $\mathbf{10x^2 - 3x - 1 = 0}$ **b)** $\mathbf{x^2 - 20x + 100 = 0}$ **c)** $\mathbf{3x^2 + 5x + 11 = 0}$

a) $x = \dfrac{3 \pm \sqrt{9 + 40}}{20} = \dfrac{3 \pm 7}{20} = \begin{cases} 1/2 \\ -1/5 \end{cases}$

Soluciones: $x_1 = \dfrac{1}{2},\ x_2 = -\dfrac{1}{5}$

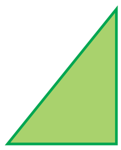
b) $x^2 - 20x + 100 = (x - 10)^2 = 0 \rightarrow x = 10$

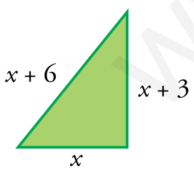
Solución: $x = 10$

c) $x = \dfrac{-5 \pm \sqrt{25 - 132}}{6}$. No tiene solución.

3. En un triángulo rectángulo, el lado mayor es 3 cm más largo que el mediano, el cual, a su vez, es 3 cm más largo que el pequeño.

¿Cuánto miden los lados?





$$(x + 6)^2 = (x + 3)^2 + x^2$$
$$x^2 + 12x + 36 = 2x^2 + 6x + 9$$
$$x^2 - 6x - 27 = 0$$

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{36 + 108}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{144}}{2} = \frac{6 \pm 12}{2} = \begin{cases} 9 \\ -3 \end{cases}$$

Solo es válida la solución $x = 9$.

Los lados del triángulos miden 9 cm, 12 cm y 15 cm.

Página 59

4. Resuelve.

a) $3x^4 - 12x^2 = 0$ **b)** $3x^4 + 75x^2 = 0$ **c)** $7x^4 - 112 = 0$

d) $x^4 - 9x^2 + 20 = 0$ **e)** $4x^4 + 19x^2 - 5 = 0$ **f)** $x^4 + 9x^2 + 18 = 0$

a) $3x^4 - 12x^2 = x^2(3x^2 - 12) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 2 \end{cases}$

Soluciones: $x_1 = 0,\ x_2 = 2,\ x_3 = -2$

b) $3x^4 + 75x^2 = x^2(3x^2 + 75) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = -75/3. \text{ Sin solución.} \end{cases}$

Solución: $x = 0$

c) $7x^4 - 112 = 0 \ \rightarrow\ x^4 = 16 \ \rightarrow\ x^2 = 4 \ \rightarrow\ x = \pm 2$

Soluciones: $x_1 = 2,\ x_2 = -2$

d) Hacemos el cambio $z = x^2$.

$$z^2 - 9z + 20 = 0 \ \rightarrow\ z = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 80}}{2} = \frac{9 \pm 1}{2} = \begin{cases} 5 \\ 4 \end{cases}$$

Si $z = 5,\ x = \pm\sqrt{5}$.

Si $z = 4,\ x = \pm 2$.

Soluciones: $x_1 = \sqrt{5},\ x_2 = -\sqrt{5},\ x_3 = 2,\ x_4 = -2$

e) Sea $z = x^2 \ \rightarrow\ 4z^2 + 19z - 5 = 0$

$$z = \frac{-19 \pm \sqrt{361 + 80}}{8} = \frac{-19 \pm \sqrt{441}}{8} = \frac{-19 \pm 21}{8} = \begin{cases} 1/4 \\ -5 \end{cases}$$

Si $z = \frac{1}{4},\ x = \pm\frac{1}{2}$.

Si $z = -5$, no existe x.

Soluciones: $x_1 = \frac{1}{2},\ x_2 = -\frac{1}{2}$

f) Sea $z = x^2 \ \rightarrow\ z^2 + 9z + 18 = 0$

$$z = \frac{-9 \pm \sqrt{81 - 72}}{2} = \frac{-9 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{-9 \pm 3}{2} = \begin{cases} -3 \\ -6 \end{cases}$$

La ecuación original no tiene solución.

5. **Resuelve estas ecuaciones:**

a) $\dfrac{x}{x-1}+\dfrac{2x}{x+1}=3$

b) $\dfrac{5}{x+2}+\dfrac{x}{x+3}=\dfrac{3}{2}$

c) $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{3}{4}$

d) $\dfrac{x+1}{x+5}+\dfrac{1-x}{x-4}=\dfrac{5}{2}$

a) $x(x+1)+2x(x-1)-3(x-1)(x+1)=0$

$x^2+x+2x^2-2x-3x^2+3=0$

$-x+3=0 \to x=3$

Comprobamos sobre la ecuación original: $\dfrac{3}{2}+\dfrac{6}{4}=3 \to$ es válida.

Solución: $x=3$

b) $10(x+3)+2x(x+2)-3(x+2)(x+3)=0$

$10x+30+2x^2+4x-3x^2-15x-18=0$

$-x^2-x+12=0 \to x^2+x-12=0 \to x=\dfrac{-1\pm\sqrt{1+48}}{2}=\dfrac{-1\pm 7}{2}=\begin{cases}3\\-4\end{cases}$

Comprobamos las soluciones sobre la ecuación original:

$\dfrac{5}{3+2}+\dfrac{3}{3+3}=1+\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2} \to x=3$ es válida.

$\dfrac{5}{-2}+\dfrac{-4}{-1}=\dfrac{-5}{2}+4=\dfrac{3}{2} \to x=-4$ es válida.

Soluciones: $x_1=3,\ x_2=-4$

c) $4x+4-3x^2=0 \to 3x^2-4x-4=0$

$x=\dfrac{4\pm\sqrt{16+48}}{6}=\dfrac{4\pm 8}{6}=\begin{cases}2\\-2/3\end{cases}$

Comprobamos las soluciones sobre la ecuación original:

$\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}=\dfrac{3}{4} \to x=2$ es válida.

$-\dfrac{3}{2}+\dfrac{9}{4}=-\dfrac{3}{4}\neq\dfrac{3}{4} \to x=-\dfrac{2}{3}$ no es válida.

Solución: $x=2$

d) $2(x+1)(x-4)+2(1-x)(x+5)-5(x+5)(x-4)=0$

$2x^2-6x-8-2x^2-8x+10-5x^2-5x+100=0$

$5x^2+19x-102=0 \to x=\dfrac{-19\pm\sqrt{361+2\,040}}{10}=\dfrac{-19\pm 49}{10}=\begin{cases}3\\-34/5\end{cases}$

Comprobamos las soluciones sobre la ecuación inicial:

$\dfrac{3+1}{3+5}+\dfrac{1-3}{3-4}=\dfrac{4}{8}+2=\dfrac{20}{8}=\dfrac{5}{2} \to x=3$ es válida.

$\dfrac{-29/5}{-9/5}+\dfrac{39/5}{-54/5}=\dfrac{29}{9}-\dfrac{39}{54}=\dfrac{135}{54}=\dfrac{5}{2} \to x=-\dfrac{34}{5}$ es válida.

Soluciones: $x_1=3,\ x_2=-\dfrac{34}{5}$

Página 60

6. Resuelve las ecuaciones siguientes:

a) $x - \sqrt{2x - 3} = 1$ **b)** $\sqrt{x + 4} - \sqrt{6 - x} = -2$

c) $\sqrt{x^2 + 2x + 9} - 7 = 2x$ **d)** $\sqrt{20 - x} = x - 8$

a) $x - 1 = \sqrt{2x - 3}$. Elevamos al cuadrado ambos miembros:

$$x^2 - 2x + 1 = 2x - 3 \to x^2 - 4x + 4 = 0 \to x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 16}}{2} = 2$$

Comprobamos la solución sobre la ecuación inicial:

$2 - 1 = \sqrt{4 - 3}$. Es válida.

Solución: $x = 2$

b) $\sqrt{x + 4} = \sqrt{6 - x} - 2$. Elevamos al cuadrado ambos miembros:

$$x + 4 = (6 - x) + 4 - 4\sqrt{6 - x} \to 2x - 6 = -4\sqrt{6 - x}$$

Volvemos a elevar al cuadrado los dos miembros:

$$4x^2 - 24x + 36 = 16(6 - x) \to 4x^2 - 24x + 36 = 96 - 16x \to$$
$$\to 4x^2 - 8x - 60 = 0 \to x^2 - 2x - 15 = 0$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 60}}{2} = \frac{2 \pm 8}{2} = \begin{cases} 5 \\ -3 \end{cases}$$

Comprobamos las soluciones sobre la ecuación inicial:

$$\left.\begin{array}{l} \sqrt{5 + 4} \neq \sqrt{6 - 5} - 2 \to 3 \neq -1 \to x = 5 \text{ no es válida.} \\ \sqrt{-3 + 4} = \sqrt{6 + 3} - 2 \to 1 = 3 - 2 \to x = -3 \text{ es válida.} \end{array}\right\} \text{Solución: } x = -3$$

c) $\sqrt{x^2 + 2x + 9} = 2x + 7$. Elevamos al cuadrado ambos miembros:

$$x^2 + 2x + 9 = 4x^2 + 28x + 49 \to 3x^2 + 26x + 10 = 0$$

$$x = \frac{-26 \pm \sqrt{676 - 480}}{6} = \frac{-26 \pm \sqrt{196}}{6} = \frac{-26 \pm 14}{6} = \begin{cases} -2 \\ -20/3 \end{cases}$$

Comprobamos las soluciones sobre la ecuación inicial:

$$\left.\begin{array}{l} \sqrt{4 - 4 + 9} - 7 = -4 \to x = -2 \text{ es válida.} \\ \sqrt{\dfrac{400}{9} - \dfrac{40}{3} + 9} - 7 \neq \dfrac{-40}{3} \to x = -\dfrac{20}{3} \text{ no es válida.} \end{array}\right\} \text{Solución: } x = -2$$

d) Elevamos al cuadrado ambos miembros:

$$20 - x = x^2 + 64 - 16x \to x^2 - 15x + 44 = 0$$

$$x = \frac{15 \pm \sqrt{225 - 176}}{2} = \frac{15 \pm \sqrt{49}}{2} = \frac{15 \pm 7}{2} = \begin{cases} 11 \\ 4 \end{cases}$$

Comprobamos las soluciones sobre la ecuación inicial:

$$\left.\begin{array}{l} \sqrt{20 - 11} = 11 - 8 \to x = 11 \text{ es válida.} \\ \sqrt{20 - 4} \neq 4 - 8 \to x = 4 \text{ no es válida.} \end{array}\right\} \text{Solución: } x = 11$$

Página 61

7. **Resuelve las siguientes ecuaciones exponenciales:**

a) $3^{x^2-5} = 81$

b) $2^{x+1} = \sqrt[3]{4}$

c) $4^x + 4^{x+2} = 272$

d) $2^x + 2^{x+3} = 36$

e) $5^x = 193$

f) $2^{x^2-2} = 835$

a) $3^{x^2-5} = 81$

$3^{x^2-5} = 3^4$

$x^2 - 5 = 4$

$x^2 = 9$

$x = \sqrt{9} = \pm 3$

Soluciones: $x_1 = 3,\ x_2 = -3$

b) $2^{x+1} = \sqrt[3]{4}$

$2^{x+1} = 2^{2/3}$

$x + 1 = \dfrac{2}{3}$

$x = -\dfrac{1}{3}$

Solución: $x = -\dfrac{1}{3}$

c) $4^x + 4^{x+2} = 272$

$4^x + 4^x \cdot 4^2 = 272$

$4^x + 16 \cdot 4^x = 272$

$17 \cdot 4^x = 272$

$4^x = \dfrac{272}{17}$

$4^x = 16$

$x = 2$

Solución: $x = 2$

d) $2^x + 2^{x+3} = 36$

$2^x + 2^x \cdot 2^3 = 36$

$2^x + 8 \cdot 2^x = 36$

$9 \cdot 2^x = 36$

$2^x = \dfrac{36}{9}$

$2^x = 4$

$x = 2$

Solución: $x = 2$

e) $5^x = 193$

$\log 5^x = \log 193$

$x \cdot \log 5 = \log 193$

$x = \dfrac{\log 193}{\log 5} \approx 3{,}27$

Solución: $x = 3{,}27$

f) $2^{x^2-2} = 835$

$\log (2^{x^2-2}) = \log 835$

$(x^2 - 2) \cdot \log 2 = \log 835$

$x^2 - 2 = \dfrac{\log 835}{\log 2}$

$x^2 = \dfrac{\log 835}{\log 2} + 2$

$x = \pm\sqrt{\dfrac{\log 835}{\log 2} + 2} \approx \pm 3{,}42$

Soluciones: $x_1 \approx 3{,}42;\ x_2 \approx -3{,}42$

8. **Aplica la definición de logaritmo para calcular x en cada caso:**

a) $\log_2 (2x - 1) = 3$ **b)** $\log_2 (x + 3) = -1$

c) $\log 4x = 2$ **d)** $\log (x - 2) = 2{,}5$

e) $\log (3x + 1) = -1$ **f)** $\log_2 (x^2 - 8) = 0$

a) $\log_2 (2x - 1) = 3$

$2^3 = 2x - 1$

$8 + 1 = 2x$

$x = \dfrac{9}{2}$

Solución: $x = \dfrac{9}{2}$

b) $\log_2 (x + 3) = -1$

$2^{-1} = x + 3$

$\dfrac{1}{2} = x + 3$

$x = \dfrac{-5}{2}$

Solución: $x = \dfrac{-5}{2}$

c) $\log 4x = 2$

$10^2 = 4x$

$100 = 4x$

$x = 25$

Solución: $x = 25$

d) $\log (x - 2) = 2{,}5$

$10^{2,5} = x - 2$

$10^{5/2} = x - 2$

$\sqrt{10^5} + 2 = x$

$x = 2 + 100\sqrt{10}$

Solución: $x = 2 + 100\sqrt{10}$

e) $\log (3x + 1) = -1$

$10^{-1} = 3x + 1$

$\dfrac{1}{10} = 3x + 1$

$x = \dfrac{-3}{10}$

Solución: $x = \dfrac{-3}{10}$

f) $\log_2 (x^2 - 8) = 0$

$2^0 = x^2 - 8$

$1 + 8 = x^2$

$9 = x^2$

$x = \pm\sqrt{9} = \pm 3$

Soluciones: $x_1 = 3$, $x_2 = -3$

Página 62

9. Resuelve las ecuaciones siguientes:

a) $7x^4 = 63x^2$ **b)** $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$

c) $4x^4 - 5x^2 + 1 = 0$ **d)** $x^4 + 5x^2 + 4 = 0$

a) $3x^4 - 63x^2 = x^2(7x^2 - 63) = 0 \left\langle \begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm 3 \end{array} \right.$

Soluciones: $x_1 = 0,\ x_2 = 3,\ x_3 = -3$

b) Hacemos el cambio $z = x^2$.

$$z^2 - 10z + 9 = 0 \ \to \ z = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 36}}{2} = \frac{10 \pm 8}{2} = \left\langle \begin{array}{l} z = 9 \\ z = 1 \end{array} \right.$$

Si $z = 9 \ \to \ x = \pm 3$

Si $z = 1 \ \to \ x = \pm 1$

Soluciones: $x_1 = 3,\ x_2 = -3,\ x_3 = 1,\ x_4 = -1$

c) Hacemos el cambio $z = x^2$.

$$4z^2 - 5z + 1 = 0 \ \to \ z = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{8} = \frac{5 \pm 3}{8} = \left\langle \begin{array}{l} z = 1 \\ z = 1/4 \end{array} \right.$$

Si $z = 1 \ \to \ x = \pm 1$

Si $z = \frac{1}{4} \ \to \ x = \pm\frac{1}{2}$

Soluciones: $x_1 = 1,\ x_2 = -1,\ x_3 = \frac{1}{2},\ x_4 = -\frac{1}{2}$

d) Hacemos el cambio $z = x^2$.

$$z^2 + 5z + 4 = 0 \ \to \ z = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \frac{-5 \pm 1}{2} = \left\langle \begin{array}{l} z = -3 \\ z = -2 \end{array} \right.$$

En ninguno de los dos casos hay solución para x.

10. Resuelve.

a) $\sqrt{4x + 5} = x + 2$ **b)** $\sqrt{x} + 2 = x$

c) $\left(\sqrt{x} - x + 2\right)\left(\sqrt{x} - 3\right)\left(\sqrt{x} + 3\right) = 0$

a) Elevamos al cuadrado ambos miembros:

$4x + 5 = (x + 2)^2 \ \to \ 4x + 5 = x^2 + 4x + 4 \ \to \ x^2 - 1 = 0 \ \to \ x = \pm 1$

Comprobamos las soluciones sobre la ecuación inicial:

$\sqrt{4 + 5} = 1 + 2 \ \to \ x = 1$ es válida.

$\sqrt{-4 + 5} = 1 \ \to \ x = -1$ es válida.

Soluciones: $x_1 = 1;\ x_2 = -1$

b) $\sqrt{x} = x - 2$. Elevamos al cuadrado ambos miembros:

$$x = x^2 - 4x + 4 \rightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \rightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2} = \begin{cases} 4 \\ 1 \end{cases}$$

Comprobamos las soluciones sobre la ecuación inicial:

$\sqrt{4} = 4 - 2 \rightarrow x = 4$ es válida.

$\sqrt{1} \neq 1 - 2 \rightarrow x = 1$ no es válida.

Solución: $x = 4$

c) • $\sqrt{x} - x + 2 = 0 \rightarrow \sqrt{x} = x - 2 \rightarrow x = x^2 - 4x + 4 \rightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \rightarrow$

$$\rightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{2} = \begin{cases} 4 \\ 1 \end{cases}$$

Comprobamos las soluciones:

$\sqrt{4} - 2 + 2 = 0 \rightarrow x = 4$ es válida.

$\sqrt{1} - 1 + 2 \neq 0 \rightarrow x = 1$ no es válida.

• $\sqrt{x} - 3 = 0 \rightarrow \sqrt{x} = 3 \rightarrow x = 9$

• $\sqrt{x} + 3 = 0$ no tiene solución.

Soluciones: $x_1 = 4$, $x_2 = 9$

11. Resuelve estas ecuaciones:

a) $3x^2 - 48 = 0$ **b)** $3x^2 + 48 = 0$ **c)** $5x^2 - 7x = 0$

d) $6x^2 - x - 1 = 0$ **e)** $10x^2 + 9x = 5{,}2$ **f)** $7x^2 - 3x + 4 = 0$

a) $3x^2 - 48 = 0 \rightarrow x^2 = \frac{48}{3} = 16 \rightarrow x = \pm 4$

Soluciones: $x_1 = 4$, $x_2 = -4$

b) $3x^2 + 48 = 0 \rightarrow x^2 = -16$, no tiene solución.

c) $5x^2 - 7x = 0 \rightarrow x(5x - 7) = 0 \begin{cases} 0 \\ 7/5 \end{cases}$

Soluciones: $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{7}{5}$

d) $6x^2 - x - 1 = 0 \rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{12} = \begin{cases} 1/2 \\ -1/3 \end{cases}$

Soluciones: $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = -\frac{1}{3}$

e) $10x^2 + 9x = 5{,}2 \rightarrow 10x^2 + 9x - 5{,}2 = 0$

$$x = \frac{-9 \pm \sqrt{81+208}}{20} = \begin{cases} 2/5 \\ -13/10 \end{cases}$$

Soluciones: $x_1 = \frac{2}{5}$, $x_2 = \frac{-13}{10}$

f) $7x^2 - 3x + 4 = 0 \rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{9-112}}{14}$, no tiene solución.

12. Resuelve.

a) $4^{x^2-2x-8}=\dfrac{1}{1024}$ **b)** $3^{2x-1}=\sqrt{27}$

c) $2^{x+1}+2^{x+3}=320$ **d)** $2{,}5^x=49$

a) $4^{x^2-2x-8}=\dfrac{1}{1024}$

$4^{x^2-2x-8}=4^{-5}$

$x^2-2x-8=-5$

$x^2-2x-3=0$

$x=\dfrac{2\pm\sqrt{4+12}}{2}=\dfrac{2\pm\sqrt{16}}{2}=\begin{cases}3\\-1\end{cases}$

Soluciones: $x_1=3,\ x_2=-1$

b) $3^{2x-1}=\sqrt{27}$

$3^{2x-1}=3^{3/2}$

$2x-1=\dfrac{3}{2}$

$x=\dfrac{5}{4}$

Solución: $x=\dfrac{5}{4}$

c) $2^{x+1}+2^{x+3}=320$

$2^x\cdot 2+2^x\cdot 2^3=320$

$2\cdot 2^x+8\cdot 2^x=320$

$10\cdot 2^x=320$

$2^x=\dfrac{320}{10}=32=2^5$

$x=5$

Solución: $x=5$

d) $2{,}5^x=49$

$log\ 2{,}5^x=log\ 49$

$x\cdot log\ 2{,}5=log\ 49$

$x=\dfrac{log\ 49}{log\ 2{,}5}\approx 4{,}25$

Solución: $x\approx 4{,}25$

13. Resuelve.

a) $\dfrac{x+7}{x+3}+\dfrac{x^2-3x+6}{x^2+2x-3}=1$ **b)** $\dfrac{x+1}{x^2-2x}+\dfrac{x-1}{x}=2$

a) Observamos que $x^2+2x-3=(x+3)(x-1)$.

$(x+7)(x-1)+(x^2-3x+6)=x^2+2x-3$

$x^2+6x-7+x^2-3x+6-x^2-2x+3=0$

$x^2+x+2=0$. Esta ecuación no tiene soluciones.

b) $x+1+(x-1)(x-2)-2(x^2-2x)=0$

$x+1+x^2-3x+2-2x^2+4x=0$

$x^2-2x-3=0 \rightarrow x=\dfrac{2\pm\sqrt{4+12}}{2}=\dfrac{2\pm 4}{2}=\begin{cases}3\\-1\end{cases}$

Comprobamos las soluciones sobre la ecuación inicial:

$\dfrac{4}{3}+\dfrac{2}{3}=\dfrac{6}{3}=2 \rightarrow x=3$ es válida.

$\dfrac{0}{3}+\dfrac{-2}{-1}=2 \rightarrow x=-1$ es válida.

Soluciones: $x_1=3,\ x_2=-1$

14. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $x^4 - 10x^3 + 5x^2 + 40x - 36 = 0$ **b)** $(x^4 - 13x^2 + 36)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{10}{9}\right) = 0$

a)
$$\begin{array}{r|rrrrr}
 & 1 & -10 & 5 & 40 & -36 \\
1 & & 1 & -9 & -4 & 36 \\
\hline
 & 1 & -9 & -4 & 36 & \boxed{0} \\
2 & & 2 & -14 & -36 & \\
\hline
 & 1 & -7 & -18 & \boxed{0} & \\
9 & & 9 & 18 & & \\
\hline
 & 1 & 2 & \boxed{0} & &
\end{array}$$

El polinomio factorizado es: $(x-1)(x-2)(x-9)(x+2)$

Soluciones: $x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ x_3 = 9,\ x_4 = -2$

b) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$

Hacemos $x^2 = t$:

$$t^2 - 13t + 36 = 0 \to t = \frac{13 \pm \sqrt{169 - 144}}{2} = \begin{cases} t = 9 \to x = \pm 3 \\ t = 4 \to x = \pm 2 \end{cases}$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{10}{9} = 0 \to \frac{9x + 9 - 10x^2}{9x^2} = 0 \to -10x^2 + 9x + 9 = 0 \to$$

$$\to x = \frac{-9 \pm \sqrt{81 + 360}}{-20} = \begin{cases} -3/5 \\ 3/2 \end{cases}$$

Soluciones: $x_1 = 3,\ x_2 = -3,\ x_3 = 2,\ x_4 = -2,\ x_5 = -\frac{3}{5},\ x_6 = \frac{3}{2}$

15. Resuelve.

a) $\sqrt{x+4} + 7 = 2x$ **b)** $\sqrt{13 - x^2} + x = 5$

c) $\sqrt{x-2} - \sqrt{12 - x} = 2$ **d)** $\sqrt{x-5} + \sqrt{x} = 5$

a) $\sqrt{x+4} + 7 = 2x \to \sqrt{x+4} = 2x - 7 \to x + 4 = 4x^2 - 28x + 49 \to 4x^2 - 29x + 45 = 0 \to$

$$\to x = \frac{29 \pm \sqrt{841 - 720}}{8} = \begin{cases} 5 \\ 9/4 \end{cases}$$

Comprobamos las soluciones sobre la ecuación inicial:

$\sqrt{5+4} + 7 = 10 \to x = 5$ es solución.

$\sqrt{\frac{9}{4} + 4} + 7 \neq \frac{18}{4} \to x = \frac{9}{4}$ no es solución.

Solución: $x = 5$

b) $\sqrt{13 - x^2} + x = 5 \to \sqrt{13 - x^2} = 5 - x \to 13 - x^2 = x^2 - 10x + 25 \to$

$$\to 2x^2 - 10x + 12 = 0 \to x = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 96}}{4} = \begin{cases} 3 \\ 2 \end{cases}$$

$\sqrt{13 - 9} + 3 = 5 \to x = 3$ es válida.

$\sqrt{13 - 4} + 2 = 5 \to x = 2$ es válida.

Soluciones: $x_1 = 3,\ x_2 = 2$

c) $\sqrt{x-2}-\sqrt{12-x}=2 \rightarrow \sqrt{x-2}=2+\sqrt{12-x} \rightarrow x-2=4+12-x+4\sqrt{12-x} \rightarrow$

$\rightarrow 2x-18=4\sqrt{12-x} \rightarrow x-9=2\sqrt{12-x} \rightarrow$

$\rightarrow x^2+81-18x=48-4x \rightarrow x^2-14x+33=0 \rightarrow$

$\rightarrow x=\dfrac{14\pm\sqrt{196-132}}{2}= \begin{cases} 11 \\ 3 \end{cases}$

$\sqrt{11-2}-\sqrt{12-11}=2 \rightarrow x=11$ es válida.

$\sqrt{3-2}-\sqrt{12-3}\neq 2 \rightarrow x=3$ no es válida.

Solución: $x=11$

d) $\sqrt{x-5}+\sqrt{x}=5 \rightarrow \sqrt{x-5}=5-\sqrt{x} \rightarrow x-5=25+x-10\sqrt{x} \rightarrow$

$\rightarrow x-5-25-x=-10\sqrt{x} \rightarrow -30=-10\sqrt{x} \rightarrow 3=\sqrt{x} \rightarrow 9=x$

Comprobamos la solución sobre la ecuación inicial:

$\sqrt{9-5}+\sqrt{9}=5 \rightarrow x=9$ es válida.

16. Resuelve.

a) $\boldsymbol{log_7(5x+6)=2}$

b) $\boldsymbol{log_3(2-3x)=0}$

c) $\boldsymbol{log\left(\sqrt{x}-3\right)=-1}$

d) $\boldsymbol{log_2(x^2-3x)=2}$

a) $log_7(5x+6)=2$

$7^2=5x+6$

$49=5x+6$

$49-6=5x$

$43=5x$

$x=\dfrac{43}{5}$

Solución: $x=\dfrac{43}{5}$

b) $log_3(2-3x)=0$

$3^0=2-3x$

$1=2-3x$

$3x=2-1$

$3x=1$

$x=\dfrac{1}{3}$

Solución: $x=\dfrac{1}{3}$

c) $log(\sqrt{x}-3)=-1$

$10^{-1}=\sqrt{x}-3$

$\dfrac{1}{10}+3=\sqrt{x}$

$\dfrac{31}{10}=\sqrt{x}$

$x=\left(\dfrac{31}{10}\right)^2=\dfrac{961}{100}$

Solución: $x=\dfrac{961}{100}$

d) $log_2(x^2-3x)=2$

$2^2=x^2-3x$

$x^2-3x-4=0$

$x=\dfrac{3\pm\sqrt{9+16}}{2}=\dfrac{3\pm\sqrt{25}}{2}= \begin{cases} 4 \\ -1 \end{cases}$

Soluciones: $x_1=4,\ x_2=-1$

2 Sistemas de ecuaciones lineales

Página 63

1. Resuelve utilizando el método de sustitución:

a) $\begin{cases} x+5y=7 \\ 3x-5y=11 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5x+y=8 \\ 3x-y=11 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x+10y=6 \\ x+2y=1 \end{cases}$

Resuélvelos de nuevo por el método de igualación.

a) $\left.\begin{array}{r} x+5y=7 \\ 3x-5y=11 \end{array}\right\}\begin{array}{l} x=7-5y \\ 3(7-5y)-5y=11 \to 21-20y=11 \to 20y=10 \to y=1/2 \end{array}$

$y=\dfrac{1}{2} \to x=7-\dfrac{5}{2}=\dfrac{9}{2}$

Solución: $x=\dfrac{9}{2},\ y=\dfrac{1}{2}$

b) $\left.\begin{array}{r} 5x+y=8 \\ 3x-y=11 \end{array}\right\}\begin{array}{l} y=8-5x \\ 3x-8+5x=11 \to 8x=19 \to x=19/8 \end{array}$

$x=\dfrac{19}{8} \to y=8-5\cdot\dfrac{19}{8}=-\dfrac{31}{8}$

Solución: $x=\dfrac{19}{8},\ y=-\dfrac{31}{8}$

c) $\left.\begin{array}{r} 3x+10y=6 \\ x+2y=1 \end{array}\right\}\begin{array}{l} 3(1-2y)+10y=6 \to 3+4y=6 \to y=3/4 \\ x=1-2y \end{array}$

$y=\dfrac{3}{4} \to x=1-\dfrac{6}{4}=-\dfrac{1}{2}$

Solución: $x=-\dfrac{1}{2},\ y=\dfrac{3}{4}$

2. Resuelve por el método de reducción:

a) $\begin{cases} x+5y=7 \\ 3x-5y=11 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x-5y=-26 \\ 4x+10y=32 \end{cases}$

a) $\begin{array}{rcl} x+5y &=& 7 \\ 3x-5y &=& 11 \\ \hline 4x &=& 18 \end{array} \to x=9/2$

$\dfrac{9}{2}+5y=7 \to y=\dfrac{5/2}{2}=\dfrac{1}{2}$

Solución: $x=\dfrac{9}{2},\ y=\dfrac{1}{2}$

b) $\left.\begin{array}{r} 3x-5y=-26 \\ 4x+10y=32 \end{array}\right\} \xrightarrow{1.^a\cdot 2} \begin{array}{rcl} 6x-10y &=& -52 \\ 4x+10y &=& 32 \\ \hline 10x &=& -20 \end{array} \to x=-2$

$3\cdot(-2)-5y=-26 \to -6-5y=-26 \to y=4$

Solución: $x=-2,\ y=4$

3. Resuelve aplicando el método de reducción:

$$\begin{cases} \mathbf{22x + 17y = 49} \\ \mathbf{31x - 26y = 119} \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{r} 22x + 17y = 49 \\ 31x - 26y = 119 \end{array}\right\} \begin{array}{c} \xrightarrow{1.^{a} \cdot 31} \\ \xrightarrow{2.^{a} \cdot (-22)} \end{array} \begin{array}{r} 682x + 527y = 1519 \\ -682x + 572y = -2\,618 \\ \hline 1\,099y = -1\,099 \end{array} \rightarrow y = -1$$

$$\left.\begin{array}{r} 22x + 17y = 49 \\ 31x - 26y = 119 \end{array}\right\} \begin{array}{c} \xrightarrow{1.^{a} \cdot 26} \\ \xrightarrow{2.^{a} \cdot 17} \end{array} \begin{array}{r} 572x + 442y = 1\,274 \\ 527x - 442y = 2\,023 \\ \hline 1\,099x \qquad\quad = 3\,297 \end{array} \rightarrow x = 3$$

Solución: $x = 3, \ y = -1$

3 Sistemas de ecuaciones no lineales

Página 64

1. **Resuelve estos sistemas:**

a) $\begin{cases} x - y = 15 \\ xy = 100 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 41 \\ x^2 - y^2 = 9 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 21 \\ x + y = 1 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{l} x - y = 15 \\ xy = 100 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = 15 + y \\ (15 + y)y = 100 \to y^2 + 15y - 100 = 0 \end{array}$

$$y = \frac{-15 \pm \sqrt{225 + 400}}{2} = \frac{-15 \pm 25}{2} = \begin{cases} 5 \\ -20 \end{cases}$$

Si $y = 5 \to x - 5 = 15 \to x = 20$

Si $y = -20 \to x + 20 = 15 \to x = -5$

Soluciones: $x_1 = 20,\ y_1 = 5;\ x_2 = -5,\ y_2 = -20$

b) $\left.\begin{array}{l} x^2 + y^2 = 41 \\ x^2 - y^2 = 9 \end{array}\right\}$

$2x^2 \quad = 50 \to x = \pm 5$

Si $x = 5 \to 25 + y^2 = 41 \to y = \pm 4$

Si $x = -5 \to 25 + y^2 = 41 \to y = \pm 4$

Soluciones: $x_1 = 5,\ y_1 = 4;\ x_2 = 5,\ y_2 = -4;\ x_3 = -5,\ y_3 = 4;\ x_4 = -5,\ y_4 = -4$

c) $\left.\begin{array}{l} x^2 + xy + y^2 = 21 \\ x + y = 1 \end{array}\right\} x = 1 - y$

$(1 - y)^2 + (1 - y)y + y^2 = 21 \to y^2 - 2y + 1 - y^2 + y + y^2 - 21 = 0$

$$y^2 - y - 20 = 0 \to y = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 80}}{2} = \frac{1 \pm 9}{2} = \begin{cases} 5 \\ -4 \end{cases}$$

Si $y = 5 \to x = -4$

Si $y = -4 \to x = 5$

Soluciones: $x_1 = -4,\ y_1 = 5;\ x_2 = 5,\ y_2 = -4$

Página 65

2. Resuelve:

a) $\begin{cases} 2x - y - 1 = 0 \\ x^2 - 7 = y + 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + y = 18 \\ xy = y + 6x + 4 \end{cases}$

c) $\begin{cases} y + 8 = x^2 \\ y - 2x = 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} \dfrac{2}{x} + \dfrac{3}{y} - \dfrac{6}{xy} = 1 \\ x + y = 5 \end{cases}$

e) $\begin{cases} \sqrt{x} - \sqrt{y - x} = 2 \\ 5x = 4y \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{l} 2x - y - 1 = 0 \\ x^2 - 7 = y + 2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} y = 2x - 1 \\ x^2 - 7 = 2x - 1 + 2 \;\rightarrow\; x^2 - 2x - 8 = 0 \end{array}$

$x = \dfrac{2 \pm \sqrt{4 + 32}}{2} = \dfrac{2 \pm 6}{2} = \begin{cases} 4 \\ -2 \end{cases}$

Si $x = 4 \rightarrow y = 7$

Si $x = -2 \rightarrow y = -5$

Soluciones: $x_1 = 4,\; y_1 = 7;\; x_2 = -2,\; y_2 = -5$

b) $\left.\begin{array}{l} x + y = 18 \\ xy = y + 6x + 4 \end{array}\right\} \; y = 18 - x$

$x(18 - x) = (18 - x) + 6x + 4 \rightarrow 18x - x^2 - 18 + x - 6x - 4 = 0$

$x^2 - 13x + 22 = 0 \rightarrow x = \dfrac{13 \pm \sqrt{169 - 88}}{2} = \dfrac{13 \pm 9}{2} = \begin{cases} 11 \\ 2 \end{cases}$

Si $x = 11 \rightarrow y = 7$

Si $x = 2 \rightarrow y = 16$

Soluciones: $x_1 = 11,\; y_1 = 7;\; x_2 = 2,\; y_2 = 16$

c) $\left.\begin{array}{l} y + 8 = x^2 \\ y - 2x = 0 \end{array}\right\} \; y = 2x$

$x^2 - 2x - 8 = 0 \rightarrow x = \dfrac{2 \pm \sqrt{4 + 32}}{2} = \dfrac{2 \pm 6}{2} = \begin{cases} 4 \\ -2 \end{cases}$

Si $x = 4 \rightarrow y = 8$

Si $x = -2 \rightarrow y = -4$

Soluciones: $x_1 = 4,\; y_1 = 8;\; x_2 = -2,\; y_2 = -4$

d) $\left.\begin{array}{l}\dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{y}-\dfrac{6}{xy}=1\\ x+y=5\end{array}\right\}$

Trabajamos sobre la primera ecuación para simplificarla:

$\dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{y}-\dfrac{6}{xy}=1 \to \dfrac{2y}{xy}+\dfrac{3x}{xy}-\dfrac{6}{xy}=\dfrac{xy}{xy} \to 2y+3x-6=xy$

Así, el sistema queda:

$\left.\begin{array}{l}2y+3x-6=xy\\ x+y=5\end{array}\right\}$

Despejamos x en la segunda ecuación, $x=5-y$, y sustituimos en la primera ecuación:

$2y+3(5-y)-6=(5-y)\cdot y \to 2y+15-3y-6=5y-y^2 \to y^2-6y+9=0 \to$

$\to y=\dfrac{6\pm\sqrt{36-36}}{2}=\dfrac{6}{2}=3 \to x=5-3=2$

Solución: $x=2,\ y=3$

e) $\left.\begin{array}{l}\sqrt{x}-\sqrt{y-x}=2\\ 5x=4y\end{array}\right\}\ y=\dfrac{5x}{4}$

$\sqrt{x}-\sqrt{\dfrac{5x}{4}-x}=2 \to \sqrt{x}-\sqrt{\dfrac{5x-4x}{4}}=2 \to \sqrt{x}-\sqrt{\dfrac{x}{4}}=2 \to \sqrt{x}-\dfrac{\sqrt{x}}{2}=2 \to$

$\to \dfrac{2\sqrt{x}-\sqrt{x}}{2}=2 \to \sqrt{x}=4 \to x=16 \to y=\dfrac{5\cdot 16}{4}=20$

Solución: $x=16,\ y=20$

4 Inecuaciones con una incógnita

Página 66

1. Di dos soluciones enteras de cada una de las siguientes inecuaciones:

a) $3x < 50$ **b)** $2x + 5 \geq 25$

c) $7x + 4 < 19$ **d)** $x^2 + x < 50$

Por ejemplo:

a) $x = 2$, $x = 10$ b) $x = 10$, $x = 20$

c) $x = 0$, $x = 2$ d) $x = 0$, $x = 5$

2. ¿Cuáles de los siguientes valores son soluciones de la inecuación $x^2 - 8x < 12$?

a) -5 **b)** 0 **c)** $1{,}1$ **d)** 2

e) $\frac{5}{2}$ **f)** $3{,}2$ **g)** $5{,}3$ **h)** 10

a) $(-5)^2 - 8 \cdot (-5) = 25 + 40 = 65 > 12 \rightarrow x = -5$ no es solución.

b) $0 - 0 < 12 \rightarrow x = 0$ sí es solución.

c) $1{,}1^2 - 8 \cdot 1{,}1 = 1{,}21 - 8{,}8 = -7{,}59 < 12 \rightarrow x = 1{,}1$ sí es solución.

d) $2^2 - 2 \cdot 8 = 4 - 16 = -12 < 12 \rightarrow x = 2$ sí es solución.

e) $\left(\frac{5}{2}\right)^2 - 8 \cdot \frac{5}{2} = \frac{25}{4} - 20 = -\frac{55}{4} < 12 \rightarrow x = \frac{5}{2}$ sí es solución.

f) $3{,}2^2 - 8 \cdot 3{,}2 = 10{,}24 - 25{,}6 = -15{,}36 < 12 \rightarrow x = 3{,}2$ sí es solución.

g) $5{,}3^2 - 8 \cdot 5{,}3 = 28{,}09 - 42{,}4 = -14{,}31 < 12 \rightarrow x = 5{,}3$ sí es solución.

h) $10^2 - 8 \cdot 10 = 20 > 12 \rightarrow x = 10$ no es solución.

3. Traduce al lenguaje algebraico:

a) El triple de un número más ocho unidades es menor que 20.

b) El número total de alumnos de mi clase es menor que 35.

c) Si mi dinero aumentara al triple y, además, me tocaran 20 €, tendría, por lo menos, 110 €.

d) Todavía me quedan por pagar 20 mensualidades para acabar con la hipoteca. Es decir, al menos 6 000 €.

a) $3x + 8 < 20$

b) $1 \leq x < 35$

c) $3x + 20 \geq 110$

d) $20x \geq 6\,000$

Página 67

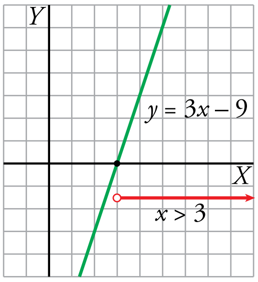
4. Resuelve gráficamente las siguientes inecuaciones:

a) $3x > 9$ **b)** $3x \geq 9$

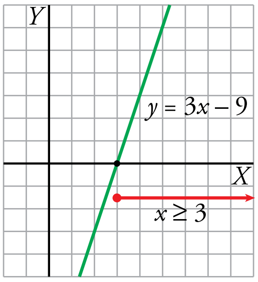
c) $3x + 2 < 11$ **d)** $3x + 2 \geq 11$

e) $2x - 3 < 5$ **f)** $2x - 3 \leq 5$

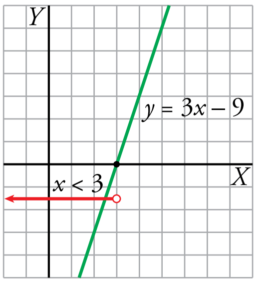
a) $3x > 9 \rightarrow 3x - 9 > 0$



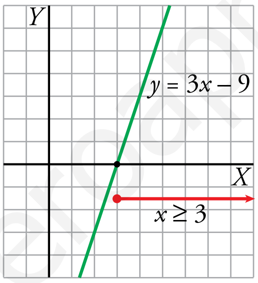
b) $3x \geq 9 \rightarrow 3x - 9 \geq 0$



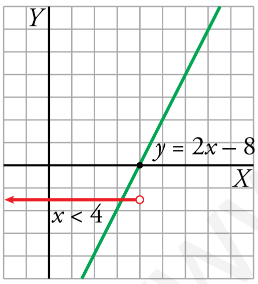
c) $3x + 2 < 11 \rightarrow 3x - 9 < 0$



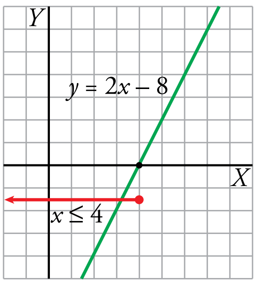
d) $3x + 2 \geq 11 \rightarrow 3x - 9 \geq 0$



e) $2x - 3 < 5 \rightarrow 2x - 8 < 0$



f) $2x - 3 \leq 5 \rightarrow 2x - 8 \leq 0$



5. Observa el siguiente diálogo:

— ¿Cuántas veces has ido al fútbol?

— El triple de ellas más 2 no llega a 10.

Expresa en lenguaje algebraico la respuesta, resuélvela y, después, da las soluciones teniendo en cuenta que han de ser números enteros no negativos.

$$3x + 2 < 10 \rightarrow 3x < 8 \rightarrow x < \frac{8}{3} = 2,\widehat{6}$$

La respuesta es: 2 veces o 1 vez o ninguna vez.

6. **Resuelve gráficamente las siguientes inecuaciones teniendo en cuenta la representación de la función $y = x^2 - 5x + 4$:**

a) $x + 4 \le x^2 - 5x + 4$

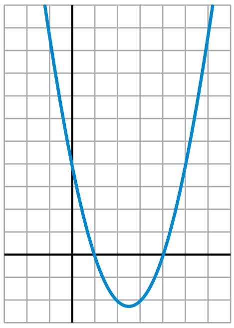
b) $-x + 4 < x^2 - 5x + 4$

c) $x^2 - 5x + 4 < x - 1$

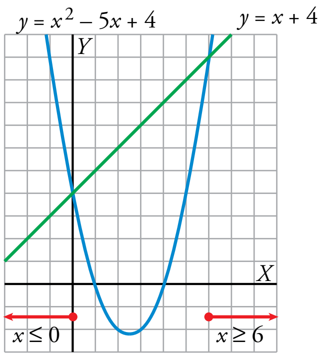
d) $x^2 - 5x + 4 \ge x + 1$

e) $x^2 - 5x + 4 < -6 + 2x$

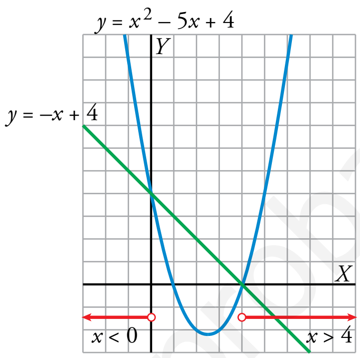
f) $x^2 - 5x + 4 \le -2$



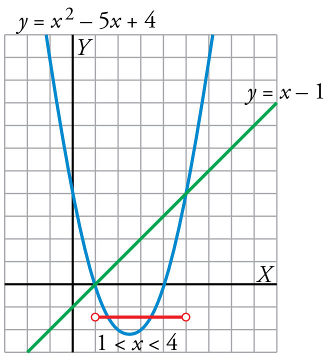
a)



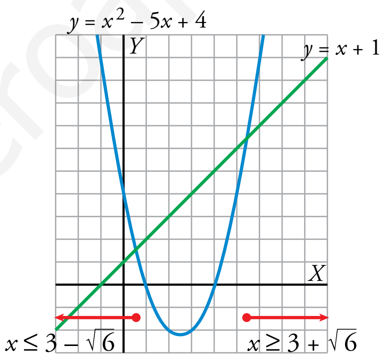
b)



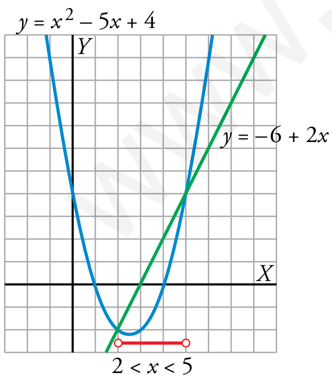
c)



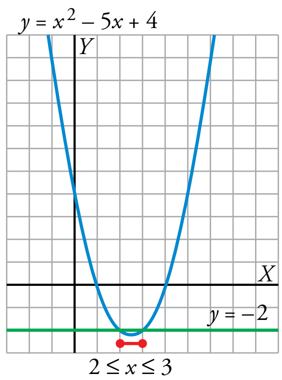
d)



e)



f)



Página 68

7. Resuelve algebraicamente las siguientes inecuaciones. Observa que son *muy parecidas* a las que se han resuelto arriba:

a) $2x + 4 \geq 0$ **b)** $2x + 4 < 0$ **c)** $-2x + 7 > \frac{x}{2} - 3$

d) $-2x + 7 \geq \frac{x}{2} - 3$ **e)** $-x^2 + 4x \geq 2x - 3$ **f)** $-x^2 + 4x < 2x - 3$

a) $2x + 4 \geq 0 \rightarrow 2x \geq -4 \rightarrow x \geq -2$. Intervalo $[-2, +\infty)$.

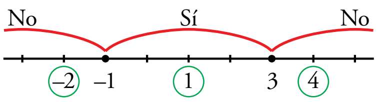
b) $2x + 4 < 0 \rightarrow 2x < -4 \rightarrow x < -2$. Intervalo $(-\infty, -2)$.

c) $-2x + 7 > \frac{x}{2} - 3 \rightarrow -4x + 14 > x - 6 \rightarrow 5x < 20 \rightarrow x < 4$. Intervalo $(-\infty, 4)$.

d) $-2x + 7 \geq \frac{x}{2} - 3 \rightarrow -4x + 14 \geq x - 6 \rightarrow 5x \leq 20 \rightarrow x \leq 4$. Intervalo $(-\infty, 4]$.

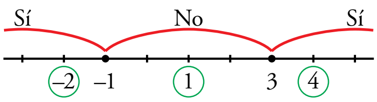
e) $-x^2 + 4x \geq 2x - 3 \rightarrow -x^2 + 2x + 3 \geq 0 \rightarrow x^2 - 2x - 3 \leq 0$

Las raíces de $x^2 - 2x - 3 = 0$ son $x = 3$ y $x = -1$.



Solución: $-1 \leq x \leq 3$. Intervalo [1, 3].

f) $-x^2 + 4x < 2x - 3 \rightarrow x^2 - 2x - 3 > 0$ (Raíces: 3 y -1)



Solución: $x < -1$ y $x > 3$. Intervalo $(-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$.

8. Resuelve algebraicamente.

a) $3x - 5 \geq 13$ **b)** $5x + 1 < x + 9$ **c)** $3 - 2x > x + 5$

d) $7 - 11x + 2 \leq 23 + 4x$ **e)** $x^2 - 3x + 2 \leq 4x - 8$

a) $3x - 5 \geq 13 \rightarrow 3x \geq 18 \rightarrow x \geq 6$. Intervalo $[6, +\infty)$.

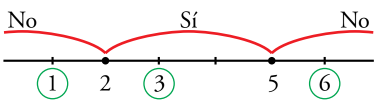
b) $5x + 1 < x + 9 \rightarrow 4x < 8 \rightarrow x < 2$. Intervalo $(-\infty, 2)$.

c) $3 - 2x > x + 5 \rightarrow 3x < -2 \rightarrow x < -\frac{2}{3}$. Intervalo $\left(-\infty, -\frac{2}{3}\right)$.

d) $7 - 11x + 2 \leq 23 + 4x \rightarrow 15x \geq -14 \rightarrow x \geq -\frac{14}{15}$. Intervalo $\left[-\frac{14}{15}, +\infty\right)$.

e) $x^2 - 3x + 2 \leq 4x - 8 \rightarrow x^2 - 7x + 10 \leq 0$

Las raíces de $x^2 - 7x + 10 = 0$ son $x = 5$ y $x = 2$.



Solución: $2 \leq x \leq 5$. Intervalo [2, 5].

9. Resuelve las inecuaciones a), c) y d) del ejercicio 3 de la página 66 e interpreta la solución.

a) $3x + 8 < 20 \rightarrow 3x < 12 \rightarrow x < 4$. Intervalo $(-\infty, 4)$.

Cumplen esta condición todos los números que sean menores que 4.

b) Al tratarse de alumnos de una clase, x no puede ser negativo ni cero (alumnos de "mi" clase). Por tanto, $1 \le x < 35$. Intervalo $[1, 35)$.

El número de alumnos va desde 1 hasta 34.

c) $3x + 20 \ge 100 \rightarrow 3x \ge 90 \rightarrow x \ge 30$

Tiene, al menos, 30 euros.

d) $20x \ge 6\,000 \rightarrow x \ge 300$

Cada mensualidad de la hipoteca asciende, al menos, a 300 euros.

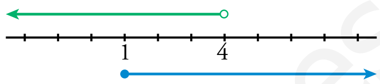
Página 69

10. Resuelve los siguientes sistemas de inecuaciones:

a) $\begin{cases} x+3<7 \\ x-1\ge 0 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 2x-3<3x+5 \\ 7x+1\le 13+4x \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} 2x-3<3x+5 \\ 7x+1\ge 13+4x \end{cases}$

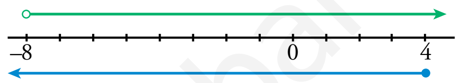
d) $\begin{cases} x^2-7x+6\le 0 \\ 3x+2>17 \end{cases}$ **e)** $\begin{cases} x^2-7x+6\le 0 \\ 2x+5<7 \end{cases}$ **f)** $\begin{cases} x^2-7x+6\le 0 \\ 2x+5\le 7 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{l} x+3<7 \\ x-1\ge 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x<4 \\ x\ge 1 \end{array}$



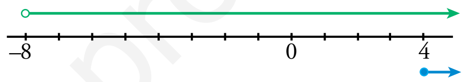
Solución: $1 \le x < 4$. Intervalo $[1, 4)$.

b) $\left.\begin{array}{l} 2x-3<3x+5 \\ 7x+1\le 13+4x \end{array}\right\} \begin{array}{l} x>-8 \\ x\le 4 \end{array}$



Solución: $-8 < x \le 4$. Intervalo $(-8, 4]$.

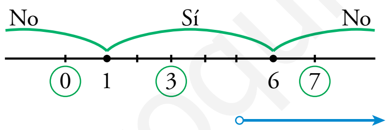
c) $\left.\begin{array}{l} 2x-3<3x+5 \\ 7x+1\ge 13+4x \end{array}\right\} \begin{array}{l} x>-8 \\ x\ge 4 \end{array}$



Solución: $x \ge 4$. Intervalo $[4, +\infty)$.

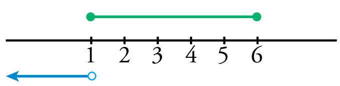
d) $\left.\begin{array}{l} x^2-7x+6\le 0 \\ 3x+2>17 \end{array}\right\} \; 3x>15 \;\to\; x>5$

Las raíces de $x^2-7x+6=0$ son $x=6$ y $x=1$.



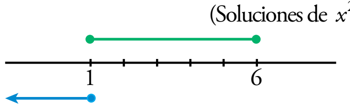
Soluciones del sistema: $5 < x \le 6$. Intervalo $(5, 6]$.

e) $\left.\begin{array}{l} x^2-7x+6\le 0 \\ 2x+5<7 \end{array}\right\} \; 2x<2 \;\to\; x<1$



No hay soluciones para este sistema.

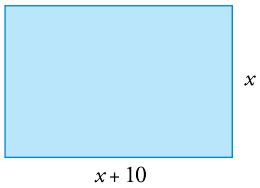
f) $\left.\begin{array}{l} x^2-7x+6\le 0 \\ 2x+5\le 7 \end{array}\right\} \; x\le 1$



Solución del sistema: $x = 1$.

Página 70

Hazlo tú. La base de un rectángulo mide 10 cm más que su altura. Si la base aumenta un 20 % y la altura un 30 %, el perímetro aumenta un 24 %. Halla las dimensiones del rectángulo.



base nueva = $1{,}2(x + 10)$

altura nueva = $1{,}3x$

perímetro nuevo = $2 \cdot [1{,}2(x + 10) + 1{,}3x]$

Como el perímetro nuevo es un 24 % mayor que el inicial:

$2 \cdot [1{,}2(x + 10) + 1{,}3x] = 1{,}24 \cdot 2(x + 10 + x)$

$5x + 24 = 4{,}96x + 24{,}8 \;\rightarrow\; 0{,}04x = 0{,}8 \;\rightarrow\; x = 20$

Solución: base = 30 cm, altura = 20 cm

Hazlo tú. En otro viaje de 450 km, la velocidad de ida fue inferior en 15 km/h a la de vuelta y tardó una hora más. Halla las velocidades y los tiempos empleados.

A la ida la velocidad es v y el tiempo t.

A la vuelta la velocidad es $v - 15$ y el tiempo $t + 1$.

Planteamos el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} v \cdot t = 450 \\ (v - 15)(t + 1) = 450 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} v \cdot t = 450 \\ vt + v - 15t - 15 = 450 \end{array}\right\} \; 450 + v - 15t - 15 = 450 \;\rightarrow$$

$$\rightarrow\; v - 15t = 15 \;\rightarrow\; v = 15 + 15t \;\rightarrow\; (15 + 15t)t = 450 \;\rightarrow$$

$$\rightarrow\; 15t + 15t^2 = 450 \;\rightarrow\; 15t^2 + 15t - 450 = 0 \;\rightarrow\; t^2 + t - 30 = 0 \;\rightarrow$$

$$\rightarrow\; t = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 120}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{121}}{2} = \begin{cases} 5 \\ -6 \;\; \text{No vale.} \end{cases}$$

Si $t = 5 \;\rightarrow\; v = 15 + 15 \cdot 5 = 15 + 75 = 90$

Solución: A la ida va a 90 km/h y tarda 5 horas.

A la vuelta va a 75 km/h y tarda 6 horas.

Hazlo tú. Resuelve.

$$\mathbf{2^{3 + 2x} - 3 \cdot 2^{x + 1} + 1 = 0}$$

$2^3 \cdot 2^{2x} - 3 \cdot 2^x \cdot 2 + 1 = 0 \;\rightarrow\; 8 \cdot (2^x)^2 - 6 \cdot 2^x + 1 = 0$

Sea $z = 2^x$:

$$8z^2 - 6z + 1 = 0 \;\rightarrow\; z = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 32}}{16} = \frac{6 \pm \sqrt{4}}{16} = \begin{cases} 1/2 \\ 1/4 \end{cases}$$

Si $z = \dfrac{1}{2} = 2^x \;\rightarrow\; x = -1$

Si $z = \dfrac{1}{4} = 2^x \;\rightarrow\; x = -2$

Soluciones: $x_1 = -1, \; x_2 = -2$

Ejercicios y problemas

Página 71

Practica

Ecuaciones

1. **Resuelve las siguientes ecuaciones. Las que sean de 2.º grado incompletas, resuélvelas sin aplicar la fórmula general.**

a) $\dfrac{(x-1)(x+2)}{12} - \dfrac{x-3}{3} = 1 + \dfrac{(x+1)(x-2)}{6}$

b) $(x+1)^2 - (x-2)^2 = (x+3)^2 + x^2 - 20$

c) $\dfrac{x(x-2)}{4} - \dfrac{x+1}{6} = \dfrac{x-3}{2} - \dfrac{x-4}{3}$

d) $x\left(x + \dfrac{1}{2}\right) - \dfrac{x-2}{2} + \dfrac{x^2-1}{3} = 0$

a) $(x-1)(x+2) - 4(x-3) = 12 + 2(x+1)(x-2)$

$x^2 + x - 2 - 4x + 12 = 12 + 2x^2 - 2x - 4$

$x^2 + x - 2 = 0 \rightarrow x = \dfrac{-1 \pm 3}{2} = \begin{cases} 1 \\ -2 \end{cases}$

Soluciones: $x_1 = 1,\ x_2 = -2$

b) $x^2 + 2x + 1 - x^2 + 4x - 4 = x^2 + 6x + 9 + x^2 - 20$

$2x^2 - 8 = 0 \rightarrow x^2 = 4 \rightarrow x = 2;\ x = -2$

Soluciones: $x_1 = 2,\ x_2 = -2$

c) $3x(x-2) - 2(x+1) = 6(x-3) - 4(x-4)$

$3x^2 - 6x - 2x - 2 = 6x - 18 - 4x + 16$

$3x^2 - 10x = 0 \rightarrow x(3x-10) = 0 \rightarrow x = 0;\ x = \dfrac{10}{3}$

Soluciones: $x_1 = 0,\ x_2 = \dfrac{10}{3}$

d) $x\left(\dfrac{2x+1}{2}\right) - \dfrac{x-2}{2} + \dfrac{x^2-1}{3} = 0$

$3x(2x+1) - 3(x-2) + 2(x^2-1) = 0$

$6x^2 + 3x - 3x + 6 + 2x^2 - 2 = 0 \rightarrow 8x^2 + 4 = 0 \rightarrow$ No tiene solución.

2. **Resuelve las siguientes ecuaciones:**

a) $\dfrac{(x-3)^2}{4} - \dfrac{(2x-1)^2}{16} = \dfrac{35}{16}$

b) $\dfrac{(x+1)^2}{16} - \dfrac{1+x}{2} = \dfrac{(x-1)^2}{16} - \dfrac{2+x}{4}$

c) $(x+1)^2 = \dfrac{x}{2}(5x+6) - (2x^2+1)$

d) $2\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{25x}{2} = \left(\dfrac{1}{2}-x\right)(7x+1) - 4$

a) $4(x^2-6x+9) - (4x^2-4x+1) = 35$

$4x^2 - 24x + 36 - 4x^2 + 4x - 1 = 35 \rightarrow -20x = 0$

Solución: $x = 0$

b) $x^2 + 2x + 1 - 8(1+x) = x^2 - 2x + 1 - 4(2+x)$

$x^2 + 2x + 1 - 8 - 8x = x^2 - 2x + 1 - 8 - 4x$

$-6x - 7 = -6x - 7 \rightarrow 0x = 0 \rightarrow$ Tiene infinitas soluciones.

c) $2(x^2 + 2x + 1) = 5x^2 + 6x - 2(2x^2 + 1)$

$2x^2 + 4x + 2 = 5x^2 + 6x - 4x^2 - 2$

$x^2 - 2x + 4 = 0 \rightarrow x = \dfrac{2 \pm \sqrt{-12}}{2} \rightarrow$ No tiene solución.

d) $4x^2 + 4x + 1 + 25x = 5x + 1 - 14x^2 - 8$

$18x^2 + 24x + 8 = 0 \rightarrow 9x^2 + 12x + 4 = 0 \rightarrow x = \dfrac{-12 \pm 0}{18} = -\dfrac{2}{3}$

Solución: $x = -\dfrac{2}{3}$

3. **Resuelve.**

a) $x^4 - 4x^2 + 3 = 0$

b) $x^4 - 16 = 0$

c) $x^4 - 25x^2 = 0$

d) $x^4 - 18x^2 + 81 = 0$

e) $(2x^2+1)^2 - 5 = (x^2+2)(x^2-2)$

a) Cambio de variable: $x^2 = y$

$y^2 - 4y + 3 = 0 \rightarrow y = \dfrac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = \dfrac{4 \pm 2}{2} = \begin{cases} y = 3 \rightarrow x = \pm\sqrt{3} \\ y = 1 \rightarrow x = \pm 1 \end{cases}$

Soluciones: $x_1 = \sqrt{3},\ x_2 = -\sqrt{3},\ x_3 = 1,\ x_4 = -1$

b) $x^4 = 16 \rightarrow x = \pm\sqrt[4]{16}$

Soluciones: $x_1 = 2,\ x_2 = -2$

c) $x^2(x^2 - 25) = 0$

Soluciones: $x_1 = 0,\ x_2 = 5,\ x_3 = -5$

d) Cambio de variable: $x^2 = y$

$y^2 - 18y + 81 = 0 \rightarrow y = \dfrac{18 \pm \sqrt{0}}{2} = 9 \rightarrow x^2 = 9$

Soluciones: $x_1 = 3,\ x_2 = -3$

e) $4x^4 + 4x^2 + 1 - 5 = x^4 - 4$

$3x^4 + 4x^2 = 0 \rightarrow x^2(3x^2+4) = 0 \rightarrow x^2 = 0 \rightarrow x = 0$

$3x^2 + 4 = 0$ no tiene solución.

La solución de la ecuación es $x = 0$.

4. **Resuelve.**

a) $\dfrac{x+2}{x}+3x=\dfrac{5x+6}{2}$ b) $\dfrac{x-4}{x}-\dfrac{x-1}{4x}=-3x$

c) $\dfrac{x-3}{x}+\dfrac{x+3}{x^2}=\dfrac{2}{3}$ d) $x-\dfrac{x-1}{x+1}=\dfrac{3x-1}{2}$

a) $2(x+2)+2x \cdot 3x = x(5x+6)$

$2x+4+6x^2=5x^2+6x \;\rightarrow\; x^2-4x+4=0 \;\rightarrow\; (x-2)^2=0 \;\rightarrow\; x=2$

Comprobamos sobre la ecuación inicial la validez de la solución.

Solución: $x=2$

b) $4(x-4)-(x-1)=-3x \cdot 4x$

$4x-16-x+1=-12x^2 \;\rightarrow\; 12x^2+3x-15=0 \;\rightarrow\; 4x^2+x-5=0$

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{81}}{8}=\frac{-1\pm 9}{8}=\begin{cases}1\\ -10/8=-5/4\end{cases}$$

Se comprueba sobre la ecuación inicial que las dos soluciones son válidas.

Soluciones: $x_1=1,\; x_2=-\dfrac{5}{4}$

c) $3x(x-3)+3(x+3)=2x^2$

$3x^2-9x+3x+9-2x^2=0 \;\rightarrow\; x^2-6x+9=0 \;\rightarrow\; (x-3)^2=0 \;\rightarrow\; x=3$

Se comprueba que la solución es válida.

Solución: $x=3$

d) $2x(x+1)-2(x-1)=(3x-1)(x+1)$

$2x^2+2x-2x+2=3x^2+2x-1 \;\rightarrow\; x^2+2x-3=0$

$$x=\frac{-2\pm\sqrt{16}}{2}=\frac{-2\pm 4}{2}=\begin{cases}1\\ -3\end{cases}$$

Se comprueba que las dos soluciones son válidas.

Soluciones: $x_1=1,\; x_2=-3$

5. **Resuelve las siguientes ecuaciones:**

a) $\dfrac{x+1}{x-1}-3=\dfrac{2-x}{x}$ b) $\dfrac{3x+1}{4x+3}-\dfrac{1}{x}=3$

c) $\dfrac{3x+4}{x+3}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{x+19}{4x+6}$ d) $\dfrac{1}{x+3}-\dfrac{2}{x}=\dfrac{2-5x}{x^2+3x}$

a) $(x+1)x-3x(x-1)=(2-x)(x-1)$

$x^2+x-3x^2+3x=-x^2+3x-2 \;\rightarrow\; x^2-x-2=0$

$$x=\frac{1\pm 3}{2}=\begin{cases}2\\ -1\end{cases}$$

Se comprueba la validez de las dos soluciones.

Soluciones: $x_1=2,\; x_2=-1$

b) $x(3x + 1) - (4x + 3) = 3x(4x + 3)$

$3x^2 + x - 4x - 3 = 12x^2 + 9x \to 9x^2 + 12x + 3 = 0 \to 3x^2 + 4x + 1 = 0$

$x = \dfrac{-4 \pm \sqrt{16-12}}{6} = \dfrac{-4 \pm 12}{6} = \begin{cases} -1 \\ -1/3 \end{cases}$

Las dos soluciones son válidas.

Soluciones: $x_1 = -1,\ x_2 = -\dfrac{1}{3}$

c) $2(3x + 4) - (x + 3) = x + 19$

$6x + 8 - 3 = x + 19 \to 4x = 14 \to x = \dfrac{14}{4} = \dfrac{7}{2}$

Solución: $x = \dfrac{7}{2}$

d) $x - 2(x + 3) = 2 - 5x$

$x - 2x - 6 = 2 - 5x \to 4x = 8 \to x = 2$

Solución: $x = 2$

6. **Resuelve.**

a) $x + \sqrt{25 - x^2} = 2x + 1$

b) $3x + \sqrt{6x + 10} = 35$

c) $x + 1 - \sqrt{5x + 1} = 0$

d) $\sqrt{4x^2 + 7x - 2} = x + 2$

a) $\sqrt{25 - x^2} = x + 1 \to 25 - x^2 = x^2 + 2x + 1 \to 2x^2 + 2x - 24 = 0$

$x^2 + x - 12 = 0 \to x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1+48}}{2} = \dfrac{-1 \pm 7}{2} = \begin{cases} 3 \\ -4 \end{cases}$

Comprobación:

$x = 3 \to \sqrt{25-9} = 3 + 1 \to x = 3$ es solución.

$x = -4 \to \sqrt{25-16} \neq -4 + 1 \to x = -4$ no vale.

Solución: $x = 3$

b) $\sqrt{6x+10} = 35 - 3x \to 6x + 10 = 1\,225 + 9x^2 - 210x$

$9x^2 - 216x + 1\,215 = 0 \to x^2 - 24x + 135 = 0 \to x = \dfrac{24 \pm \sqrt{36}}{2} = \dfrac{24 \pm 6}{2} = \begin{cases} 15 \\ 9 \end{cases}$

Comprobación:

$x = 15 \to \sqrt{6 \cdot 15 + 10} \neq 35 - 45 \to x = 15$ no vale.

$x = 9 \to \sqrt{54 + 10} = 37 - 27 \to x = 9$ es solución.

Solución: $x = 9$

c) $\sqrt{5x+1} = x + 1 \to 5x + 1 = x^2 + 2x + 1 \to x^2 - 3x = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = 3 \end{cases}$

Comprobación:

$x = 0 \to \sqrt{1} = 1 \to x = 0$ es solución.

$x = 3 \to \sqrt{15+1} = 3 + 1 \to x = 3$ es solución.

Soluciones: $x_1 = 0,\ x_2 = 3$

d) $\left(\sqrt{4x^2+7x-2}\right)^2 = x^2+4x+4 \rightarrow 4x^2+7x-2-x^2-4x-4=0$

$3x^2+3x-6=0 \rightarrow x^2+x-2=0 \rightarrow x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1+18}}{2} = \begin{cases} 1 \\ -2 \end{cases}$

Comprobación:

$x = 1 \rightarrow \sqrt{4+7-2} = 1+2 \rightarrow x = 1$ es solución.

$x = -2 \rightarrow \sqrt{16-14-2} = -2+2 \rightarrow x = -2$ es solución.

Soluciones: $x_1 = 1,\ x_2 = -2$

7. **Dos de las siguientes ecuaciones no tienen solución. Averigua cuáles son y resuelve las otras.**

a) $x-17 = \sqrt{169-x^2}$

b) $\sqrt{x^2+3}-\sqrt{3-x}=0$

c) $\sqrt{5x-7}-\sqrt{1-x}=0$

d) $2\sqrt{5-4x}+4x=5$

a) $x^2-34x+289 = 169-x^2$

$2x^2-34x+120=0 \rightarrow x^2-17x+60=0 \rightarrow x = \dfrac{17 \pm \sqrt{49}}{2} = \dfrac{17 \pm 7}{2} = \begin{cases} 12 \\ 5 \end{cases}$

Comprobación:

$x = 12 \rightarrow 12-17 = \sqrt{169-289} \rightarrow$ No vale.

$x = 5 \rightarrow 5-17 = \sqrt{169-25} \rightarrow$ No vale.

No tiene solución.

b) $\sqrt{x^2+3} = \sqrt{3-x} \rightarrow x^2+3 = 3-x \rightarrow x^2+x=0 \begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \end{cases}$

Comprobación:

$x = 0 \rightarrow \sqrt{3} = \sqrt{3} \rightarrow$ Es solución.

$x = -1 \rightarrow \sqrt{4} = \sqrt{4} \rightarrow$ Es solución.

Soluciones: $x_1 = 0,\ x_2 = -1$

c) $\sqrt{5x-7} = \sqrt{1-x} \rightarrow 5x-7 = 1-x \rightarrow 6x = 8 \rightarrow x = \dfrac{8}{6} = \dfrac{4}{3}$

Comprobación:

$\sqrt{5 \cdot \dfrac{4}{3} - 7} \neq \sqrt{1-\dfrac{4}{3}} \rightarrow$ No vale.

La ecuación no tiene solución.

d) $4(5-4x) = (5-4x)^2 \rightarrow 20-16x = 25+16x^2-40x$

$16x^2-24x+5=0 \rightarrow x = \dfrac{24 \pm \sqrt{256}}{32} = \dfrac{24 \pm 16}{32} = \begin{cases} 5/4 \\ 1/4 \end{cases}$

Comprobación:

$x = \dfrac{5}{4} \rightarrow 2\sqrt{5-\dfrac{5}{4}\cdot 4} + 4\cdot\dfrac{5}{4} = 5 \rightarrow x = \dfrac{5}{4}$ es solución.

$x = \dfrac{1}{4} \rightarrow 2\sqrt{5-\dfrac{1}{4}\cdot 4} + 4\cdot\dfrac{1}{4} = 5 \rightarrow x = \dfrac{1}{4}$ es solución.

Soluciones: $x_1 = \dfrac{5}{4},\ x_2 = \dfrac{1}{4}$

8. **Resuelve.**

a) $x + \sqrt{7 - 3x} = -1$

b) $\sqrt{x} + \sqrt{3x - 2} = 2$

c) $\sqrt{2x} + \sqrt{5x - 6} = 4$

d) $\sqrt{5x + 1} - \sqrt{x + 1} = 2$

a) $\sqrt{7 - 3x} = -1 - x \rightarrow 7 - 3x = 1 + x^2 + 2x \rightarrow x^2 + 5x - 6 = 0$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{49}}{2} = \frac{-5 \pm 7}{2} = \begin{cases} -6 \\ 1 \end{cases}$$

Comprobación:

$x = -6 \rightarrow -6 + \sqrt{7 + 18} = -1$

$x = 1 \rightarrow 1 + \sqrt{7 - 3} = 3 \neq 1 \rightarrow$ No vale.

Solución: $x = -6$

b) $\sqrt{3x - 2} = 2 - \sqrt{x} \rightarrow 3x - 2 = 4 + x - 4\sqrt{x} \rightarrow (4\sqrt{x})^2 = (6 - 2x)^2 \rightarrow$

$\rightarrow 16x = 36 + 4x^2 - 24x \rightarrow 4x^2 - 40x + 36 = 0 \rightarrow x^2 - 10x + 9 = 0 \rightarrow$

$$\rightarrow x = \frac{10 \pm 8}{2} = \begin{cases} 9 \\ 1 \end{cases}$$

Comprobación:

$x = 9 \rightarrow \sqrt{25} + \sqrt{9} \neq 2 \rightarrow$ No vale.

$x = 1 \rightarrow \sqrt{1} + \sqrt{1} = 2$

Solución: $x = 1$

c) $\sqrt{5x - 6} = 4 - 2\sqrt{x} \rightarrow 5x - 6 = 16 + 2x - 8\sqrt{2x} \rightarrow (8\sqrt{2x})^2 = (22 - 3x)^2 \rightarrow$

$\rightarrow 128x = 484 + 9x^2 - 132x \rightarrow 9x^2 - 260x + 484 = 0$

$$x = \frac{260 \pm 224}{18} = \begin{cases} 242/9 \\ 2 \end{cases}$$

Comprobación:

$x = \frac{242}{9} \rightarrow \sqrt{\frac{1156}{9}} + \sqrt{\frac{484}{9}} = \frac{34}{3} + \frac{22}{3} = \frac{56}{3} \neq 4 \rightarrow$ No vale.

$x = 2 \rightarrow \sqrt{4} + \sqrt{4} = 4$

Solución: $x = 2$

d) $\sqrt{5x + 1} = 2 + \sqrt{x + 1} \rightarrow 5x + 1 = 4 + x + 1 + 4\sqrt{x + 1} \rightarrow 4x - 4 = 4\sqrt{x + 1} \rightarrow$

$$\rightarrow \sqrt{x + 1} = x - 1 \rightarrow x + 1 = x^2 - 2x + 1 \rightarrow x^2 - 3x = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = 3 \end{cases}$$

Comprobación:

$x = 0 \rightarrow \sqrt{1} - \sqrt{1} = 0 \neq 2 \rightarrow$ No vale.

$x = 3 \rightarrow \sqrt{16} - \sqrt{4} = 2$

Solución: $x = 3$

9. **Resuelve las siguientes ecuaciones exponenciales:**

a) $2^{x+1} = \sqrt{8}$ **b)** $\sqrt{3^x} = 17$ **c)** $10^{1-x^2} = 0{,}001$ **d)** $81\left(\frac{1}{3}\right)^x = 3^{x+2}$

a) $2^{x+1} = \sqrt{8} \rightarrow 2^{x+1} = 2^{3/2} \rightarrow x + 1 = \frac{3}{2} \rightarrow x = \frac{1}{2}$

Solución: $x = \frac{1}{2}$

b) $\sqrt{3^x} = 17 \rightarrow 3^{x/2} = 17 \rightarrow log\, 3^{x/2} = log\, 17 \rightarrow \frac{x}{2} \cdot log\, 3 = log\, 17 \rightarrow$

$\rightarrow x = \frac{log\, 17}{log\, 3} \cdot 2 \rightarrow x \approx 5{,}16$

Solución: $x \approx 5{,}16$

c) $10^{1-x^2} = 0{,}001 \rightarrow 10^{1-x^2} = 10^{-3} \rightarrow 1 - x^2 = -3 \rightarrow x = \sqrt{4} \rightarrow x = \pm 2$

Soluciones: $x_1 = 2,\ x_2 = -2$

d) $81 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x = 3^{x+2} \rightarrow 81 \cdot (3^{-1})^x = 3^x \cdot 3^2 \rightarrow 81 \cdot (3^x)^{-1} = 9 \cdot 3^x \rightarrow \frac{81}{9} = (3^x)^2 \rightarrow$

$\rightarrow 9 = 3^{2x} \rightarrow 3^2 = 3^{2x} \rightarrow x = 1$

Solución: $x = 1$

10. **Resuelve.**

a) $3 \cdot 5^x + 5^{x+1} = 200$ **b)** $7 \cdot 2^{x-1} - 5 \cdot 2^x = -\frac{3}{4}$

c) $2 \cdot 3^{x+1} + 3^{x-1} - 5 \cdot 3^x = 108$ **d)** $2^{x-1} + 2^{x-2} + 2^{x-3} = 224$

a) $3 \cdot 5^x + 5^{x+1} = 200 \rightarrow 3 \cdot 5^x + 5^x \cdot 5 = 200 \rightarrow 8 \cdot 5^x = 200 \rightarrow 5^x = \frac{200}{8} = 25 \rightarrow$

$\rightarrow 5^x = 5^2 \rightarrow x = 2$

Solución: $x = 2$

b) $7 \cdot 2^{x-1} - 5 \cdot 2^x = -\frac{3}{4} \rightarrow 7 \cdot 2^x \cdot 2^{-1} - 5 \cdot 2^x = -\frac{3}{4} \rightarrow \frac{7}{2} \cdot 2^x - 5 \cdot 2^x = -\frac{3}{4} \rightarrow$

$\rightarrow -\frac{3}{2} \cdot 2^x = -\frac{3}{4} \rightarrow 2^x = \frac{1}{2} \rightarrow 2^x = 2^{-1} \rightarrow x = -1$

Solución: $x = -1$

c) $2 \cdot 3^{x+1} + 3^{x-1} - 5 \cdot 3^x = 108 \rightarrow 2 \cdot 3^x \cdot 3 + \frac{3^x}{3} - 5 \cdot 3^x = 108 \rightarrow$

$\rightarrow \frac{18 \cdot 3^x + 3^x - 15 \cdot 3^x}{3} = 108 \rightarrow \frac{4 \cdot 3^x}{3} = 108 \rightarrow$

$\rightarrow 3^x = 81 = 3^4 \rightarrow x = 4$

Solución: $x = 4$

d) $2^{x-1} + 2^{x-2} + 2^{x-3} = 224 \rightarrow 2^x \cdot 2^{-1} + 2^x \cdot 2^{-2} + 2^x \cdot 2^{-3} = 224 \rightarrow$

$\rightarrow \frac{4 \cdot 2^x + 2 \cdot 2^x + 2^x}{8} = 224 \rightarrow \frac{7 \cdot 2^x}{8} = 224 \rightarrow$

$\rightarrow 2^x = 256 = 2^8 \rightarrow x = 8$

Solución: $x = 8$

11. **Resuelve aplicando la definición de logaritmo.**

a) $\log_5 (2x - 3) = 1$

b) $\log_4 \left(\frac{x+1}{2}\right) = -2$

c) $\log_2 (\sqrt{x} - 1) = 3$

d) $\log (2^x - 15) = 0$

a) $\log_5 (2x - 3) = 1 \rightarrow 5^1 = 2x - 3 \rightarrow 5 + 3 = 2x \rightarrow x = \frac{8}{2} \rightarrow x = 4$

Solución: $x = 4$

b) $\log_4 \left(\frac{x+1}{2}\right) = -2 \rightarrow 4^{-2} = \frac{x+1}{2} \rightarrow \frac{1}{16} = \frac{x+1}{2} \rightarrow \frac{1}{16} = \frac{8x+8}{16} \rightarrow$

$\rightarrow 1 = 8x + 8 \rightarrow -7 = 8x \rightarrow x = -\frac{7}{8}$

Solución: $x = -\frac{7}{8}$

c) $\log_2 (\sqrt{x} - 1) = 3 \rightarrow 2^3 = \sqrt{x} - 1 \rightarrow 8 + 1 = \sqrt{x} \rightarrow 9^2 = (\sqrt{x})^2 \rightarrow x = 81$

Solución: $x = 81$

d) $\log (2^x - 15) = 0 \rightarrow 10^0 = 2^x - 15 \rightarrow 1 + 15 = 2^x \rightarrow 16 = 2^x \rightarrow 2^4 = 2^x \rightarrow x = 4$

Solución: $x = 4$

12. **Aplica las propiedades de los logaritmos para resolver las siguientes ecuaciones:**

a) $2\log_3 x - \log_3 4 = 4$

b) $\log_2 x - \log_2 3 = 2$

c) $\log_2 (x - 3) + \log_2 x = 2$

d) $\log (x - 9) - \log x = 1$

a) $2 \cdot \log_3 x - \log_3 4 = 4 \rightarrow \log_3 \left(\frac{x^2}{4}\right) = 4 \rightarrow 3^4 = \frac{x^2}{4} \rightarrow 81 \cdot 4 = x^2 \rightarrow$

$\rightarrow x = \pm\sqrt{81 \cdot 4} \rightarrow x = \pm 18$

Solución: $x = 18$ ($x = -18$ no vale)

b) $\log_2 x - \log_2 3 = 2 \rightarrow \log_2 \left(\frac{x}{3}\right) = 2 \rightarrow 2^2 = \frac{x}{3} \rightarrow 4 \cdot 3 = x \rightarrow x = 12$

Solución: $x = 12$

c) $\log_2 (x - 3) + \log_2 x = 2 \rightarrow \log_2 [(x - 3) \cdot x] = 2 \rightarrow (x - 3) \cdot x = 2^2 \rightarrow$

$\rightarrow x^2 - 3x - 4 = 0 \rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 16}}{2} = \begin{cases} 4 \\ -1. \text{ No vale.} \end{cases}$

Solución: $x = 4$

d) $\log (x - 9) - \log x = 1 \rightarrow \log \left(\frac{x - 9}{x}\right) = 1 \rightarrow 10^1 = \frac{x - 9}{x} \rightarrow 10x = x - 9 \rightarrow$

$\rightarrow 10x - x = -9 \rightarrow 9x = -9 \rightarrow x = \frac{-9}{9} = -1.$ No vale.

No tiene solución.

13. **Descompón en factores y resuelve.**

a) $x^3 - 4x = 0$ **b)** $x^3 + x^2 - 6x = 0$

c) $x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$ **d)** $x^3 - x^2 - 5x - 3 = 0$

a) $x(x^2 - 4) = 0$

Soluciones: $x_1 = 0;\ x_2 = 2;\ x_3 = -2$

b) $x(x^2 + x - 6) = 0 \to x_1 = 0;\ x^2 + x - 6 = 0 \to x = \dfrac{-1 \pm 5}{2} = \begin{cases} -3 \\ 2 \end{cases}$

Soluciones: $x_1 = 0;\ x_2 = -3;\ x_3 = 2$

c)
$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 2 & -1 & -2 \\ 1 & & 1 & 3 & 2 \\ \hline & 1 & 3 & 2 & \boxed{0} \end{array}$$

$x^2 + 3x + 2 = 0 \to x = \dfrac{-3 \pm 1}{2} = \begin{cases} -1 \\ -2 \end{cases}$

Soluciones: $x_1 = 1;\ x_2 = -1;\ x_3 = -2$

d)
$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -1 & -5 & -3 \\ -1 & & -1 & 2 & 3 \\ \hline & 1 & -2 & -3 & \boxed{0} \end{array}$$

$x^2 - 2x - 3 = 0 \to x = \dfrac{2 \pm 4}{2} = \begin{cases} -1 \\ 3 \end{cases}$

Soluciones: $x_1 = -1$ (doble); $x_2 = 3$

14. **Resuelve las siguientes ecuaciones:**

a) $(x - 2)(x^2 - 2x - 3) = 0$ **b)** $x(x^2 + 3x + 2) = 0$

c) $(x^2 - 3x)(2^{x+1} - 1) = 0$ **d)** $(x + 5)\ log_2\ (x - 3) = 0$

e) $(x^4 - 5x^2 + 4)(5^x - 10) = 0$ **f)** $(x^2 + 5)(\sqrt{x} - 3) = 0$

a) $(x - 2)(x^2 - 2x - 3) = 0$

- $x - 2 = 0 \to x = 2$
- $x^2 - 2x - 3 = 0 \to x = \dfrac{2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} = \dfrac{2 \pm \sqrt{16}}{2} = \begin{cases} 3 \\ -1 \end{cases}$

Soluciones: $x_1 = 2;\ x_2 = 3;\ x_3 = -1$

b) $x(x^2 + 3x + 2) = 0$

$x^2 + 3x + 2 = 0 \to x = \dfrac{3 \pm \sqrt{9 - 8}}{2} = \dfrac{-3 \pm \sqrt{1}}{2} = \begin{cases} -1 \\ -2 \end{cases}$

Soluciones: $x_1 = 0;\ x_2 = -1;\ x_3 = -2$

c) $(x^2 - 3x)(2^{x+1} - 1) = 0$

- $x^2 - 3x = 0 \to x(x - 3) = 0 \to \begin{cases} x = 0 \\ x - 3 = 0 \to x = 3 \end{cases}$
- $2^{x+1} - 1 = 0 \to 2^{x+1} = 1 \to 2^{x+1} = 2^0 \to x + 1 = 0 \to x = -1$

Soluciones: $x_1 = 0;\ x_2 = 3;\ x_3 = -1$

d) $(x+5)\ log_2\ (x-3)=0$

• $x+5=0 \ \to\ x=-5$, no vale

• $log_2\ (x-3)=0 \ \to\ 2^0=x-3 \ \to\ 1+3=x \ \to\ x=4$

Solución: $x=4$

e) $(x^4-5x^2+4)(5^x-10)=0$

• $x^4-5x^2+4=0$

Hacemos $x^2=t \ \to\ t^2-5t+4=0 \ \to\ t=\dfrac{5\pm\sqrt{25-16}}{2}=\begin{cases}4\\1\end{cases}$

Si $t=4 \ \to\ x=\pm 2$

Si $t=1 \ \to\ x=\pm 1$

• $5^x-10=0 \ \to\ 5^x=10 \ \to\ log\ 5^x=log\ 10 \ \to\ x\cdot log\ 5=log\ 10 \ \to\ x=\dfrac{1}{log\ 5}=1{,}43$

Soluciones: $x_1=2$; $x_2=-2$; $x_3=1$; $x_4=-1$; $x_5=1{,}43$

f) $(x^2+5)(\sqrt{x}-3)=0$

• $x^2+5=0 \ \to\ x^2=-5$ no tiene solución

• $\sqrt{x}-3=0 \ \to\ \sqrt{x}=3 \ \to\ x=9$

Solución: $x=9$

15. **Despeja la incógnita y resuelve.**

a) $x^3-64=0$

b) $\dfrac{625}{x}-x^3=0$

c) $\dfrac{3x}{4}+\dfrac{16}{9x^2}=0$

d) $\dfrac{x}{8}-\dfrac{2}{81x^3}=0$

a) $x^3-64=0 \ \to\ x^3=64 \ \to\ x=\sqrt[3]{64}=\sqrt[3]{4^3}=4$

Solución: $x=4$

b) $\dfrac{625}{x}-x^3=0 \ \to\ 625-x^4=0 \ \to\ x=\pm\sqrt[4]{625}=\pm 5$

Soluciones: $x_1=5$, $x_2=-5$

c) $\dfrac{3x}{4}+\dfrac{16}{9x^2}=0 \ \to\ 27x^3+64=0 \ \to\ x=\sqrt[3]{-\dfrac{64}{27}}=-\dfrac{4}{3}$

Solución: $x=-\dfrac{4}{3}$

d) $\dfrac{x}{8}-\dfrac{2}{81x^3}=0 \ \to\ 81x^4-16=0 \ \to\ x^4=\dfrac{16}{81} \ \to\ x=\pm\dfrac{2}{3}$

Soluciones: $x_1=\dfrac{2}{3}$, $x_2=-\dfrac{2}{3}$

Página 72

Sistemas de ecuaciones

16. **Resuelve los siguientes sistemas aplicando dos veces el método de reducción:**

a) $\begin{cases} 13x - 12y = 127 \\ 21x + 17y = 96 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 8{,}6x + 5{,}4y = 11 \\ 25x - 12y = -245 \end{cases}$

a) $\begin{array}{rcrcr} 273x & - & 252y & = & 2\,667 \\ -273x & - & 221y & = & -1\,248 \\ \hline & - & 473y & = & 1\,419 \end{array} \to y = -3$ $\begin{array}{rcrcr} 221x & - & 204y & = & 2\,159 \\ 252x & + & 204y & = & 1\,152 \\ \hline 473x & & & = & 3\,311 \end{array} \to x = 7$

Solución: $x = 7,\ y = -3$

b) $\begin{array}{rcrcr} -215x & - & 135y & = & -275 \\ 215x & - & 103{,}2y & = & -2\,107 \\ \hline & - & 238{,}2y & = & -2\,382 \end{array} \to y = 10$ $\begin{array}{rcrcr} 103{,}2x & + & 64{,}8y & = & 132 \\ 135x & - & 64{,}8y & = & -1\,323 \\ \hline 238{,}2x & & & = & -1\,191 \end{array} \to x = -5$

Solución: $x = -5,\ y = 10$

17. **Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones:**

a) $\begin{cases} \dfrac{x+2}{5} - \dfrac{3y-1}{10} = \dfrac{-3}{10} \\ \dfrac{2x+3}{8} + \dfrac{y+7}{4} = \dfrac{19}{8} \end{cases}$ b) $\begin{cases} \dfrac{x+1}{8} + \dfrac{y}{4} = \dfrac{5}{8} \\ \dfrac{3x-1}{12} + \dfrac{y}{2} = \dfrac{1}{6} \end{cases}$

a) $\begin{cases} 2(x+2) - 3y + 1 = -3 \\ 2x + 3 + 2y + 14 = 19 \end{cases} \to \begin{cases} 2x - 3y = -8 \\ 2x + 2y = \ \ 2 \end{cases} \to \begin{array}{rcrcr} -2x & + & 3y & = & 8 \\ 2x & + & 2y & = & 2 \\ \hline & & 5y & = & 10 \end{array}$

$y = 2 \to 2x - 6 = -8 \to 2x = -2 \to x = -1$

Solución: $x = -1,\ y = 2$

b) $\begin{cases} \dfrac{x+1}{8} + \dfrac{y}{4} = \dfrac{5}{8} \\ \dfrac{3x-1}{12} + \dfrac{y}{2} = \dfrac{1}{6} \end{cases} \to \begin{cases} \dfrac{x+1}{8} + \dfrac{2y}{8} = \dfrac{5}{8} \\ \dfrac{3x-1}{12} + \dfrac{6y}{12} = \dfrac{2}{12} \end{cases}$

$\begin{cases} x + 1 + 2y = 5 \\ 3x - 1 + 6y = 2 \end{cases} \to \begin{cases} x + 2y = 4 \\ 3x + 6y = 3 \end{cases}$

Multiplicamos por –3 la primera ecuación y la sumamos con la segunda:

$\begin{array}{rcrcr} -3x & - & 6y & = & -12 \\ 3x & + & 6y & = & 3 \\ \hline & & 0 & = & -9 \end{array}$

El sistema no tiene solución.

18. **Resuelve.**

a) $\begin{cases} x - y + 3 = 0 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y = 1 \\ xy + 2y = 2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ xy - y^2 = 0 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 3x + 2y = 0 \\ x(x - y) = 2y^2 - 8 \end{cases}$

a) $\begin{cases} x = y - 3 \\ (y - 3)^2 + y^2 = 5 \ \to\ y^2 - 6y + 9 + y^2 - 5 = 0 \ \to\ 2y^2 - 6y + 4 = 0 \end{cases}$

$y^2 - 3y + 2 = 0 \ \to\ y = \dfrac{3 \pm \sqrt{1}}{2} = \begin{cases} y_1 = 1 \ \to\ x_1 = 1 - 3 = -2 \\ y_2 = 2 \ \to\ x_2 = 2 - 3 = -1 \end{cases}$

Soluciones: $x_1 = -2,\ y_1 = 1;\ x_2 = -1,\ y_2 = 2$

b) $\begin{cases} x = 1 - y \\ (1 - y)y + 2y = 2 \ \to\ y - y^2 + 2y = 2 \ \to\ y^2 - 3y + 2 = 0 \end{cases}$

$y = \dfrac{3 \pm 1}{2} = \begin{cases} y_1 = 1 \ \to\ x_1 = 1 - 1 = 0 \\ y_2 = 2 \ \to\ x_2 = 1 - 2 = -1 \end{cases}$

Soluciones: $x_1 = 0,\ y_1 = 1;\ x_2 = -1,\ y_2 = 2$

c) $\begin{cases} y = 3 - 2x \\ x(3 - 2x) - (3 - 2x)^2 = 0 \ \to\ 3x - 2x^2 - 9 - 4x^2 - 12x = 0 \end{cases}$

$-6x^2 + 15x - 9 = 0 \ \to\ 2x^2 - 5x + 3 = 0 \ \to\ x = \dfrac{5 \pm 1}{2} = \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 3 \end{cases}$

Si $x_1 = 2 \ \to\ y_1 = 3 - 4 = -1$

Si $x_2 = 3 \ \to\ y_2 = 3 - 6 = -3$

Soluciones: $x_1 = 2,\ y_1 = -1;\ x_2 = 3,\ y_2 = -3$

d) $\begin{cases} y = -\dfrac{3}{2}x \\ x\left(x + \dfrac{3}{2}x\right) = 2\left(-\dfrac{3}{2}x\right)^2 - 8 \ \to\ \dfrac{5}{2}x^2 = \dfrac{9}{2}x^2 - 8 \ \to\ -2x^2 = -8 \end{cases}$

$x^2 = 4 \begin{cases} x_1 = 2 \ \to\ y_1 = -\dfrac{3}{2} \cdot 2 = -3 \\ x_2 = -2 \ \to\ y_2 = -\dfrac{3}{2}(-2) = 3 \end{cases}$

Soluciones: $x_1 = 2,\ y_1 = -3;\ x_2 = -2,\ y_2 = 3$

19. **Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones:**

a) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 41 \\ x^2 - y^2 = 9 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x^2 + 2y^2 = 35 \\ x^2 - 2y^2 = 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x^2 + y^2 + x + y = 32 \\ x^2 - y^2 + x - y = 28 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x^2 + 2y^2 + x + 1 = 0 \\ x^2 - 2y^2 + 3x + 1 = 0 \end{cases}$

a) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 41 \\ x^2 - y^2 = 9 \end{cases}$

$2x^2 = 50 \to x^2 = 25 \to x = \pm 5$

Si $x = 5 \to 25 + y^2 = 41 \to y^2 = 16 \to y = \pm 4$

Si $x = -5 \to 25 + y^2 = 41 \to y^2 = 16 \to y = \pm 4$

Soluciones: $x_1 = 5,\ y_1 = 4;\ x_2 = 5,\ y_2 = -4;\ x_3 = -5,\ y_3 = 4;\ x_4 = -5,\ y_4 = -4$

b) $\begin{cases} 3x^2 + 2y^2 = 35 \\ x^2 - 2y^2 = 1 \end{cases}$

$4x^2 = 36 \to x^2 = 9 \to x = \pm 3$

Si $x = 3 \to 27 + 2y^2 = 35 \to y^2 = 4 \to y = \pm 2$

Si $x = -3 \to 27 + 2y^2 = 35 \to y^2 = 4 \to y = \pm 2$

Soluciones: $x_1 = 3,\ y_1 = 2;\ x_2 = 3,\ y_2 = -2;\ x_3 = -3,\ y_3 = 2;\ x_4 = -3,\ y_4 = -2$

c) $\begin{cases} x^2 + y^2 + x + y = 32 \\ x^2 - y^2 + x - y = 28 \end{cases}$

$2x^2 + 2x = 60 \to x^2 + x = 30 \to x^2 + x - 30 = 0$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 120}}{2} = \frac{-1 \pm 11}{2} = \begin{cases} -6 \\ 5 \end{cases}$$

• Si $x = -6 \to 36 + y^2 - 6 + y = 32 \to y^2 + y - 2 = 0$

$$y = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 8}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} = \begin{cases} -2 \\ 1 \end{cases}$$

• Si $x = 5 \to 25 + y^2 + 5 + y = 32 \to y^2 + y - 2 = 0 \to y = \begin{cases} -2 \\ 1 \end{cases}$

Soluciones: $x_1 = -6,\ y_1 = -2;\ x_2 = -6,\ y_2 = 1;\ x_3 = 5,\ y_3 = -2;\ x_4 = 5,\ y_4 = 1$

d) $\begin{cases} x^2 + 2y^2 + x + 1 = 0 \\ x^2 - 2y^2 + 3x + 1 = 0 \end{cases}$

$2x^2 + 4x + 2 = 0 \to x^2 + 2x + 1 = 0 \to (x + 1)^2 = 0 \to x = -1$

Si $x = -1 \to 1 + 2y^2 - 1 + 1 = 0 \to 2y^2 = -1 \to$ No tiene solución.

20. **Resuelve y comprueba las soluciones.**

a) $\begin{cases} x + y = 2 \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = -\dfrac{2}{3} \end{cases}$ b) $\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{20} \\ x + 2y = 3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} y^2 - 2y + 1 = x \\ \sqrt{x} + y = 5 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 2\sqrt{x+1} = y + 1 \\ 2x - 3y = 1 \end{cases}$

a) $\begin{cases} y = 2 - x \\ 3y + 3x = -2xy \end{cases}$ $\begin{cases} y = 2 - x \\ 3(2 - x) + 3x = -2x(2 - x) \end{cases}$

$6 - 3x + 3x = -4x + 2x^2 \to 2x^2 - 4x - 6 = 0 \to x^2 - 2x - 3 = 0$

$x = \dfrac{2 \pm 4}{2} \begin{cases} x_1 = -1 \to y_1 = 2 + 1 = 3 \\ x_2 = 3 \to y_2 = 2 - 3 = -1 \end{cases}$

Soluciones: $x_1 = -1,\ y_1 = 3;\ x_2 = 3,\ y_2 = -1$

b) $\begin{cases} 20y + 20x = xy \to 20y + 20(3 - 2y) = (3 - 2y)y \\ x = 3 - 2y \end{cases}$

$20y + 60 - 40y = 3y - 2y^2 \to 2y^2 - 23y + 60 = 0 \to y = \dfrac{23 \pm 7}{4} \begin{cases} y_1 = 4 \\ y_2 = 15/2 \end{cases}$

Si $y = 4 \to x = 3 - 8 = -5$

Si $y = \dfrac{15}{2} \to x = 3 - 2 \cdot \dfrac{15}{2} = -12$

Soluciones: $x_1 = -5,\ y_1 = 4;\ x_2 = -12,\ y_2 = \dfrac{15}{2}$

c) $\begin{cases} y^2 - 2y + 1 = x \\ \sqrt{x} + y = 5 \to \sqrt{y^2 - 2y + 1} + y = 5 \to \sqrt{(y - 1)^2} + y = 5 \to \end{cases}$

$\to 2y = 6 \to y = 3 \to x = 9 - 6 + 1 = 4$

Solución: $x = 4,\ y = 3$

d) $\begin{cases} 2\sqrt{x+1} = y + 1 \\ 2x - 3y = 1 \to y = \dfrac{2x - 1}{3} \end{cases}$

$2\sqrt{x+1} = \dfrac{2x - 1}{3} + 1 \to 2\sqrt{x+1} = \dfrac{2x - 1 + 3}{3} \to (2\sqrt{x+1})^2 = \left(\dfrac{2x + 2}{3}\right)^2 \to$

$\to 4(x + 1) = \dfrac{4x^2 + 8x + 4}{9} \to 36x + 36 = 4x^2 + 8x + 4 \to$

$\to 4x^2 - 28x - 32 = 0 \to x^2 - 7x - 8 = 0 \to x = \dfrac{7 \pm 9}{2} \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 8 \end{cases}$

Si $x = -1 \to y = -1$

Si $x = 8 \to y = \dfrac{16 - 1}{3} = 5$

Soluciones: $x_1 = -1,\ y_1 = -1;\ x_2 = 8,\ y_2 = 5$

21. **Resuelve.**

a) $\begin{cases} xy = 15 \\ x^2 + y^2 = 34 \end{cases}$

b) $\begin{cases} xy = 12 \\ x^2 - 5y^2 = 16 \end{cases}$

c) $\begin{cases} xy = 4 \\ (x + y)^2 = 25 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x^2 + y^2 = \dfrac{82}{9} \\ xy = -1 \end{cases}$

a) $\begin{cases} y = \dfrac{15}{x} \\ x^2 + \left(\dfrac{15}{x}\right)^2 = 34 \;\to\; x^4 + 225 = 34x^2 \end{cases}$

Hacemos el cambio $x^2 = z \;\to\; z^2 - 34z + 225 = 0 \;\to\; z = \dfrac{34 \pm 16}{2} = \begin{cases} 25 \\ 9 \end{cases}$

Si $z = 25 \begin{cases} x = 5 \;\to\; y = 3 \\ x = -5 \;\to\; y = -3 \end{cases}$

Si $z = 9 \begin{cases} x = 3 \;\to\; y = 5 \\ x = -3 \;\to\; y = -5 \end{cases}$

Soluciones: $x_1 = 5,\ y_1 = 3;\ x_2 = -5,\ y_2 = -3;\ x_3 = 3,\ y_3 = 5;\ x_4 = -3,\ y_4 = -5$

b) $\begin{cases} y = \dfrac{12}{x} \\ x^2 - 5\left(\dfrac{12}{x}\right)^2 = 16 \;\to\; x^2 - \dfrac{720}{x^2} = 16 \;\to\; x^4 - 16x^2 - 720 = 0 \end{cases}$

Cambio $x^2 = z \;\to\; z^2 - 16z - 720 = 0 \;\to\; z = \dfrac{16 \pm 56}{2} = \begin{cases} 36 \\ -20 \text{ (no vale)} \end{cases}$

Si $z = 36 \begin{cases} x = 6 \;\to\; y = 2 \\ x = -6 \;\to\; y = -2 \end{cases}$

Soluciones: $x_1 = 6,\ y_1 = 2;\ x_2 = -6,\ y_2 = -2$

c) $\begin{cases} y = \dfrac{4}{x} \\ \left(x + \dfrac{4}{x}\right)^2 = 25 \;\to\; \left(\dfrac{x^2 + 4}{x}\right)^2 = 25 \;\to\; x^4 + 8x^2 + 16 = 25x^2 \;\to\; x^4 - 17x^2 + 16 = 0 \end{cases}$

Hacemos el cambio $x^2 = z$:

$z^2 - 17z + 16 = 0 \;\to\; z = \dfrac{17 \pm \sqrt{17^2 - 64}}{2} = \dfrac{17 \pm 15}{2} = \begin{cases} 16 \\ 1 \end{cases}$

Si $z = 16 \begin{cases} x = 4 \;\to\; y = 1 \\ x = -4 \;\to\; y = -2 \end{cases}$

Si $z = 1 \begin{cases} x = 1 \;\to\; y = 4 \\ x = -1 \;\to\; y = -4 \end{cases}$

Soluciones: $x_1 = 4,\ y_1 = 1;\ x_2 = -4,\ y_2 = -2;\ x_3 = 1,\ y_3 = 4;\ x_4 = -1,\ y_4 = -4$

d) $\begin{cases} x^2 + \left(-\dfrac{1}{x}\right)^2 = \dfrac{82}{9} \\ y = \dfrac{1}{x} \end{cases} \rightarrow x^4 + 1 - \dfrac{82}{9}x^2 = 0 \rightarrow 9x^4 - 82x^2 + 9 = 0$

Cambio $x^2 = z \rightarrow 9z^2 - 82z + 9 = 0 \rightarrow z = \dfrac{82 \pm \sqrt{6724 - 324}}{18} = \dfrac{82 \pm 80}{18} = \begin{cases} 9 \\ 1/9 \end{cases}$

Si $z = 9 \begin{cases} x = 3 \rightarrow y = -1/3 \\ x = -3 \rightarrow y = 1/3 \end{cases}$

Si $z = \dfrac{1}{9} \begin{cases} x = 1/3 \rightarrow y = -3 \\ x = -1/3 \rightarrow y = 3 \end{cases}$

Soluciones: $x_1 = 3,\ y_1 = -\dfrac{1}{3};\ x_2 = -3,\ y_2 = \dfrac{1}{3};\ x_3 = \dfrac{1}{3},\ y_3 = -3;\ x_4 = -\dfrac{1}{3},\ y_4 = 3$

22. **Resuelve.**

a) $\begin{cases} x - y = 1 \\ 2^x - 2^y = 4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \log x + \log y = 1 \\ x - y = 9 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2^{x+1} - y = 0 \\ 2^x + y = 12 \end{cases}$ d) $\begin{cases} \log x - \log y = 1 \\ x + y = 22 \end{cases}$

a) $\begin{cases} x - y = 1 \\ 2^x - 2^y = 4 \end{cases} \rightarrow x = 1 + y$

$2^{1+y} - 2^y = 4 \rightarrow 2 \cdot 2^y - 2^y = 4 \rightarrow 2^y = 4 \rightarrow 2^y = 2^2 \rightarrow y = 2$

Si $y = 2 \rightarrow x = 1 + 2 = 3$

Solución: $x = 3,\ y = 2$

b) $\begin{cases} \log x + \log y = 1 \\ x - y = 9 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} xy = 10 \\ x - y = 9 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} xy = 10 \\ x = 9 + y \end{cases} \rightarrow$

$\rightarrow (9 + y)y = 10 \rightarrow 9y + y^2 = 10 \rightarrow y^2 + 9y - 10 = 0 \rightarrow$

$\rightarrow y = \dfrac{-9 \pm \sqrt{81 + 40}}{2} = \dfrac{-9 \pm \sqrt{121}}{2} \begin{cases} y = 1 \\ y = -10, \text{ no vale} \end{cases}$

Si $y = 1 \rightarrow x = 9 + 1 = 10$

Solución: $x = 10,\ y = 1$

c) $\begin{cases} 2^{x+1} - y = 0 \\ 2^x + y = 12 \end{cases} \rightarrow \begin{array}{r} 2 \cdot 2^x - y = 0 \\ 2^x + y = 12 \\ \hline 3 \cdot 2^x \quad = 12 \end{array} \rightarrow 2^x = \dfrac{12}{3} = 4 \rightarrow x = 2$

Si $x = 2 \rightarrow 2^{2+1} - y = 0 \rightarrow y = 2^3 = 8$

Solución: $x = 2,\ y = 8$

d) $\begin{cases} \log x - \log y = 1 \\ x + y = 22 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \log\left(\dfrac{x}{y}\right) = 1 \\ x + y = 22 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 10^1 = \dfrac{x}{y} \\ x + y = 22 \end{cases} \rightarrow$

$\rightarrow x = 10y \rightarrow 10y + y = 22 \rightarrow 11y = 22 \rightarrow y = 2$

$x = 10 \cdot 2 = 20$

Solución: $x = 20,\ y = 2$

Inecuaciones y sistemas de inecuaciones

23. **Resuelve.**

a) $\dfrac{7-3x}{2} < x+1$ **b)** $\dfrac{x+4}{3} + 3 \ge \dfrac{x+10}{6}$

c) $2x - 2(3x-5) < x$ **d)** $x - 1 - \dfrac{x-1}{2} < 0$

a) $7 - 3x < 2x + 2 \;\to\; -5x < -5 \;\to\; 5x > 5 \;\to\; x > 1$

Solución: $(1, +\infty)$

b) $2x + 8 + 18 \ge x + 10 \;\to\; x \ge -16$

Solución: $[-16, +\infty)$

c) $2x - 6x + 10 < x \;\to\; -5x < -10 \;\to\; 5x > 10 \;\to\; x > 2$

Solución: $(2, +\infty)$

d) $2x - 2 - x + 1 < 0 \;\to\; x - 1 < 0 \;\to\; x < 1$

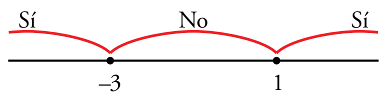
Solución: $(-\infty, 1)$

24. **Resuelve las siguientes inecuaciones:**

a) $x^2 + 2x - 3 > 0$ **b)** $x^2 - 3x - 10 \le 0$

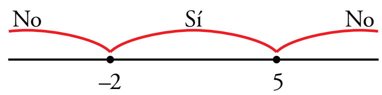
c) $x^2 - 4x - 5 < 0$ **d)** $2x^2 + 9x - 5 \ge 0$

a) $x^2 + 2x - 3 = 0 \;\to\; x = \dfrac{-2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \begin{cases} 1 \\ -3 \end{cases}$



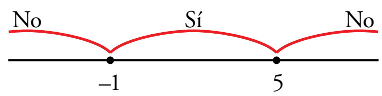
Solución: $(-\infty, -3) \cup (1, +\infty)$

b) $x^2 - 3x - 10 = 0 \;\to\; x = \dfrac{3 \pm \sqrt{49}}{2} = \begin{cases} 5 \\ -2 \end{cases}$



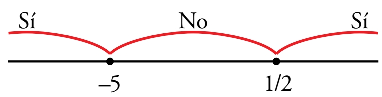
Solución: $[-2, 5]$

c) $x^2 - 4x - 5 = 0 \;\to\; x = \dfrac{4 \pm \sqrt{16+20}}{2} = \begin{cases} 5 \\ -1 \end{cases}$



Solución: $(-1, 5)$

d) $2x^2 + 9x - 5 = 0 \;\to\; x = \dfrac{-9 \pm \sqrt{81+40}}{4} = \begin{cases} 1/2 \\ -5 \end{cases}$



Solución: $(-\infty, -5] \cup \left[\dfrac{1}{2}, +\infty\right)$

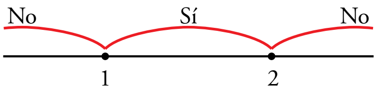
25. **Resuelve.**

a) $-x^2 + 3x - 2 \geq 0$ **b)** $-x^2 + 2x + 3 \leq 0$

c) $x^2 - 2x - 7 > 5 - x$ **d)** $x^2 < \dfrac{x+7}{6}$

a) $-x^2 + 3x - 2 \geq 0$

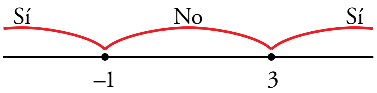
$$x^2 - 3x + 2 = 0 \rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} = \begin{cases} 2 \\ 1 \end{cases}$$



Solución: $[1, 2]$

b) $-x^2 + 2x + 3 \leq 0$

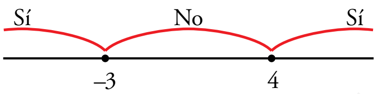
$$x^2 - 2x - 3 = 0 \rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} = \begin{cases} 3 \\ -1 \end{cases}$$



Solución: $(-\infty, -1] \cup [3, +\infty)$

c) $x^2 - 2x - 7 > 5 - x \rightarrow x^2 - x - 12 > 0$

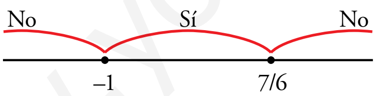
$$x^2 - x - 12 = 0 \rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1+48}}{2} = \frac{1 \pm 7}{2} = \begin{cases} 4 \\ -3 \end{cases}$$



Solución: $(-\infty, -3) \cup (4, +\infty)$

d) $x^2 < \dfrac{x+7}{6} \rightarrow 6x^2 < x + 7 \rightarrow 6x^2 - x - 7 < 0$

$$6x^2 - x - 7 = 0 \rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1+168}}{12} = \frac{1 \pm 13}{12} = \begin{cases} 7/6 \\ -1 \end{cases}$$



Solución: $\left(-1, \dfrac{7}{6}\right)$

26. **Algunas inecuaciones no tienen solución y otras tienen por solución cualquier número. Busca entre las siguientes las que son de estos tipos.**

a) $x^2 + 4 > 3$ **b)** $x^2 + x + 2 < 0$

c) $x^2 + 7 < 5x$ **d)** $x^2 + 4x + 4 > 0$

a) $x^2 + 4 > 3 \rightarrow x^2 > -1$ Solución: $(-\infty, +\infty)$

b) $x^2 + x + 2 < 0$ No tiene solución.

c) $x^2 + 7 < 5x \rightarrow x^2 - 5x + 7 < 0$ No tiene solución.

d) $x^2 + 4x + 4 > 0 \rightarrow (x+2)^2 > 0$ Solución: $(-\infty, +\infty)$

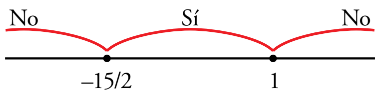
27. **Resuelve las inecuaciones siguientes:**

a) $\mathbf{3x(x+4)-x(x-1)<15}$ **b)** $\mathbf{2x(x+3)-2(3x+5)+x>0}$

c) $\mathbf{\dfrac{x^2-9}{5}-\dfrac{x^2-4}{15}<\dfrac{1-2x}{3}}$

a) $3x^2+12x-x^2+x-15<0 \;\rightarrow\; 2x^2+13x-15<0$

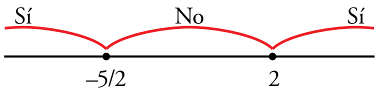
$$2x^2+13x-15=0 \;\rightarrow\; x=\frac{-13\pm\sqrt{169+120}}{4}=\frac{-13\pm 17}{4}=\begin{cases}-15/2\\ 1\end{cases}$$



Solución: $\left(-\dfrac{15}{2},1\right)$

b) $2x^2+6x-6x-10+x>0 \;\rightarrow\; 2x^2+x-10>0$

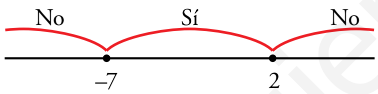
$$2x^2+x-10=0 \;\rightarrow\; x=\frac{-1\pm\sqrt{1+80}}{4}=\frac{-1\pm 9}{4}=\begin{cases}2\\ -5/2\end{cases}$$



Solución: $\left(-\infty,-\dfrac{5}{2}\right)\cup(2,+\infty)$

c) $3x^2-27-x^2+4<5-10x \;\rightarrow\; 2x^2+10x-28<0 \;\rightarrow\; x^2+5x-14<0$

$$x^2+5x-14=0 \;\rightarrow\; x=\frac{-5\pm\sqrt{25+56}}{2}=\frac{-5\pm 9}{2}=\begin{cases}-7\\ 2\end{cases}$$



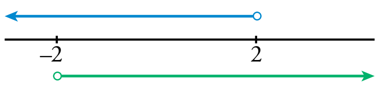
Solución: $(-7, 2)$

28. **Resuelve estos sistemas de inecuaciones:**

a) $\begin{cases}\mathbf{2-x>0}\\ \mathbf{2+x>0}\end{cases}$ **b)** $\begin{cases}\mathbf{5x-3\le x+1}\\ \mathbf{2x+6\ge x+2}\end{cases}$

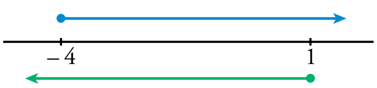
c) $\begin{cases}\mathbf{\dfrac{2x+5}{3}<x-1}\\ \mathbf{\dfrac{x}{3}-1<\dfrac{2x-1}{5}}\end{cases}$ **d)** $\begin{cases}\mathbf{\dfrac{x+13}{6}<\dfrac{39-2x}{18}}\\ \mathbf{\dfrac{3x-5}{4}<-1}\end{cases}$

a) $\begin{cases}2-x>0 \;\rightarrow\; -x>-2 \;\rightarrow\; x<2\\ 2+x>0 \;\rightarrow\; x>-2\end{cases}$



Solución: $(-2, 2)$

b) $\begin{cases}5x-3\le x+1 \;\rightarrow\; 4x\le 4 \;\rightarrow\; x\le 1\\ 2x+6\ge x+2 \;\rightarrow\; x\ge -4\end{cases}$

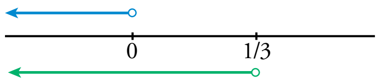


Solución: $[-4, 1]$

c) $\begin{cases} \dfrac{2x+5}{3} < x-1 \ \rightarrow\ 2x+5 < 3x-3 \ \rightarrow\ -x < -8 \ \rightarrow\ x > 8 \\ \dfrac{x}{3} - 1 < \dfrac{2x-1}{5} \ \rightarrow\ 5x-15 < 6x-3 \ \rightarrow\ -x < 12 \ \rightarrow\ x > -12 \end{cases}$

Solución: $(8, +\infty)$

d) $\begin{cases} 3x+39 < 39-2x \ \rightarrow\ 5x < 0 \ \rightarrow\ x < 0 \\ 3x-5 < -4 \ \rightarrow\ 3x < 1 \ \rightarrow\ x < 1/3 \end{cases}$



Solución: $(-\infty, 0)$

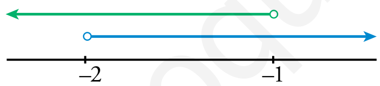
29. **Resuelve los siguientes sistemas de inecuaciones:**

a) $\begin{cases} \dfrac{x+2}{4} < \dfrac{x}{2} - 3 \\ \dfrac{8-x}{3} < \dfrac{1+x}{2} - 1 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} \dfrac{x-1}{2} + \dfrac{2x+2}{3} > \dfrac{3x-7}{6} \\ \dfrac{2x-1}{4} + 2x < \dfrac{2x-9}{4} \end{cases}$

a) $\begin{cases} x+2 < 2x-12 \ \rightarrow\ 14 < x \ \rightarrow\ x > 14 \\ 16-2x < 3+3x-6 \ \rightarrow\ 19 < 5x \ \rightarrow\ x > 19/5 \end{cases}$

Solución: $(14, +\infty)$

b) $\begin{cases} 3x-3+4x+4 > 3x-7 \ \rightarrow\ 4x > -8 \ \rightarrow\ x > -2 \\ 2x-1+8x < 2x-9 \ \rightarrow\ 8x < -8 \ \rightarrow\ x < -1 \end{cases}$

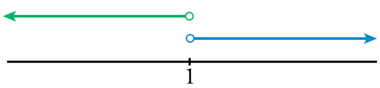


Solución: $(-2, -1)$

30. **Comprueba que estos dos sistemas de inecuaciones no tienen solución:**

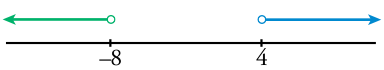
a) $\begin{cases} 8x+7 < 16-x \\ -3x+5 < 2x \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 3x+5 < 2x-3 \\ \dfrac{x+3}{7} < x-3 \end{cases}$

a) $\begin{cases} 8x+7 < 16-x \ \rightarrow\ 9x < 9 \ \rightarrow\ x < 1 \\ -3x+5 < 2x \ \rightarrow\ 5 < 5x \ \rightarrow\ x > 1 \end{cases}$



No tiene solución.

b) $\begin{cases} 3x+5 < 2x-3 \ \rightarrow\ x < -8 \\ x+3 < 7x-21 \ \rightarrow\ 24 < 6x \ \rightarrow\ x > 4 \end{cases}$



No tiene solución.

Página 73

Aplica lo aprendido

31. **Traduce a lenguaje algebraico los siguientes enunciados y resuelve:**

a) La mitad de un número menos 10 unidades es menor que 7.

b) Si a los tres cuartos de un número le resto 2, obtengo más que si a su mitad le sumo 5.

c) La suma de dos números consecutivos no supera a 8.

d) El perímetro de un rectángulo cuya base mide 3 cm más que la altura es menor que 50 m.

a) x = número buscado.

$\frac{x}{2} - 10 < 7 \ \to\ x < 34$

Solución: $x \in (-\infty, 34)$

b) x = número buscado.

$\frac{3}{4}x - 2 > \frac{x}{2} + 5 \ \to\ x > 28$

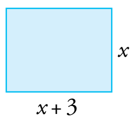
Solución: $x \in (28, +\infty)$

c) $\left.\begin{array}{l} \text{n.º menor} \ \to\ x \\ \text{n.º mayor} \ \to\ x+1 \end{array}\right\}$

$x + x + 1 \le 8 \ \to\ 2x + 1 \le 8 \ \to\ x \le \frac{7}{2} = 3{,}5 \ \to\ x \in \{3, 2, 1, 0, \dots\}$

d) $2x + 2(x + 3) < 50 \ \to\ 2x + 2x + 6 < 50 \ \to$

$\to\ 4x < 44 \ \to\ x < \frac{44}{4} = 11$



Solución: $x \in (0, 11)$ porque $x > 0$ debido al contexto del enunciado.

32. **Resuelve estos sistemas de ecuaciones:**

a) $\begin{cases} x - y = 0 \\ x - 2z = 6 \\ y + z = 3 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x - z = 4 \\ 2x + y = 7 \\ x + y = 2z \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{l} x - y = 0 \\ x - 2z = 6 \\ y + z = 3 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x = y \\ y - 2z = 6 \\ y + z = 3 \end{array}\right\} \begin{array}{l} y = 6 + 2z \\ 6 + 2z + z = 3 \ \to\ 3z = -3 \ \to\ z = -1 \end{array}$

$y = 6 + 2 \cdot (-1) = 4; \ x = 4$

Solución: $x = 4, \ y = 4, \ z = -1$

b) $\left.\begin{array}{l} x - z = 4 \\ 2x + y = 7 \\ x + y = 2z \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x = z + 4 \\ 2z + 8 + y = 7 \\ z + 4 + y = 2z \end{array}\right\} \begin{array}{l} y = -2z - 1 \\ -z + 4 - 2z - 1 = 0 \ \to\ -3z = -3 \ \to\ z = 1 \end{array}$

$y = -2z - 1 = -3; \ x = z + 4 = 5$

Solución: $x = 5, \ y = -3, \ z = 1$

33. **Resuelve las siguientes ecuaciones y comprueba las soluciones:**

a) $\boldsymbol{\log(x-2)+\log(x-3)=1-\log 5}$ **b)** $\boldsymbol{\frac{1}{2}\log(3x+5)+\frac{1}{2}\log x=1}$

c) $\boldsymbol{2\log x-3\log 2=\log(x+6)}$

a) $\log(x-2)+\log(x-3)=1-\log 5 \;\to\; \log(x-2)+\log(x-3)+\log 5=1 \;\to$

$\to\; \log[(x-2)\cdot(x-3)\cdot 5]=1 \;\to\; 10^1=5\cdot(x-2)(x-3) \;\to\; 10=5x^2-25x+30 \;\to$

$\to\; 5x^2-25x+20=0 \;\to\; x^2-5x+4=0 \;\to\; x=\dfrac{5\pm\sqrt{25-16}}{2}=\dfrac{5\pm\sqrt{9}}{2}=\begin{cases}4\\ 1\text{, no vale}\end{cases}$

Comprobación: $\log(4-2)+\log(4-3)=1-\log 5 \;\to\; x=4$ es válida

Solución: $x=4$

b) $\dfrac{1}{2}\cdot\log(3x+5)+\dfrac{1}{2}\cdot\log x=1 \;\to\; \dfrac{1}{2}\cdot[\log(3x+5)+\log x]=1 \;\to$

$\to\; \log[(3x+5)\cdot x]=2 \;\to\; 10^2=(3x+5)\cdot x \;\to\; 100=3x^2+5x \;\to$

$\to\; 3x^2+5x-100=0 \;\to\; x=\dfrac{-5\pm\sqrt{25+1\,200}}{6}=\dfrac{-5\pm\sqrt{1\,225}}{6}=\begin{cases}5\\ -20/3\text{, no vale}\end{cases}$

Comprobación: $\dfrac{1}{2}\cdot\log(15+5)+\dfrac{1}{2}\cdot\log 5=1 \;\to\; x=5$ es válida

Solución: $x=5$

c) $2\log x-3\log 2=\log(x+6) \;\to\; \log(x^2)-\log(2^3)=\log(x+6) \;\to$

$\to\; \log\left(\dfrac{x^2}{8}\right)=\log(x+6) \;\to\; \dfrac{x^2}{8}=x+6 \;\to\; x^2=8x+48 \;\to\; x^2-8x-48=0 \;\to$

$\to\; x=\dfrac{8\pm\sqrt{64+192}}{2}=\dfrac{8\pm\sqrt{256}}{2}=\begin{cases}12\\ -4\text{, no vale}\end{cases}$

Comprobación: $2\log 12-3\log 2=\log(12+6) \;\to\; x=12$ es válida.

Solución: $x=12$

34. **Resuelve las ecuaciones siguientes mediante el cambio** $\boldsymbol{x^3=t}$**:**

a) $\boldsymbol{x^6+7x^3-8=0}$ **b)** $\boldsymbol{x^6-2x^3+1=0}$

a) $t^2+7t-8=0$

$t=\dfrac{-7\pm\sqrt{49+32}}{2}=\dfrac{-7\pm\sqrt{81}}{2}=\begin{cases}1\\ -8\end{cases}$

Si $t=1 \;\to\; x=\sqrt[3]{1}=1$

Si $t=-8 \;\to\; x=\sqrt[3]{-8}=-2$

Soluciones: $x_1=1,\; x_2=-2$

b) $t^2-2t+1=0$

$t=\dfrac{2\pm\sqrt{4-4}}{2}=\dfrac{2}{2}=1$

Si $t=1 \;\to\; x=\sqrt[3]{1}=1$

Solución: $x=1$

35. **Resuelve mediante el cambio de variable $2^x = t$.**

a) $4^{x+1} + 2^{x+3} = 320$ **b)** $4^x - 8 = 2^{x+1}$

c) $2^{3-x} = 5 - 2^{x-1}$ **d)** $3 \cdot 4^x + 9 \cdot 2^x - 30 = 0$

a) $4^{x+1} + 2^{x+3} = 320 \rightarrow 4^x \cdot 4 + 2^x \cdot 2^3 = 320$

Sea $t = 2^x$:

$4t^2 + 8t - 320 = 0 \rightarrow t^2 + 2t - 80 = 0$

$$t = \frac{-2 \pm \sqrt{4+320}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{324}}{2} = \begin{cases} \dfrac{-2+18}{2} = \dfrac{16}{2} = 8 \\ \dfrac{-2-18}{2} = -\dfrac{20}{2} = -10 \end{cases}$$

Si $t = 8 \rightarrow x = 3$

Si $t = -10 \rightarrow$ No hay solución

Solución: $x = 3$

b) $4^x - 8 = 2^{x+1} \rightarrow (2^x)^2 - 8 = 2 \cdot 2^x$

Sea $t = 2^x$:

$t^2 - 8 = 2t \rightarrow t^2 - 2t - 8 = 0$

$$t = \frac{2 \pm \sqrt{4+32}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{36}}{2} = \begin{cases} 4 \\ -2 \end{cases}$$

Si $t = 4 \rightarrow x = 2$

Si $t = -2 \rightarrow$ No hay solución

Solución: $x = 2$

c) $2^{3-x} = 5 - 2^{x-1} \rightarrow \dfrac{2^3}{2^x} = 5 - \dfrac{2^x}{2} \rightarrow \dfrac{8}{2^x} = \dfrac{10 - 2^x}{2}$

Sea $t = 2^x$:

$\dfrac{8}{t} = \dfrac{10-t}{2} \rightarrow 2 \cdot 8 = t(10-t) \rightarrow 16 = 10t - t^2 \rightarrow t^2 - 10t + 16 = 0$

$$t = \frac{10 \pm \sqrt{100-64}}{2} = \frac{10 \pm \sqrt{36}}{2} = \begin{cases} 8 \\ 2 \end{cases}$$

Si $t = 8 \rightarrow x = 3$

Si $t = 2 \rightarrow x = 1$

Soluciones: $x = 1,\ x = 3$

d) $3 \cdot 4^x + 9 \cdot 2^x - 30 = 0$

Sea $t = 2^x$:

$3t^2 + 9t - 30 = 0 \rightarrow t^2 + 3t - 10 = 0$

$$t = \frac{-3 \pm \sqrt{9+40}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{49}}{2} = \begin{cases} 2 \\ -5 \end{cases}$$

Si $t = 2 \rightarrow x = 1$

Si $t = -5 \rightarrow$ No hay solución.

Solución: $x = 1$

36. **Por la mezcla de 5 kg de pintura verde y 3 kg de pintura blanca he pagado 69 €. Calcula el precio de un kilogramo de pintura blanca y de pintura verde sabiendo que si mezclase un kilogramo de cada una el precio de la mezcla sería 15 €.**

$$\left.\begin{array}{r} 5x + 3y = 69 \\ x + y = 15 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{r} 5x + 3y = 69 \\ -3x - 3y = -45 \\ \hline 2x \quad = 24 \end{array} \to x = 12$$

$y = 15 - x \to y = 15 - 12 = 3$

La pintura verde cuesta 12 € el kilogramo, y la blanca, 3 €.

37. **Un joyero tiene dos lingotes de oro, uno con un 80 % de pureza y otro con un 95 %. ¿Cuánto debe fundir de cada uno para obtener un lingote de 5 kg con un 86 % de pureza?**

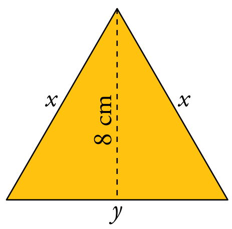
$$\begin{cases} 0,8x + 0,95y = 0,86\,(x + y) \\ x + y = 5 \to x = 5 - y \end{cases}$$

$0,8(5 - y) + 0,95y = 0,86(5 - y + y) \to 4 - 0,8y + 0,95y = 4,3 \to 0,15y = 0,3 \to$

$\to y = 2 \to x = 3$

Debe fundir 3 kg del de 80 % de pureza con 2 kg del lingote que tiene un 95 % de pureza.

38. **Un triángulo isósceles mide 32 cm de perímetro y la altura correspondiente al lado desigual mide 8 cm. Calcula los lados del triángulo.**



$$\left.\begin{array}{r} 2x + y = 32 \\ x^2 - \dfrac{y^2}{4} = 64 \end{array}\right\} \begin{array}{l} y = 32 - 2x \\ 4x^2 + (32 - 2x)^2 = 256 \end{array}$$

$4x^2 - 1\,024 + 128x - 4x^2 = 256 \to 128x = 1\,280 \to x = 10$ cm

$y = 32 - 2 \cdot 10 = 12$ cm

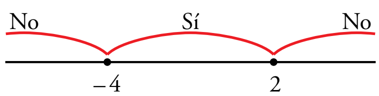
Los lados iguales miden 10 cm, y el lado desigual, 12 cm.

Resuelve problemas

39. **El producto de un número entero por otro, dos unidades mayor, es menor que 8. ¿Cuál puede ser ese número?**

$x(x - 2) < 8 \to x^2 + 2x < 8 \to x^2 + 2x - 8 < 0$

$x^2 + 2x - 8 = 0 \to x = \dfrac{-2 \pm \sqrt{4 + 32}}{2} = \dfrac{-2 \pm 6}{2} = \begin{cases} 2 \\ -4 \end{cases}$



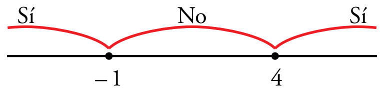
Solución: $(-4, 2)$

El número puede ser: –3, –2, –1, 0 o 1.

40. Si al cuadrado de un número le restamos su triple, obtenemos más de 4. ¿Qué podemos decir de ese número?

$x^2 - 3x > 4 \;\rightarrow\; x^2 - 3x - 4 > 0$

$x^2 - 3x - 4 = 0 \;\rightarrow\; x = \dfrac{3 \pm \sqrt{9+16}}{2} = \dfrac{3 \pm 5}{2} = \begin{cases} 4 \\ -1 \end{cases}$



El número está en $(-\infty, -1) \cup (4, +\infty)$, es decir, puede ser menor que –1 o mayor que 4.

41. Tres amigos cobran 756 € por cierto trabajo. El primero ha dedicado al trabajo 12 horas, y el tercero, que ha dedicado el doble de horas que el segundo, ha cobrado 360 €. ¿Cuántas horas y cuánto dinero corresponde a cada uno?

n.º de horas trabajadas por el 2.º $\rightarrow x$
€/hora que cobran por el trabajo $\rightarrow y$

$\left.\begin{array}{l} 2xy = 360 \\ (12 + x + 2x)\,y = 756 \end{array}\right\} \rightarrow y = \dfrac{360}{2x} = \dfrac{180}{x}$

$(12 + 3x)\dfrac{180}{x} = 756 \;\rightarrow\; (12 + 3x)180 = 756x$

$2\,160 + 540x = 756x \;\rightarrow\; 2\,160 = 216x \;\rightarrow\; x = \dfrac{2160}{216} = 10 \;\rightarrow\; y = \dfrac{180}{10} = 18$

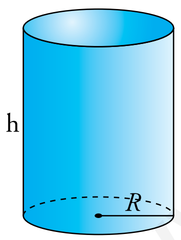
Solución:

El 1.º trabaja 12 horas y cobra 216 €.

El 2.º trabaja 10 horas y cobra 180 €.

El 3.º trabaja 20 horas y cobra 360 €.

42. El área total de un cilindro es 112π cm², y entre el radio y la altura suman 14 cm. Halla su volumen.



$\left.\begin{array}{l} 2\pi R\text{h} + 2\pi R^2 = 112\pi \\ R + \text{h} = 14 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \pi R\text{h} + \pi R^2 = 56\pi \;\rightarrow\; R\text{h} + R^2 = 56 \\ \text{h} = 14 - R \end{array}$

$R(14 - R) + R^2 = 56 \;\rightarrow\; 14R - R^2 + R^2 = 56 \;\rightarrow\; R = 4 \text{ cm}$

$\text{h} = 14 - 4 = 10 \text{ cm}$

$V_{\text{CILINDRO}} = \pi R^2\text{h} = \pi \cdot 4^2 \cdot 10 = 160\pi \text{ cm}^3$

43. La nota media de un examen de Matemáticas de la clase de 4.º C fue 5,4, y la de 4.º B, 6,4. ¿Cuántos estudiantes hay en cada grupo si en total son 50 y con una nota media de 5,88?

n.º alumnos 4.º C $\rightarrow x$
n.º alumnos 4.º B $\rightarrow y$

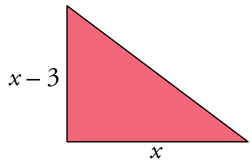
$\left.\begin{array}{l} x + y = 50 \\ \dfrac{5,4x + 6,4y}{50} = 5,88 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} x = 50 - y \\ 5,4x + 6,4y = 294 \end{array}\right\}$

$5,4(50 - y) + 6,4y = 294 \;\rightarrow\; 270 - 5,4y + 6,4y = 294 \;\rightarrow\; y = 24 \;\rightarrow\; x = 50 - 24 = 26$

Solución: En 4.º C hay 26 alumnos.

En 4.º B hay 24 alumnos.

44. **El perímetro de un triángulo rectángulo es 36 m y uno de sus catetos mide 3 cm menos que el otro. Halla los lados del triángulo.**



$x + (x-3) + \sqrt{(x-3)^2 + x^2} = 36$

$2x + \sqrt{2x^2 - 6x + 9} = 39 \rightarrow \sqrt{2x^2 - 6x + 9} = 39 - 2x$

$2x^2 - 6x + 9 = 1\,521 + 4x^2 - 156x$

$2x^2 - 150x + 1\,512 = 0 \rightarrow x^2 - 75x + 756 = 0$

$$x = \frac{75 \pm \sqrt{5\,625 - 3\,024}}{2} = \frac{75 \pm 51}{2} = \begin{cases} 63 \rightarrow \text{No vale.} \\ 12 \end{cases}$$

Hipotenusa $= \sqrt{12^2 + 9^2} = 15$

Los catetos miden 12 cm y 9 cm, y la hipotenusa, 15 cm.

45. **Una persona tarda 3 horas más que otra en hacer el mismo trabajo. Si lo hacen entre las dos, tardan 2 horas. ¿Cuánto tarda cada una por separado?**

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+3} = \frac{1}{2} \rightarrow 2(x+3) + 2x = x(x+3) \rightarrow 2x + 6 + 2x = x^2 + 3x \rightarrow x^2 - x - 6 = 0$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2} = \begin{cases} 3 \\ -2 \rightarrow \text{No vale.} \end{cases}$$

Una tarda 3 h, y otra, 6 h.

46. **Un anticuario vendió dos relojes de bolsillo por 210 €. Con uno obtuvo una ganancia del 10 % y con el otro perdió el 10 %. En total obtuvo una ganancia del 5 % sobre el precio de compra. ¿Cuál fue el precio de compra de cada uno de los relojes?**

Precio de compra de los relojes: x e y

$$\left.\begin{array}{l} 1{,}1x + 0{,}9y = 210 \\ 1{,}05(x+y) = 210 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 1{,}1x + 0{,}9y = 210 \rightarrow y = \dfrac{210 - 1{,}1x}{0{,}9} \\ 1{,}05x + 1{,}05y = 210 \end{array}$$

$$1{,}05x + 1{,}05\left(\frac{210 - 1{,}1x}{0{,}9}\right) = 210 \rightarrow 0{,}945x + 220{,}5 - 1{,}155x = 189 \rightarrow$$

$$\rightarrow -0{,}21x = -31{,}5 \rightarrow x = 150,\ y = \frac{210 - 1{,}1 \cdot 150}{0{,}9} = 50$$

Los relojes costaron 150 € uno y 50 € el otro.

47. **Yago ha comprado libros, todos del mismo precio, y ha pagado 90 €. Pero por ser buen cliente, Sara, la librera, le regaló 3 más, y así cada libro le cuesta 5 € menos. ¿Cuántos libros se llevó y cuál es el precio que pagó por cada uno?**

N.º de libros que compró Yago $\rightarrow x$

$\dfrac{90}{x}$ € cuesta cada libro antes del regalo.

$\dfrac{90}{x+3}$ € cuesta cada libro tras el regalo.

$$\frac{90}{x+3} + 5 = \frac{90}{x} \rightarrow \frac{90x + 5x(x+3)}{(x+3)x} = \frac{90(x+3)}{(x+3)x} \rightarrow 90x + 5x^2 + 15x = 90x + 270 \rightarrow$$

$$\rightarrow 5x^2 + 15x - 270 = 0 \rightarrow x^2 + 3x - 54 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{9+216}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{225}}{2} = \begin{cases} 6 \\ -9, \text{ no vale.} \end{cases}$$

Solución: Yago compró 6 libros.

Yago se llevó 9 libros.

Cada libro costaba $\dfrac{90}{6} = 15$ €.

Pagó realmente por cada libro $\dfrac{90}{9} = 10$ €.

48. **Calcula el tiempo que tiene que pasar para que un capital de 10 000 € depositado en un banco aumente un 50 % en los siguientes casos:**

a) Al 4 % anual con periodo de capitalización anual.

b) Al 3,6 % anual con periodo de capitalización mensual.

Si los 10 000 € aumentan un 50 %, al final del periodo debe haber:

150 % de 10 000 € = 1,5 · 10 000 € = 15 000 €

a) Sea t = "años que deben transcurrir" y r = "tasa de interés":

$C_f = C_i \cdot (1 + r)^t$

Por tanto: $15\,000 = 10\,000 \cdot (1 + 0{,}04)^t \rightarrow 1{,}5 = 1{,}04^t \rightarrow t = \dfrac{\log 1{,}5}{\log 1{,}04} \approx 10{,}34$

Al menos deben transcurrir 11 años.

b) 3,6 % anual con capitalización mensual $\rightarrow$ 0,3 % mensual.

En este caso: $15\,000 = 10\,000 \cdot (1 + 0{,}003)^t$

$$1{,}5 = 1{,}003^t \rightarrow t = \frac{\log 1{,}5}{\log 1{,}003} \approx 135{,}36$$

Al menos deben transcurrir 136 meses, es decir, 11 años y 4 meses.

Página 74

49. **Un grupo de amigos toman un refresco cada uno y deben pagar 9 € por el total de las consumiciones. Como hay dos que solo pueden poner 1 €, los demás deben aumentar su aportación en 0,25 € cada uno. ¿Cuántos amigos son?**

$$\left.\begin{array}{l}\text{n.º de amigos} \rightarrow x \\ \text{precio de cada refresco} \rightarrow y\end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x \cdot y = 9 \\ 2 \cdot 1 + (x-2)\cdot(y+0,25) = 9\end{array}\right\} \rightarrow y = \frac{9}{x}$$

Por tanto:

$$2 + (x-2)\cdot\left(\frac{9}{x} + 0,25\right) = 9 \rightarrow 2 + 8,5 + 0,25x - \frac{18}{x} = 9 \rightarrow$$

$$\rightarrow 10,5x + 0,25x^2 - 18 = 9x \rightarrow 0,25x^2 + 1,5x - 18 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow x = \frac{-1,5 \pm \sqrt{2,25+18}}{0,5} = \frac{-1,5 \pm \sqrt{20,25}}{0,5} = \begin{cases} 6 \\ -12, \text{ no vale.}\end{cases}$$

Solución: Había 6 amigos consumiendo y cada refresco costaba $\frac{9}{6} = 1{,}50$ euros.

50. **Para llenar un depósito de 36 m^3, abrimos un grifo, A, durante 2 horas y otro grifo, B, durante 10 horas. Si solo queremos llenar 28 m^3 con esos mismos grifos, abrimos 3 horas el A y 5 horas el B. ¿Cuántos litros por hora echa cada uno de los grifos?**

$$\left.\begin{array}{l}\text{caudal del grifo A } (m^3/h) \rightarrow x \\ \text{caudal del grifo B } (m^3/h) \rightarrow y\end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} 2x + 10y = 36 \\ 3x + 5y = 28 \end{array}\right\} \xrightarrow{\cdot(-2)} \begin{array}{r} 2x + 10y = 36 \\ -6x - 10y = -56 \\ \hline -4x \quad = -20 \end{array} \rightarrow x = \frac{-20}{-4} = 5$$

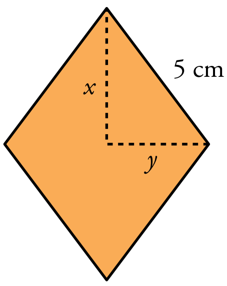
$$3x + 5y = 28 \rightarrow y = \frac{28-3x}{5}$$

$$\text{Si } x = 5 \rightarrow y = \frac{28 - 3\cdot 5}{5} = \frac{28-15}{5} = \frac{13}{5} = 2,6$$

Solución: Caudal de A: $5 m^3/h = 5000$ *l*/h

Caudal de B: $2{,}6\ m^3/h = 2600$ *l*/h

51. **El lado de un rombo mide 5 cm, y su área, 24 cm^2. Calcula la longitud de sus diagonales.**



$$\left.\begin{array}{l} \frac{2x \cdot 2y}{2} = 24 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{array}\right\} \begin{array}{l} y = \frac{12}{x} \\ x^2 + \frac{144}{x^2} = 25 \end{array}$$

$$x^4 + 144 - 25x^2 = 0 \quad (\text{cambio } x^2 = z)$$

$$z^2 - 25x + 144 = 0 \rightarrow z = \frac{25 \pm \sqrt{49}}{2} = \frac{25 \pm 7}{2} = \begin{cases} 16 \\ 9 \end{cases}$$

$z = 16 \rightarrow x = 4 \rightarrow y = 3$

$z = 9 \rightarrow x = 3 \rightarrow y = 4$

Las diagonales del rombo miden 6 cm y 8 cm.

52. **La suma de las dos cifras de un número es 8. Si al número se le añaden 18 unidades, el número resultante está formado por las mismas cifras en orden inverso. ¿Cuál es ese número?**

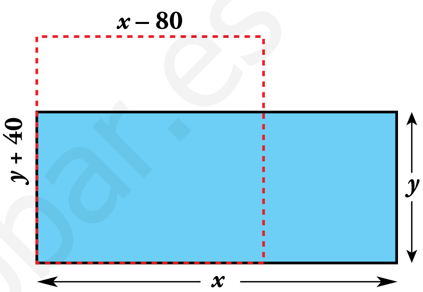
Número $\rightarrow$ $\boxed{x}\boxed{y}$ $\rightarrow$ $y + 10x$

Número inverso $\rightarrow$ $\boxed{y}\boxed{x}$ $\rightarrow$ $x + 10y$

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 8 \\ y + 10x + 18 = x + 10y \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = 8 - y \\ -9y + 9(8 - y) + 18 = 0 \rightarrow -18y = -90 \rightarrow y = 5 \rightarrow x = 3 \end{array}$$

El número es el 35.

53. **Tenemos una parcela rectangular. Si su base disminuye en 80 m y su altura aumenta en 40 m, se convierte en un cuadrado. Si disminuye en 60 m su base y su altura aumenta en 20 m, entonces su área disminuye en 400 m².** **¿Cuáles son sus dimensiones?**



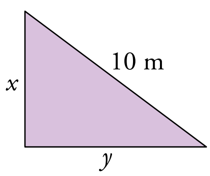
$$\left.\begin{array}{l} x - 80 = y + 40 \\ (x - 60)(y + 20) = xy - 400 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = y + 120 \\ xy - 60y + 20x - 1200 = xy - 400 \end{array}$$

$-60y + 20(y + 120) - 1\,200 = -400 \rightarrow -40y = -1\,600 \rightarrow y = 40$

$x = 40 + 120 = 160$

La parcela tiene 160 m de base y 40 m de altura.

54. **De un triángulo rectángulo sabemos que la hipotenusa mide 10 m y su área es 24 m².** **¿Cuánto miden sus catetos?**



$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{x \cdot y}{2} = 24 \\ x^2 + y^2 = 100 \end{array}\right\} \rightarrow xy = 48 \rightarrow y = \frac{48}{x} \rightarrow x^2 + \left(\frac{48}{x}\right)^2 = 100 \rightarrow$$

$$\rightarrow x^2 + \frac{2\,304}{x^2} = 100 \rightarrow x^4 + 2\,304 = 100x^2 \rightarrow$$

$$\rightarrow x^4 - 100x^2 + 2\,304 = 0$$

Hacemos un cambio de variable: $x^2 = t$

$$t^2 - 100t + 2\,304 = 0 \left\langle \begin{array}{l} t_1 = 36 \rightarrow x = \pm 6 \rightarrow y = \pm 8 \\ t_2 = 64 \rightarrow x = \pm 8 \rightarrow y = \pm 6 \end{array}\right.$$

Los catetos miden 8 m y 6 m.

55. **Las dos cifras de un número se diferencian en una unidad. Si dividimos dicho número entre el que resulta de invertir el orden de sus cifras, el cociente es 1,2. ¿Cuál es el número?**

Número $\rightarrow$ $\boxed{x}\boxed{y}$ $\rightarrow$ $y + 10x$

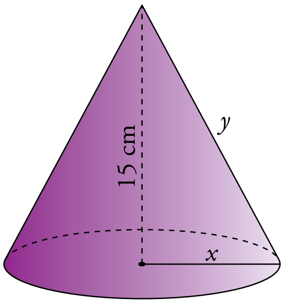
Número inverso $\rightarrow$ $x + 10y$

$$\left.\begin{array}{l} x - y = 1 \\ \dfrac{10x + y}{10y + x} = 1{,}2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = y + 1 \\ 10(y + 1) + y = 1{,}2(10y + y + 1) \end{array}$$

$10y + 10 + y = 12y + 1{,}2y + 1{,}2 \rightarrow 2{,}2y = 8{,}8 \rightarrow y = 4 \rightarrow x = 5$

El número buscado es el 54.

56. **Halla el radio y la generatriz de un cono de 15 cm de altura y cuya área lateral es de 136π cm^2.**



$$\left.\begin{array}{l} y^2 - x^2 = 15^2 \\ \pi xy = 136\pi \end{array}\right\} \; y = \frac{136}{x}$$

$$\frac{18\,496}{x^2} - x^2 = 225 \;\to\; 18\,496 - x^4 - 225x^2 = 0$$

Cambio: $x^2 = z \;\to\; z^2 + 225z - 18\,496 = 0$

$$z = \frac{-225 \pm \sqrt{50\,625 + 73\,984}}{2} = \frac{-225 \pm 353}{2} = \begin{cases} 64 \\ -280 \;\; \text{No vale.} \end{cases}$$

$$z = 64 \;\to\; x = 8 \;\to\; y = \frac{136}{8} = 17$$

El radio del cono mide 8 cm, y la generatriz, 17 cm.

57. **En un examen de 40 preguntas te dan dos puntos por cada acierto y te restan 0,5 puntos por cada fallo. ¿A cuántas preguntas hay que contestar bien para obtener como mínimo 40 puntos, si es obligatorio responder a todas?**

Aciertos $\to x$; fallos $\to 40 - x$

$2x - 0{,}5(40 - x) \ge 40 \;\to\; 2x - 20 + 0{,}5x \ge 40 \;\to\; 2{,}5x \ge 60 \;\to\; x \ge 24$

Hay que responder bien, como mínimo, a 24 preguntas.

58. **¿Cuántos kilos de pintura de 3,50 €/kg debemos mezclar con 6 kg de otra de 5 €/kg para que el precio de la mezcla sea inferior a 4 €/kg?**

$$\frac{3{,}5x + 5 \cdot 6}{x + 6} < 4 \;\to\; 3{,}5x + 30 < 4x + 24 \;\to\; 6 < 0{,}5x \;\to\; x > 12$$

Hay que mezclar más de 12 kg de pintura de 3,5 €/kg.

59. **Una caja contiene bolas blancas y negras. Si se añade una bola blanca, estas representan entonces el 25 % del contenido de la caja. Si se quita una bola blanca, las bolas blancas que quedan representan el 20 % del contenido de la caja. ¿Cuántas bolas de cada color hay en la caja?**

Llamemos B al número de bolas blancas que hay en la caja, y N, al número de bolas negras.

$$\left.\begin{array}{l} B + 1 \text{ es el } 25\% \text{ de } B + N + 1 \;\to\; 0{,}25(B + N + 1) = B + 1 \\ B - 1 \text{ es el } 20\% \text{ de } B + N - 1 \;\to\; 0{,}20(B + N - 1) = B - 1 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} -0{,}75B + 0{,}25N = 0{,}75 \\ -0{,}80B + 0{,}20N = -0{,}8 \end{array}\right\} \; B = 7, \;\; N = 24$$

Hay 7 bolas blancas y 24 negras.

60. **De dos fracciones sabemos que tienen el mismo numerador, sus denominadores son números consecutivos y la suma de ambas es igual a 27/20. Sabemos también que la suma del numerador y del denominador de la menor de las dos fracciones es igual a 8. ¿Cuáles son esas fracciones?**

$$\left.\begin{array}{l}\text{Numerador fracción mayor } \to x \\ \text{Denominador fracción mayor } \to y\end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{x}{y}+\dfrac{x}{y+1}=\dfrac{27}{20} \\ x+y+1=8\end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{l}20x(y+1)+20xy=27y(y+1) \\ x=7-y\end{array}\right\}$$

Sustituimos $x = 7 - y$ en la 1.ª ecuación y desarrollamos:

$$20(7-y)(y+1)+20(7-y)y=27y^2+27y \to -67y^2+233y+140=0 \to$$

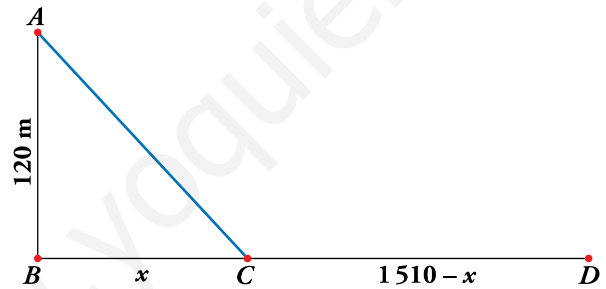
$$\to y=\frac{-233\pm\sqrt{54\,289+37\,520}}{-134}=\frac{-233\pm 303}{-134}=\begin{cases}-70/134, \text{ no vale}\\ 4\end{cases}$$

Si $y = 4 \to x = 7 - 4 = 3$

Solución: Las fracciones buscadas son $\dfrac{3}{4}$ y $\dfrac{3}{5}$.

Problemas "+"

61. **Un deportista está en A, en el mar, a 120 m de la playa BD, que mide 1 510 m.**



Para ir hasta el extremo D, nada hasta C con una velocidad de 40 m/min y camina de C a D a 90 m/min. Calcula las distancias que recorrió nadando y andando, si el tiempo que empleó en total fue de 20 minutos.

$t = \dfrac{e}{v}$

Llamamos: tiempo andando $t_a = \dfrac{1510 - x}{90}$

tiempo nadando $t_n = \dfrac{\overline{AC}}{40} = \dfrac{\sqrt{120^2 + x^2}}{40}$

$t_a + t_n = 20$ minutos

$$\frac{1510-x}{90}+\frac{\sqrt{120^2+x^2}}{40}=20 \to 4(1\,510-x)+9\sqrt{120^2+x^2}=7\,200 \to$$

$$\to 9\sqrt{120^2+x^2}=1\,160+4x \to 81(14\,400+x^2)=1\,345\,600+16x^2+9\,280x \to$$

$$\to 65x^2-9\,280x-179\,200=0 \to 13x^2-1\,856x-35\,840=0$$

$$x = \frac{1856 \pm \sqrt{3\,444\,736 + 1\,863\,680}}{26} = \frac{1856 \pm 2\,304}{26} = \begin{cases} 160 \\ -224/13 \quad \text{No vale.} \end{cases}$$

Andando: 1 510 – 160 = 1 350 m

Nadando: $\sqrt{120^2 + 160^2} = \sqrt{14\,400 + 25\,600} = \sqrt{40\,000} = 200$ m

62. **Un barco hace un servicio regular entre dos ciudades, A y B, situadas a la orilla de un río. Cuando va de A a B en sentido de la corriente del río tarda 3 horas y a la vuelta tarda 4 horas. ¿Cuánto tardará un objeto que flota en ir desde A hasta B?**

Llama v a la velocidad del barco y v' a la de la corriente. Elimina v entre las dos primeras ecuaciones y sustituye v' en la tercera. Así obtendrás t.

	VELOC.	DIST.	TIEMPO
IDA	$v + v'$	d	3
VUELTA	$v - v'$	d	4
OBJETO QUE FLOTA	v'	d	t

$v + v' = \dfrac{d}{3}$

$v - v' = \dfrac{d}{4}$

$t = \dfrac{d}{v'}$

$$\left.\begin{aligned} v + v' &= \frac{d}{3} \\ v - v' &= \frac{d}{4} \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} v + v' &= \frac{d}{3} \\ -v + v' &= -\frac{d}{4} \\ \hline 2v' &= \frac{d}{12} \to v' = \frac{d}{24} \end{aligned}$$

$$t = \frac{d}{v'} = \frac{d}{d/24} = 24$$

El objeto tardará 24 horas en ir desde A hasta B.

Página 75

63. **Subo una colina a una velocidad de 4 km/h y pretendo que la velocidad media entre el ascenso y el descenso sea de 6 km/h.**

¿A qué velocidad debo descender?

SUBIDA: $v = \dfrac{e}{t} \rightarrow 4 = \dfrac{e}{t} \rightarrow t = \dfrac{e}{4}$

BAJADA: $v' = \dfrac{e}{t'} \rightarrow t' = \dfrac{e}{v'}$

$$V_{\text{MEDIA}} = 6 = \frac{2e}{t + t'} = \frac{2e}{\dfrac{e}{4} + \dfrac{e}{v'}} \rightarrow 6 = \frac{2e}{\dfrac{ev' + 4e}{4v'}} \rightarrow 6 = \frac{8ev'}{ev' + 4e} \rightarrow$$

$$\rightarrow 3(ev' + 4e) = 4ev' \rightarrow 3ev' + 12e = 4ev' \rightarrow ev' = 12e \rightarrow v' = \frac{12e}{e} = 12$$

Debe descender a 12 km/h.

64. **Una ambulancia recibe el aviso de un accidente de tráfico y sale del hospital A hacia el punto B a una velocidad de 60 km/h.**

La vuelta al hospital la hace escoltada por la policía a 100 km/h.

¿Cuál fue la velocidad media del recorrido?

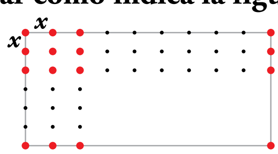
IDA: $e = 60t \rightarrow t = \dfrac{e}{60}$

VUELTA: $e = 100t' \rightarrow t' = \dfrac{e}{100}$

$$V_{\text{MEDIA}} = \frac{2e}{t + t'} = \frac{2e}{\dfrac{e}{60} + \dfrac{e}{100}} = \frac{2e}{\dfrac{160e}{6\,000}} = \frac{12\,000e}{160e} = 75$$

La velocidad media del recorrido fue de 75 km/h.

65. **¿Es posible plantar 275 árboles en una parcela rectangular de 72 m × 30 m, de modo que formen una cuadrícula regular como indica la figura?**



En caso afirmativo, averigua cuál debe ser la distancia entre dos árboles de una fila.

Si x es la distancia entre los árboles, en uno de los lados habrá $\left(\dfrac{72}{x} + 1\right)$ árboles, y en el otro, $\left(\dfrac{30}{x} + 1\right)$. Por tanto:

$$\left(\frac{72}{x} + 1\right)\left(\frac{30}{x} + 1\right) = 275 \rightarrow (72 + x)(30 + x) = 275x^2 \rightarrow 2\,160 + 102x + x^2 = 275x^2 \rightarrow$$

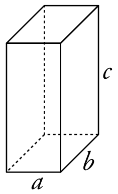
$$\rightarrow 274x^2 - 102x - 2\,160 = 0 \rightarrow x = \frac{102 \pm 1542}{548} \begin{cases} x = 3 \\ x = -2,6 \quad \text{No vale.} \end{cases}$$

La distancia debe ser de 3 m.

66. **Las áreas de las caras de un ortoedro son 35 cm², 60 cm² y 84 cm².**

a) ¿Cuál será su volumen?

b) Calcula la longitud de sus aristas.



a) $\left.\begin{aligned} ab &= 35 \\ ac &= 60 \\ bc &= 84 \end{aligned}\right\}$ Multiplicando las igualdades: $a^2b^2c^2 = 176\,400 \;\to\; abc = 420$. El volumen será 420 cm³

b) Para calcular las aristas utilizamos estas igualdades:

$\left.\begin{aligned} ab &= 35 \\ abc &= 420 \end{aligned}\right\}\; 35c = 420 \;\to\; c = 12 \text{ cm}$

$\left.\begin{aligned} ac &= 60 \\ abc &= 420 \end{aligned}\right\}\; 60b = 420 \;\to\; b = 7 \text{ cm}$

$\left.\begin{aligned} bc &= 84 \\ abc &= 420 \end{aligned}\right\}\; 84a = 420 \;\to\; a = 5 \text{ cm}$

Reflexiona sobre la teoría

67. **¿Verdadero o falso? Justifica y pon ejemplos.**

a) Si $b^2 - 4ac = 0$, la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ no tiene solución.

b) Si $k < 1$, la ecuación $9x^2 - 6x + k = 0$ tiene dos soluciones.

c) Una ecuación bicuadrada tiene siempre un número par de soluciones.

d) La ecuación $(x^2 + 5)(2^x - 5) = 0$ tiene dos soluciones.

e) La ecuación $(x - 1)^2 + (x + 1)^2 - 2(x^2 + 1) = 0$ tiene infinitas soluciones.

f) Algunos sistemas de inecuaciones no tienen solución.

g) Una inecuación tiene siempre infinitas soluciones.

a) Falso. Tendría una única solución doble.

b) Verdadero. El discriminante de la ecuación es:

$\Delta = 36 - 36k$

Si $k < 1 \;\to\; \Delta > 0$

c) Falso. Puede no tener solución y, en caso de tenerlas, basta con que una sea cero.

d) Falso. Tiene una única solución, puesto que $x^2 + 5 > 0$ siempre y $2^x - 5$ tiene una única solución.

e) Verdadero. Es una identidad, no una ecuación:

$(x - 1)^2 + (x + 1)^2 - 2(x^2 + 1) = x^2 + 1 - 2x + x^2 + 1 + 2x - 2x^2 - 2 = 0$

f) Verdadero. Por ejemplo:

$\left.\begin{aligned} x &> 3 \\ x &< 0 \end{aligned}\right\}$

g) Falso. Por ejemplo, $x^2 + 2x + 1 \le 0$ solo tiene una solución, $x = -1$.

68. **¿Cuántas soluciones puede tener una ecuación bicuadrada? Comprueba tu respuesta resolviendo las siguientes ecuaciones:**

a) $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$ **b)** $x^4 - 4x^2 = 0$ **c)** $x^4 - 16 = 0$

d) $x^4 + x^2 = 0$ **e)** $x^4 + 3x^2 + 2 = 0$ **f)** $x^4 - 4x^2 + 4 = 0$

Puede tener 4, 3, 2, 1 o ninguna soluciones.

a) $x^4 - 10x^2 + 9 = 0 \to$ Cambio $z = x^2$

$$z^2 - 10z + 9 = 0 \to z = \frac{10 \pm \sqrt{100-36}}{2} = \frac{10 \pm 8}{2} = \begin{cases} 9 \\ 1 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} z = 9 \to x = \pm 3 \\ z = 1 \to x = \pm 1 \end{array}\right\} \text{Cuatro soluciones: } 1, -1, 3 \text{ y } -3$$

b) $x^4 - 4x^2 = 0 \to x^2(x^2 - 4) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = 4 \to x = \pm 2 \end{cases}$

Tiene tres soluciones: 0, 2 y -2

c) $x^4 - 16 = 0 \to x^4 = 16 \to x^2 = 4$ (-4 no vale) $\to x = \pm 2$

Tiene dos soluciones: 2 y -2

d) $x^4 + x^2 = 0 \to x^2(x^2 + 1) = 0 \begin{cases} x^2 = 0 \to x = 0 \\ x^2 + 1 = 0 \text{ No tiene solución.} \end{cases}$

Tiene una solución: $x = 0$

e) $x^4 + 3x^2 + 2 = 0 \to$ Cambio $x^2 = z$

$$z^2 + 3z + 2 = 0 \to z = \frac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{-3 \pm 1}{2} \begin{cases} -1 \text{ No vale.} \\ -2 \text{ No vale.} \end{cases}$$

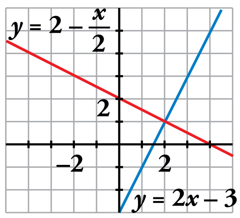
No tiene ninguna solución.

f) $x^4 - 4x^2 + 4 = 0 \to$ Cambio $x^2 = z$

$$z^2 - 4z + 4 = 0 \to z = \frac{4 \pm \sqrt{16-16}}{2} = \frac{4}{2} = 2 \to x = \pm\sqrt{2}$$

Tiene dos soluciones: $\sqrt{2}$ y $-\sqrt{2}$

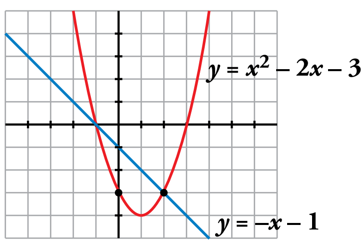
69. **Observa la representación gráfica de las rectas $y = 2 - \frac{x}{2}$ e $y = 2x - 3$:**



Contesta sin hacer operaciones: ¿para qué valores de x es $2x - 3 \ge 2 - \frac{x}{2}$?

Para $x \ge 2$, es decir, en el intervalo $[2, +\infty)$.

70. **Observa la representación de la recta $y = -x - 1$ y la de la parábola $y = x^2 - 2x - 3$.**



Responde sin hacer operaciones:

¿Para qué valores de x es $x^2 - 2x - 3 < -x - 1$?

Para $-1 < x < 2$, es decir, en el intervalo $(-1, 2)$.

71. **Escribe, en cada caso, una ecuación de segundo grado cuyas soluciones sean:**

a) 2 **y** -3 **b)** 4 **y** 5 **c)** -2 **y** -8 **d)** 2 **y** $\frac{1}{3}$

Observa las ecuaciones que has escrito y relaciona los coeficientes a, b **y** c **de la ecuación con la suma y el producto de sus soluciones.**

Por ejemplo:

a) $(x-2)(x+3)=0$

$x^2+3x-2x-6=0$

$x^2+x-6=0$

Solución: $x^2+x-6=0$

b) $(x-4)(x-5)=0$

$x^2-5x-4x+20=0$

$x^2-9x+20=0$

Solución: $x^2-9x+20=0$

c) $(x+2)(x+8)=0$

$x^2+8x+2x+16=0$

$x^2+10x+16=0$

Solución: $x^2+10x+16=0$

d) $(x-2)\cdot\left(x-\frac{1}{3}\right)=0$

$x^2-\frac{x}{3}-2x+\frac{2}{3}=0$

$3x^2-7x+2=0$

Solución: $3x^2-7x+2=0$

Veamos la relación entre los coeficientes y el producto y la suma de las soluciones:

a) $$\left.\begin{array}{l} a=1,\ b=1,\ c=-6 \\ x_1=2,\ x_2=-3 \end{array}\right\} \to \left\{\begin{array}{l} x_1+x_2=-1=\dfrac{-1}{1}=-\dfrac{b}{a} \\ x_1\cdot x_2=-6=\dfrac{-6}{1}=-6=\dfrac{c}{a} \end{array}\right.$$

b) $$\left.\begin{array}{l} a=1,\ b=-9,\ c=20 \\ x_1=4,\ x_2=5 \end{array}\right\} \to \left\{\begin{array}{l} x_1+x_2=9=\dfrac{9}{1}=-\dfrac{b}{a} \\ x_1\cdot x_2=20=\dfrac{20}{1}=\dfrac{c}{a} \end{array}\right.$$

c) $$\left.\begin{array}{l} a=1,\ b=10,\ c=16 \\ x_1=-2,\ x_2=-8 \end{array}\right\} \to \left\{\begin{array}{l} x_1+x_2=-10=\dfrac{-10}{1}=-\dfrac{b}{a} \\ x_1\cdot x_2=16=\dfrac{16}{1}=\dfrac{c}{a} \end{array}\right.$$

d) $$\left.\begin{array}{l} a=3,\ b=-7,\ c=2 \\ x_1=2,\ x_2=\dfrac{1}{3} \end{array}\right\} \to \left\{\begin{array}{l} x_1+x_2=\dfrac{7}{3}=-\dfrac{b}{a} \\ x_1\cdot x_2=\dfrac{2}{3}=\dfrac{c}{a} \end{array}\right.$$

72. **Demuestra que si** x_1 **y** x_2 **son las soluciones de la ecuación** $ax^2+bx+c=0$**, entonces** $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$ **y** $x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}$**.**

Si x_1, x_2 son soluciones, podemos escribir:

$a(x-x_1)(x-x_2)=0 \to ax^2-a(x_1+x_2)x+ax_1\cdot x_2=0$

Tenemos, por tanto:

$b=-a(x_1+x_2) \to x_1+x_2=-\frac{b}{a}$ $\qquad c=ax_1\cdot x_2 \to x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}$

Página 76

Investiga

Problemas diofánticos

A continuación, se proponen dos problemas que se pueden resolver con ecuaciones diofánticas.

Este tipo de problemas suelen tener varias soluciones.

En el caso de que haya más de una, has de encontrarlas todas.

PROBLEMA 1

En un mueble, se nos ha roto una pata de 4 cm de altura.

Para equilibrarlo provisionalmente, disponemos de varios discos de madera, unos de 5 mm de grosor y otros de 3 mm. ¿Cuántos discos de cada clase usaremos?

$$\left.\begin{array}{l}\text{N.º de discos de 5 mm} \rightarrow x\\ \text{N.º de discos de 3 mm} \rightarrow y\end{array}\right\} 5x + 3y = 40$$

Buscamos las soluciones de la ecuación con la condición de que x e y sean enteros no negativos.

$$y = \frac{40 - 5x}{3} \rightarrow$$

x	2	5	8
y	10	5	0

El problema tiene tres soluciones:

a) 2 discos de 5 mm y 10 discos de 3 mm.

b) 5 discos de 5 mm y 5 discos de 3 mm.

c) 8 discos de 5 mm.

PROBLEMA 2

En un test de 20 preguntas se consiguen 5 puntos por cada respuesta correcta, se pierden 3 por cada respuesta errónea, y otros 2 por cada pregunta sin contestar.

¿Qué tiene que ocurrir para obtener una calificación de 0 puntos? ¿Y para obtener 50?

$$\left.\begin{array}{l}\text{Respuestas correctas} \rightarrow x\\ \text{Respuestas erróneas} \rightarrow y\\ \text{Preguntas sin contestar} \rightarrow z\end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x + y + z = 20\\ 5x - 3y - 2z = P \text{ (puntuación)}\end{array}\right\} \begin{array}{l} z = 20 - x - y\\ y = 7x - 40 - P\end{array}$$

Hemos de buscar las soluciones del sistema, teniendo en cuenta que x, y, z son enteros no negativos.

— Si la puntuación es 0 $\rightarrow \begin{cases} y = 7x - 40\\ z = 20 - x - y\end{cases} \rightarrow$

x	6	7
y	2	9
z	12	4

El problema tiene dos soluciones:

- 6 respuestas correctas, 2 erróneas y 12 en blanco.
- 7 respuestas correctas, 9 erróneas y 4 en blanco.

— Si la puntuación es 50 $\rightarrow \begin{cases} y = 7x - 90 \\ z = 20 - x - y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 13 \\ y = 1 \\ z = 6 \end{cases}$

El problema tiene una solución: 13 respuestas correctas, 1 incorrecta y 6 en blanco.

Utiliza el lenguaje algebraico

Igualando

Al mayor de tres hermanos le toca la lotería, por lo que, generoso, decide doblar el capital de los dos menores. Al hacerlo, se dan cuenta de que, en ese caso, el más rico es el mediano, que, también generoso, dobla el capital de los otros dos.

Ahora resulta que el más rico es el pequeño, que, por no ser menos, dobla el capital de los dos mayores. ¡Por fin!, ahora están igualados, pues cada uno tiene 400 €.

¿Cuánto tenía cada uno al principio?

	CANTIDADES INICIALES		PRIMER CAMBIO		SEGUNDO CAMBIO		TERCER CAMBIO
MAYOR	$\rightarrow x$	$\rightarrow$	$x - y - z$	$\rightarrow$	$2x - 2y - 2z$	$\rightarrow$	$4x - 4y - 4z$
MEDIANO	$\rightarrow y$	$\rightarrow$	$2y$	$\rightarrow$	$3y - x - z$	$\rightarrow$	$6y - 2x - 2z$
PEQUEÑO	$\rightarrow z$	$\rightarrow$	$2z$	$\rightarrow$	$4z$	$\rightarrow$	$7z - x - y$

Obtenemos el sistema:

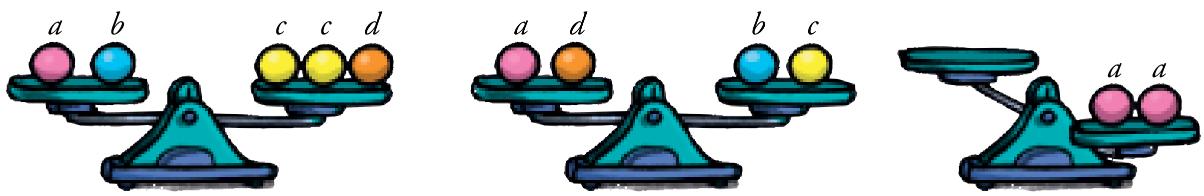
$$\left.\begin{aligned} 4x - 4y - 4z &= 400 \\ 6y - 2x - 2z &= 400 \\ 7z - x - y &= 400 \end{aligned}\right\} \left.\begin{aligned} x - y - z &= 100 \\ 3y - x - z &= 200 \\ 7z - x - y &= 400 \end{aligned}\right\} \rightarrow \begin{aligned} x &= 650 \\ y &= 350 \\ z &= 200 \end{aligned}$$

Solución: El mayor tenía 650 €; el mediano, 350 €, y el pequeño, 200 €.

Utiliza tu ingenio

Balanzas

¿Qué habría que colocar en el platillo vacío para nivelar la última balanza?



$a + b = 2c + d$

$a + d = b + c$

Sumando miembro a miembro las dos igualdades, $2a + b + d = 3c + b + d \rightarrow 2a = 3c$

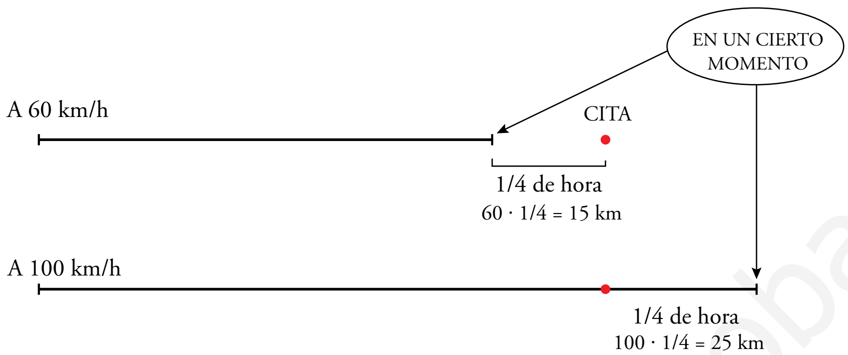
La última balanza se equilibra con tres bolas amarillas.

Página 77

Entrénate resolviendo problemas

Intenta resolver los problemas que te proponemos a continuación sin utilizar el álgebra.

- **Un motorista sale de su casa a las cinco de la tarde para acudir a una cita. Se da cuenta de que si viaja a 60 km/h llegará un cuarto de hora tarde, pero que si lo hace a 100 km/h llegará un cuarto de hora antes. ¿A qué hora es la cita? ¿A qué distancia está su destino?**



Yendo a 60 km/h, en 15 minutos recorre 15 kilómetros (los que le faltarían para llegar al lugar de la cita).

Yendo a 100 km/h, en los 15 minutos que le sobran recorrería 25 km.

Es decir, en el mismo tiempo, recorrería 40 km más yendo a 100 km/h que yendo a 60 km/h. Y esto solo ocurre si ese tiempo es de una hora.

Por tanto, el lugar de la cita está a 3/4 de hora yendo a 100 km/h, o a 5/4 de hora yendo a 60 km/h:

$$\frac{3}{4} \cdot 100 = \frac{5}{4} \cdot 60 = 75 \text{ km}$$

La cita es a las seis en punto de la tarde.

- **Un tren avanza a 300 km/h por un tramo recto de vía. Por una carretera paralela, y en la misma dirección, avanza un coche a 120 km/h.**

  ¿Cuál es la longitud del tren sabiendo que tarda 4 segundos en sobrepasar al coche por completo?

El tren adelanta al coche a una velocidad de 300 – 120 = 180 km/h.

El tren medirá lo mismo que el espacio que recorra un móvil durante 4 segundos a 180 km/h.

$$180 \cdot \frac{4}{3600} = 0{,}2 \text{ km} = 200 \text{ metros}$$

Solución: la longitud del tren es de 200 metros.

- **Un profesor de tenis, en un entrenamiento, reparte tres pelotas a cada alumno y le sobran 11. Al día siguiente lleva 20 pelotas más, con lo que cada uno recibe cinco y solo le sobra una. ¿Cuántos son los alumnos?**

Si se entregan tres pelotas a cada uno, sobran 11.

Con 20 pelotas más, y entregando 5 a cada uno, sobra una.

La diferencia de pelotas, entre entregar 3 o entregar 5 a cada uno es 11 + 20 – 1 = 30.

El número de alumnos es 30 : (5 – 3) = 15.

- **Entre todos los amigos, aportando 6 € cada uno, íbamos a comprar un balón para regalárselo a nuestro amigo Jordi. Pero Iván y Julia no pueden pagarlo, por lo que ahora tocamos a 10 €. ¿Cuántos amigos somos en la pandilla?**

Entre Iván y Julia habrían aportado 12 €.

Ahora, cada uno de los que quedan debe aportar 10 – 6 = 4 € más.

Los 12 € se reparten, por tanto, entre 12 : 4 = 3 personas.

En total, con Iván y Julia, son 5 amigos los que compran el regalo, más Jordi, son 6 en la pandilla.

Autoevaluación

1. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\sqrt{x+1} - x = \dfrac{x-7}{4}$

b) $\dfrac{1}{x} - \dfrac{x+1}{x-1} + \dfrac{5}{2} = 0$

a) $\sqrt{x+1} = \dfrac{x-7}{4} + x \to 4\sqrt{x+1} = 5x - 7$

Elevamos al cuadrado ambos miembros:

$16(x+1) = 25x^2 - 70x + 49 \to 25x^2 - 86x + 33 = 0$

$$x = \frac{86 \pm \sqrt{7\,396 - 3\,300}}{50} = \frac{86 \pm 64}{50} = \begin{cases} 3 \\ 11/25 \end{cases}$$

Comprobación:

$x = 3 \to 2 = -1 + 3 \to$ válida

$x = \dfrac{11}{25} \to \sqrt{36/25} \neq \dfrac{-164}{100} + \dfrac{11}{25} = -\dfrac{120}{100} \to$ no válida

Solución: $x = 3$

b) $2(x-1) - 2x(x+1) + 5x(x-1) = 0 \to 2x - 2 - 2x^2 - 2x + 5x^2 - 5x = 0 \to$

$$\to 3x^2 - 5x - 2 = 0 \to x = \frac{5 \pm \sqrt{25+24}}{6} = \frac{5 \pm 7}{6} = \begin{cases} 2 \\ -1/3 \end{cases}$$

Las dos soluciones son válidas.

Soluciones: $x_1 = 2,\ x_2 = -\dfrac{1}{3}$

2. Resuelve.

a) $\begin{cases} \sqrt{x} = 4 - y \\ y^2 = 4 + x \end{cases}$

b) $\begin{cases} xy = 15 \\ 4x^2 - y^2 = 11 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{l} \sqrt{x} = 4 - y \\ y^2 = 4 + x \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = 16 + y^2 - 8y \\ y^2 = 4 + 16 + y^2 - 8y \to 8y = 20 \to y = 5/2 \end{array}$

$x = 16 + \dfrac{25}{4} - 20 = \dfrac{9}{4}$

Comprobación: $\sqrt{\dfrac{9}{4}} = 4 - \dfrac{5}{2} \to \dfrac{3}{2} = \dfrac{3}{2}$

$\dfrac{5^2}{2^2} = 4 + \dfrac{9}{4} \to \dfrac{25}{4} = \dfrac{25}{4}$

b) $\left.\begin{array}{l} xy = 15 \\ 4x^2 - y^2 = 11 \end{array}\right\} y = \dfrac{15}{x}$

$4x^2 - \dfrac{225}{x^2} = 11 \to 4x^4 - 225 - 11x^2 = 0$

Cambio: $x^2 = z$

$$4z^2 - 11z - 225 = 0 \rightarrow z = \frac{11 \pm \sqrt{121 + 3\,600}}{8} = \frac{11 \pm 61}{8} = \begin{cases} 9 \\ -25/4 \quad \text{No vale.} \end{cases}$$

$z = 9 \rightarrow x = \pm 3 \rightarrow y = \pm 5$

Soluciones: $x_1 = 3,\ y_1 = 5;\ x_2 = -3,\ y_2 = -5$

3. Resuelve.

a) $10^{2x-1} = 0{,}001$

b) $25^x = 500$

c) $2^{x-1} + 2^{x+3} = \dfrac{17}{8}$

d) $\dfrac{1}{2} log_2 (3x + 3) - \dfrac{1}{2} log_2 (2x - 3) = log_2 2$

a) $10^{2x-1} = 0{,}001 \rightarrow 10^{2x-1} = 10^{-3} \rightarrow 2x - 1 = -3 \rightarrow x = -1$

b) $25^x = 500 \rightarrow log\, 25^x = log\, 500 \rightarrow x \cdot log\, 25 = log\, 500 \rightarrow x = \dfrac{log\, 500}{log\, 25} \approx 1{,}93$

c) $2^{x-1} + 2^{x+3} = \dfrac{17}{8} \rightarrow 2^x \cdot 2^{-1} + 2^x \cdot 2^3 = \dfrac{17}{8} \rightarrow \dfrac{2^x}{2} + 8 \cdot 2^x = \dfrac{17}{8} \rightarrow$

$\rightarrow 2^x + 16 \cdot 2^x = \dfrac{17}{4} \rightarrow 17 \cdot 2^x = \dfrac{17}{4} \rightarrow 2^x = \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{2^2} = 2^{-2} \rightarrow x = -2$

d) $\dfrac{1}{2} log_2 (3x + 3) - \dfrac{1}{2} log_2 (2x - 3) = log_2 2 \rightarrow \dfrac{1}{2}\left[log_2 \left(\dfrac{3x+3}{2x-3}\right)\right] = log_2 2 \rightarrow$

$\rightarrow log_2 \left(\dfrac{3x+3}{2x-3}\right) = log_2 4 \rightarrow \dfrac{3x+3}{2x-3} = 4 \rightarrow 3x + 3 = 8x - 12 \rightarrow 5x = 15 \rightarrow x = 3$

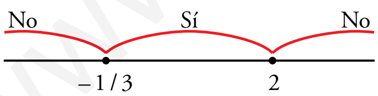
4. Resuelve.

a) $3x^2 - 5x - 2 \le 0$

b) $\begin{cases} 2x - 3 < 4 \\ 4 - x \ge -1 \end{cases}$

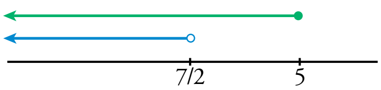
a) $3x^2 - 5x - 2 \le 0$

$$3x^2 - 5x - 2 = 0 \rightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 24}}{6} = \frac{5 \pm 7}{6} = \begin{cases} 2 \\ -1/3 \end{cases}$$



Soluciones: $\left[-\dfrac{1}{3}, 2\right];\ -\dfrac{1}{3} \le x \le 2$

b) $\begin{cases} 2x - 3 < 4 \rightarrow 2x < 7 \rightarrow x < 7/2 \\ 4 - x \ge -1 \rightarrow -x \ge -5 \rightarrow x \le 5 \end{cases}$



Soluciones: $\left(-\infty, \dfrac{7}{2}\right)$

5. Un comerciante quiere vender por 60 000 € los ordenadores que tiene en su almacén. Pero se le estropean dos y tiene que vender los otros 50 € más caros para recaudar lo mismo.

¿Cuántos ordenadores tenía y a qué precio los vendió?

$$\left.\begin{array}{l}\text{ordenadores que tiene en el almacén} \rightarrow x\\ \text{precio inicial de cada ordenador} \rightarrow y\end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l}x \cdot y = 60\,000\\ (x-2)(y+50) = 60\,000\end{array}\right\}$$

Desarrollamos y simplificamos la segunda ecuación:

$$(x-2)(y+50) = 60\,000 \rightarrow xy + 50x - 2y - 100 = 60\,000 \rightarrow 50x - 2y + xy - 60\,100 = 0$$

Sustituimos $x = \dfrac{60\,000}{y}$ en ella:

$$50 \cdot \frac{60\,000}{y} - 2y + \frac{60\,000}{y} \cdot y - 60\,100 = 0 \rightarrow \frac{3\,000\,000}{y} - 2y + 60\,000 - 60\,100 = 0$$

$$3\,000\,000 - 2y^2 - 100y = 0 \rightarrow y^2 + 50y - 1\,500\,000 = 0$$

$$y = \frac{-50 \pm \sqrt{2\,500 + 6\,000\,000}}{2} = \begin{cases}1\,200\\ -1\,250, \text{ no vale.}\end{cases}$$

$$\text{Si } y = 1\,200 \rightarrow x = \frac{60\,000}{1\,200} = 50$$

Solución: Había inicialmente 50 ordenadores y cada uno costaba 1 200 €, es decir, tenía 48 para vender a 1 250 €.

6. Las diagonales de un rombo suman 42 m y su área es 216 m². ¿Cuánto mide el perímetro del rombo?

$$\left.\begin{array}{l}\text{m que mide la diagonal mayor} \rightarrow x\\ \text{m que mide la diagonal menor} \rightarrow y\end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l}x + y = 42\\ \dfrac{x \cdot y}{2} = 216\end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l}x = 42 - y\\ x \cdot y = 432\end{array}\right\}$$

$$(42 - y)y = 432 \rightarrow 42y - y^2 - 432 = 0 \rightarrow y^2 - 42y + 432 = 0$$

$$y = \frac{42 \pm \sqrt{1764 - 1728}}{2} = \frac{42 \pm \sqrt{36}}{2} = \begin{cases}24\\ 18\end{cases}$$

Si $y = 24 \rightarrow x = 42 - 24 = 18$

Si $y = 18 \rightarrow x = 42 - 18 = 24$

Las soluciones son complementarias.

Solución: Las diagonales del rombo miden 24 cm y 18 cm respectivamente.

Por el teorema de Pitágoras, si z es el lado:

$$z^2 = 12^2 + 9^2 \rightarrow z = \sqrt{144 + 81} = \sqrt{225} = 15$$

Luego el lado del rombo mide 15 m y el perímetro será 15 · 4 = 60 m.

7. En una clase hay 5 chicos más que chicas. Sabemos que en total son algo más de 20 alumnos, pero no llegan a 25.

¿Cuál puede ser la composición de la clase?

Chicas $\rightarrow$ x

Chicos $\rightarrow$ y

$$\left.\begin{array}{l} y = x + 5 \\ 20 < x + y < 25 \end{array}\right\} \; 20 < x + x + 5 < 25 \;\rightarrow\; 20 < 2x + 5 < 25 \;\rightarrow$$

$$\rightarrow\; 15 < 2x < 20 \;\rightarrow\; \frac{15}{2} < x < 10$$

Es decir, las chicas pueden ser 8 o 9.

Hay dos soluciones: 8 chicas y 13 chicos o 9 chicas y 14 chicos.

8. ¿Cuántos litros de vino de 5 €/*l* se deben mezclar con 20 *l* de otro de 3,50 €/*l* para que el precio de la mezcla sea inferior a 4 €/*l*?

	CANTIDAD (*l*)	PRECIO (€/*l*)	COSTE (€)
I	x	5	$5x$
II	20	3,5	70
MEZCLA	$20 + x$	< 4	$< (20 + x) \cdot 4$

$5x + 70 < (20 + x) \cdot 4 \;\rightarrow\; 5x - 4x < 80 - 70 \;\rightarrow\; x < 10$

Se deben mezclar menos de 10 *l* del vino caro.

Autoevaluación

1. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\sqrt{x+1} - x = \dfrac{x-7}{4}$ **b)** $\dfrac{1}{x} - \dfrac{x+1}{x-1} + \dfrac{5}{2} = 0$

a) $\sqrt{x+1} = \dfrac{x-7}{4} + x \rightarrow 4\sqrt{x+1} = 5x - 7$

Elevamos al cuadrado ambos miembros:

$16(x+1) = 25x^2 - 70x + 49 \rightarrow 25x^2 - 86x + 33 = 0$

$$x = \frac{86 \pm \sqrt{7\,396 - 3\,300}}{50} = \frac{86 \pm 64}{50} = \begin{cases} 3 \\ 11/25 \end{cases}$$

Comprobación:

$x = 3 \rightarrow 2 = -1 + 3 \rightarrow$ válida

$x = \dfrac{11}{25} \rightarrow \sqrt{36/25} \neq \dfrac{-164}{100} + \dfrac{11}{25} = -\dfrac{120}{100} \rightarrow$ no válida

Solución: $x = 3$

b) $2(x-1) - 2x(x+1) + 5x(x-1) = 0 \rightarrow 2x - 2 - 2x^2 - 2x + 5x^2 - 5x = 0 \rightarrow$

$$\rightarrow 3x^2 - 5x - 2 = 0 \rightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{25+24}}{6} = \frac{5 \pm 7}{6} = \begin{cases} 2 \\ -1/3 \end{cases}$$

Las dos soluciones son válidas.

Soluciones: $x_1 = 2$, $x_2 = -\dfrac{1}{3}$

2. Resuelve.

a) $\begin{cases} \sqrt{x} = 4 - y \\ y^2 = 4 + x \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} xy = 15 \\ 4x^2 - y^2 = 11 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{l} \sqrt{x} = 4 - y \\ y^2 = 4 + x \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = 16 + y^2 - 8y \\ y^2 = 4 + 16 + y^2 - 8y \rightarrow 8y = 20 \rightarrow y = 5/2 \end{array}$

$x = 16 + \dfrac{25}{4} - 20 = \dfrac{9}{4}$

Comprobación: $\sqrt{\dfrac{9}{4}} = 4 - \dfrac{5}{2} \rightarrow \dfrac{3}{2} = \dfrac{3}{2}$

$\dfrac{5^2}{2^2} = 4 + \dfrac{9}{4} \rightarrow \dfrac{25}{4} = \dfrac{25}{4}$

b) $\left.\begin{array}{l} xy = 15 \\ 4x^2 - y^2 = 11 \end{array}\right\} y = \dfrac{15}{x}$

$4x^2 - \dfrac{225}{x^2} = 11 \rightarrow 4x^4 - 225 - 11x^2 = 0$

Cambio: $x^2 = z$

$$4z^2 - 11z - 225 = 0 \rightarrow z = \frac{11 \pm \sqrt{121 + 3600}}{8} = \frac{11 \pm 61}{8} = \begin{cases} 9 \\ -25/4 \text{ No vale.} \end{cases}$$

$z = 9 \rightarrow x = \pm 3 \rightarrow y = \pm 5$

Soluciones: $x_1 = 3,\ y_1 = 5;\ x_2 = -3,\ y_2 = -5$

3. Resuelve.

a) $\mathbf{10^{2x-1} = 0{,}001}$

b) $\mathbf{25^x = 500}$

c) $\mathbf{2^{x-1} + 2^{x+3} = \frac{17}{8}}$

d) $\mathbf{\frac{1}{2} \log_2 (3x+3) - \frac{1}{2} \log_2 (2x-3) = \log_2 2}$

a) $10^{2x-1} = 0{,}001 \rightarrow 10^{2x-1} = 10^{-3} \rightarrow 2x - 1 = -3 \rightarrow x = -1$

b) $25^x = 500 \rightarrow \log 25^x = \log 500 \rightarrow x \cdot \log 25 = \log 500 \rightarrow x = \dfrac{\log 500}{\log 25} \approx 1{,}93$

c) $2^{x-1} + 2^{x+3} = \dfrac{17}{8} \rightarrow 2^x \cdot 2^{-1} + 2^x \cdot 2^3 = \dfrac{17}{8} \rightarrow \dfrac{2^x}{2} + 8 \cdot 2^x = \dfrac{17}{8} \rightarrow$

$\rightarrow 2^x + 16 \cdot 2^x = \dfrac{17}{4} \rightarrow 17 \cdot 2^x = \dfrac{17}{4} \rightarrow 2^x = \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{2^2} = 2^{-2} \rightarrow x = -2$

d) $\dfrac{1}{2}\log_2 (3x+3) - \dfrac{1}{2}\log_2 (2x-3) = \log_2 2 \rightarrow \dfrac{1}{2}\left[\log_2 \left(\dfrac{3x+3}{2x-3}\right)\right] = \log_2 2 \rightarrow$

$\rightarrow \log_2 \left(\dfrac{3x+3}{2x-3}\right) = \log_2 4 \rightarrow \dfrac{3x+3}{2x-3} = 4 \rightarrow 3x + 3 = 8x - 12 \rightarrow 5x = 15 \rightarrow x = 3$

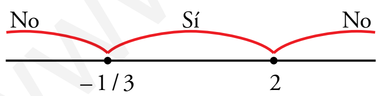
4. Resuelve.

a) $\mathbf{3x^2 - 5x - 2 \le 0}$

b) $\begin{cases} \mathbf{2x - 3 < 4} \\ \mathbf{4 - x \ge -1} \end{cases}$

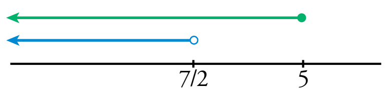
a) $3x^2 - 5x - 2 \le 0$

$$3x^2 - 5x - 2 = 0 \rightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 24}}{6} = \frac{5 \pm 7}{6} = \begin{cases} 2 \\ -1/3 \end{cases}$$



Soluciones: $\left[-\dfrac{1}{3}, 2\right];\ -\dfrac{1}{3} \le x \le 2$

b) $\begin{cases} 2x - 3 < 4 \rightarrow 2x < 7 \rightarrow x < 7/2 \\ 4 - x \ge -1 \rightarrow -x \ge -5 \rightarrow x \le 5 \end{cases}$



Soluciones: $\left(-\infty, \dfrac{7}{2}\right)$

5. **Un comerciante quiere vender por 60 000 € los ordenadores que tiene en su almacén. Pero se le estropean dos y tiene que vender los otros 50 € más caros para recaudar lo mismo.**

¿Cuántos ordenadores tenía y a qué precio los vendió?

$$\left.\begin{array}{l}\text{ordenadores que tiene en el almacén} \to x\\ \text{precio inicial de cada ordenador} \to y\end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l}x \cdot y = 60\,000\\ (x-2)(y+50) = 60\,000\end{array}\right\}$$

Desarrollamos y simplificamos la segunda ecuación:

$(x-2)(y+50) = 60\,000 \to xy + 50x - 2y - 100 = 60\,000 \to 50x - 2y + xy - 60\,100 = 0$

Sustituimos $x = \dfrac{60\,000}{y}$ en ella:

$50 \cdot \dfrac{60\,000}{y} - 2y + \dfrac{60\,000}{y} \cdot y - 60\,100 = 0 \to \dfrac{3\,000\,000}{y} - 2y + 60\,000 - 60\,100 = 0$

$3\,000\,000 - 2y^2 - 100y = 0 \to y^2 + 50y - 1\,500\,000 = 0$

$$y = \frac{-50 \pm \sqrt{2\,500 + 6\,000\,000}}{2} = \begin{cases} 1\,200 \\ -1\,250, \text{ no vale.}\end{cases}$$

Si $y = 1\,200 \to x = \dfrac{60\,000}{1\,200} = 50$

Solución: Había inicialmente 50 ordenadores y cada uno costaba 1 200 €, es decir, tenía 48 para vender a 1 250 €.

6. **Las diagonales de un rombo suman 42 m y su área es 216 m². ¿Cuánto mide el perímetro del rombo?**

$$\left.\begin{array}{l}\text{m que mide la diagonal mayor} \to x\\ \text{m que mide la diagonal menor} \to y\end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l}x + y = 42\\ \dfrac{x \cdot y}{2} = 216\end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{l}x = 42 - y\\ x \cdot y = 432\end{array}\right\}$$

$(42 - y)y = 432 \to 42y - y^2 - 432 = 0 \to y^2 - 42y + 432 = 0$

$$y = \frac{42 \pm \sqrt{1764 - 1728}}{2} = \frac{42 \pm \sqrt{36}}{2} = \begin{cases} 24 \\ 18 \end{cases}$$

Si $y = 24 \to x = 42 - 24 = 18$

Si $y = 18 \to x = 42 - 18 = 24$

Las soluciones son complementarias.

Solución: Las diagonales del rombo miden 24 cm y 18 cm respectivamente.

Por el teorema de Pitágoras, si z es el lado:

$z^2 = 12^2 + 9^2 \to z = \sqrt{144 + 81} = \sqrt{225} = 15$

Luego el lado del rombo mide 15 m y el perímetro será $15 \cdot 4 = 60$ m.

7. En una clase hay 5 chicos más que chicas. Sabemos que en total son algo más de 20 alumnos, pero no llegan a 25.

¿Cuál puede ser la composición de la clase?

Chicas $\to x$

Chicos $\to y$

$$\left.\begin{array}{l} y = x + 5 \\ 20 < x + y < 25 \end{array}\right\} \; 20 < x + x + 5 < 25 \;\to\; 20 < 2x + 5 < 25 \;\to$$

$$\to\; 15 < 2x < 20 \;\to\; \frac{15}{2} < x < 10$$

Es decir, las chicas pueden ser 8 o 9.

Hay dos soluciones: 8 chicas y 13 chicos o 9 chicas y 14 chicos.

8. ¿Cuántos litros de vino de 5 €/*l* se deben mezclar con 20 *l* de otro de 3,50 €/*l* para que el precio de la mezcla sea inferior a 4 €/*l*?

	CANTIDAD (*l*)	PRECIO (€/*l*)	COSTE (€)
I	x	5	$5x$
II	20	3,5	70
MEZCLA	$20 + x$	< 4	$< (20 + x) \cdot 4$

$5x + 70 < (20 + x) \cdot 4 \;\to\; 5x - 4x < 80 - 70 \;\to\; x < 10$

Se deben mezclar menos de 10 *l* del vino caro.

Página 81

Resuelve

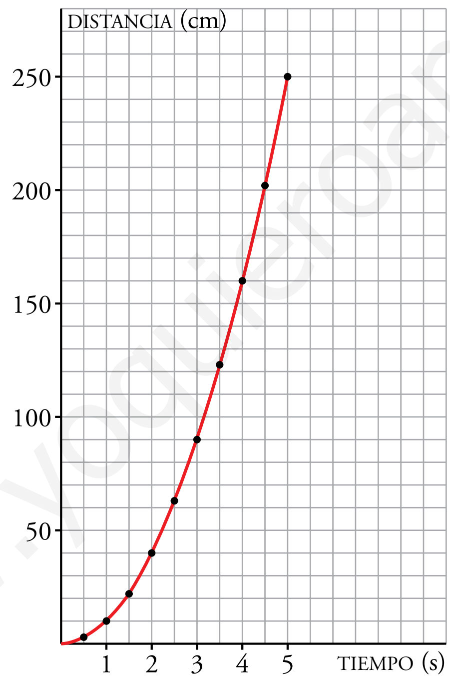
1. **Se deja caer una bola por un raíl levemente inclinado y se mide la distancia que recorre en distintos tiempos:**

TIEMPO EN s (t)	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5
DISTANCIA EN cm (e)	0	2,5	10	22	40	63	90	123	160	202	250

a) Representa, en tu cuaderno, los datos anteriores sobre una cuadrícula como la que tienes a la derecha. Úsalos para obtener la curva correspondiente.

b) Comprueba que los valores obtenidos responden (con muy buena aproximación) a la siguiente relación:

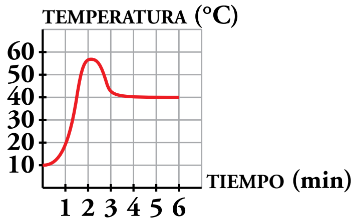
$$e = 10t^2$$



1 Conceptos básicos

Página 82

1. Esta gráfica describe la temperatura a la que sale el agua de un grifo que se mantiene un rato abierto.



a) ¿Cuáles son las dos variables?

b) Explica por qué es una función.

c) ¿Cuáles son el dominio de definición y el recorrido?

a) Variable independiente → tiempo (min)

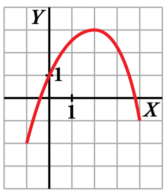
Variable dependiente → temperatura (°C)

b) Para cada valor del tiempo hay un único valor de temperatura.

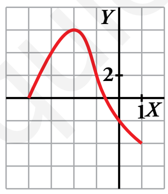
c) Dominio = [0, 6]   Recorrido = [10, 58]

2. Indica el dominio y el recorrido de estas funciones:

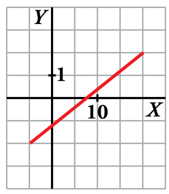
a)



b)



c)



a) *Dom f* = [–1, 4]

Rec f = [–2, 3]

b) *Dom f* = [–4, 1]

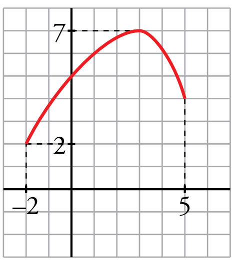
Rec f = [–4, 6]

c) *Dom f* = [–5, 20]

Rec f = [–2, 2]

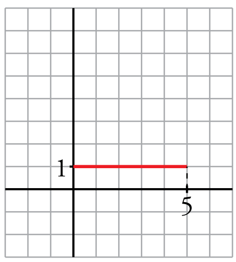
3. Representa una función cuyos dominio y recorrido sean, respectivamente, [–2, 5] y [2, 7]. Inventa otra con dominio [0, 5] y recorrido {1}.

Ejercicio de respuesta abierta. Una posible solución sería:



Dom f = [–2, 5]

Rec f = [2, 7]



Dom f = [0, 5]

Rec f = {1}

2 Cómo se presentan las funciones

Página 83

1. Vamos a analizar la gráfica de arriba correspondiente al precio de la vivienda:

a) ¿Qué quiere decir que la gráfica arranque en el 100 %? ¿Te parece razonable?

b) El máximo fue del 115 %. ¿En qué momento ocurrió? Contesta aproximadamente.

c) ¿Cuál fue el mínimo? ¿En qué momento sucedió?

d) ¿Cuál fue el índice del precio en el 2006?

a) La gráfica describe la variación (en %) del precio de la vivienda en una región desde 1992 hasta 2016.

Que comience en 100 % significa que se toma como precio de referencia para analizar dicha variación el precio de la vivienda en 1992; lo cual es razonable ya que en ese año comienza el estudio.

b) En el año 2005.

c) El mínimo fue del 87 % aproximadamente. Sucedió en 2013.

d) 110 %, es decir, en el año 2006 el precio de la vivienda había aumentado un 10 % respecto al año 1992.

2. Fíjate en las funciones *altura sobre el nivel del mar - tiempo transcurrido* que se han descrito más arriba referentes a las excursiones realizadas por Félix y María.

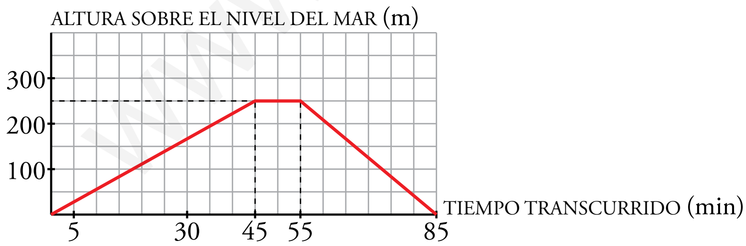
a) Representa la gráfica correspondiente a Félix.

b) Representa la gráfica correspondiente a María.

c) Si compararas las dos gráficas anteriores con las de tus compañeros, ¿cuáles serían más parecidas, las de Félix o las de María? Explica por qué.

a) Respuesta abierta (la información proporcionada en el enunciado hace que existan diferentes respuestas a esta pregunta).

b)



c) Las de María, porque tenemos datos (situación de la casa respecto al nivel del mar, tiempo que tarda en ascender la colina, altura de esta respecto al nivel del mar…) que permiten representar la gráfica con mayor precisión. En el caso de Félix, al no disponer de dicha información, existen diferentes posibilidades para representar el enunciado en una gráfica.

Página 84

3. **Halla la cuota íntegra que corresponde a cada una de las siguientes bases liquidables:**

a) 12 000 € **b) 25 000 €**

c) 50 000 € **d) 100 000 €**

a) Nos situamos en la 1.ª fila. Por los primeros 10 000 € no hay que pagar nada. Por los 2 000 € restantes hay que pagar el 15 %, que son 0,15 · 2 000 = 300 €. Por tanto, habrá que pagar 300 €.

b) Nos situamos en la 2.ª fila. Por los primeros 20 000 € hay que pagar 1 500 €. Por los restantes 5 000 € hay que pagar el 25 %, que son 0,25 · 5 000 = 1 250 €. Por tanto, habrá que pagar 1 500 € + 1 250 € = 2 750 €.

c) La cuota correspondiente a esta cantidad se encuentra directamente, sin cálculos, en la última fila → 11 000 €.

d) Nos situamos en la última fila. Por los primeros 50 000 € hay que pagar 11 000 €. Por los 50 000 € restantes, hay que pagar el 45 %, es decir, 0,45 · 50 000 = 22 500 €. Por tanto, hay que pagar en total 11 000 € + 22 500 € = 33 500 €.

4. **La segunda columna de la tabla de arriba se puede obtener a partir del resto de los datos que hay en ella.**

Explica cómo.

BASE LIQUIDABLE (€)	CUOTA ÍNTEGRA	RESTO BASE LIQUIDABLE (€)	TIPO APLICABLE (%)
10 000	0	hasta 10 000	15
20 000	0 + 15 % de 10 000 = 1 500	hasta 10 000	25
30 000	1 500 + 25 % de 10 000 = 4 000	hasta 20 000	35
50 000	4 000 + 35 % de 20 000 = 11 000	en adelante	45

Página 85

5. En el EJEMPLO 1, calcula la distancia que recorre la bola en 1, 2, 3, 4 y 5 segundos. ¿A qué tiempo corresponde una distancia de 2 m?

$t = 1$ s $\to$ $e = 0{,}1 \cdot 1^2 = 0{,}1$ m

$t = 2$ s $\to$ $e = 0{,}1 \cdot 2^2 = 0{,}4$ m

$t = 3$ s $\to$ $e = 0{,}1 \cdot 3^2 = 0{,}9$ m

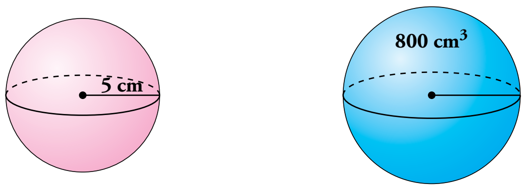
$t = 4$ s $\to$ $e = 0{,}1 \cdot 4^2 = 1{,}6$ m

$t = 5$ s $\to$ $e = 0{,}1 \cdot 5^2 = 2{,}5$ m

Calculamos en qué tiempo se recorren 2 m:

$2 = 0{,}1 \cdot t^2 \to t = \sqrt{20} \approx 4{,}47$ s

6. En el EJEMPLO 2, halla el volumen de una esfera de radio 5 cm y el radio de una esfera de volumen 800 cm³.



$$V = \frac{4}{3}\pi \cdot 5^3 = \frac{500\pi}{3} \text{ cm}^3 \approx 523{,}6 \text{ cm}^3$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}} = \sqrt[3]{\frac{2\,400}{4\pi}} = \sqrt[3]{\frac{600}{\pi}} \text{ cm} \approx 5{,}76 \text{ cm}$$

7. Halla (EJEMPLO 3) el periodo de un péndulo de 1 m de largo. ¿Cuál es la longitud de un péndulo cuyo periodo es de 6 segundos?

$l = 1$ metro $\to$ $T = \sqrt{4 \cdot 1} = 2$ segundos

$T = 6$ segundos $\to$ $6 = \sqrt{4l} \to 36 = 4l \to l = 9$ metros

8. Calcula el tamaño aparente, A, de un objeto (EJEMPLO 4) para los siguientes valores de d:

0; 0,5; 1; 1,5; 1,9; 1,99

Para $d = 4$ se obtiene $A = -1$. Eso significa que el objeto se ve del mismo tamaño, pero invertido. Interpreta los valores de A para d:

10; 5; 2,5; 2,1; 2,01

$d = 0 \to A = 1$

$d = 0{,}5 \to A = 4/3$

$d = 1 \to A = 2$

$d = 1{,}5 \to A = 4$

$d = 1{,}9 \to A = 20$

$d = 1{,}99 \to A = 200$

$d = 10 \to A = -1/4$. El objeto se ve a 1/4 de su tamaño, e invertido.

$d = 5 \to A = -2/3$. El objeto se ve a 2/3 de su tamaño, e invertido.

$d = 2{,}5 \to A = -4$. El objeto se ve a 4 veces su tamaño, e invertido.

$d = 2{,}1 \to A = -20$. El objeto se ve a 20 veces su tamaño, e invertido.

$d = 2{,}01 \to A = -200$. El objeto se ve a 200 veces su tamaño, e invertido.

3 Dominio de definición

Página 86

1. Halla el dominio de definición de:

a) $y = \dfrac{1}{x^2 + 2x - 8}$

b) $y = \sqrt{x - 5}$

c) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x - 5}}$

d) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 2x - 8}}$

a) $x^2 + 2x - 8 = 0 \rightarrow x = \dfrac{-2 \pm \sqrt{4 + 32}}{2} = \dfrac{-2 \pm 6}{2} = \begin{cases} x = 2 \\ x = -4 \end{cases}$

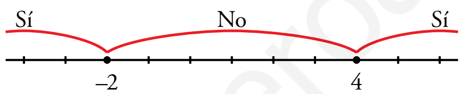
$Dom\, f = \mathbb{R} - \{x \,/\, x^2 + 2x - 8 = 0\} = \mathbb{R} - \{-4, 2\}$

b) $Dom\, f = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x - 5 \ge 0\} = [5, +\infty)$

c) $Dom\, f = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x - 5 > 0\} = (5, +\infty)$

d) Tenemos que resolver la inecuación $x^2 - 2x - 8 > 0$.

Las raíces de $x - 2x - 8$ son $x = 4$, $x = -2$.



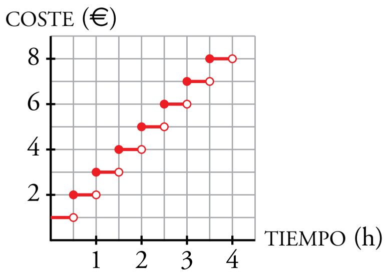
Solución: $(-\infty, -2) \cup (4, +\infty)$

$Dom\, f = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x^2 - 2x - 8 > 0\} = (-\infty, -2) \cup (4, +\infty)$

4 Funciones continuas. Discontinuidades

Página 87

1. Construye una función similar a la ①, pero para el caso de que se pague 1 € cada media hora. ¿Cuál de las opciones de pago te parece más justa?



Esta opción de pago es más justa que la del ejemplo.

2. Analiza la función ③ para valores "próximos a 2". Comprueba que cuando *x* vale 1,9; 1,99; 1,999; 2,01; 2,001, la *y* toma valores "muy grandes".

$$x = 1{,}9 \;\rightarrow\; y = \frac{1}{(1{,}9 - 2)^2} = 100$$

$$x = 1{,}99 \;\rightarrow\; y = \frac{1}{(1{,}99 - 2)^2} = 10^4$$

$$x = 1{,}999 \;\rightarrow\; y = \frac{1}{(1{,}999 - 2)^2} = 10^6$$

$$x = 2{,}01 \;\rightarrow\; y = \frac{1}{(2{,}01 - 2)^2} = 10^4$$

$$x = 2{,}001 \;\rightarrow\; y = \frac{1}{(2{,}001 - 2)^2} = 10^6$$

5 Crecimiento, máximos y mínimos

Página 88

1. Observa la función de la derecha y responde:

a) ¿En qué intervalos es creciente y en cuáles es decreciente?

b) ¿Cuáles son sus máximos y sus mínimos relativos?

a) Crece en $(-5, -3) \cup (5, +\infty)$.

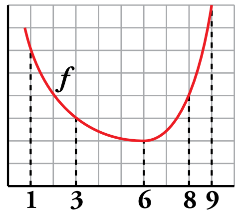
Decrece en $(-\infty, -5) \cup (-3, 5)$.

b) Máximo relativo en el punto $(-3, 5)$.

Mínimos relativos en los puntos $(-5, 3)$ y $(5, -2)$.

Página 89

2. Halla la tasa de variación media (T.V.M.) de la función f representada, en los intervalos [1, 3], [3, 6], [6, 8], [8, 9] y [3, 9].



T.V.M. $[1, 3] = \dfrac{3-6}{3-1} = \dfrac{-3}{2}$

T.V.M. $[3, 6] = \dfrac{2-3}{6-3} = -\dfrac{1}{3}$

T.V.M. $[6, 8] = \dfrac{4-2}{8-6} = 1$

T.V.M. $[8, 9] = \dfrac{8-4}{9-8} = 4$

T.V.M. $[3, 9] = \dfrac{8-3}{9-3} = \dfrac{5}{6}$

3. Halla la T.V.M. de la función $y = x^2 - 4x + 5$ (PROBLEMA RESUELTO 2) en [0, 2], [1, 3] y [1, 4].

T.V.M. $[0, 2] = \dfrac{1-5}{2} = -2$

T.V.M. $[1, 3] = \dfrac{2-2}{3-1} = 0$

T.V.M. $[1, 4] = \dfrac{5-2}{4-1} = 1$

4. Halla la velocidad media de la piedra del PROBLEMA RESUELTO 3 en los intervalos [0, 1], [0, 3], [3, 4] y [4, 8].

T.V.M. $[0, 1] = \dfrac{35-0}{1-0} = 35$

T.V.M. $[0, 3] = \dfrac{75-0}{3-0} = 25$

T.V.M. $[3, 4] = \dfrac{80-75}{4-3} = 5$

T.V.M. $[4, 8] = \dfrac{0-80}{8-4} = -20$

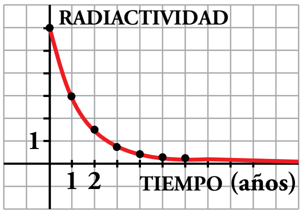
Los resultados están expresados en m/s.

6 Tendencia y periodicidad

Página 91

1. La cantidad de radiactividad que posee una sustancia se reduce a la mitad cada año. La gráfica adjunta describe la cantidad de radiactividad que hay en una porción de esa sustancia al transcurrir el tiempo.

¿A cuánto *tiende* la radiactividad con el paso del tiempo?



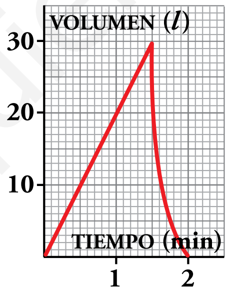
La radiactividad, con el paso del tiempo, tiende a cero.

2. La cisterna de unos servicios públicos se llena y se vacía, automáticamente, cada dos minutos, siguiendo el ritmo de la gráfica adjunta.

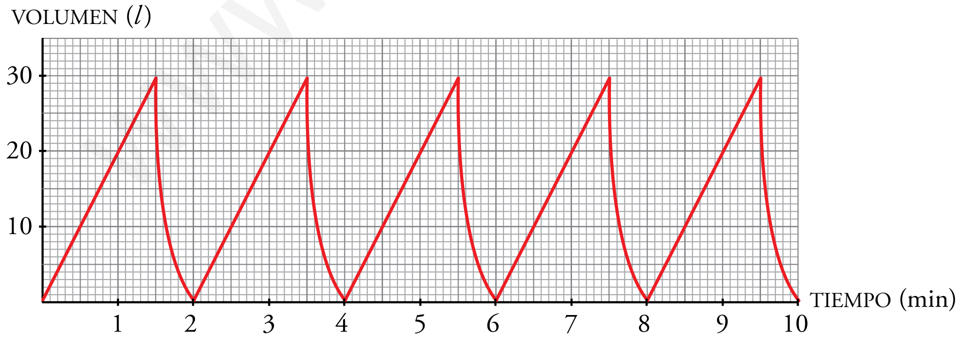
a) Dibuja la gráfica correspondiente a 10 min.

b) ¿Cuánta agua habrá en la cisterna en los siguientes instantes?

I) 17 min II) 40 min 30 s III) 1 h 9 min 30 s



a)



b) I) $f(17) = f(1) = 20$ litros

II) $f(40 \text{ min } 30 \text{ s}) = f(30 \text{ s}) = 10$ litros

III) $f(1 \text{ h } 9 \text{ min } 30 \text{ s}) = f(1 \text{ min } 30 \text{ s}) = 30$ litros

Página 92

Hazlo tú. **Calcula el dominio de definición de la siguiente función:**

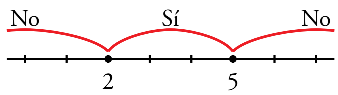
$$y = \sqrt{-2x^2 + 14x - 20}$$

$Dom\, f = \{x \in \mathbb{R} \,/\, -2x^2 + 14x - 20 \geq 0\}$

Tenemos que resolver la inecuación $-2x^2 + 14x - 20 \geq 0 \xrightarrow[:(-2)]{\text{Simplificando}} x^2 - 7x + 10 \leq 0$

Las raíces del polinomio $x^2 - 7x + 10$ son:

$$x^2 - 7x + 10 = 0 \to x = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 40}}{2} = \frac{7 \pm 3}{2} = \begin{cases} x = 5 \\ x = 2 \end{cases}$$



Solución: $x \in [2, 5]$

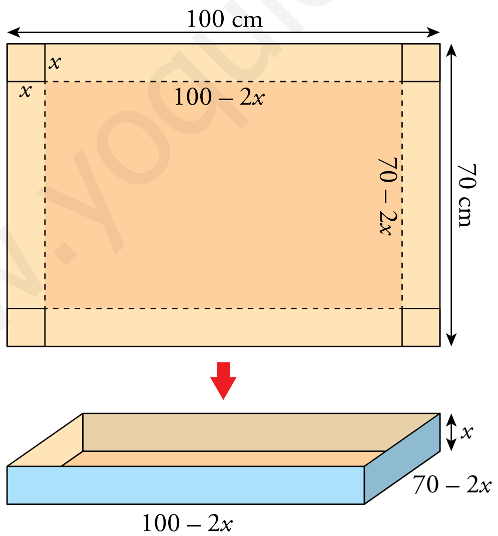
Por tanto, $Dom\, f = [2, 5]$.

Hazlo tú. **Repite esta actividad para una cartulina de 1 m × 70 cm.**

a) Si cortamos un cuadrado de lado x en cada esquina, obtenemos una caja de altura x y cuya base es un rectángulo de dimensiones $(100 - 2x)$ de largo y $(70 - 2x)$ de ancho.

Por tanto, el volumen de la caja en función de x es:

$$V(x) = (100 - 2x) \cdot (70 - 2x) \cdot x \to V(x) = 4x^3 - 340x^2 + 7\,000x$$

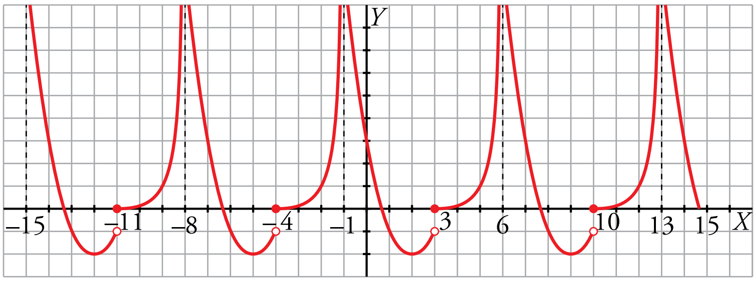


b) Para que haya caja se debe verificar:

$$\left.\begin{array}{l} x > 0 \\ 100 - 2x > 0 \to x < 50 \\ 70 - 2x > 0 \to x < 35 \end{array}\right\} \to 0 < x < 35 \to Dom\, V = (0, 35)$$

Página 93

Hazlo tú. Representa la función en el intervalo [–15, 15]. ¿Es creciente o decreciente en el intervalo [–24, –23]? ¿Qué ramas infinitas tiene en el intervalo [40, 49]?



- Por ser periódica de periodo 7, en el intervalo [–24, –23] ocurre lo mismo que en el intervalo [–3, –2] (se trata de un intervalo igual pero trasladado tres periodos, es decir $3 \cdot 7 = 21$ unidades, a la derecha). La función en ese intervalo es creciente.
- La función presenta asíntotas verticales en las rectas $x = -1 + 7n, \ n \in \mathbb{Z}$.

  Por tanto, las asíntotas verticales de la función en el intervalo [40, 49] son:

  $n = 6 \ \rightarrow \ x = 41$

  $n = 7 \ \rightarrow \ x = 48$

Hazlo tú. Halla la velocidad media en la primera hora, en las dos primeras horas, en las tres primeras horas… y así sucesivamente.

Velocidad media en la primera hora = T.V.M. [0, 1] = $\dfrac{125-0}{1-0} = 125$ km/h

Velocidad media en las dos primeras horas = T.V.M. [0, 2] = $\dfrac{175-0}{2-0} = 87{,}5$ km/h

Velocidad media en las tres primeras horas = T.V.M. [0, 3] = $\dfrac{275-0}{3-0} = 91{,}67$ km/h

Velocidad media en las cuatro primeras horas = T.V.M. [0, 4] = $\dfrac{350-0}{4-0} = 87{,}5$ km/h

Velocidad media en las cinco primeras horas = T.V.M. [0, 5] = $\dfrac{400-0}{5-0} = 80$ km/h

Velocidad media en las seis primeras horas = T.V.M. [0, 6] = $\dfrac{400-0}{6-0} = 66{,}67$ km/h

Velocidad media en las siete primeras horas = T.V.M. [0, 7] = $\dfrac{475-0}{7-0} = 67{,}86$ km/h

Velocidad media en las ocho primeras horas = T.V.M. [0, 8] = $\dfrac{600-0}{8-0} = 75$ km/h

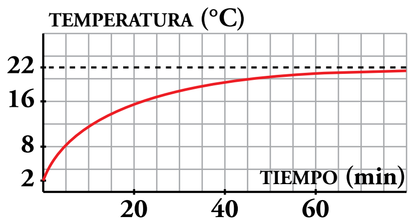
Ejercicios y problemas

Página 94

Practica

Interpretación de gráficas

1. **Hemos sacado de la nevera un vaso con agua. Esta gráfica muestra la temperatura del agua (en grados centígrados) al pasar el tiempo:**

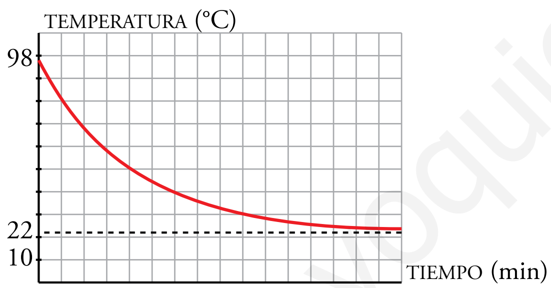


a) ¿Qué temperatura hay dentro de la nevera? ¿Y fuera?

b) Sacamos del microondas un vaso con agua a 98 °C. Dibuja una gráfica que muestre la temperatura del agua al pasar el tiempo.

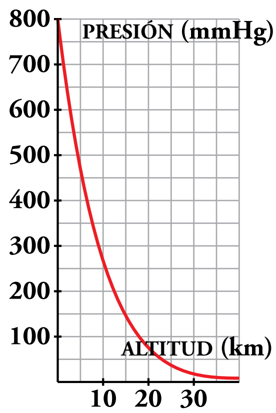
a) Dentro de la nevera hay 2 °C y fuera 22 °C.

b)



2. **La presión atmosférica a nivel del mar es, por término medio, de 760 mm de mercurio (mmHg).**

En la gráfica se aprecia cómo varía al aumentar la altura.



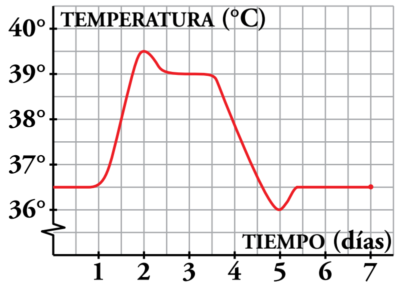
a) ¿A cuánto tiende la presión cuando la altura aumenta?

b) ¿Qué presión sufre el exterior de un avión que vuela a 10 km de altura?

a) Cuando aumenta la altura la presión tiende a 0 mmHg.

b) 260 mmHg aproximadamente.

3. Esta es la gráfica de la evolución de la temperatura de un enfermo:



a) ¿Cuánto tiempo estuvo en observación?

b) ¿En qué día la temperatura alcanza un máximo? ¿Y un mínimo? ¿Qué temperaturas alcanza?

c) ¿En qué intervalos de tiempo crece la temperatura y en cuáles decrece?

a) 7 días.

b) El enfermo alcanzó la temperatura máxima el 2.º día y fue 39,5 °C.

El enfermo alcanzó la temperatura mínima el 5.º día y fue 36 °C.

c) La temperatura crece si $x \in (1, 2) \cup (5; 5{,}3)$ aproximadamente.

La temperatura decrece si $x \in (2; 2{,}5) \cup (3{,}5; 5)$ aproximadamente.

Enunciados, fórmulas y tablas

4. **Tres deportistas han estado nadando durante media hora. Su entrenador ha medido cada 5 min las distancias recorridas y ha obtenido estos datos:**

TIEMPO (min)	5	10	15	20	25	30
DISTANCIA A (m)	95	235	425	650	875	1 100
DISTANCIA B (m)	250	500	750	1 000	1 250	1 500
DISTANCIA C (m)	360	710	1 020	1 300	1 490	1 600

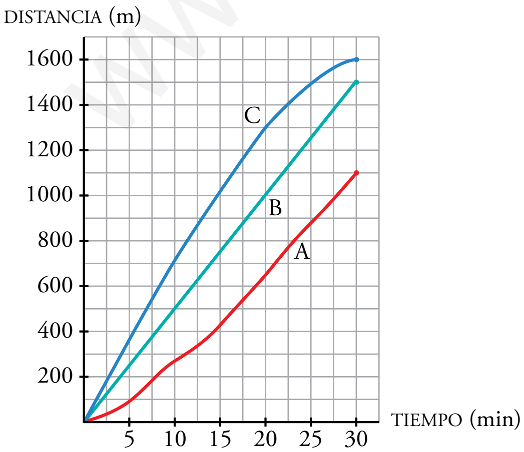
a) En unos mismo ejes, dibuja la gráfica *distancia-tiempo* de los tres nadadores. Descríbelas.

b) ¿Ha habido algún adelantamiento?

c) Calcula la velocidad media de cada uno.

d) ¿Cuál es el dominio y el recorrido de cada función?

a)



b) No ha habido ningún adelantamiento.

c) $V_m\,(A) = \dfrac{1100}{30} = 36{,}67$ m/min

$V_m\,(B) = \dfrac{1500}{30} = 50$ m/min

$V_m\,(C) = \dfrac{1600}{30} = 53{,}3$ m/min

d) *Dom* A = *Dom* B = *Dom* C = [0, 30]

Rec A = [0, 1 100]; *Rec* B = [0, 1 500];

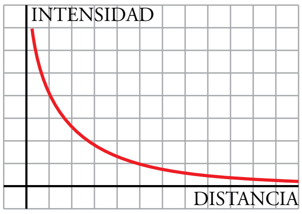
Rec C = [0, 1 600]

5. **La intensidad del sonido de un foco sonoro es menor a medida que nos alejamos de él y, además, decrece cada vez más despacio.**

a) Representa la intensidad del sonido en función de la distancia al foco sonoro.

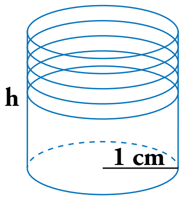
b) ¿Cuál es la tendencia?

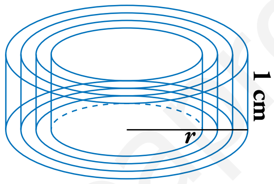
a) Una posible gráfica es:



b) La tendencia de la función es cero: la intensidad del sonido es prácticamente nula a medida que nos alejamos del foco.

6. **El volumen, en cm^3, de un cilindro cuya base tiene 1 cm de radio en función de su altura, h, dada en cm, es $V = \pi h$. Por otro lado, el volumen de un cilindro cuya altura es 1 cm en función del radio, r, en cm, de su base es $V = \pi r^2$.**





a) Calcula el volumen de un cilindro de 1 cm de radio para alturas de 1, 2, 3, 4 y 5 cm. Representa la función.

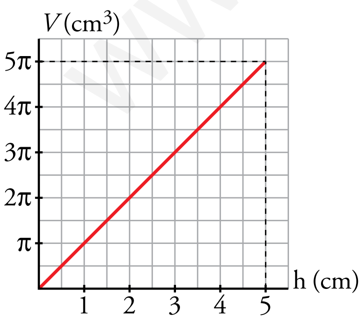
b) Halla el volumen de un cilindro de 1 cm de altura para radios de 1, 2, 3, 4 y 5 cm. Representa la función.

c) ¿Qué altura tiene un cilindro de 1 cm de radio cuyo volumen es 37,68 cm^3?

d) ¿Qué radio tiene un cilindro de 1 cm de altura cuyo volumen es 803,84 cm^3?

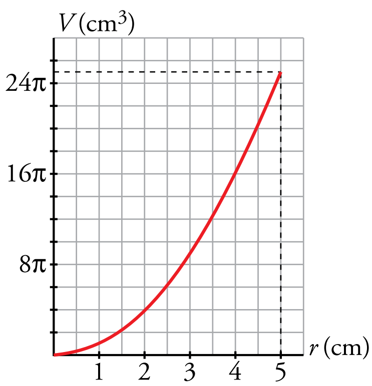
a) $V(h) = \pi h$

h	1	2	3	4	5
V	π	2π	3π	4π	5π



b) $V(r) = \pi r^2$

r	1	2	3	4	5
V	π	4π	9π	16π	25π



c) $37{,}68 = \pi h \rightarrow h = \dfrac{37{,}68}{\pi} = 12$ cm

d) $803{,}84 = \pi r^2 \rightarrow r = \sqrt{\dfrac{803{,}84}{3{,}14}} = \sqrt{256} = 16$ cm

Página 95

Dominio de definición

7. **Halla el dominio de definición en cada caso:**

a) $y = \dfrac{1}{x-3}$ **b)** $y = \dfrac{-3x}{2x+10}$ **c)** $y = \dfrac{2x-1}{x^2+1}$

d) $y = \dfrac{2}{-x}$ **e)** $y = \dfrac{x-1}{x^2+x-6}$ **f)** $y = \dfrac{1}{x^2-x}$

g) $y = \sqrt{x+7}$ **h)** $y = \sqrt{1-x}$ **i)** $y = \sqrt{3x-9}$

j) $y = \sqrt{-x}$ **k)** $y = \sqrt[3]{3x-4}$ **l)** $y = 1-5\sqrt{2x+2}$

a) $x - 3 \neq 0 \ \to \ x \neq 3$ $\qquad Dom\ y = \mathbb{R} - \{3\}$

b) $2x + 10 \neq 0 \ \to \ 2x \neq -10 \ \to \ x \neq -5$ $\qquad Dom\ y = \mathbb{R} - \{-5\}$

c) $x^2 + 1 \neq 0$ para cualquier valor de x $\qquad Dom\ y = \mathbb{R}$

d) $-x \neq 0 \ \to \ x \neq 0$ $\qquad Dom\ y = \mathbb{R} - \{0\}$

e) $x^2 + x - 6 \neq 0 \ \to \ x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \dfrac{-1 \pm 5}{2} = \begin{cases} 2 \\ -3 \end{cases}$ $\qquad Dom\ y = \mathbb{R} - \{-3, 2\}$

f) $x^2 - x \neq 0 \ \to \ x(x-1) \neq 0 \ \to \ x \neq 0$ y $x \neq 1$ $\qquad Dom\ y = \mathbb{R} - \{0, 1\}$

g) $x + 7 \geq 0 \ \to \ x \geq -7$ $\qquad Dom\ y = [-7, +\infty)$

h) $1 - x \geq 0 \ \to \ x \leq 1$ $\qquad Dom\ y = (-\infty, 1]$

i) $3x - 9 \geq 0 \ \to \ 3x \geq 9 \ \to \ x \geq 3$ $\qquad Dom\ y = [3, +\infty)$

j) $-x \geq 0 \ \to \ x \leq 0$ $\qquad Dom\ y = (-\infty, 0]$

k) $Dom\ y = \mathbb{R}$

l) $2x + 2 \geq 0 \ \to \ 2x \geq -2 \ \to \ x \geq -1$ $\qquad Dom\ y = [-1, +\infty)$

8. **Halla en cada caso el dominio de definición:**

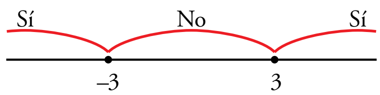
a) $y = \sqrt{x^2-9}$ **b)** $y = \sqrt{x^2+6x-7}$ **c)** $y = \sqrt{x^2}$

d) $y = \sqrt{-x^2}$ **e)** $y = \sqrt{4-x^2}$ **f)** $y = \sqrt{-x^2-x+2}$

a) $x^2 - 9 \geq 0$

$x^2 - 9 = 0 \ \to \ (x+3)(x-3) = 0$

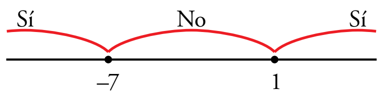
$Dom\ y = (-\infty, -3] \cup [3, +\infty)$



b) $x^2 + 6x - 7 \geq 0$

$x^2 + 6x - 7 = 0 \ \to \ x = \dfrac{-6 \pm \sqrt{36+28}}{2} = \dfrac{-6 \pm 8}{2} = \begin{cases} 1 \\ -7 \end{cases}$

$Dom\ y = (-\infty, -7] \cup [1, +\infty)$



c) $x^2 \geq 0$ para cualquier valor de x.

$Dom\ y = \mathbb{R}$

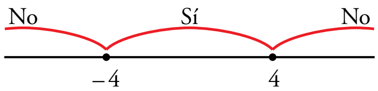
d) $-x^2 < 0$ para cualquier valor de $x \neq 0$.

$\sqrt{-x^2}$ solo tiene sentido para $x = 0$.

$Dom\ y = \{0\}$

e) $4 - x^2 \geq 0$

$(2 - x)(2 + x) \geq 0$

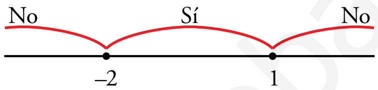


$Dom\ y = [-2, 2]$

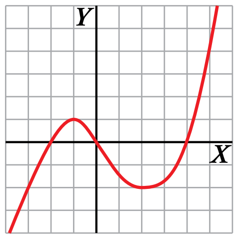
f) $-x^2 - x + 2 \geq 0$

$$x^2 + x - 2 = 0 \rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} = \begin{cases} 1 \\ -2 \end{cases}$$

$Dom\ y = [-2, 1]$



9. **Observa la gráfica de la función $y = f(x)$. Corta al eje X en $x = -2$, $x = 0$ y $x = 4$. Toma valores positivos en los intervalos $(-2, 0)$ y $(4, +\infty)$, y toma valores negativos en $(-\infty, -2)$ y $(0, 4)$.**

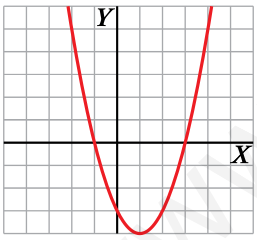


Teniendo esto en cuenta, podemos afirmar que:

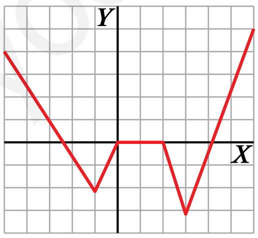
- **El dominio de definición de la función $y = \dfrac{1}{f(x)}$ es $\mathbb{R} - \{-2, 0, 4\}$.**
- **El dominio de definición de la función $y = \sqrt{f(x)}$ es $[-2, 0] \cup [4, +\infty)$.**

Razonando de forma similar, di el dominio de definición de $y = \dfrac{1}{f(x)}$ e $y = \sqrt{f(x)}$, para las siguientes funciones dadas por sus gráficas:

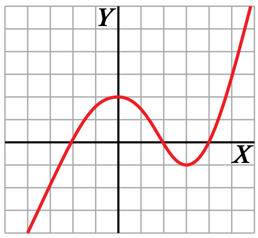
a)



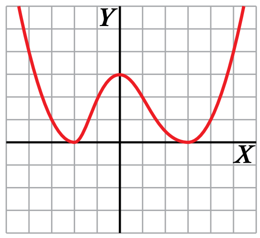
b)



c)



d)



a) $f(x) = 0$ si $x \in \{-1, 3\}$

$f(x) > 0$ si $x \in (-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$

$f(x) < 0$ si $x \in (-1, 3)$

Por tanto:

$Dom\ \dfrac{1}{f(x)} = \mathbb{R} - \{-1, 3\}$

$Dom\ \sqrt{f(x)} = (-\infty, -1] \cup [3, +\infty)$

b) $f(x) = 0$ si $x \in \{-2{,}5\} \cup [0, 2] \cup \{4{,}25\}$

$f(x) > 0$ si $x \in (-\infty; -2{,}5) \cup (4{,}25; +\infty)$

$f(x) < 0$ si $x \in (-2{,}5; 0) \cup (2; 4{,}25)$

Por tanto:

$Dom\ \dfrac{1}{f(x)} = (-\infty; -2{,}5) \cup (-2{,}5; 0) \cup$
$\cup\ (2; 4{,}25) \cup (4{,}25; +\infty)$

$Dom\ \sqrt{f(x)} = (-\infty; -2{,}5] \cup [0, 2] \cup [4{,}25; +\infty)$

c) $f(x) = 0$ si $x \in \{-2, 2, 4\}$

$f(x) > 0$ si $x \in (-2, 2) \cup (4, +\infty)$

$f(x) < 0$ si $x \in (-\infty, -2) \cup (2, 4)$

Por tanto:

$Dom\ \dfrac{1}{f(x)} = \mathbb{R} - \{-2, 2, 4\}$

$Dom\ \sqrt{f(x)} = [-2, 2] \cup [4, +\infty)$

d) $f(x) = 0$ si $x \in \{-2,3\}$

$f(x) > 0$ si $x \in \mathbb{R} - \{-2, 3\}$

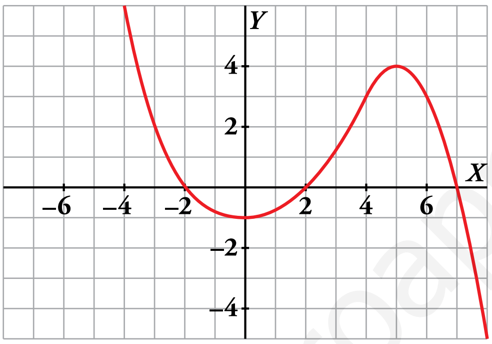
Por tanto:

$Dom\ \dfrac{1}{f(x)} = \mathbb{R} - \{-2, 3\}$

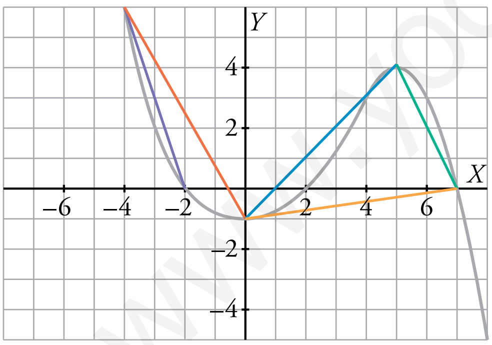
$Dom\ \sqrt{f(x)} = \mathbb{R}$

Características de una función

10. **Observa esta función y halla su T.V.M. en los intervalos [0, 4], [0, 5], [5, 7], [0, 7], [–4, 0] y [–4, –2].**



Copia en tu cuaderno la gráfica y dibuja en cada caso el segmento del cual estás hallando la pendiente.



T.V.M. $[0, 4] = \dfrac{3+1}{4} = 1$

T.V.M. $[0, 5] = \dfrac{4+1}{5} = 1$

T.V.M. $[5, 7] = \dfrac{0-4}{7-5} = -2$

T.V.M. $[0, 7] = \dfrac{0+1}{7} = \dfrac{1}{7}$

T.V.M. $[-4, 0] = \dfrac{-1-6}{0+4} = \dfrac{-7}{4}$

T.V.M. $[-4, -2] = \dfrac{0-6}{-2+4} = -3$

11. **Halla la T.V.M. de $y = 3x^3 + 9x^2 - 3x - 9$ en los intervalos [–2, 0], [–1, 0], [–3, –1] y [0, 1].**

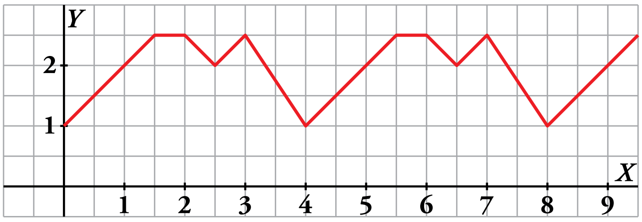
T.V.M. $[-2, 0] = \dfrac{-9-9}{0+2} = -9$

T.V.M. $[-1, 0] = \dfrac{-9-0}{0+1} = -9$

T.V.M. $[-3, -1] = \dfrac{0-0}{-1+3} = 0$

T.V.M. $[0, 1] = \dfrac{0+9}{1} = 9$

12. **Explica por qué es periódica esta función:**

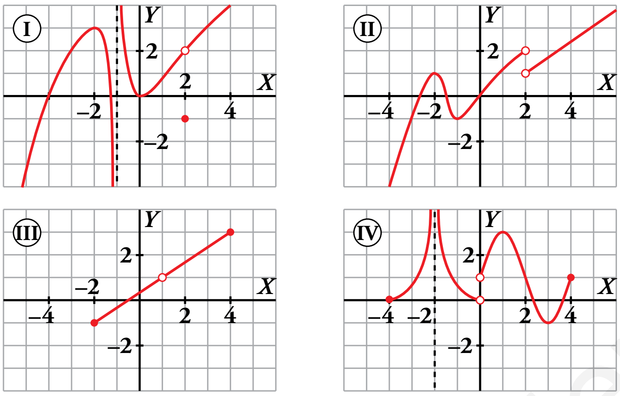


Da su periodo y los valores de la función en los puntos de abscisas $x = 1$, $x = 3$, $x = 20$, $x = 23$ y $x = 42$.

La función es periódica de periodo 4.

$f(1) = 2$; $f(3) = 2{,}5$; $f(20) = f(0) = 1$; $f(23) = f(3) = 2{,}5$; $f(42) = f(2) = 2{,}5$

13. **Observa estas gráficas discontinuas y contesta:**



a) ¿Cuáles son los puntos de discontinuidad? Explica la razón de discontinuidad en cada punto.

b) ¿Cuál es su dominio de definición?

c) Indica, si tiene, los máximos y los mínimos relativos.

d) ¿En qué intervalos es creciente? ¿Y decreciente?

a) (I) $\begin{cases} \text{Discontinua en } x = -1. \text{ Tiene ramas infinitas.} \\ \text{Discontinua en } x = 2. \text{ Tiene un punto desplazado.} \end{cases}$

(II) Discontinua en $x = 2$. No está definida en este punto y, además, en él da un salto.

(III) $\begin{cases} \text{Discontinua en } (-\infty, -2) \cup (4, +\infty). \text{ No está definida.} \\ \text{Discontinua en } x = 1 \text{ porque no está definida.} \end{cases}$

(IV) $\begin{cases} \text{Discontinua en } (-\infty, -4) \cup (4, +\infty). \text{ No está definida.} \\ \text{Discontinua en } x = -2. \text{ Tiene ramas infinitas.} \\ \text{Discontinua en } x = 0. \text{ No está definida y presenta un salto.} \end{cases}$

b) *Dom* (I) = $(-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$ *Dom* (II) = $(-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$

Dom (III) = $[-2, 1) \cup (1, 4]$ *Dom* (IV) = $[-4, -2) \cup (-2, 0) \cup (0, 4]$

c) (I) Máximo relativo en $(-2, 3)$. Mínimo relativo en $(0, 0)$

(II) Máximo relativo en $(-2, 1)$. Mínimo relativo en $(-1, -1)$.

(III) No tiene ni máximos ni mínimos relativos.

(IV) Máximo relativo en $(1, 3)$. Mínimo relativo en $(3, -1)$.

d) (I) Crece en $(-\infty, -2) \cup (0, 2) \cup (2, +\infty)$. Decrece en $(-2, -1) \cup (-1, 0)$.

(II) Crece en $(-\infty, -2) \cup (-1, 2) \cup (2, +\infty)$. Decrece en $(-2, -1)$.

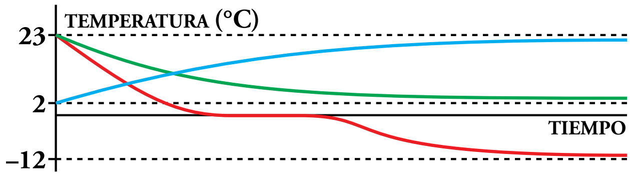
(III) Crece en $(-2, 1) \cup (1, 4)$. No decrece.

(IV) Crece en $(-4, -2) \cup (0, 1) \cup (3, 4)$. Decrece en $(-2, 0) \cup (1, 3)$.

Página 96

Resuelve problemas

14. **Observa las siguientes gráficas de funciones:**



a) Relaciona cada curva con estos enunciados sobre la temperatura de un vaso de agua:

I. Cuando pasa de la mesa a la nevera.

II. Cuando se saca de la nevera y se deja en la mesa.

III. Cuando pasa de la mesa al congelador.

b) ¿A qué temperatura está la casa? ¿Y el congelador? ¿Y la nevera?

a) I - verde. II - azul. III - roja.

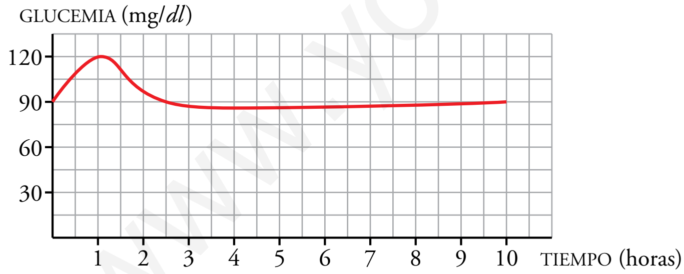
b) La casa está a 23 °C, el congelador a –12 °C y la nevera a 2 °C.

15. **Cuando una persona sana toma 50 g de glucosa en ayunas, su glucemia (% de glucosa en la sangre) se eleva, en una hora aproximadamente, desde 90 mg/*dl*, que es el nivel normal, hasta 120 mg/*dl*. Luego, en las 3 h siguientes, disminuye hasta valores algo por debajo del nivel normal, y vuelve a la normalidad al cabo de 5 h.**

a) Representa la curva de glucemia en el tramo desde que ingiere la glucosa hasta que vuelve a su nivel normal.

b) Indica en qué momentos alcanza su máximo y en cuáles su mínimo.

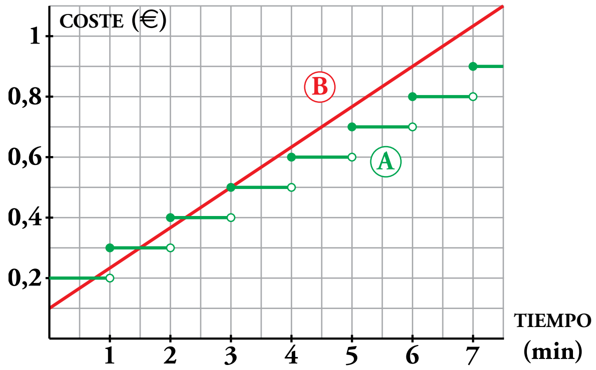
a)



b) El máximo es de 120 mg/*gl* al cabo de 1 h de iniciar la toma. El mínimo está ligeramente por debajo de 90 mg/*dl* y se alcanza a las 4 h de iniciar la toma.

La tendencia de la función es 90 mg/*dl* (tener la glucemia en un nivel normal).

16. **Dos compañías telefónicas, A y B, tienen diferentes tarifas. Observa las gráficas y contesta:**



a) Determina cuánto vale una llamada de 3 minutos con cada una de las dos compañías.

b) ¿Y una llamada de media hora?

c) Razona por qué elegirías una u otra compañía.

a) Una llamada de 3 min cuesta 0,50 € en cualquiera de las dos compañías.

b) La compañía A cobra 3,20 € por 30 minutos.

La compañía B cobra 0,10 € más 0,40 € por cada 3 min. Por tanto, por 30 min cobrará $0{,}1 + 0{,}40 \cdot 10 = 4{,}10$ €.

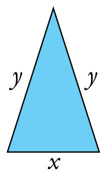
c) Si habitualmente hiciera llamadas cortas (de 3 min o menos), contrataría con B. Si hiciera llamadas largas con frecuencia, contrataría con la compañía A.

17. **Un triángulo isósceles tiene 20 cm de perímetro. Llama x al lado desigual e y a los lados iguales.**

a) Haz una tabla de valores y, a partir de ella, escribe la función que relaciona el valor de y con el de x.

b) ¿Cuál es su dominio de definición?

a)



x	2	4	6	8	10
y	9	8	7	6	5

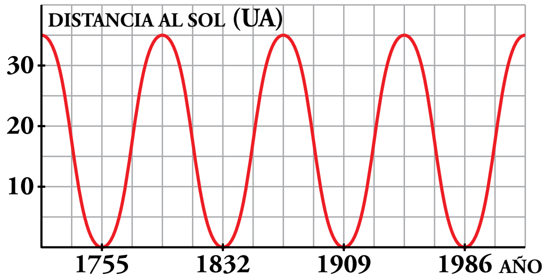
$$x + 2y = 20 \rightarrow 2y = 20 - x \rightarrow y = \frac{20 - x}{2}$$

b) Para que el triángulo exista:

$$\left.\begin{array}{l} x > 0 \\ 2y > x \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} x > 0 \\ 20 - x > x \end{array}\right\} \rightarrow \mathit{Dominio} = (0,\ 10)$$

Por tanto, observamos que el último par de valores de la tabla no se corresponde con un triángulo real.

18. **La órbita del cometa Halley es una elipse muy excéntrica, uno de cuyos focos es el Sol. Esta función relaciona la distancia del cometa al Sol con el tiempo:**



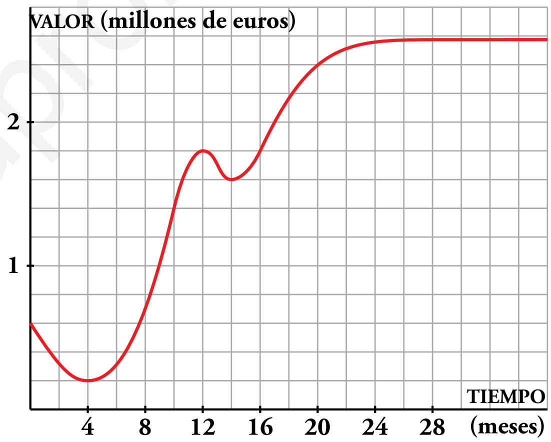
a) ¿Es una función periódica? ¿Cuál es su periodo?

b) ¿En qué año volverá a acercarse al Sol?

a) Es una función periódica de periodo T = 1 832 – 1 755 = 77 años.

b) 1 986 + 77 = 2 063 → El año 2063

19. **La gráfica adjunta describe el valor de una empresa desde que se fundó.**



a) ¿Cuál era su valor en el momento de la apertura?

b) ¿A cuánto se redujo su valor después de 4 meses?

c) ¿Cuál es la T.V.M. en el intervalo [4, 12]? Da el resultado en miles de euros por mes.

d) ¿Cuál es la T.V.M. en [12, 14] y en [14, 20]?

e) Esta función tiene un máximo y dos mínimos relativos. Descríbelos.

f) ¿Cuál parece la tendencia de esta función para los próximos meses?

g) Haz una descripción global del valor de esta empresa en sus tres primeros años.

a) El valor de la empresa en el momento de la apertura era de 600 000 €.

b) Después de 4 meses su valor se redujo a 200 000 €.

c) $\text{T.V.M. } [4, 12] = \dfrac{1\,800\,000 - 200\,000}{12 - 4} = 200\,000$ €/mes

d) $\text{T.V.M. } [12, 14] = \dfrac{1\,600\,000 - 1\,800\,000}{14 - 12} = -100\,000$ €/mes

$\text{T.V.M. } [14, 20] = \dfrac{2\,400\,000 - 1\,600\,000}{20 - 14} = 133\,333{,}33$ €/mes

e) Máximo relativo en (12, 1 800 000)

Mínimos relativos en (4, 200 000) y (14, 1 600 000)

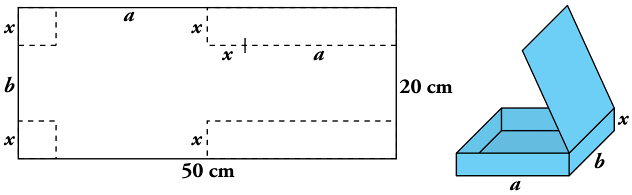
f) Parece que el valor de la empresa, para los próximos meses, tiende a 2 600 000 €.

g) El valor de la empresa tiene un brusco descenso en los cuatro primeros meses. A partir de aquí crece rápidamente durante 8 meses y tiene una ligera caída en los dos meses siguientes. A partir del mes 14.º crece rápidamente durante otros 6 meses y después cada vez más despacio. Su precio se aproxima a 2 600 000 €.

Página 97

Problemas "+"

20. **Con un rectángulo de cartulina de 50 cm × 20 cm, queremos fabricar una caja con tapadera.**



a) Obtén la expresión del volumen.

b) Dando valores a x, representa la gráfica de la función $V(x)$.

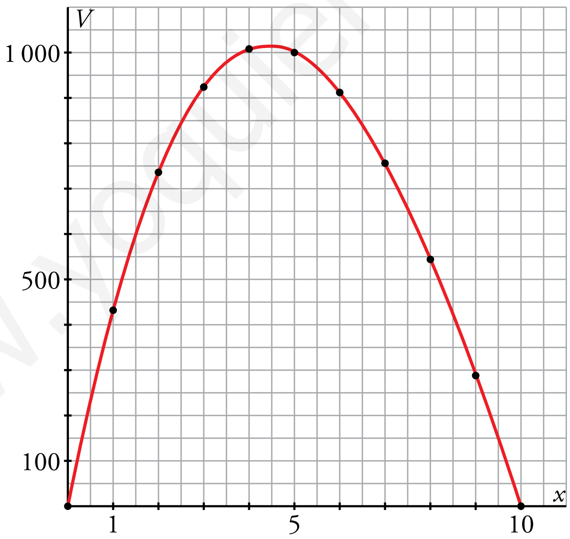
c) ¿Cuál es el dominio de $V(x)$?

a) $a = \dfrac{50 - 2x}{2} = 25 - x; \;\; b = 20 - 2x$

$V = (25 - x)(20 - 2x)x = 2x^3 - 70x^2 + 500x$

b)

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
V	0	432	736	924	1 008	1 000	912	756	544	288	0

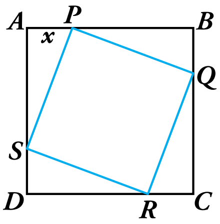


c) *Dom* $V = (0, 10)$, pues el volumen solo tiene sentido para valores positivos de x, a y b.

a es positivo si $0 < x < 25$.

b es positivo si $0 < x < 10$.

21. **Dibuja un cuadrado *ABCD* de 7 cm de lado. Sobre el lado *AB*, marca un punto *P* que diste *x* de *A*, y dibuja un nuevo cuadrado *PQRS* inscrito en el anterior.**



a) Observa que si $x = 3$ cm, entonces $\overline{AS} = 7 - 3 = 4$ cm. ¿Cuánto mide $\overline{PS}$? ¿Cuál es el área del nuevo cuadrado?

b) Construye la gráfica de la función que relaciona *x* con el área del cuadrado inscrito. Di su dominio.

a) $\overline{PS} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$ cm. Área del cuadrilátero interior $= 5^2 = 25$ cm^2

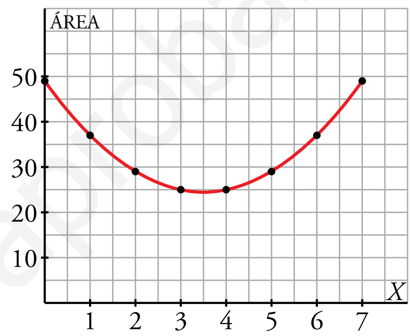
b) $A = \left(\sqrt{x^2 + (7 - x)^2}\right)^2 =$

$= x^2 + 49 + x^2 - 14x =$

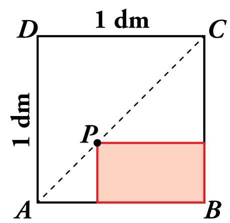
$= 2x^2 - 14x + 49$

El dominio es (0, 7).

x	ÁREA
0	49
1	37
2	29
3	25
4	25
5	29
6	37
7	49



22. **En un cuadrado *ABCD* de lado 1 dm dibuja la diagonal *AC*. Para cada punto *P* de esta diagonal, se forma un rectángulo, como en la figura.**

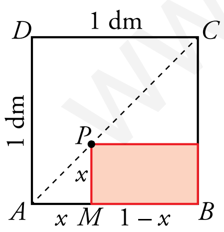


a) Halla su área cuando *P* dista de *AB*: 1/4 dm, 1/2 dm y 3/4 dm.

b) Dibuja la gráfica de la función que relaciona la distancia de *P* a *AB* con el área del rectángulo.

c) Indica el dominio de definición de la función.

a)



$$\left.\begin{array}{l}\text{Los triángulos } \widehat{ABC} \text{ y } \widehat{AMP} \text{ son semejantes} \\ \text{(son rectángulos con un ángulo agudo común)} \\ \widehat{ABC} \text{ es isósceles } (\overline{AB} = \overline{BC} = 1 \text{ dm})\end{array}\right\} \rightarrow \widehat{AMP} \text{ también es isósceles}$$

Sea $x = \overline{AM} \rightarrow \overline{PM} = \overline{AM} = x$ y $\overline{MB} = 1 - x$

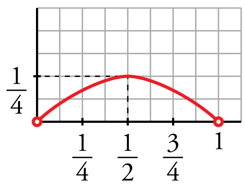
$$\left.\begin{array}{l} x = \overline{PM} \\ y = \text{área del rectángulo}\end{array}\right\} \rightarrow y = x \cdot (1 - x) \rightarrow y = -x^2 + x$$

$x = \frac{1}{4}$ dm $\to y = -\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{4} = \frac{3}{16} \to y = \frac{3}{16}$ dm^2

$x = \frac{1}{2}$ dm $\to y = -\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \to y = \frac{1}{4}$ dm^2

$x = \frac{3}{4}$ dm $\to y = -\left(\frac{3}{4}\right)^2 + \frac{3}{4} = \frac{3}{16} \to y = \frac{3}{16}$ dm^2

b) $y = -x^2 + x$



c) *Dominio* = (0, 1)

23. Una función, $f(x)$, es periódica de periodo 5, y su T.V.M. en [1, 3] es 1.

a) ¿Qué podemos decir de la T.V.M. de la función en el intervalo [6, 8]? ¿Y en el intervalo [11, 13]?

b) ¿Qué T.V.M. tiene la función en [3, 6]?

c) ¿Cuál es la tasa de variación media de la función en el intervalo [4, 9]? ¿Y en [8, 43]?

a) Si $f(x)$ es periódica de periodo 5 $\to f(a) = f(a + 5n)$ con $n \in \mathbb{Z}$.

Por tanto:

$$\left.\begin{array}{l} f(6) = f(1) \quad (6 = 1 + 5 \cdot 1) \\ f(8) = f(3) \quad (8 = 3 + 5 \cdot 1) \end{array}\right\} \to \text{T.V.M. } [6, 8] = \text{T.V.M. } [1, 3] = 1$$

$$\left.\begin{array}{l} f(11) = f(1) \quad (11 = 1 + 5 \cdot 2) \\ f(13) = f(3) \quad (13 = 3 + 5 \cdot 2) \end{array}\right\} \to \text{T.V.M. } [11, 13] = \text{T.V.M. } [1, 3] = 1$$

b) T.V.M. [1, 3] = 1 $\to \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = 1 \to f(3) - f(1) = 2 \to f(3) = f(1) + 2$

$f(6) = f(1)$ ($f(x)$ es periódica de periodo 5 y $6 = 1 + 5 \cdot 1$)

T.V.M. [3, 6] $= \frac{f(6) - f(3)}{6 - 3} = \frac{f(1) - (f(1) + 2)}{3} = -\frac{2}{3}$

c) $f(9) = f(4)$ ya que $f(x)$ es periódica de periodo 5 y $9 = 4 + 5 \cdot 1$

T.V.M. [4, 9] $= \frac{f(9) - f(4)}{9 - 4} = \frac{0}{5} = 0$

$f(8) = f(3)$ ($f(x)$ periódica de periodo 5 y $8 = 3 + 5 \cdot 1$)

$f(43) = f(3)$ ($f(x)$ periódica de periodo 5 y $43 = 3 + 5 \cdot 8$)

T.V.M. [8, 43] $= \frac{f(43) - f(8)}{43 - 8} = \frac{f(3) - f(3)}{35} = \frac{0}{35} = 0$

Reflexiona sobre la teoría

24. **La expresión analítica de una función es de la forma $y = ax^3 + bx^2 + c$. Si sabemos que los puntos $A(0, -2)$, $B(1, 5)$ y $C(-2, -22)$ pertenecen a la gráfica, ¿cuáles serán los valores de a, b y c?**

$A(0, -2) \to -2 = c$

$$\left.\begin{array}{l} B(1, 5) \to 5 = a + b + c = a + b - 2 \\ C(-2, -22) \to -22 = -8a + 4b - 2 \end{array}\right\} a = 7 - b$$

$-22 = -8(7 - b) + 4b - 2 \to -22 = -56 + 8b + 4b - 2 \to 12b = 36 \to b = 3$

$a = 7 - b = 4$

Los valores buscados son: $a = 4$, $b = 3$, $c = -2$.

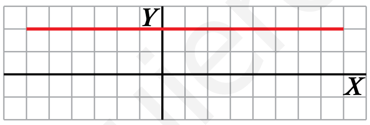
25. **Calcula el valor de a, b y c para que los puntos $A(-12, a)$, $B(3/4, b)$ y $C(0, c)$ pertenezcan a la gráfica de la función $y = 3x^2 - x + 3$.**

$A(-12, a) \to a = 432 + 12 + 3 = 447$

$$B\left(\frac{3}{4}, b\right) \to b = 3 \cdot \left(\frac{9}{16}\right) - \left(\frac{3}{4}\right) + 3 = \frac{63}{16}$$

$C(0, c) \to c = 3$

26. **Observa esta gráfica y responde:**



a) ¿Cuál es su dominio de definición? ¿Y su recorrido?

b) ¿Tiene máximos o mínimos relativos?

c) Halla la T.V.M. de la función en los intervalos [0, 5], [–1, 6] y [–5, 0]. ¿Qué ocurre?

a) *Dominio* = [–6, 8]   *Recorrido* = {2}

b) No tiene extremos relativos.

c) $\text{T.V.M. } [0, 5] = \dfrac{2-2}{5-0} = \dfrac{0}{5} = 0$

$\text{T.V.M. } [-1, 6] = \dfrac{2-2}{6-(-1)} = \dfrac{0}{7} = 0$

$\text{T.V.M. } [-5, 0] = \dfrac{2-2}{0-(-5)} = \dfrac{0}{5} = 0$

La función es constante por ello la tasa de variación media en cualquier intervalo es 0.

27. **a) Calcula la T.V.M. de la función $y = 2x - 3$ en los intervalos [0, 1], [5, 6], [1, 5] y [0, 7].**

b) Observa que en todos los intervalos el valor obtenido es igual. ¿Con qué elemento característico de la recta coincide ese valor?

c) Generaliza completando esta frase en tu cuaderno: "En las funciones lineales, la T.V.M. en cualquier intervalo es igual a …".

a) T.V.M. $[0, 1] = \dfrac{-1+3}{1} = 2$ T.V.M. $[5, 6] = \dfrac{9-7}{1} = 2$

T.V.M. $[1, 5] = \dfrac{7+1}{5-1} = 2$ T.V.M. $[0, 7] = \dfrac{11+3}{7} = 2$

b) Coincide con la pendiente de la recta $y = 2x - 3$.

c) En las funciones lineales, la T.V.M. en cualquier intervalo es igual a su pendiente.

28. **Di, razonadamente, si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:**

a) Si una función es discontinua en un punto, dicho punto no pertenece al dominio de definición.

b) Si un punto no pertenece al dominio de definición de una función, esta no puede ser continua en ese punto.

c) Una función periódica podemos asegurar que es continua.

d) La pendiente de una recta es la T.V.M. de cualquiera de sus intervalos.

e) La T.V.M. de una función periódica en cualquier intervalo de longitud igual al periodo es 0.

f) Si en una parábola la T.V.M. de un intervalo es 0, el vértice está en el punto medio de dicho intervalo.

g) Todas las funciones no lineales tienen al menos un máximo o un mínimo relativo.

a) Falsa. Una función discontinua por saltos puede estar definida en esos puntos (saltos) de discontinuidad.

b) Verdadera. Para que una función sea continua en un punto es necesario que esté definida en él.

c) Falsa. No es necesario que una función sea continua para que sea periódica.

d) Verdadera.

Supongamos que la recta tiene una expresión $y = mx + n$. Su pendiente es m. Vamos a calcular la T.V.M. en un intervalo cualquiera $[a, b]$.

$$\text{T.V.M. } [a, b] = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{(mb + n) - (ma + n)}{b - a} = \frac{mb - ma}{b - a} = \frac{m(b - a)}{b - a} = m$$

e) Verdadero. En los extremos del intervalo la función tendrá el mismo valor.

f) Verdadero, las parábolas son simétricas respecto a una recta vertical que pasa por su vértice, por lo que si T.V.M. $[a, b] = 0$ entonces $f(a) = f(b)$ y, en consecuencia, $x = a$ y $x = b$ son simétricos respecto a la abscisa del vértice.

g) Falso, por ejemplo, $y = x^3$ no tiene extremos relativos.

Página 98

Investiga

Funciones encadenadas

Supón que construyes una aplicación informática para la función $f_1(x) = \frac{1+x}{1-x}$, de forma que si escribes un número, x, y aprietas "ENTER", se transforma en $f_1(x)$.

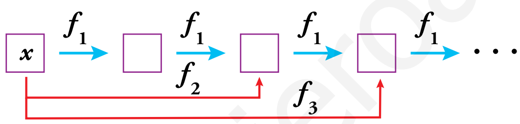
Y si vuelves a pulsar "ENTER", repite la transformación sobre el resultado anterior, tantas veces como pulses.

- **Calcula los sucesivos resultados al introducir inicialmente $x = 3$ y pulsar repetidas veces la tecla "ENTER".**

$$\boxed{3} \xrightarrow{f_1(x)} \boxed{-2} \xrightarrow{f_1(x)} \boxed{-1/3} \xrightarrow{f_1(x)} \boxed{1/2} \xrightarrow{f_1(x)} \boxed{3} \xrightarrow{f_1(x)} \dots$$

Volvemos a obtener 3, por tanto, los resultados se repiten de forma cíclica.

Llamemos ahora $f_2(x)$ a la función que transforma x en el resultado que se obtiene al pulsar "ENTER" dos veces; $f_3(x)$, al resultado de pulsar tres veces; …; $f_n(x)$, al resultado de pulsar n veces.



- **Calcula $f_{12}(3)$, $f_{13}(3)$, $f_{14}(3)$ y $f_{15}(3)$.**

$f_1(3) = -2$ $\quad$ $f_2(3) = -\frac{1}{3}$ $\quad$ $f_3(3) = \frac{1}{2}$ $\quad$ $f_4(3) = 3$

$f_5(3) = -2$ $\quad$ $f_6(3) = -\frac{1}{3}$ $\quad$ $f_7(3) = \frac{1}{2}$ $\quad$ $f_8(3) = 3$

…

Luego, $f_{12}(3) = 3$, $f_{13}(3) = -2$, $f_{14}(3) = -\frac{1}{3}$ y $f_{15}(3) = \frac{1}{2}$

- **Generaliza y define la función $f_n(x)$.**

$$f_1(x) = \frac{1+x}{1-x}$$

$$f_2(x) = f_1\left(f_1(x)\right) = \frac{1+\frac{1+x}{1-x}}{1-\frac{1+x}{1-x}} = -\frac{1}{x}$$

$$f_3(x) = f_1\left(f_1\left(f_1(x)\right)\right) = f_1\left(f_2(x)\right) = \frac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}} = \frac{x-1}{x+1}$$

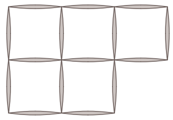
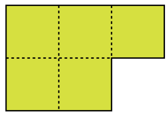
$$f_4(x) = f_1\left(f_1\left(f_1\left(f_1(x)\right)\right)\right) = f_1\left(f_3(x)\right) = \frac{1+\frac{x-1}{x+1}}{1-\frac{x-1}{x+1}} = x$$

Por tanto:

$$f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{1+x}{1-x} & \text{si} \quad n = 4k+1 \qquad k \in \mathbb{N} \\[2mm] -\dfrac{1}{x} & \text{si} \quad n = 4k+2 \qquad k \in \mathbb{N} \\[2mm] \dfrac{x-1}{x+1} & \text{si} \quad n = 4k+3 \qquad k \in \mathbb{N} \\[2mm] x & \text{si} \quad n = 4k \qquad\quad\; k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Página 99

Entrénate resolviendo problemas

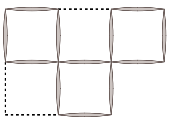
- A  B 

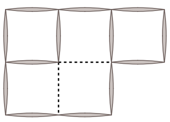
  a) Consigue que en la figura A queden solo tres cuadrados suprimiendo tres palillos.

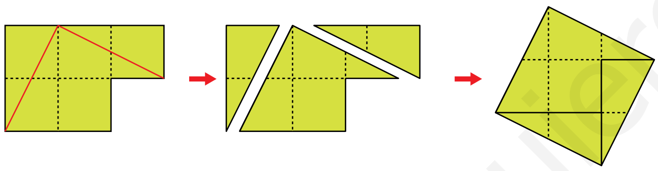
  b) Consigue que en A queden solo tres cuadrados suprimiendo dos palillos.

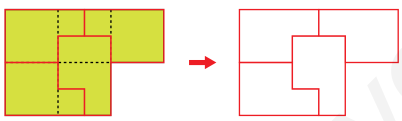
  c) Parte la figura B en tres piezas dándole dos cortes rectos. Construye con ellas un cuadrado.

  d) Parte la figura B en cuatro piezas idénticas.

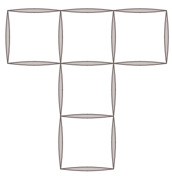
a) 

b) 

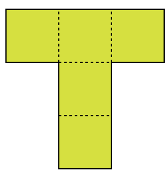
c) 

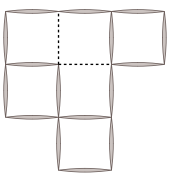
d) 

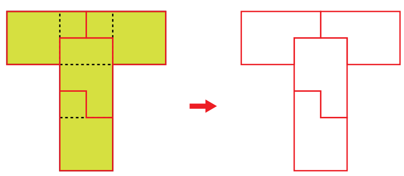
- **a) Cambiando de lugar dos palillos, consigue, en C, que queden cuatro cuadrados.**

C 

b) Parte la figura D en cuatro piezas idénticas.

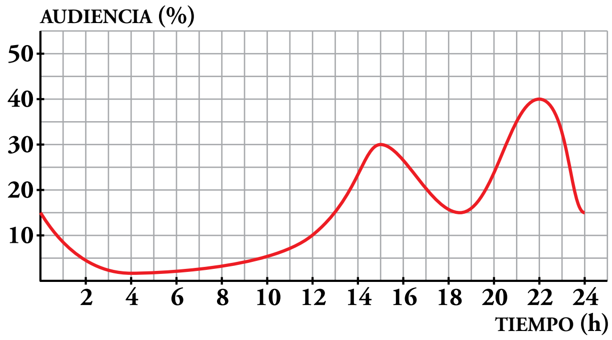
D 

a) 

b) 

Autoevaluación

1. Esta curva muestra la audiencia de televisión en un día de diario.



a) Descríbela, teniendo en cuenta los momentos más significativos.

b) ¿Cuál es su dominio de definición? ¿Y su recorrido?

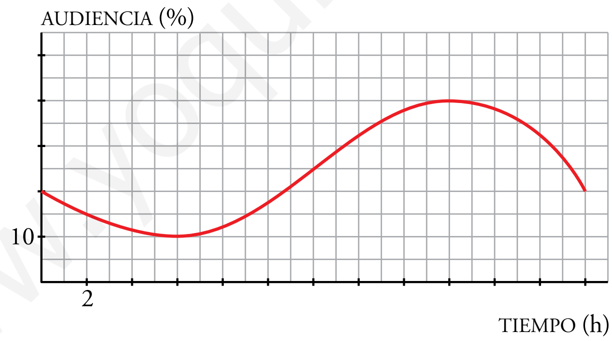
c) Dibuja en tu cuaderno la curva que crees que puede corresponder a un domingo.

d) Dibuja en tu cuaderno la curva del 31 de diciembre.

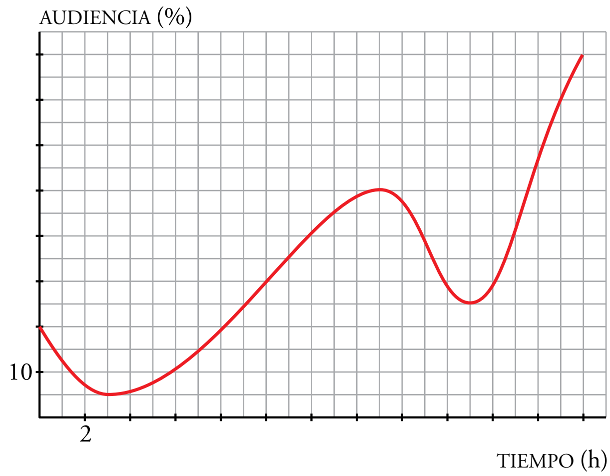
a) La audiencia (en %) disminuye entre las doce y las cuatro de la madrugada, alcanzando a esta hora su mínimo absoluto. A partir de este momento aumenta hasta las tres de la tarde, instante en el que vuelve a decrecer hasta las seis y media de la tarde. Desde las seis y media hasta las diez de la noche aumenta, alcanzando a esta hora su máximo absoluto. A partir de las diez vuelve a decrecer.

b) *Dominio* = [0, 24]   *Recorrido* = [2,5; 40]

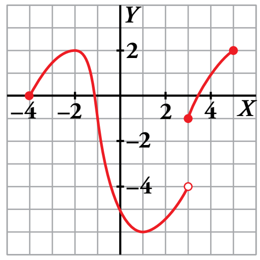
c) Pregunta de respuesta abierta. Una posible solución es:



d) Pregunta de respuesta abierta. Una posible solución es:



2. Observa la gráfica y halla:



a) Dominio y recorrido.

b) Máximos y mínimos.

c) Intervalos de crecimiento y de decrecimiento.

d) Dónde es continua y los puntos de discontinuidad.

a) *Dom* = [–4; 5]; *Recorrido* = [–6, 2]

b) Máximos relativos en los puntos (–2, 2) y (5, 2).

Mínimos relativos en los puntos (–4, 0) y (1, –6).

c) Crece en (–4, –2) ∪ (1, 5).

Decrece en (–2, 1).

d) Es continua en (–4, 3) ∪ (3, 5).

Es discontinua en $x = 3$.

3. Determina el dominio de definición de las siguientes funciones:

a) $y = \sqrt{4x + 8}$ **b)** $y = \dfrac{1}{x - 7}$ **c)** $y = \sqrt{x^2 + 2x - 15}$

a) $4x + 8 \geq 0 \rightarrow x \geq -2$

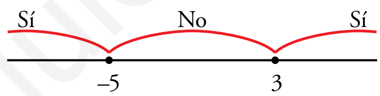
Dom = [–2, +∞)

b) $x - 7 \neq 0 \rightarrow x \neq 7$

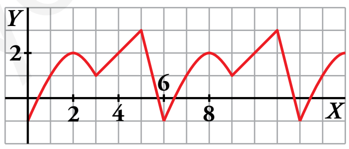
Dom = (–∞, 7) ∪ (7, +∞)

c) $x^2 + 2x - 15 = (x - 3)(x + 5)$

Dom = (–∞, –5] ∪ [3, +∞)



4. a) ¿Es periódica esta función?



b) ¿Cuál es su periodo?

c) Halla los valores de la función en los puntos de abscisas: $x = 2$; $x = 4$; $x = 40$; $x = 42$.

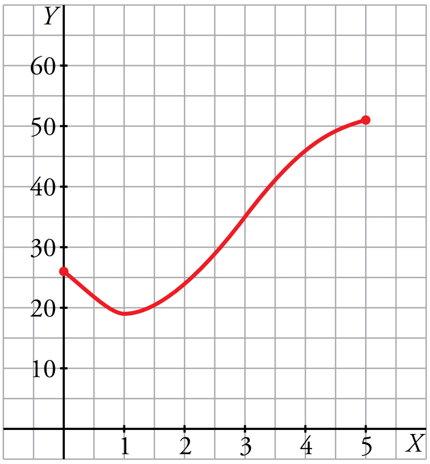
a) y b) Es periódica de periodo 6.

c) $f(2) = 2$; $f(4) = 2$; $f(40) = f(4) = 2$; $f(42) = f(0) = -1$

5. **Representa la función $y = -x^3 + 9x^2 - 15x + 26$, definida en [0, 5], dándole a x valores enteros.**

Supón que y es el valor en bolsa, en millones de euros, de una empresa que acaba de cambiar de dirección, y que x es el número de meses transcurridos desde que cambió de dirección.

Describe su evolución en estos cinco meses, señalando crecimiento, decrecimiento, máximos y mínimos.



x	0	1	2	3	4	5
y	26	19	24	35	46	51

- Decrece en el intervalo (0, 1).
- Crece en el intervalo (1, 5).
- Tiene un mínimo relativo en el punto (1, 19).
- Tiene dos máximos relativos, uno en el punto (0, 26) y otro en el punto (5, 51).

6. **Calcula la tasa de variación media de la función de ecuación $y = x^2 + 4x - 5$ en los intervalos [–5, 2], [–2, 1] y [1, 2].**

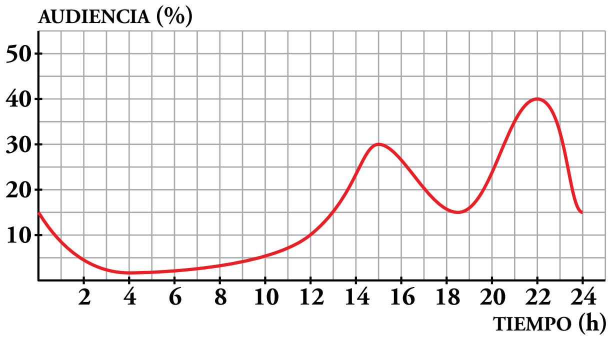
T.V.M. $[-5, 2] = \dfrac{7-0}{2+5} = 1$

T.V.M. $[-2, 1] = \dfrac{0+9}{1+2} = 3$

T.V.M. $[1, 2] = \dfrac{7-0}{2-1} = 7$

Autoevaluación

1. Esta curva muestra la audiencia de televisión en un día de diario.



a) Descríbela, teniendo en cuenta los momentos más significativos.

b) ¿Cuál es su dominio de definición? ¿Y su recorrido?

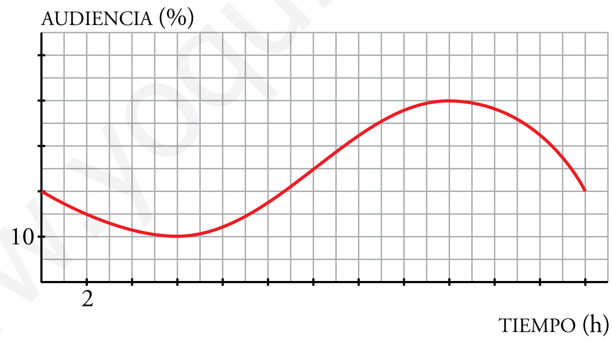
c) Dibuja en tu cuaderno la curva que crees que puede corresponder a un domingo.

d) Dibuja en tu cuaderno la curva del 31 de diciembre.

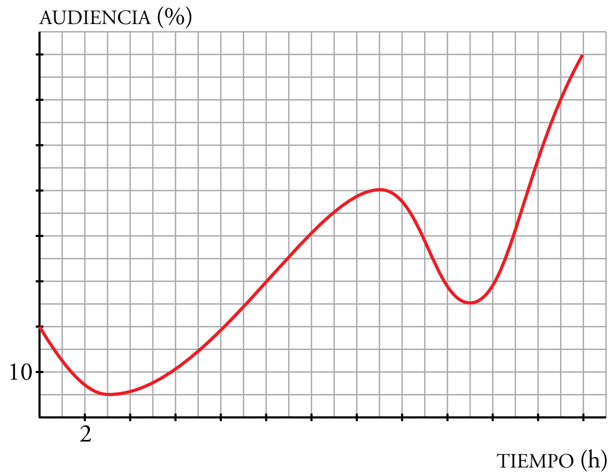
a) La audiencia (en %) disminuye entre las doce y las cuatro de la madrugada, alcanzando a esta hora su mínimo absoluto. A partir de este momento aumenta hasta las tres de la tarde, instante en el que vuelve a decrecer hasta las seis y media de la tarde. Desde las seis y media hasta las diez de la noche aumenta, alcanzando a esta hora su máximo absoluto. A partir de las diez vuelve a decrecer.

b) *Dominio* = [0, 24]   *Recorrido* = [2,5; 40]

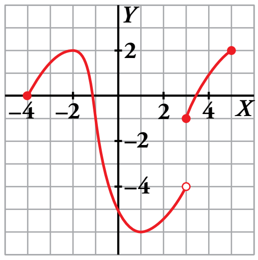
c) Pregunta de respuesta abierta. Una posible solución es:



d) Pregunta de respuesta abierta. Una posible solución es:



2. Observa la gráfica y halla:



a) Dominio y recorrido.

b) Máximos y mínimos.

c) Intervalos de crecimiento y de decrecimiento.

d) Dónde es continua y los puntos de discontinuidad.

a) *Dom* = [–4; 5]; *Recorrido* = [–6, 2]

b) Máximos relativos en los puntos (–2, 2) y (5, 2).

Mínimos relativos en los puntos (–4, 0) y (1, –6).

c) Crece en $(-4, -2) \cup (1, 5)$.

Decrece en (–2, 1).

d) Es continua en $(-4, 3) \cup (3, 5)$.

Es discontinua en $x = 3$.

3. Determina el dominio de definición de las siguientes funciones:

a) $y = \sqrt{4x + 8}$ **b)** $y = \dfrac{1}{x - 7}$ **c)** $y = \sqrt{x^2 + 2x - 15}$

a) $4x + 8 \geq 0 \to x \geq -2$

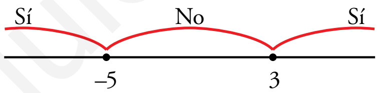
Dom = $[-2, +\infty)$

b) $x - 7 \neq 0 \to x \neq 7$

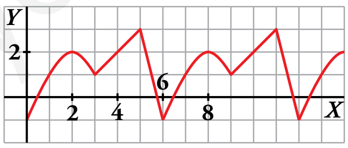
Dom = $(-\infty, 7) \cup (7, +\infty)$

c) $x^2 + 2x - 15 = (x - 3)(x + 5)$

Dom = $(-\infty, -5] \cup [3, +\infty)$



4. a) ¿Es periódica esta función?



b) ¿Cuál es su periodo?

c) Halla los valores de la función en los puntos de abscisas: $x = 2$; $x = 4$; $x = 40$; $x = 42$.

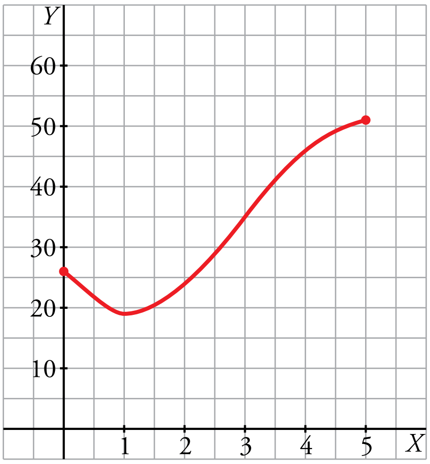
a) y b) Es periódica de periodo 6.

c) $f(2) = 2$; $f(4) = 2$; $f(40) = f(4) = 2$; $f(42) = f(0) = -1$

5. Representa la función $y = -x^3 + 9x^2 - 15x + 26$, definida en [0, 5], dándole a x valores enteros.

Supón que y es el valor en bolsa, en millones de euros, de una empresa que acaba de cambiar de dirección, y que x es el número de meses transcurridos desde que cambió de dirección.

Describe su evolución en estos cinco meses, señalando crecimiento, decrecimiento, máximos y mínimos.



x	0	1	2	3	4	5
y	26	19	24	35	46	51

- Decrece en el intervalo (0, 1).
- Crece en el intervalo (1, 5).
- Tiene un mínimo relativo en el punto (1, 19).
- Tiene dos máximos relativos, uno en el punto (0, 26) y otro en el punto (5, 51).

6. Calcula la tasa de variación media de la función de ecuación $y = x^2 + 4x - 5$ en los intervalos [–5, 2], [–2, 1] y [1, 2].

T.V.M. $[-5, 2] = \dfrac{7-0}{2+5} = 1$

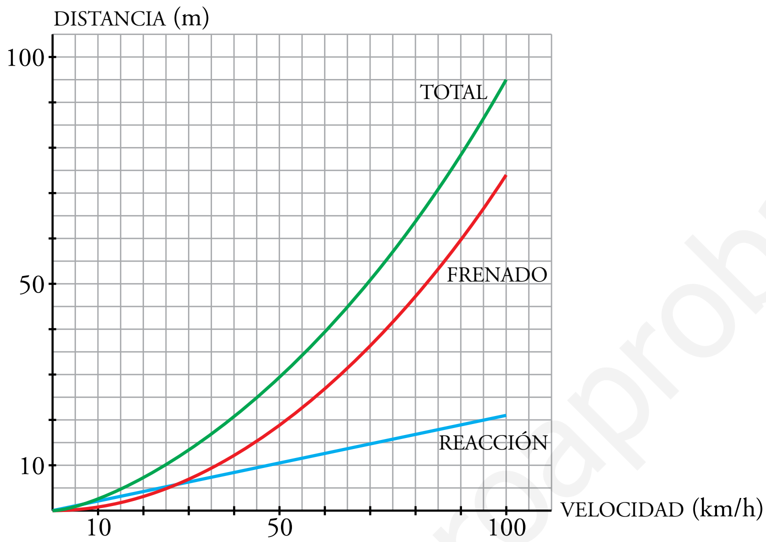
T.V.M. $[-2, 1] = \dfrac{0+9}{1+2} = 3$

T.V.M. $[1, 2] = \dfrac{7-0}{2-1} = 7$

Página 101

Resuelve

1. **Comprueba, usando tu calculadora, la validez de las fórmulas anteriores para los valores de la tabla (haz la comprobación solo para algunos valores de cada fila, teniendo en cuenta que se trata de valores aproximados) y construye las gráficas correspondientes.**



1 Funciones lineales

Página 102

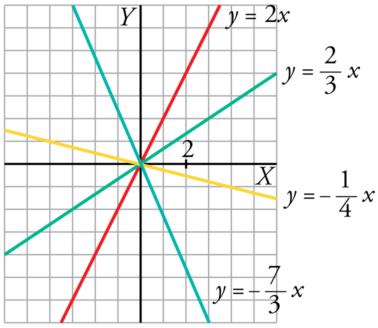
1. Representa las siguientes funciones:

a) $y = 2x$

b) $y = \frac{2}{3}x$

c) $y = -\frac{1}{4}x$

d) $y = -\frac{7}{3}x$



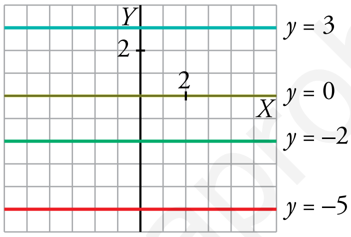
2. Representa.

a) $y = 3$

b) $y = -2$

c) $y = 0$

d) $y = -5$



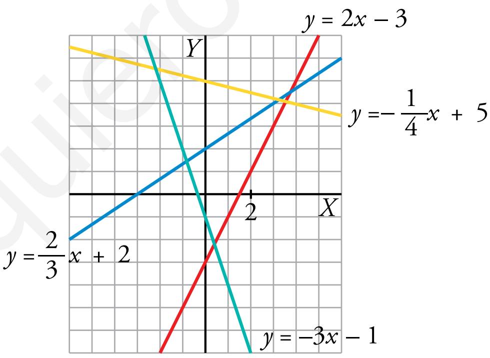
3. Representa estas funciones:

a) $y = 2x - 3$

b) $y = \frac{2}{3}x + 2$

c) $y = -\frac{1}{4}x + 5$

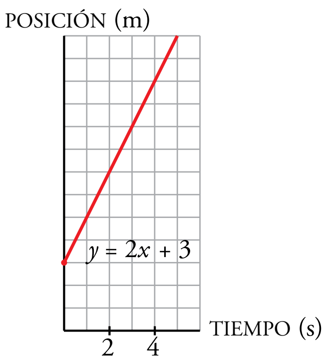
d) $y = -3x - 1$



4. Un objeto móvil, en el instante inicial, está a 3 m del origen y se aleja de este con una velocidad de 2 m/s.

Halla la ecuación de su posición en función del tiempo y represéntala.

La ecuación es $y = 2x + 3$.



5. El precio de las patatas en el mercado es de 1 €/kg, y el de los tomates, 2 €/kg.

a) Escribe la ecuación del coste de una bolsa de patatas en función de su peso.

b) Haz lo mismo para una bolsa de tomates.

c) Representa las funciones anteriores.

a) $\left.\begin{array}{l} x = \text{peso (en kg) de una bolsa de patatas.} \\ y = \text{coste (€)} \end{array}\right\} \to y = x$

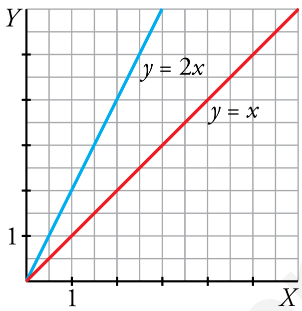
b) $\left.\begin{array}{l} x = \text{peso (en kg) de una bolsa de tomates.} \\ y = \text{coste (€)} \end{array}\right\} \to y = 2x$

c) $y = x$

x	0	1	2
y	0	1	2

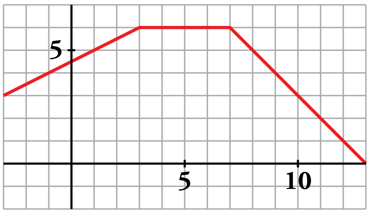
$y = 2x$

x	0	1	2
y	0	2	4



Página 103

6. Escribe la ecuación que corresponde a la gráfica siguiente:

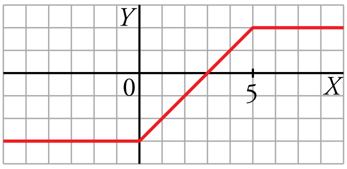


$$y = \begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{9}{2} & \text{si } x \le 3 \\ 6 & \text{si } 3 < x < 7 \\ 13 - x & \text{si } x \ge 7 \end{cases}$$

7. Representa la función cuya expresión analítica es la siguiente:

$$y = \begin{cases} -3 & \text{si } x < 0 \\ x - 3 & \text{si } 0 \le x \le 5 \\ 2 & \text{si } x > 5 \end{cases}$$

Di cuál es la pendiente de cada uno de los tramos que forman la función. ¿Es una función continua?



En los tramos primero y tercero, la pendiente es 0.

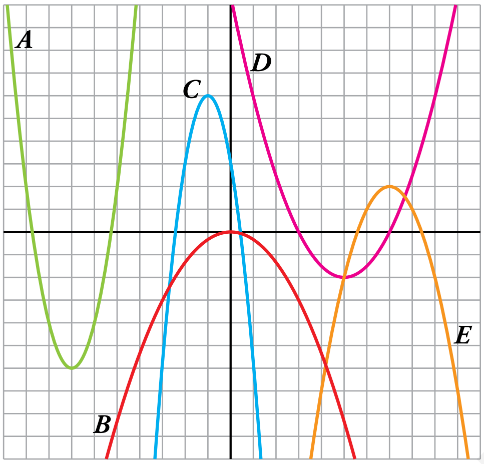
En el segundo tramo, la pendiente es 1.

2 Funciones cuadráticas. Parábolas

Página 105

1. Asocia cada uno de los coeficientes de la x^2 con su correspondiente parábola:

- $a = -1$
- $a = 2$
- $a = -\frac{1}{3}$
- $a = \frac{1}{2}$
- $a = -3$



$a = -1 \rightarrow E$ $\quad a = 2 \rightarrow A$ $\quad a = -\frac{1}{3} \rightarrow B$

$a = \frac{1}{2} \rightarrow D$ $\quad a = -3 \rightarrow C$

2. Representa las siguientes parábolas:

a) $y = x^2 - 2x + 2$ **b)** $y = -2x^2 - 2x - 3$ **c)** $y = \frac{1}{3}x^2 + x - 2$

d) $y = -x^2 + 4$ **e)** $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2$ **f)** $y = 3x^2 + 6x + 4$

a) $y = x^2 - 2x + 2$

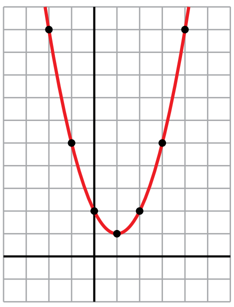
Vértice:

Abscisa: $p = \frac{2}{2} = 1 \rightarrow$ Ordenada: $f(1) = 1 \rightarrow V(1, 1)$

Tabla de valores:

x	–2	–1	0	1	2	3	4
y	10	5	2	1	2	5	10

Vemos que a medida que las abscisas se alejan del vértice, las ordenadas correspondientes crecen, por lo tanto, la parábola no cortará al eje X.



b) $y = -2x^2 - 2x - 3$

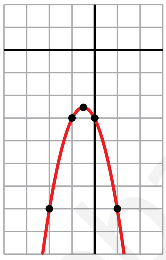
Vértice:

Abscisa: $p = \dfrac{2}{-4} = -\dfrac{1}{2} \to$ Ordenada: $f\left(-\dfrac{1}{2}\right) = -\dfrac{5}{2} \to V\left(-\dfrac{1}{2}, -\dfrac{5}{2}\right)$

Tabla de valores:

x	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	1
y	-7	-3	$-\frac{5}{2}$	-3	-7

A medida que las abscisas se alejan del vértice, las ordenadas correspondientes decrecen, por tanto, la gráfica no corta al eje X.



$y = -2x^2 - 2x - 3$

c) $y = \dfrac{1}{3}x^2 + x - 2$

Vértice:

Abscisa: $p = \dfrac{-1}{2/3} = -\dfrac{3}{2} \to$ Ordenada: $f\left(-\dfrac{3}{2}\right) = -\dfrac{11}{4} \to V\left(-\dfrac{3}{2}, -\dfrac{11}{4}\right)$

Tabla de valores:

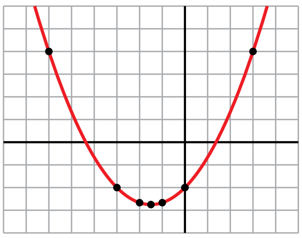
x	-6	-3	-2	$-\frac{3}{2}$	-1	0	3
y	4	-2	$-\frac{8}{3}$	$-\frac{11}{4}$	$-\frac{8}{3}$	-2	4

$$y = 0 \to \frac{1}{3}x^2 + x - 2 = 0 \to x^2 + 3x - 6 = 0 \to$$

$$\to x = \frac{-3 \pm \sqrt{9+24}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{33}}{2} = \begin{cases} x = \dfrac{-3+\sqrt{33}}{2} \\[2ex] x = \dfrac{-3-\sqrt{33}}{2} \end{cases}$$

La parábola corta al eje de abscisas

en $\left(\dfrac{-3+\sqrt{33}}{2}, 0\right)$ y $\left(\dfrac{-3-\sqrt{33}}{2}, 0\right)$.



$y = \dfrac{1}{3}x^2 + x - 2$

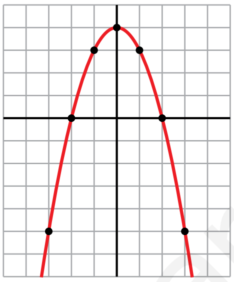
d) $y = -x^2 + 4$

Vértice: Abscisa: $p = \dfrac{0}{-2} = 0 \to$ Ordenada: $f(0) = 4 \to V(0, 4)$

Tabla de valores:

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
y	–5	0	3	4	3	0	–5

Observamos que obtenemos en la tabla todos los cortes con los ejes:



$y = -x^2 + 4$

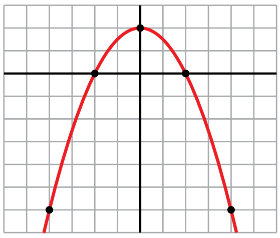
e) $y = -\dfrac{1}{2}x^2 + 2$

Vértice: Abscisa: $p = \dfrac{0}{-1} = 0 \to$ Ordenada: $f(0) = 2 \to V(0, 2)$

Tabla de valores:

x	–4	–2	0	2	4
y	–6	0	2	0	–6

Obtenemos en la tabla todos los puntos de corte con los ejes:



$y = -\dfrac{1}{2}x^2 + 2$

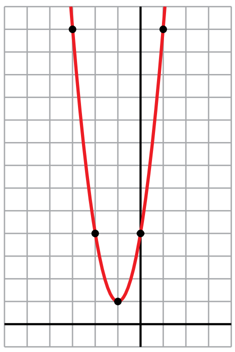
f) $y = 3x^2 + 6x + 4$

Vértice: Abscisa: $p = \dfrac{-6}{6} = -1 \to$ Ordenada: $f(-1) = 1 \to V(-1, 1)$

Tabla de valores:

x	–3	–2	–1	0	1
y	–13	4	1	4	13

Los valores de las ordenadas crecen a medida que las abscisas se alejan del vértice, por tanto, la parábola no corta al eje X.



$y = 3x^2 + 6x + 4$

3. Dibuja en tu cuaderno la representación gráfica de estas funciones cuadráticas:

a) $y = (x-1)\cdot(x-3)$

b) $y = 2(x-2)^2$

c) $y = \frac{1}{2}(x+2)\cdot(x-2)$

d) $y = (x-1)^2 + 5$

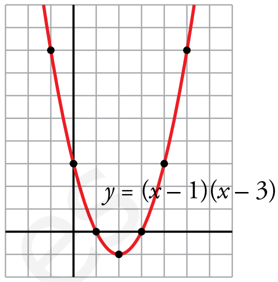
a) $y = (x-1)\cdot(x-3) \;\rightarrow\; y = x^2 - 4x + 3$

Vértice:

Abscisa: $p = \frac{4}{2} = 2 \;\rightarrow\;$ Ordenada: $f(2) = -1 \;\rightarrow\; V(2, -1)$

Tabla de valores:

x	–1	0	1	2	3	4	5
y	8	3	0	–1	0	3	8



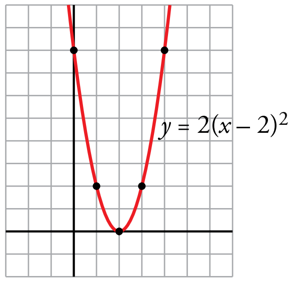
b) $y = 2(x-2)^2 \;\rightarrow\; y = 2x^2 - 8x + 8$

Vértice:

Abscisa: $p = \frac{8}{4} = 2 \;\rightarrow\;$ Ordenada: $f(2) = 0 \;\rightarrow\; V(2, 0)$

Tabla de valores:

x	0	1	2	3	4
y	8	2	0	2	8



Solo hemos obtenido un único punto de corte con el eje de abscisas, veamos si hay más:

$y = 0 \;\rightarrow\; 2(x-2)^2 = 0 \;\rightarrow\; x = 2$

La parábola corta al eje de abscisas solamente en el punto (2, 0).

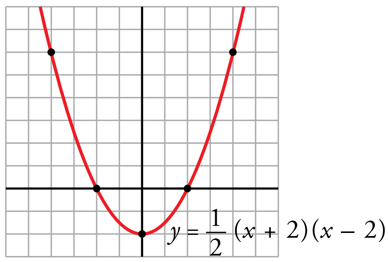
c) $y = \frac{1}{2}(x+2)\cdot(x-2) \;\rightarrow\; y = \frac{1}{2}x^2 - 2$

Vértice:

Abscisa: $p = \frac{0}{1} = 0 \;\rightarrow\;$ Ordenada: $f(0) = -2 \;\rightarrow\; V(0, -2)$

Tabla de valores:

x	–4	–2	0	2	4
y	6	0	–2	0	6



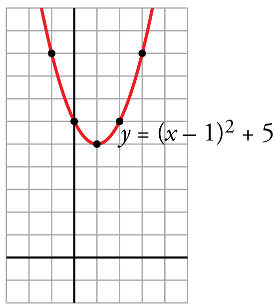
d) $y = (x-1)^2 + 5 \;\rightarrow\; y = x^2 - 2x + 6$

Vértice:

Abscisa: $p = \frac{2}{2} = 1 \;\rightarrow\;$ Ordenada: $f(1) = 5 \;\rightarrow\; V(1, 5)$

Tabla de valores:

x	–1	0	1	2	3
y	9	6	5	6	9



Las ordenadas aumentan a medida que las abscisas se alejan del vértice, por tanto, la parábola no corta al eje X.

Página 106

4. Resuelve, analítica y gráficamente, el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} y = x^2 - 6x + 5 \\ y = x - 5 \end{cases}$$

- *Analíticamente*

$$\left.\begin{array}{l} y = x^2 - 6x + 5 \\ y = x - 5 \end{array}\right\} \; x^2 - 6x + 5 = x - 5 \;\to\; x^2 - 7x + 10 = 0$$

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 40}}{2} = \frac{7 \pm 3}{2} \begin{cases} x_1 = 5 \;\to\; y_1 = 0 \\ x_2 = 2 \;\to\; y_2 = -3 \end{cases}$$

Hay dos soluciones: (5, 0) y (2, –3)

- *Gráficamente*

Representamos la parábola $y = x^2 - 6x + 5$ y la recta $y = x - 5$:

$$\left.\begin{array}{l} y = x^2 - 6x + 5 \\ y = 5 \end{array}\right\} \; x^2 - 6x = 0 \;\to\; x(x - 6) = 0 \left\langle \left.\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 6 \end{array}\right\} \right. V(3, -4)$$

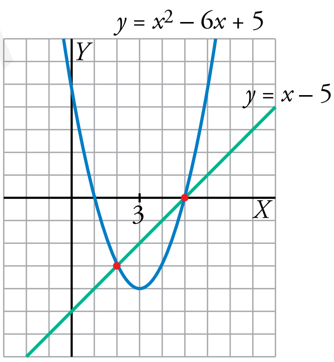
$$\left.\begin{array}{l} y = x^2 - 6x + 5 \\ y = 0 \end{array}\right\} \; x^2 - 6x + 5 = 0 \;\to\; x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 20}}{2} = \frac{6 \pm 4}{2} = \left\langle \begin{array}{l} 5 \\ 1 \end{array}\right.$$

Los puntos de corte con el eje X son (5, 0), (1, 0); con el eje Y, el punto (0, 5).

Puntos próximos al vértice:

x	2	4	6
y	–3	–3	5

La recta $y = x - 5$ pasa, por ejemplo, por los puntos (5, 0) y (3, –2).



Los puntos de corte de las dos curvas son (5, 0) y (2, –3).

5. Representa gráficamente esta función:

$$y = \begin{cases} x^2 + 2 & \text{si } x \le 1 \\ 3 & \text{si } 1 < x < 3 \\ \dfrac{-3x + 15}{2} & \text{si } x \ge 3 \end{cases}$$

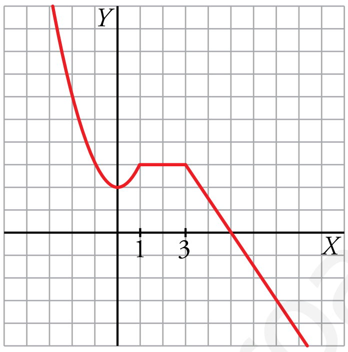
- El primer tramo de la función corresponde a un trozo de parábola definida solo para $x \le 1$:

— Vértice: $V(0, 2)$

— No corta al eje X y sí al eje Y, en $(0, 2)$.

— Pasa por los puntos $(1, 3)$, $(-2, 6)$.

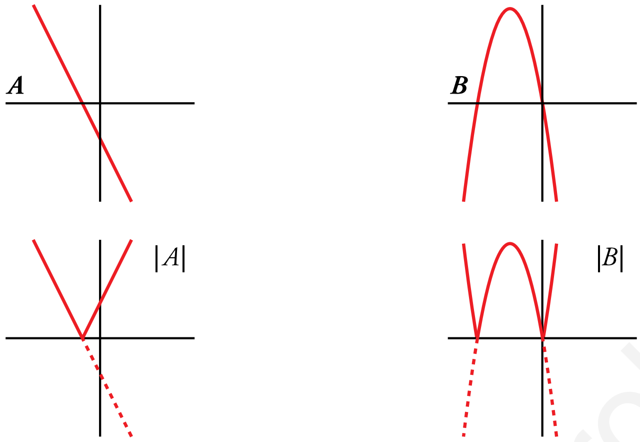
- El 2.º tramo corresponde a un trozo de la recta horizontal $y = 3$.
- El último tramo es un trozo de recta que pasa por $(5, 0)$ y $(3, 3)$.



3 Funciones con valor absoluto

Página 107

1. Representa en tu cuaderno el valor absoluto de estas funciones:



2. Representa estas funciones y pon sus expresiones analíticas sin usar el valor absoluto:

a) $y = |3 - 2x|$ **b)** $y = \left|\frac{1}{2}x + 1\right|$

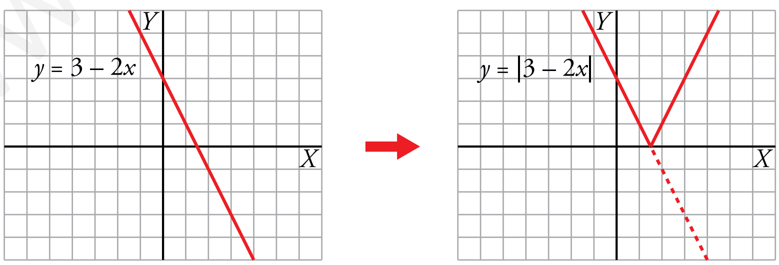
c) $y = |x^2 - 4x|$ **d)** $y = |-x^2 + 6x - 5|$

a) $y = |3 - 2x| \;\rightarrow\; y = \begin{cases} -(3 - 2x) & \text{si } \; 3 - 2x < 0 \\ 3 - 2x & \text{si } \; 3 - 2x \ge 0 \end{cases} \;\rightarrow\; y = \begin{cases} -3 + 2x & \text{si } \; x > \frac{3}{2} \\ 3 - 2x & \text{si } \; x \le \frac{3}{2} \end{cases}$

Representación gráfica:

$y = 3 - 2x \;\rightarrow$

x	0	3/2	2
y	3	0	–1

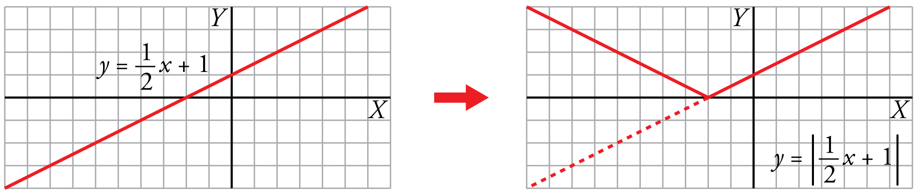


b) $y = \left|\frac{1}{2}x + 1\right| \;\rightarrow\; y = \begin{cases} -\left(\frac{1}{2}x + 1\right) & \text{si } \; \frac{1}{2}x + 1 < 0 \\ \frac{1}{2}x + 1 & \text{si } \; \frac{1}{2}x + 1 \ge 0 \end{cases} \;\rightarrow\; y = \begin{cases} -\frac{1}{2}x - 1 & \text{si } \; x < -2 \\ \frac{1}{2}x + 1 & \text{si } \; x \ge -2 \end{cases}$

Representación gráfica:

$y = \frac{1}{2}x + 1 \rightarrow$

x	–4	–2	0
y	–1	0	1



c) $y = |x^2 - 4x| \rightarrow y = \begin{cases} -(x^2 - 4x) & \text{si } x^2 - 4x < 0 \\ x^2 - 4x & \text{si } x^2 - 4x \geq 0 \end{cases} \rightarrow y = \begin{cases} -x^2 + 4x & \text{si } 0 < x < 4 \\ x^2 - 4x & \text{si } x \leq 0 \text{ o } x \geq 4 \end{cases}$

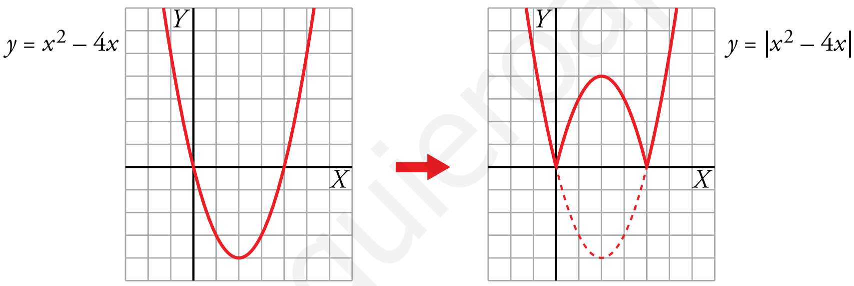
Representación gráfica: $y = x^2 - 4x$

Vértice:

Abscisa: $p = \frac{4}{2} = 2 \rightarrow$ Ordenada: $f(2) = -4 \rightarrow V(2, -4)$

Tabla de valores:

x	–1	0	1	2	3	4	5
y	5	0	–3	–4	–3	0	5



d) $y = |-x^2 + 6x - 5| \rightarrow y = \begin{cases} -(-x^2 + 6x - 5) & \text{si } -x^2 + 6x - 5 < 0 \\ -x^2 + 6x - 5 & \text{si } -x^2 + 6x - 5 \geq 0 \end{cases} \rightarrow$

$\rightarrow y = \begin{cases} x^2 - 6x + 5 & \text{si } x < 1 \text{ o } x > 5 \\ -x^2 + 6x - 5 & \text{si } 1 \leq x \leq 5 \end{cases}$

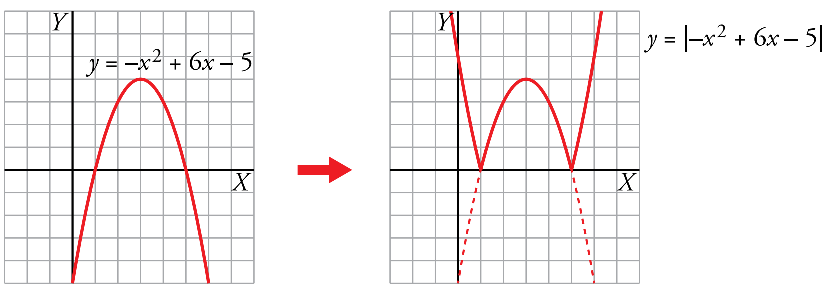
Representación gráfica: $y = -x^2 + 6x - 5$

Vértice:

Abscisa: $p = \frac{-6}{-2} = 3 \rightarrow$ Ordenada: $f(3) = 4 \rightarrow V(3, 4)$

Tabla de valores:

x	0	1	2	3	4	5	6
y	–5	0	3	4	3	0	–5



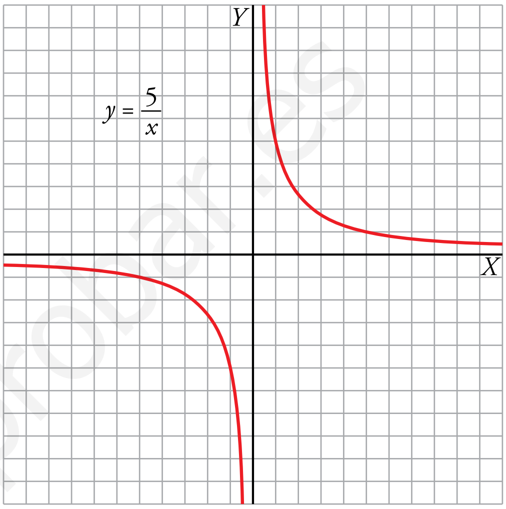
4 Funciones de proporcionalidad inversa

Página 108

1. Representa las siguientes funciones:

a) $y = \dfrac{5}{x}$ **b)** $y = -\dfrac{2}{x}$ **c)** $y = \dfrac{4}{x}$

a) $f(x) = \dfrac{5}{x}$

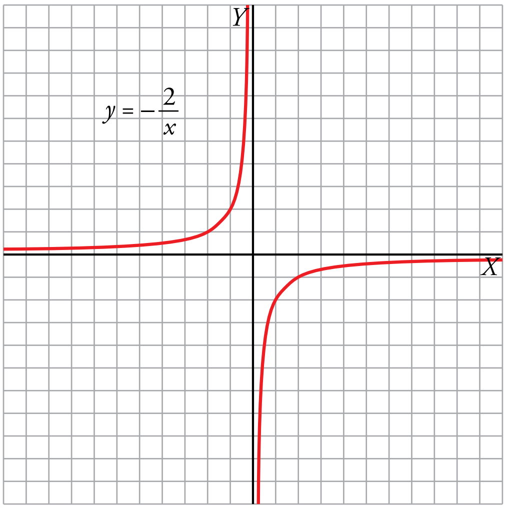


- *Dom f* = $\mathbb{R} - \{0\}$
- No corta a los ejes de coordenadas.
- $x = 0$ es asíntota vertical.

  $y = 0$ es asíntota horizontal.
- Tabla de valores:

x	–10	–5	–1	–0,5	0,5	1	5	10
y	–1/2	–1	–5	–10	10	5	1	1/2

b) $f(x) = -\dfrac{2}{x}$

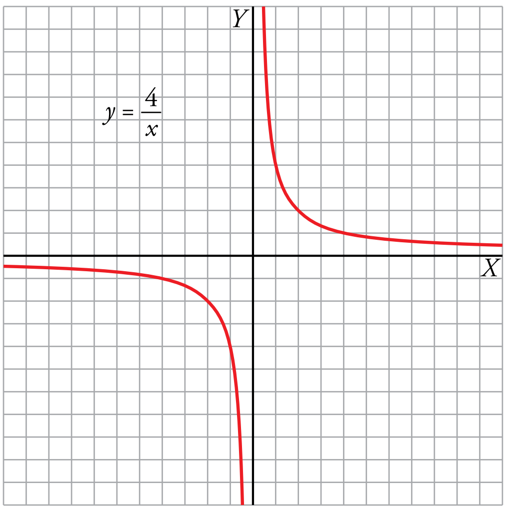


- *Dom f* = $\mathbb{R} - \{0\}$
- No corta a los ejes de coordenadas.
- $x = 0$ es asíntota vertical.

  $y = 0$ es asíntota horizontal.
- Tabla de valores:

x	–4	–2	–1	–0,5	0,5	1	2	4
y	1/2	1	2	4	–4	–2	–1	–1/2

c) $f(x) = \dfrac{4}{x}$



- *Dom f* = $\mathbb{R} - \{0\}$
- No corta a los ejes de coordenadas.
- $x = 0$ es asíntota vertical.

  $y = 0$ es asíntota horizontal.
- Tabla de valores:

x	–8	–4	–2	–1	–0,5	0,5	1	2	4	8
y	–1/2	–1	–2	–4	–8	8	4	2	1	1/2

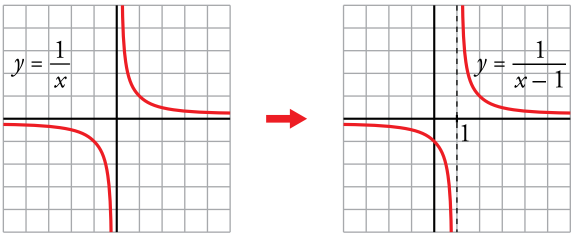
2. **Representa estas funciones y halla su dominio:**

a) $y = \dfrac{1}{x-1}$ **b)** $y = \dfrac{1}{x+1}$ **c)** $y = -\dfrac{1}{x+2}$

a) $y = \dfrac{1}{x-1} \to y = \dfrac{1}{x}$ trasladada horizontalmente 1 unidad a la derecha.

- Dominio = $\mathbb{R} - \{1\}$
- $x = 1$ es asíntota vertical

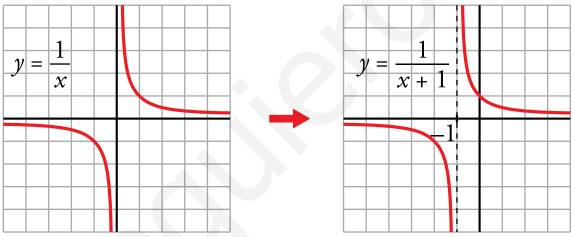
  $y = 0$ es asíntota horizontal



b) $y = \dfrac{1}{x+1} \to y = \dfrac{1}{x}$ trasladada horizontalmente 1 unidad a la izquierda.

- Dominio = $\mathbb{R} - \{-1\}$
- $x = -1$ es asíntota vertical

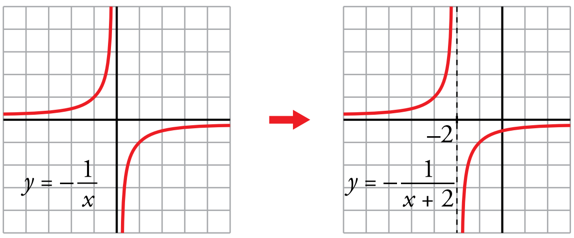
  $y = 0$ es asíntota horizontal



c) $y = -\dfrac{1}{x+2} \to y = -\dfrac{1}{x}$ trasladada horizontalmente 2 unidades a la izquierda.

- Dominio = $\mathbb{R} - \{-2\}$
- $x = -2$ es asíntota vertical

  $y = 0$ es asíntota horizontal



5 Funciones radicales

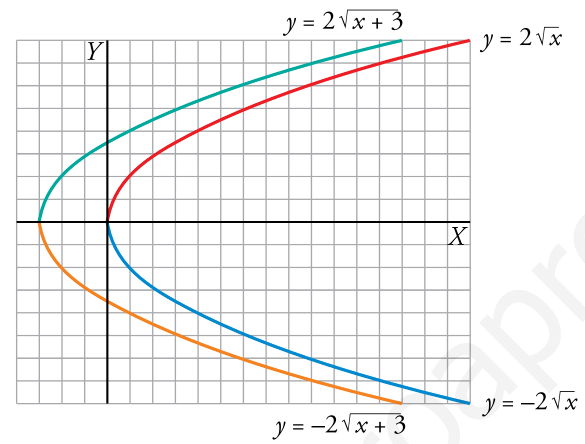
Página 109

1. Representa las siguientes funciones y halla el dominio de definición de cada una:

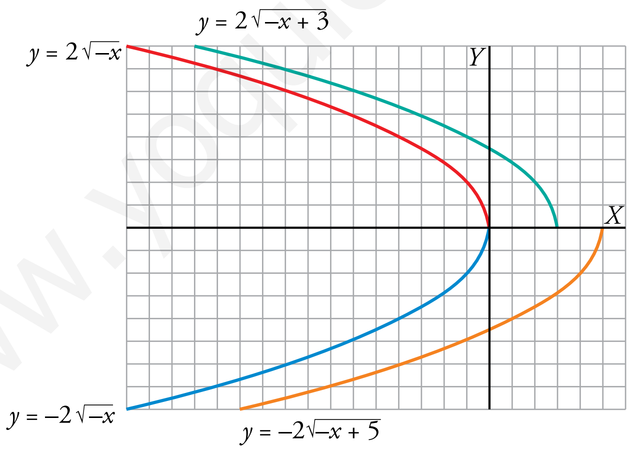
a) $y = 2\sqrt{x}$ **b)** $y = -2\sqrt{x}$ **c)** $y = 2\sqrt{x+3}$ **d)** $y = -2\sqrt{x+3}$

e) $y = 2\sqrt{-x}$ **f)** $y = -2\sqrt{-x}$ **g)** $y = 2\sqrt{-x+3}$ **h)** $y = -2\sqrt{-x+5}$

a) b) c) d)



e) f) g) h)



Los dominios de definición son:

a) $[0, +\infty)$ b) $[0, +\infty)$ c) $[-3, +\infty)$ d) $[-3, +\infty)$

e) $(-\infty, 0]$ f) $(-\infty, 0]$ g) $(-\infty, 3]$ h) $(-\infty, 5]$

6 Funciones exponenciales

Página 110

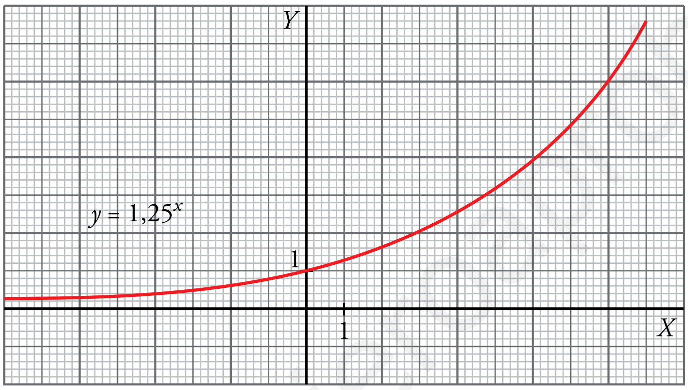
1. Representa las siguientes funciones en tu cuaderno. ¿Cuál es el dominio de definición de cada una?

a) $y = 1{,}25^x$ **b)** $y = 0{,}8^x$

a) $y = 1{,}25^x$, $Dom = \mathbb{R}$

Hacemos la tabla de valores con ayuda de la calculadora:

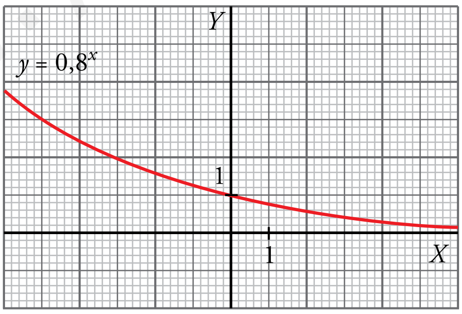
x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4	8
y	0,41	0,51	0,64	0,8	1	1,25	1,56	1,95	2,44	5,96



b) $y = 0{,}8^x$, $Dom = \mathbb{R}$

Hacemos la tabla de valores con ayuda de la calculadora:

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
y	1,95	1,56	1,25	1	0,8	0,64	0,51



2. Escribe en forma exponencial estas expresiones:

a) $2^{0,4x}$ **b)** $10^{0,01x}$ **c)** $1{,}01^{12x}$ **d)** $\left(\frac{1}{2}\right)^{x/28}$

a) $2^{0,4x} \to (2^{0,4})^x \to (1{,}32)^x$

b) $10^{0,01x} \to (10^{0,01})^x \to (1{,}02)^x$

c) $1{,}01^{12x} \to (1{,}01^{12})^x \to (1{,}13)^x$

d) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x/28} \to \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{1/28}\right]^x \to (0{,}98)^x$

7 Funciones logarítmicas

Página 111

1. Representa en tu cuaderno cada par de funciones en los mismos ejes coordenados:

a) $y = 3^x$; $y = \log_3 x$ **b)** $y = 2{,}2^x$; $y = \log_{2,2} x$ **c)** $y = 4^x$; $y = \log_4 x$

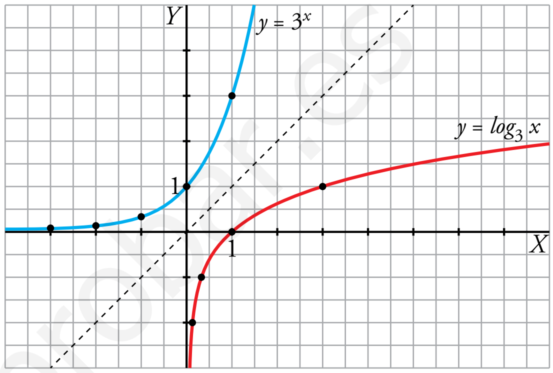
Di cuál es el dominio de definición de cada una.

a) $y = 3^x$, $Dom = \mathbb{R}$

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
y	1/27	1/9	1/3	1	3	9	27

$y = \log_3 x$, $Dom = (0, +\infty)$

x	1/27	1/9	1/3	1	3	9	27
y	–3	–2	–1	0	1	2	3

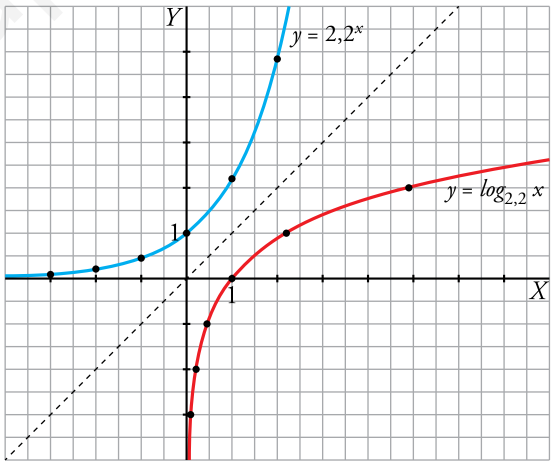


b) $y = 2{,}2^x$, $Dom = \mathbb{R}$

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
y	0,09	0,21	0,45	1	2,2	4,84	10,65

$y = \log_{2,2} x$, $Dom = (0, +\infty)$

x	0,09	0,21	0,45	1	2,2	4,84	10,65
y	–3	–2	–1	0	1	2	3

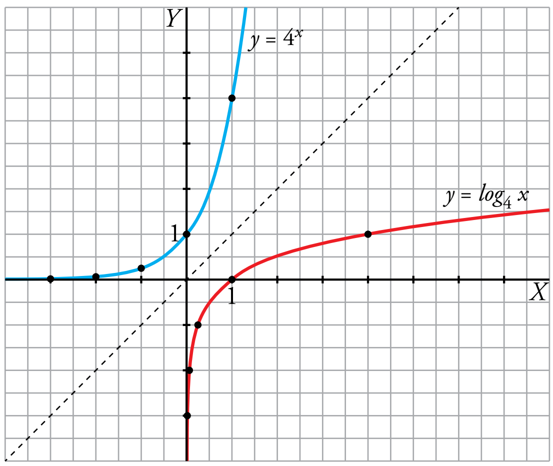


c) $y = 4^x$, $Dom = \mathbb{R}$

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
y	1/64	1/16	1/4	1	4	16	64

$y = \log_4 x$, $Dom = (0, +\infty)$

x	1/64	1/16	1/4	1	4	16	64
y	–3	–2	–1	0	1	2	3



Ejercicios y problemas

Página 113

Practica

Funciones lineales

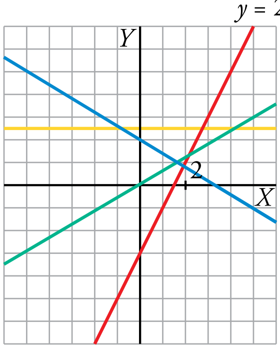
1. **Representa las siguientes funciones lineales:**

a) $y = 2x - 3$

b) $y = \frac{4}{7}x$

c) $y = \frac{-3x + 10}{5}$

d) $y = 2{,}5$



2. **Dados la pendiente y un punto, calcula en cada caso la ecuación de la recta:**

a) $P(0, 0)$, $m = 1$ **b)** $P(2, -1)$, $m = -2$

c) $A(-2, 1)$, $m = \frac{1}{2}$ **d)** $A(1, 3)$, $m = -\frac{5}{3}$

En todos los apartados buscamos la ecuación de una recta $\rightarrow$ $y = mx + n$

a) $m = 1 \rightarrow y = x + n$

Pasa por $P(0, 0) \rightarrow 0 = 0 + n \rightarrow n = 0$

Por tanto, $y = x$.

b) $m = -2 \rightarrow y = -2x + n$

Pasa por $P(2, -1) \rightarrow -1 = -2 \cdot 2 + n \rightarrow n = 3$

Por tanto, $y = -2x + 3$.

c) $m = \frac{1}{2} \rightarrow y = \frac{1}{2}x + n$

Pasa por $A(-2, 1) \rightarrow 1 = \frac{1}{2} \cdot (-2) + n \rightarrow n = 2$

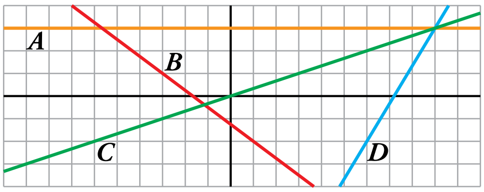
Por tanto, $y = \frac{1}{2}x + 2$.

d) $m = -\frac{5}{3} \rightarrow y = -\frac{5}{3}x + n$

Pasa por $A(1, 3) \rightarrow 3 = -\frac{5}{3} \cdot 1 + n \rightarrow n = 3 + \frac{5}{3} \rightarrow n = \frac{14}{3}$

Por tanto, $y = -\frac{5}{3}x + \frac{14}{3}$.

3. **Calcula la ecuación de estas funciones lineales:**



A Función constante $\to y = n$; Pasa por $(0, 3) \to n = 3$ $\Big\} \to y = 3$

B Función lineal $\to y = mx + n$

$$\left.\begin{array}{l}(-3, 1) \in B \\ (1, -2) \in B\end{array}\right\} \to m = \frac{-2-1}{1-(-3)} = -\frac{3}{4} \to y = -\frac{3}{4}x + n$$

$$(1, -2) \in B \to -2 = -\frac{3}{4} \cdot 1 + n \to n = -2 + \frac{3}{4} \to n = -\frac{5}{4}$$

Por tanto, $y = -\frac{3}{4}x - \frac{5}{4}$.

C Función de proporcionalidad directa $\to y = mx$

$$\left.\begin{array}{l}(0, 0) \in C \\ (3, 1) \in C\end{array}\right\} \to m = \frac{1-0}{3-0} = \frac{1}{3}$$

Por tanto, $y = \frac{1}{3}x$.

D Función lineal $\to y = mx + n$

$$\left.\begin{array}{l}(6, -2) \in D \\ (9, 3) \in D\end{array}\right\} \to m = \frac{3-(-2)}{9-6} = \frac{5}{3} \to y = \frac{5}{3}x + n$$

$$(6, -2) \in D \to -2 = \frac{5}{3} \cdot 6 + n \to n = -2 - 10 \to n = -12$$

Por tanto, $y = \frac{5}{3}x - 12$.

4. **Halla, en cada caso, la ecuación de la recta que pasa por los puntos A y B:**

a) $A(3, 0)$, $B(5, 0)$

b) $A(-2, -4)$, $B(2, -3)$

c) $A(0, -3)$, $B(3, 0)$

d) $A(0, -5)$, $B(-3, 1)$

a) $y = 0$

b) $m = \frac{-3+4}{2+2} = \frac{1}{4}$; $y + 4 = \frac{1}{4}(x + 2) \to y = \frac{1}{4}x - \frac{7}{2}$

c) $m = \frac{3}{3} = 1$; $y + 3 = x \to y = x - 3$

d) $m = \frac{1+5}{-3} = -2$; $y + 5 = -2x \to y = -2x - 5$

5. **Halla la ecuación, en cada caso, y represéntala:**

a) Recta que pasa por (2, –3) y es paralela a la recta que pasa por (1, –2) y (–4, 3).

b) Función de proporcionalidad que pasa por (–4, 2).

c) Función constante que pasa por (18; –1,5).

a) • La pendiente de la recta que pasa por los puntos (1, –2) y (–4, 3) es:

$$m = \frac{3-(-2)}{-4-1} = \frac{5}{-5} = -1$$

• Si dos rectas son paralelas tienen la misma pendiente, por tanto, la recta buscada tiene pendiente $m = -1 \rightarrow y = -x + n$

• La recta pasa por (2, –3) $\rightarrow -3 = -2 + n \rightarrow n = -1$

Por tanto, la recta que buscamos es $y = -x - 1$.

b) • Función de proporcionalidad $\rightarrow y = mx$

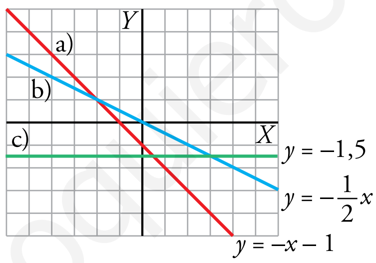
• Pasa por (–4, 2) $\rightarrow 2 = m \cdot (-4) \rightarrow m = -\frac{1}{2}$

Por tanto, la recta buscada es $y = -\frac{1}{2}x$.

c) • Función constante $\rightarrow y = n$

• Pasa por (18; –1,5) $\rightarrow -1{,}5 = n$

Por tanto, la recta que buscamos es $y = -1{,}5$.



6. **Halla el valor de los parámetros *a*, *b*, *c*, *d* y *e* para que las rectas y los puntos cumplan las condiciones pedidas:**

a) Que la recta que pasa por los puntos (4, 0) y (–2, *a*) tenga pendiente –1.

b) Que la recta $y = bx + 2$ pase por el punto (–3, 4).

c) Que las rectas de ecuaciones $y = 3x + c$ e $y = cx + 3$ se corten en el punto de ordenada 2. ¿Cuál es la abscisa correspondiente?

d) Que los puntos (*d*, –2) y (4, *e*) pertenezcan a la recta de ecuación $y = \frac{1}{2}x - 3$.

a) $\left.\begin{array}{r} 4m + n = 0 \\ -2m + n = a \end{array}\right\} \rightarrow m = -\frac{a}{6},\ n = \frac{2a}{3}$

Si $m = -1 \rightarrow -1 = -\frac{a}{6} \rightarrow a = 6$

b) La recta $y = bx + 2$ pasa por (–3, 4) $\rightarrow 4 = b \cdot (-3) + 2 \rightarrow 3b = -2 \rightarrow b = -\frac{2}{3}$

c) $y = 3x + c$ e $y = cx + 3$ se cortan en el punto de ordenada 2: $\left.\begin{array}{l} 3x + c = 2 \\ cx + 3 = 2 \end{array}\right\} \to c = 2 - 3x$

$(2 - 3x) \cdot x + 3 = 2 \to -3x^2 + 2x + 1 = 0 \left\langle \begin{array}{l} x = -1/3 \\ x = 1 \end{array}\right.$

• $x = -\dfrac{1}{3} \to c = 2 - 3 \cdot \left(-\dfrac{1}{3}\right) \to c = 3$

En este caso son la misma recta: $y = 3x + 3$

• $x = 1 \to c = 2 - 3 \cdot 1 \to c = -1$

Las rectas son $y = 3x - 1$ e $y = -x + 3$ y se cortan en el punto $(1, 2)$.

d) $(d, -2)$ pertenece a la recta $y = \dfrac{1}{2}x - 3 \to -2 = \dfrac{1}{2} \cdot d - 3 \to d = 2$

$(4, e)$ pertenece a la recta $y = \dfrac{1}{2}x - 3 \to e = \dfrac{1}{2} \cdot 4 - 3 \to e = -1$

Funciones cuadráticas

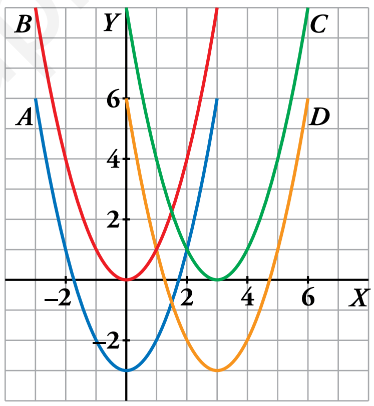
7. **Asocia a cada una de las gráficas una de las expresiones siguientes:**

a) $y = x^2$

b) $y = (x - 3)^2$

c) $y = x^2 - 3$

d) $y = x^2 - 6x + 6$



a) $y = x^2 \leftrightarrow B$

b) $y = (x - 3)^2 \leftrightarrow C$

c) $y = x^2 - 3 \leftrightarrow A$

d) $y = x^2 - 6x + 6 \leftrightarrow D$

8. **Representa las siguientes funciones haciendo, en cada caso, una tabla de valores como esta:**

x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
y	…	…	…	…	…	…	…	…	…

a) $y = x^2 + 1$

b) $y = -x^2 + 4$

c) $y = -3x^2$

d) $y = 0{,}4x^2$

a) $y = x^2 + 1$

x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
y	17	10	5	2	1	2	5	10	17

b) $y = -x^2 + 4$

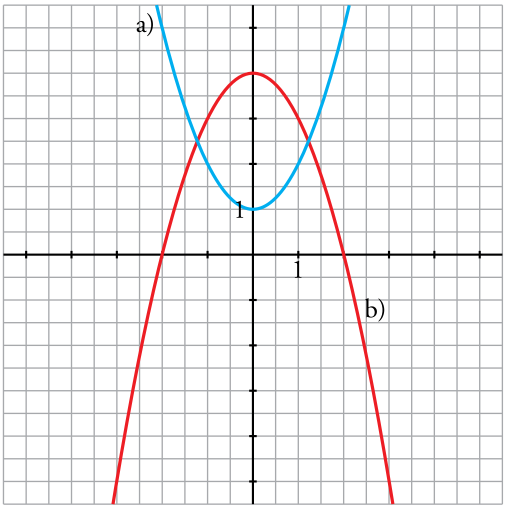
x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
y	–12	–5	0	3	4	3	0	–5	–12

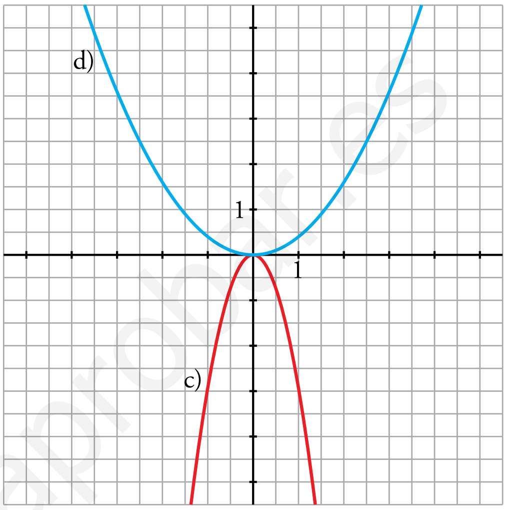
c) $y = -3x^2$

x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
y	–48	–27	–12	–3	0	–3	–12	–27	–48

d) $y = 0,4x^2$

x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
y	6,4	3,6	1,6	0,4	0	0,4	1,6	3,6	6,4





9. **Representa las siguientes parábolas, hallando el vértice, algunos puntos próximos a él y los puntos de corte con los ejes:**

a) $y = (x + 2)^2$ **b)** $y = x^2 - 4x$ **c)** $y = \frac{1}{2}x^2 + 2x + 1$ **d)** $y = x^2 - 9$

a) Vértice: (–2, 0)

Cortes con los ejes:

(–2, 0), (0, 4)

Otros puntos: (–1, 1), (–3, 1)

b) Vértice: (2, –4)

Cortes con los ejes:

(0, 0), (4, 0)

Otros puntos: (5, 5), (–1, 5)

c) Vértice: (–2, –1)

Cortes con los ejes:

$\left(-\sqrt{2} - 2, 0\right), \left(\sqrt{2} - 2, 0\right)$, (0, 1)

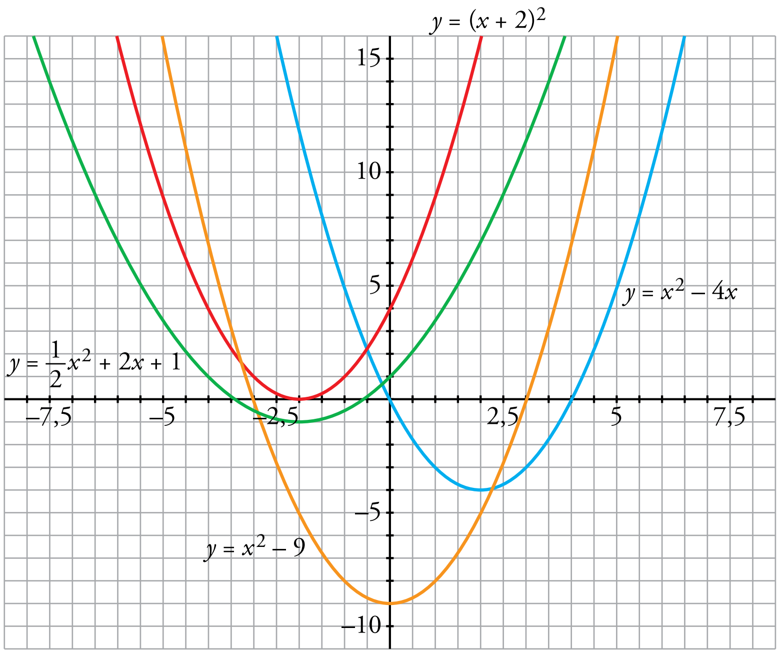
Otros puntos: $\left(1, \frac{7}{2}\right), \left(-5, \frac{7}{2}\right)$

d) Vértice: (0, –9)

Cortes con los ejes:

(–3, 0), (3, 0), (0, –9)

Otros puntos: (–2, –5), (2, –5)



10. **Di cuál es el punto (abscisa y ordenada) donde se encuentra el vértice de las siguientes parábolas, señalando, en cada caso, si se trata de un máximo o de un mínimo. Después, represéntalas.**

a) $y = 8 - x^2$

b) $y = 4 + (3 - x)^2$

c) $y = -x^2 - 2x + 4$

d) $y = 3x - \frac{1}{2}x^2 + 1$

e) $y = \frac{15}{4} - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x$

f) $y = \frac{1}{3}x^2 + 2x + 3$

a) Vértice: (0, 8), máximo

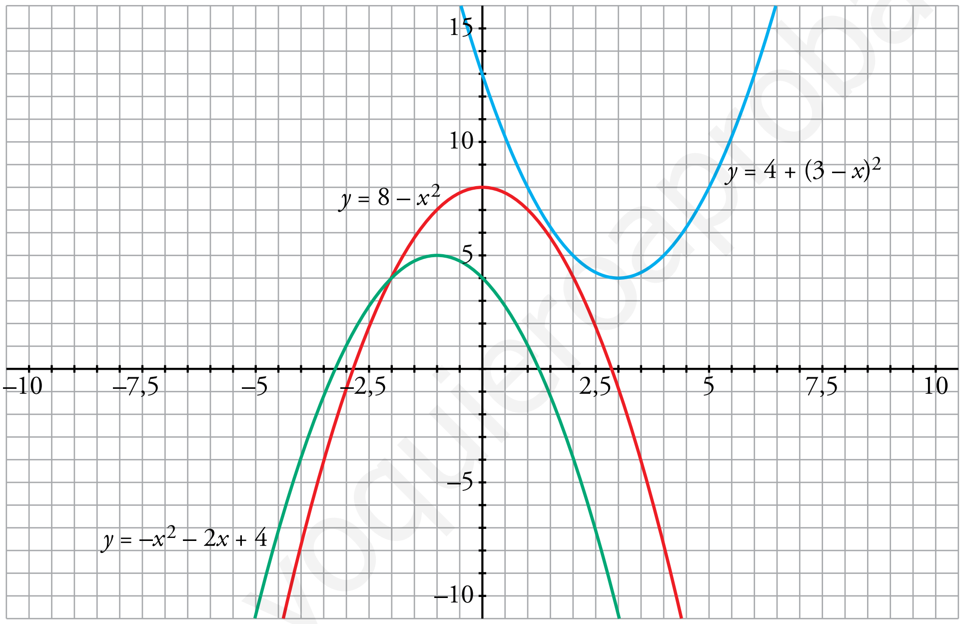
b) Vértice: (3, 4), mínimo

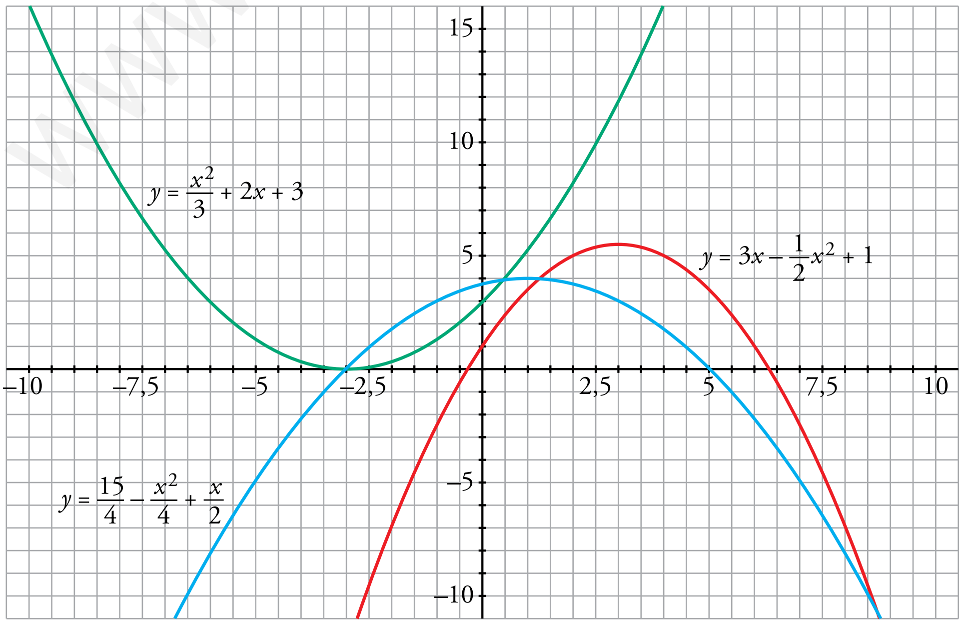
c) Vértice: (–1, 5), máximo

d) Vértice: $\left(3, \frac{11}{2}\right)$, máximo

e) Vértice: (1, 4), máximo

f) Vértice: (–3, 0), mínimo





11. **Representa estas funciones cuadráticas:**

a) $y = (x - 5)^2$ **b)** $y = x \cdot (x - 5)$

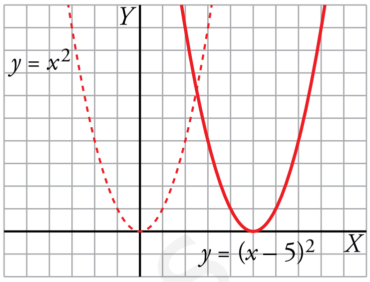
c) $y = (x - 3) \cdot (x + 3)$ **d)** $y = 4 - (x - 2)^2$

a) $y = (x - 5)^2 \;\rightarrow$ Es la traslación 5 unidades a la derecha de $y = x^2$.

Vértice: (5, 0)

Tabla de valores:

x	2	3	4	5	6	7	8
y	9	4	1	0	1	4	9



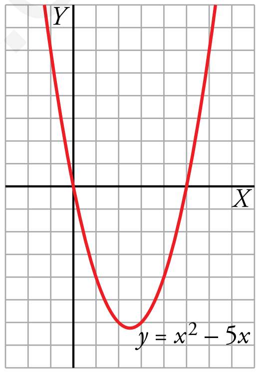
b) $y = x \cdot (x - 5) \;\rightarrow\; y = x^2 - 5x$

Vértice:

Abscisa: $p = \frac{5}{2} \;\rightarrow$ Ordenada: $f\left(\frac{5}{2}\right) = -\frac{25}{4} \;\rightarrow\; V\left(\frac{5}{2}, \frac{-25}{4}\right)$

Tabla de valores:

x	–1	0	1	2	$\frac{5}{2}$	3	4	5	6
y	6	0	–4	–6	$-\frac{25}{4}$	–6	–4	0	6

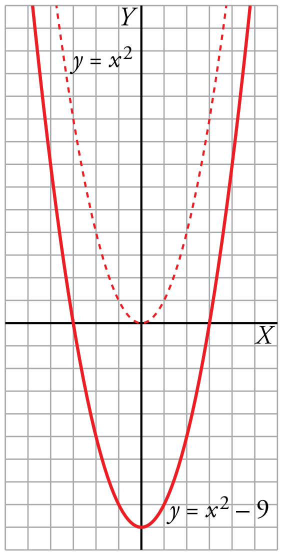


c) $y = (x - 3) \cdot (x + 3) \;\rightarrow\; y = x^2 - 9 \;\rightarrow$ Es la traslación 9 unidades hacia abajo de $y = x^2$.

Vértice: (0, –9)

Tabla de valores:

x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
y	7	0	–5	–8	–9	–8	–5	0	7

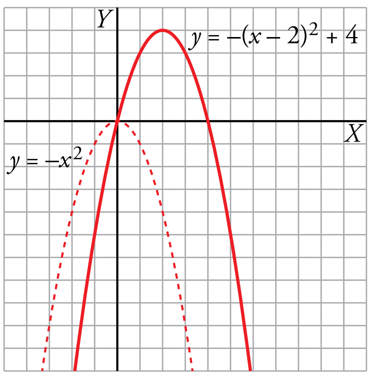


d) $y = 4 - (x - 2)^2 \;\rightarrow$ Es la traslación 4 unidades hacia arriba y 2 a la derecha de $y = -x^2$.

Vértice: (2, 4)

Tabla de valores:

x	–1	0	1	2	3	4	5
y	–5	0	3	4	3	0	–5



12. **Utiliza una escala adecuada y representa.**

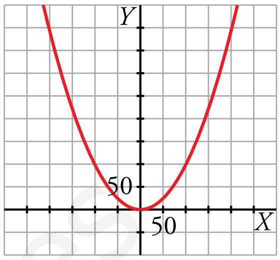
a) $y = \dfrac{x^2}{100}$ **b)** $y = -75x^2 + 675$

c) $y = 0{,}002x^2 - 0{,}04x$ **d)** $y = -10x^2 - 100x$

a) $y = \dfrac{x^2}{100} \to$ Vértice: (0, 0)

Tabla de valores:

x	–200	–150	–100	–50	0	50	100	150	200
y	400	225	100	25	0	25	100	225	400



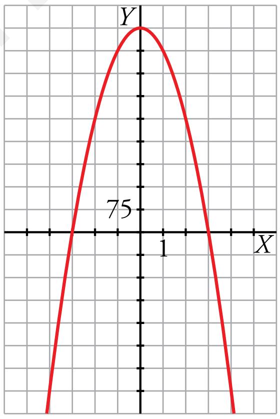
b) $y = -75x^2 + 675$

Vértice:

Abscisa: $p = \dfrac{0}{-150} = 0 \to$ Ordenada: $f(0) = 675 \to V(0, 675)$

Tabla de valores:

x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
y	–525	0	375	600	675	600	375	0	–525



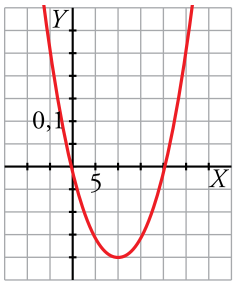
c) $y = 0{,}002x^2 - 0{,}04x$

Vértice:

Abscisa: $p = \dfrac{0{,}04}{0{,}004} = 10 \to$ Ordenada: $f(10) = -0{,}2 \to V(10; -0{,}2)$

Tabla de valores:

x	–5	0	5	10	15	20	25
y	0,25	0	–0,15	–0,2	–0,15	0	0,25



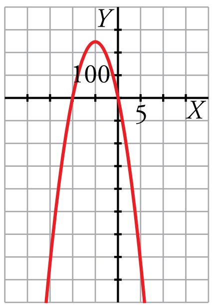
d) $y = -10x^2 - 100x$

Vértice:

Abscisa: $p = \dfrac{100}{-20} = -5 \to$ Ordenada: $f(-5) = 250 \to V(-5, 250)$

Tabla de valores:

x	–15	–10	–5	0	5
y	–750	0	250	0	–750



Página 114

Funciones definidas a trozos

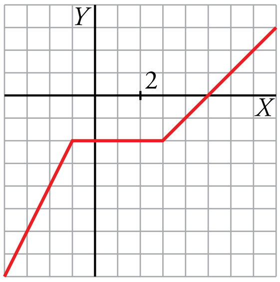
13. **Representa estas funciones definidas a trozos:**

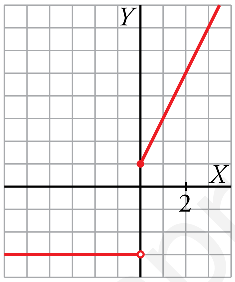
a) $y = \begin{cases} 2x & \text{si } x \le -1 \\ -2 & \text{si } -1 < x \le 3 \\ x - 5 & \text{si } x > 3 \end{cases}$

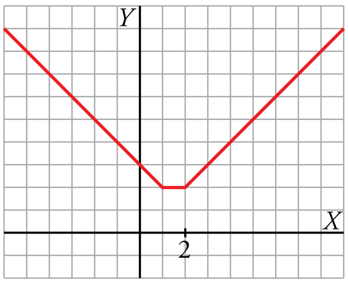
b) $y = \begin{cases} -3 & \text{si } x < 0 \\ 2x + 1 & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$

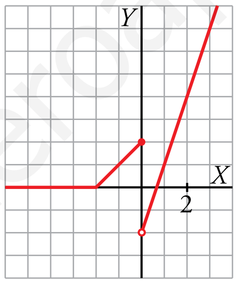
c) $y = \begin{cases} -x + 3 & \text{si } x < 1 \\ 2 & \text{si } 1 \le x < 2 \\ x & \text{si } x \ge 2 \end{cases}$

d) $y = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -2 \\ x + 2 & \text{si } -2 \le x < 0 \\ 3x - 2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

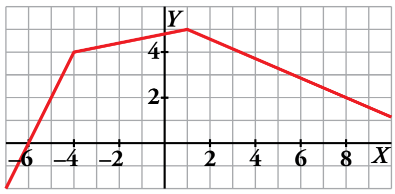
a) 

b) 

c) 

d) 

14. **Escribe la ecuación de la función a trozos que corresponde a esta gráfica:**



- El primer tramo pasa por (–6, 0) y (–4, 4):

$$m = \frac{4}{-4+6} = 2; \;\; y = 2(x+6) = 2x + 12$$

- El segundo tramo pasa por (–4, 4) y (1, 5):

$$m = \frac{5-4}{1+4} = \frac{1}{5}; \;\; y - 4 = \frac{1}{5}(x+4) \;\to\; y = \frac{1}{5}x + \frac{24}{5}$$

- El tercer tramo pasa por (1, 5) y (8, 2):

$$m = \frac{2-5}{8-1} = -\frac{3}{7}; \;\; y - 5 = -\frac{3}{7}(x-1) \;\to\; y = -\frac{3}{7}x + \frac{38}{7}$$

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 12 & \text{si } x < -4 \\ \frac{1}{5}x + \frac{24}{5} & \text{si } -4 \le x \le 1 \\ -\frac{3}{7}x + \frac{38}{7} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

15. **Representa las siguientes funciones:**

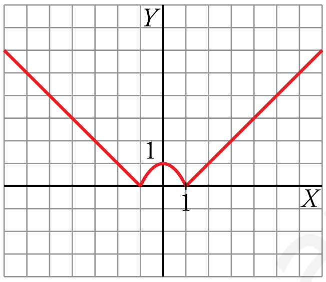
a) $f(x) = \begin{cases} -1-x & \text{si } x<-1 \\ 1-x^2 & \text{si } -1\le x\le 1 \\ x-1 & \text{si } x>1 \end{cases}$ **b)** $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x<0 \\ -x^2 & \text{si } x\ge 0 \end{cases}$ **c)** $y = \begin{cases} x^2+4x & \text{si } x<0 \\ -x^2+4x & \text{si } x\ge 0 \end{cases}$

a) $f(x) = \begin{cases} -1-x & \text{si } x<-1 \\ 1-x^2 & \text{si } -1\le x\le 1 \\ x-1 & \text{si } x>1 \end{cases}$

- La recta $y = -1 - x$ está definida para $x < -1$:

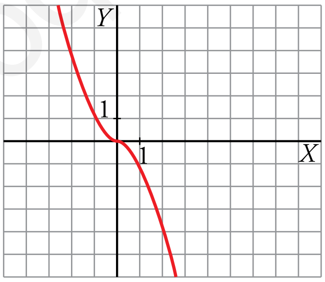
x	–2	–1,5
y	1	0,5

- La parábola $y = 1 - x^2$ definida si $-1 \le x \le 1$, corta al eje X en $(-1, 0)$ y $(1, 0)$, y al eje Y en $(0, 1)$, vértice a su vez de la parábola.
- La recta $y = x - 1$ está definida para $x > 1$ y pasa por $(2, 1)$ y $(3, 2)$.



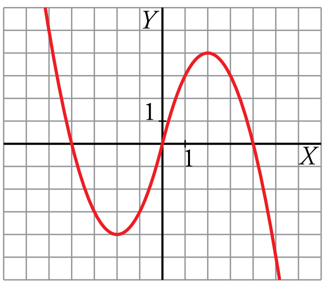
b) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x<0 \\ -x^2 & \text{si } x\ge 0 \end{cases}$

- La parábola $y = x^2$, definida para $x < 0$, pasa por $(-1, 1)$ y $(-2, 4)$.
- La parábola $y = -x^2$, definida para $x \ge 0$, tiene su vértice en $(0, 0)$ y pasa por $(1, -1)$ y $(2, -4)$.



c) $f(x) = \begin{cases} x^2+4x & \text{si } x<0 \\ -x^2+4x & \text{si } x\ge 0 \end{cases}$

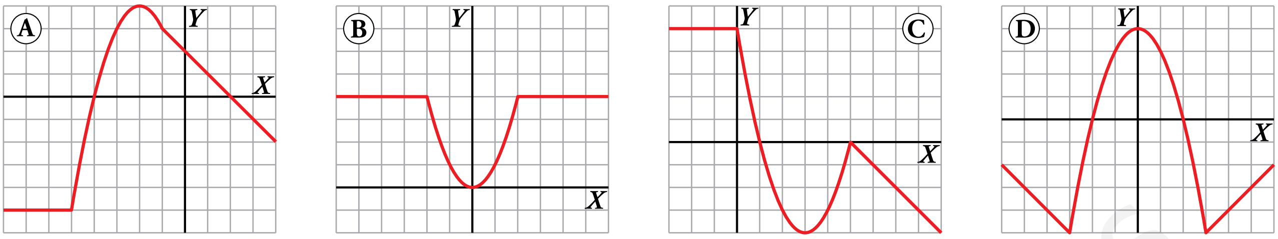
- La parábola $x^2 + 4x$, definida para $x < 0$, pasa por $(-4, 0)$, $(0, 0)$ y tiene vértice en $(-2, -4)$.
- La parábola $-x^2 + 4x$, definida para $x \ge 0$, pasa por $(0, 0)$, $(4, 0)$ y tiene vértice en $(2, 4)$.



16. **Sabemos que las ecuaciones de las parábolas que aparecen representadas en las gráficas son:**

a) $y = -x^2 - 4x$ **b)** $y = x^2 - 6x + 5$ **c)** $y = x^2$ **d)** $y = 4 - x^2$

Escribe la expresión analítica de la función representada en cada gráfica.



GRÁFICA A:

Primer tramo: $y = -5$ si $x \le -5$

Segundo tramo: $y = -x^2 - 4x$ si $-5 < x \le -1$

Tercer tramo: Función lineal que pasa por $(-1, 3)$ y $(2, 0)$.

$$m = \frac{0-3}{2-(-1)} = \frac{-3}{3} = -1 \to y = -x + n$$

Pasa por $(2, 0) \to 0 = -2 + n \to n = 2$

Luego: $y = -x + 2$ si $x > -1$

Por tanto, la expresión analítica de la gráfica A es: $y = \begin{cases} -5 & \text{si} \quad x \le -5 \\ -x^2 - 4x & \text{si} \quad -5 < x \le -1 \\ -x + 2 & \text{si} \quad x > -1 \end{cases}$

GRÁFICA B:

Primer tramo: $y = 4$ si $x \le -2$

Segundo tramo: $y = x^2$ si $-2 < x < 2$

Tercer tramo: $y = 4$ si $x \ge 2$

Por tanto, la expresión analítica de la gráfica B es: $y = \begin{cases} 4 & \text{si} \quad x \le -2 \\ x^2 & \text{si} \quad -2 < x < 2 \\ 4 & \text{si} \quad x \ge 2 \end{cases}$

GRÁFICA C:

Primer tramo: $y = 5$ si $x \le 0$

Segundo tramo: $y = x^2 - 6x + 5$ si $0 < x < 5$

Tercer tramo: Función lineal que pasa por $(5, 0)$ y $(6, -1)$.

$$m = \frac{-1-0}{6-5} = \frac{-1}{1} = -1 \to y = -x + n$$

Pasa por $(5, 0) \to 0 = -5 + n \to n = 5$

Luego: $y = -x + 5$ si $x \ge 5$

Por tanto, la expresión analítica de la gráfica C es: $y = \begin{cases} 5 & \text{si} \quad x \le 0 \\ x^2 - 6x + 5 & \text{si} \quad 0 < x < 5 \\ -x + 5 & \text{si} \quad x \ge 5 \end{cases}$

GRÁFICA D:

Primer tramo: Función lineal que pasa por (–3, –5) y (–4, –4).

$$m = \frac{-4-(-5)}{-4-(-3)} = \frac{1}{-1} = -1 \;\rightarrow\; y = -x + n$$

Pasa por (–3, –5) $\rightarrow\; -5 = 3 + n \;\rightarrow\; n = -8$

Luego: $y = -x - 8$ si $x \le -3$

Segundo tramo: $y = 4 - x^2$ si $-3 < x < 3$

Tercer tramo: Función lineal que pasa por (3, –5) y (4, –4).

$$m = \frac{-4-(-5)}{4-3} = \frac{1}{1} = 1 \;\rightarrow\; y = x + n$$

Pasa por (3, –5) $\rightarrow\; -5 = 3 + n \;\rightarrow\; n = -8$

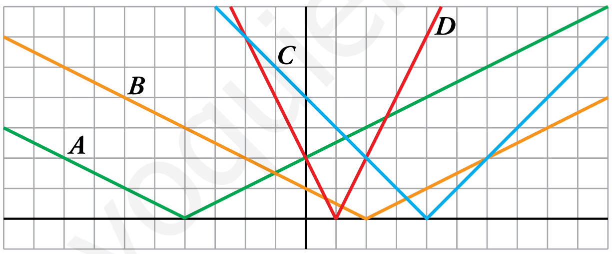
Luego: $y = x - 8$ si $x \ge 3$

Por tanto, la expresión analítica de la gráfica D es: $y = \begin{cases} -x-8 & \text{si} \quad x \le -3 \\ 4-x^2 & \text{si} \quad -3 < x < 3 \\ x-8 & \text{si} \quad x \ge 3 \end{cases}$

Valor absoluto de una función

17. **Asocia cada función con su correspondiente gráfica:**

a) $y = |2x - 2|$ **b)** $y = |4 - x|$ **c)** $y = \left|\frac{1}{2}x + 2\right|$ **d)** $y = \left|1 - \frac{1}{2}x\right|$

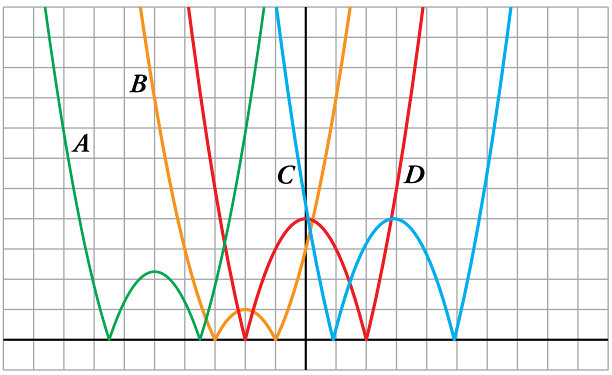


a) $y = |2x - 2| \;\rightarrow\; D$ b) $y = |4 - x| \;\rightarrow\; C$ c) $y = \left|\frac{1}{2}x + 2\right| \;\rightarrow\; A$ d) $y = \left|1 - \frac{1}{2}x\right| \;\rightarrow\; B$

18. **Asocia cada función con su gráfica:**

a) $y = |x^2 - 4|$ **b)** $y = |-x^2 - 10x - 22{,}75|$

c) $y = |x^2 - 6x + 5|$ **d)** $y = |-x^2 - 4x - 3|$



a) $y = |x^2 - 4| \;\rightarrow\; D$ b) $y = |-x^2 - 10x - 22{,}75| \;\rightarrow\; A$

c) $y = |x^2 - 6x + 5| \;\rightarrow\; C$ d) $y = |-x^2 - 4x - 3| \;\rightarrow\; B$

19. **Expresa cada una de estas funciones en forma de función definida a trozos, tal como se hace en el ejemplo. Luego, represéntalas.**

- $y = |2x - 6| \rightarrow y = \begin{cases} -2x + 6 & \text{si } x < 3 \\ 2x - 6 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$

a) $y = \left|4 - \dfrac{1}{3}x\right|$ **b)** $y = |2x + 2|$ **c)** $y = |x^2 - 2x - 3|$

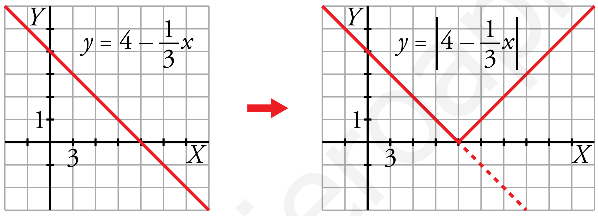
d) $y = |-x^2 + 2x - 1|$ **e)** $y = \left|\dfrac{1}{2}x^2 - 4x + \dfrac{7}{2}\right|$ **f)** $y = |9 - x^2|$

a) $y = \left|4 - \dfrac{1}{3}x\right| \rightarrow y = \begin{cases} -\left(4 - \dfrac{1}{3}x\right) & \text{si } 4 - \dfrac{1}{3}x < 0 \\ 4 - \dfrac{1}{3}x & \text{si } 4 - \dfrac{1}{3}x \geq 0 \end{cases} \rightarrow y = \begin{cases} -4 + \dfrac{1}{3}x & \text{si } x > 12 \\ 4 - \dfrac{1}{3}x & \text{si } x \leq 12 \end{cases}$

Representación gráfica:

$y = 4 - \dfrac{1}{3}x \rightarrow$

x	0	12	15
y	4	0	–1

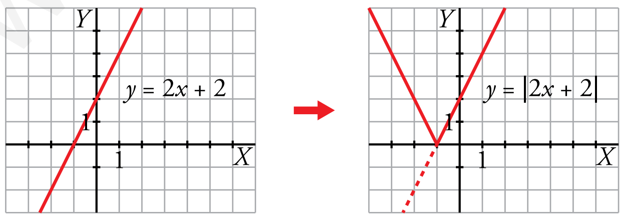


b) $y = |2x + 2| \rightarrow y = \begin{cases} -(2x + 2) & \text{si } 2x + 2 < 0 \\ 2x + 2 & \text{si } 2x + 2 \geq 0 \end{cases} \rightarrow y = \begin{cases} -2x - 2 & \text{si } x < -1 \\ 2x + 2 & \text{si } x \geq -1 \end{cases}$

Representación gráfica:

$y = 2x + 2 \rightarrow$

x	–2	–1	0
y	–2	0	2



c) $y = |x^2 - 2x - 3| \rightarrow y = \begin{cases} -(x^2 - 2x - 3) & \text{si } x^2 - 2x - 3 < 0 \\ x^2 - 2x - 3 & \text{si } x^2 - 2x - 3 \geq 0 \end{cases} \rightarrow$

$\rightarrow y = \begin{cases} -x^2 + 2x + 3 & \text{si } -1 < x < 3 \\ x^2 - 2x - 3 & \text{si } x \leq -1 \text{ o } x \geq 3 \end{cases}$

Representación gráfica:

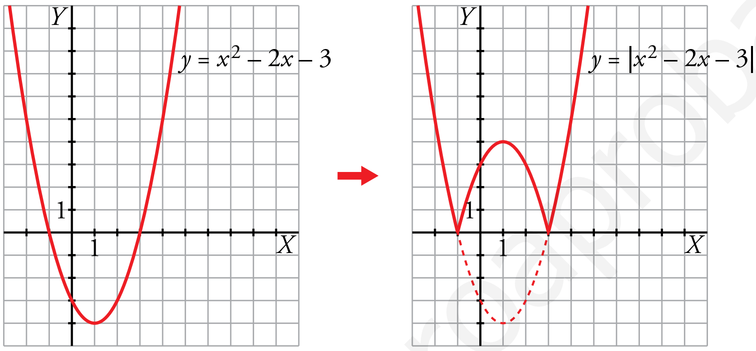
$y = x^2 - 2x - 3$

Vértice:

Abscisa: $p = \frac{2}{2} = 1 \rightarrow$ Ordenada: $f(1) = -4 \rightarrow V(1, -4)$

Tabla de valores:

x	–2	–1	0	1	2	3	4
y	5	0	–3	–4	–3	0	5



d) $y = |-x^2 + 2x - 1| \rightarrow y = \begin{cases} -(-x^2 + 2x - 1) & \text{si } -x^2 + 2x - 1 < 0 \\ -x^2 + 2x - 1 & \text{si } -x^2 + 2x - 1 \geq 0 \end{cases} \rightarrow$

$\rightarrow y = \begin{cases} x^2 - 2x + 1 & \text{si } x < 1 \text{ o } x > 1 \\ -x^2 + 2x - 1 & \text{si } x = 1 \end{cases} \rightarrow y = x^2 - 2x + 1$

Representación gráfica:

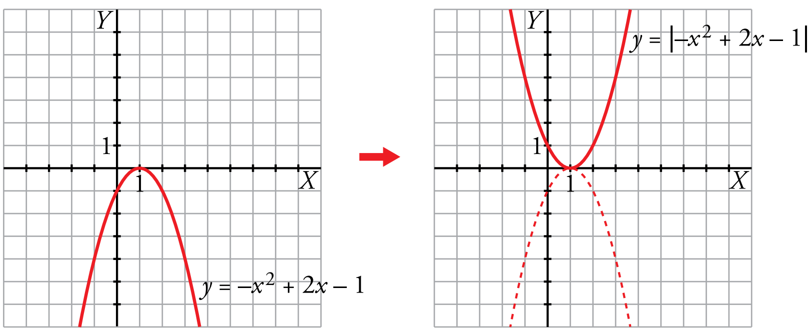
$y = -x^2 + 2x - 1$

Vértice:

Abscisa: $p = \frac{-2}{-2} = 1 \rightarrow$ Ordenada: $f(1) = 0 \rightarrow V(1, 0)$

Tabla de valores:

x	–1	0	1	2	3
y	–4	–1	0	–1	–4



e) $y = \left|\frac{1}{2}x^2 - 4x + \frac{7}{2}\right| \to y = \begin{cases} -\left(\frac{1}{2}x^2 - 4x + \frac{7}{2}\right) & \text{si } \frac{1}{2}x^2 - 4x + \frac{7}{2} < 0 \\ \frac{1}{2}x^2 - 4x + \frac{7}{2} & \text{si } \frac{1}{2}x^2 - 4x + \frac{7}{2} \ge 0 \end{cases} \to$

$\to y = \begin{cases} -\frac{1}{2}x^2 + 4x - \frac{7}{2} & \text{si } 1 < x < 7 \\ \frac{1}{2}x^2 - 4x + \frac{7}{2} & \text{si } x \le 1 \text{ o } x \ge 7 \end{cases}$

Representación gráfica:

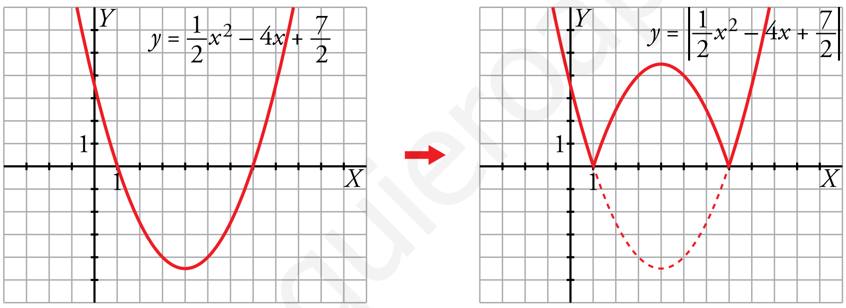
$y = \frac{1}{2}x^2 - 4x + \frac{7}{2}$

Vértice:

Abscisa: $p = \frac{4}{1} = 4 \to$ Ordenada: $f(4) = -\frac{9}{2} \to V\left(4, -\frac{9}{2}\right)$

Tabla de valores:

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
y	$\frac{7}{2}$	0	$-\frac{5}{2}$	-4	$-\frac{9}{2}$	-4	$-\frac{5}{2}$	0	$\frac{7}{2}$



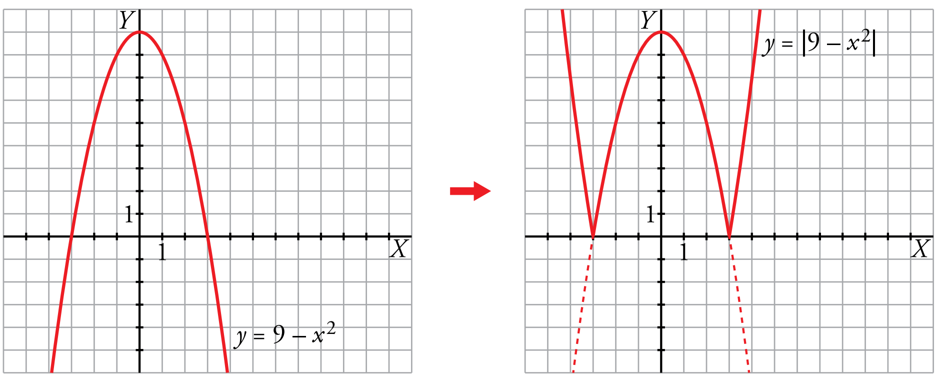
f) $y = |9 - x^2| \to y = \begin{cases} -(9 - x^2) & \text{si } 9 - x^2 < 0 \\ 9 - x^2 & \text{si } 9 - x^2 \ge 0 \end{cases} \to y = \begin{cases} x^2 - 9 & \text{si } x < -3 \text{ o } x > 3 \\ -x^2 + 9 & \text{si } -3 \le x \le 3 \end{cases}$

Representación gráfica:

$y = 9 - x^2 \to y = -x^2 + 9 \to$ Vértice: $(0, 9)$

Tabla de valores:

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
y	0	5	8	9	8	5	0



20. **Representa la gráfica de las siguientes funciones:**

a) $y = |x^2 - 1| - 2$

b) $y = 1 + |x|$

c) $y = 1 - |x^2 - 6x + 5|$

d) $y = |x| - |4 - x|$

a) $y = |x^2 - 1| - 2 \;\rightarrow\; y = \begin{cases} -(x^2 - 1) - 2 & \text{si } x^2 - 1 < 0 \\ x^2 - 1 - 2 & \text{si } x^2 - 1 \geq 0 \end{cases} \;\rightarrow$

$\rightarrow\; y = \begin{cases} -x^2 - 1 & \text{si } -1 < x < 1 \\ x^2 - 3 & \text{si } x \leq -1 \text{ o } x \geq 1 \end{cases}$

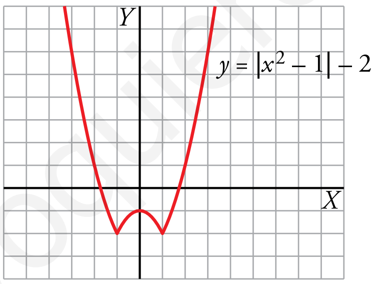
Representación gráfica:

- $y = -x^2 - 1$ (si $-1 < x < 1$) $\rightarrow$ Vértice: $(0, -1)$

x	–1	0	1
y	–2	–1	–2

- $y = x^2 - 3$ (si $x \leq -1$ o $x \geq 1$) $\rightarrow$ Vértice: $(0, -3)$

x	–3	–2	$-\sqrt{3}$	–1	1	$\sqrt{3}$	2	3
y	6	1	0	–2	–2	0	1	6



b) $y = 1 + |x| \;\rightarrow\; y = \begin{cases} 1 - x & \text{si } x < 0 \\ 1 + x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

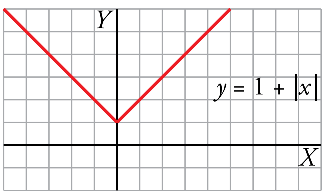
Representación gráfica:

- $y = 1 - x$ (si $x < 0$) $\rightarrow$

x	0	–1	–2
y	1	2	3

- $y = 1 + x$ (si $x \geq 0$) $\rightarrow$

x	0	1	2
y	1	2	3



c) $y = 1 - |x^2 - 6x + 5| \rightarrow y = \begin{cases} 1 - (-x^2 + 6x - 5) & \text{si } x^2 - 6x + 5 < 0 \\ 1 - (x^2 - 6x + 5) & \text{si } x^2 - 6x + 5 \geq 0 \end{cases} \rightarrow$

$\rightarrow y = \begin{cases} x^2 - 6x + 6 & \text{si } \quad 1 < x < 5 \\ -x^2 + 6x - 4 & \text{si } x \leq 1 \text{ o } x \geq 5 \end{cases}$

Representación gráfica:

• $y = x^2 - 6x + 6$ (si $1 < x < 5$)

Vértice:

Abscisa: $p = \frac{6}{2} = 3 \rightarrow$ Ordenada: $f(3) = -3 \rightarrow V(3, -3)$

x	1	2	3	4	5
y	1	–2	–3	–2	1

Puntos de corte con los ejes:

$y = 0 \rightarrow x^2 - 6x + 6 = 0 \begin{cases} x = 3 + \sqrt{3} \\ x = 3 - \sqrt{3} \end{cases}$

Corta al eje X en: $\left(3 + \sqrt{3}, 0\right), \left(3 - \sqrt{3}, 0\right)$

$x = 0 \rightarrow y = 0^2 - 6 \cdot 0 + 6 = 6 \rightarrow y = 6$

Corta al eje Y en: $(0, 6)$

• $y = -x^2 + 6x - 4$ (si $x \leq 1$ o $x \geq 5$)

Vértice:

Abscisa: $p = \frac{-6}{-2} = 3 \rightarrow$ Ordenada: $f(3) = 5 \rightarrow V(3, 5)$

Puntos de corte con los ejes:

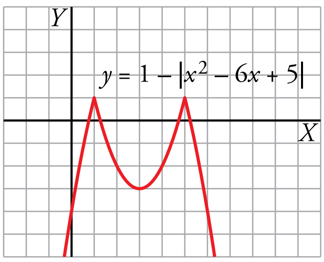
$y = 0 \rightarrow -x^2 + 6x - 4 = 0 \begin{cases} x = 3 - \sqrt{5} \\ x = 3 + \sqrt{5} \end{cases}$

Corta al eje X en: $\left(3 - \sqrt{5}, 0\right), \left(3 + \sqrt{5}, 0\right)$

$x = 0 \rightarrow y = -0^2 + 6 \cdot 0 - 4 = -4 \rightarrow y = -4$

Corta al eje Y en: $(0, -4)$

x	–1	0	1	5	6	7
y	–11	–4	1	1	–4	–11



d) $y = |x| \rightarrow y = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

$y = |4 - x| \rightarrow y = \begin{cases} 4 - x & \text{si } x < 4 \\ -4 + x & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$

Por tanto:

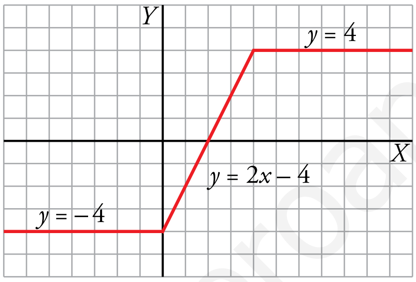
$$y = |x| - |4 - x| = \begin{cases} -4 & \text{si } x < 0 \\ 2x - 4 & \text{si } 0 \leq x \leq 4 \\ 4 & \text{si } x > 4 \end{cases}$$

Representación gráfica:

- $y = -4$ (si $x < 0$). Función constante.
- $y = 2x - 4$ (si $0 \leq x \leq 4$). Función lineal:

x	0	2	4
y	–4	0	4

- $y = 4$ (si $x > 4$). Función constante.



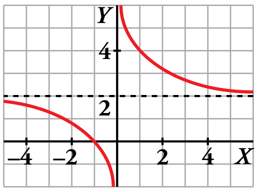
Página 115

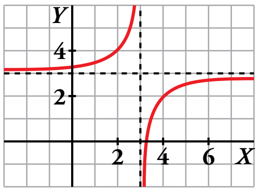
Otras funciones

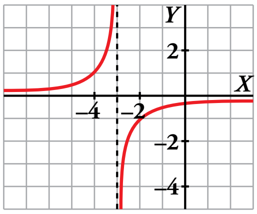
21. **Asocia a cada gráfica una de estas fórmulas e indica el dominio de definición de cada una:**

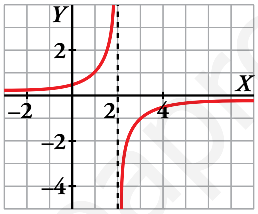
I) $y = \dfrac{1}{2 - x}$ **II)** $y = 3 - \dfrac{1}{x - 3}$

III) $y = 2 + \dfrac{2}{x}$ **IV)** $y = -\dfrac{1}{x + 3}$

a)


b)


c)


d)


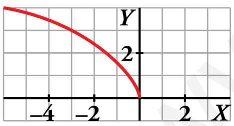
I $\to$ d) $Dom = \mathbb{R} - \{2\}$ II $\to$ b) $Dom = \mathbb{R} - \{3\}$

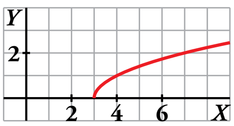
III $\to$ a) $Dom = \mathbb{R} - \{0\}$ IV $\to$ c) $Dom = \mathbb{R} - \{-3\}$

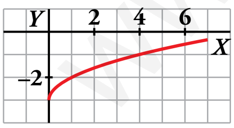
22. **Asocia a cada gráfica la fórmula que le corresponde e indica su dominio de definición:**

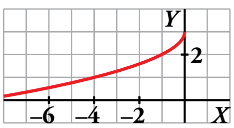
I) $y = \sqrt{x - 3}$ **II)** $y = \sqrt{x} - 3$

III) $y = 3 - \sqrt{-x}$ **IV)** $y = \sqrt{-3x}$

a)


b)


c)


d)


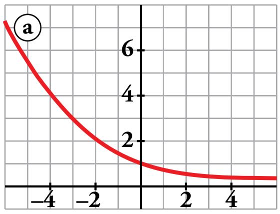
I $\to$ b) $Dom = [3, +\infty)$ II $\to$ c) $Dom = [0, +\infty)$

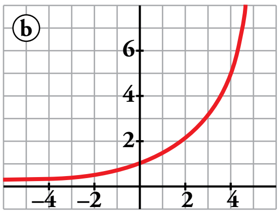
III $\to$ d) $Dom = (-\infty, 0]$ IV $\to$ a) $Dom = (-\infty, 0]$

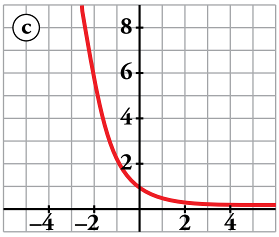
23. **Asocia a cada gráfica una de estas fórmulas:**

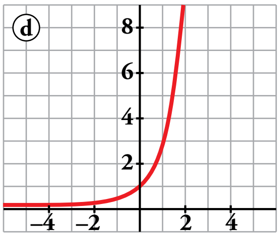
I) $y = 3^x$ **II)** $y = 1{,}5^x$

III) $y = 0{,}4^x$ **IV)** $y = 0{,}7^x$









Di, en cada una de ellas, si es creciente o decreciente.

I $\rightarrow$ d) Creciente II $\rightarrow$ b) Creciente

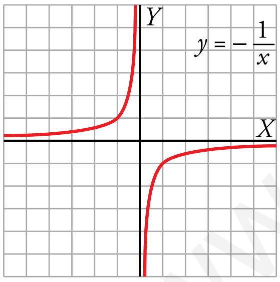
III $\rightarrow$ c) Decreciente IV $\rightarrow$ a) Decreciente

24. **Dibuja la gráfica de las funciones siguientes:**

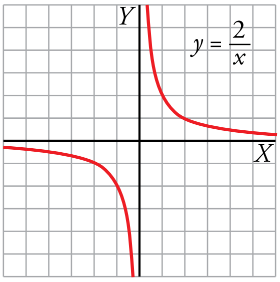
a) $y = -\dfrac{1}{x}$ **b)** $y = \dfrac{2}{x}$

c) $y = \dfrac{1}{x} - 3$ **d)** $y = \dfrac{3}{x} + 2$

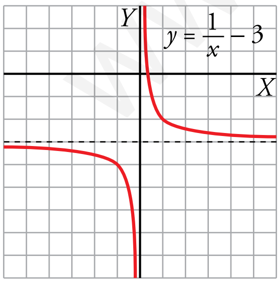
a)



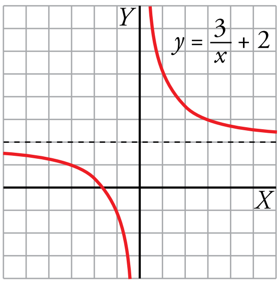
b)



c)



d)



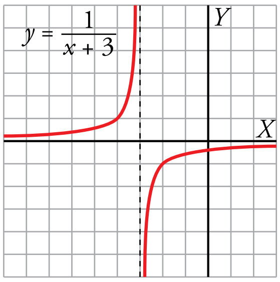
25. **Di cuál es el dominio de definición de las siguientes funciones y cuáles son sus asíntotas. Represéntalas gráficamente.**

a) $y = \dfrac{1}{x+3}$ **b)** $y = -\dfrac{3}{x+1}$

c) $y = \dfrac{1}{1-x} + 2$ **d)** $y = \dfrac{1}{x-1} + 2$

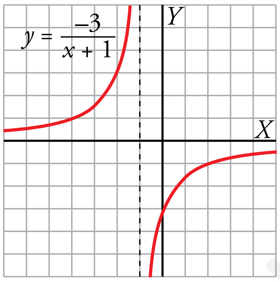
a) Dominio = $\mathbb{R} - \{-3\}$

Asíntotas: $x = -3$, $y = 0$



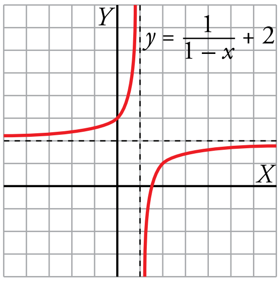
b) Dominio = $\mathbb{R} - \{-1\}$

Asíntotas: $x = -1$, $y = 0$



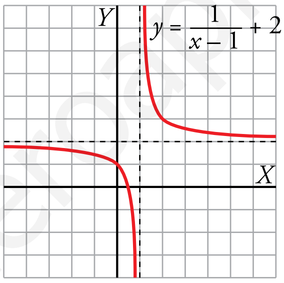
c) Dominio = $\mathbb{R} - \{1\}$

Asíntotas: $x = 1$, $y = 2$



d) Dominio = $\mathbb{R} - \{1\}$

Asíntotas: $x = 1$, $y = 2$



26. **Representa gráficamente las siguientes funciones e indica el dominio de definición de cada una:**

a) $y = \sqrt{x} + 2$ **b)** $y = 2 - \sqrt{x}$

c) $y = 2\sqrt{-x}$ **d)** $y = -\sqrt{-x}$

e) $y = -2 - \sqrt{x}$ **f)** $y = -2 - 2\sqrt{-x}$

g) $y = 2 + \sqrt{-x}$ **h)** $y = 2\sqrt{-x} + 2$

a) $y = \sqrt{x} + 2 \rightarrow$ Dominio = $[0, +\infty)$

b) $y = 2 - \sqrt{x} \rightarrow$ Dominio = $[0, +\infty)$

c) $y = 2\sqrt{-x} \rightarrow$ Dominio = $(-\infty, 0]$

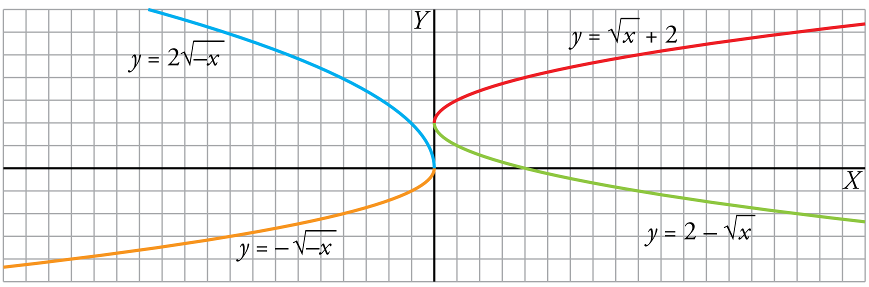
d) $y = -\sqrt{-x} \rightarrow$ Dominio = $(-\infty, 0]$

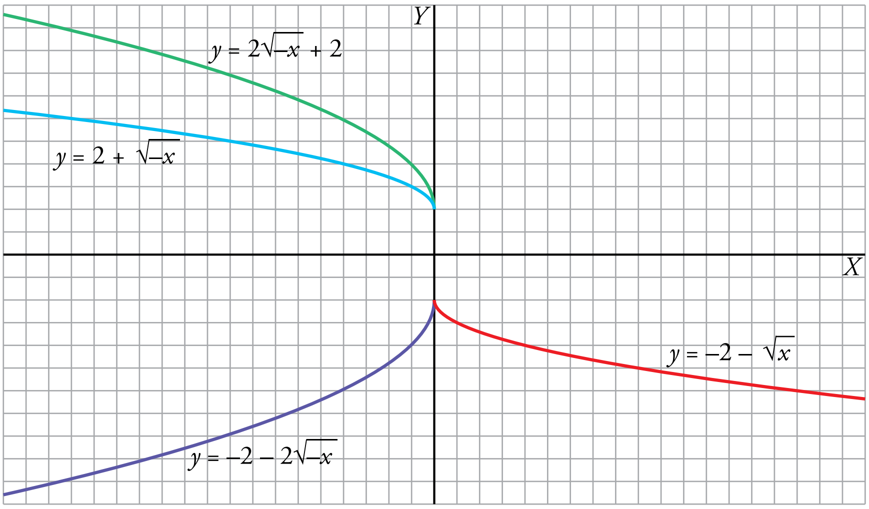
e) $y = -2 - \sqrt{x} \rightarrow$ Dominio = $[0, +\infty)$

f) $y = -2 - 2\sqrt{-x} \rightarrow$ Dominio = $(-\infty, 0]$

g) $y = 2 + \sqrt{-x} \rightarrow$ Dominio = $(-\infty, 0]$

h) $y = 2\sqrt{-x} + 2 \rightarrow$ Dominio = $(-\infty, 0]$





27. **Estudia el dominio de definición de las siguientes funciones y represéntalas gráficamente:**

a) $y = \sqrt{2 - x}$

b) $y = 7 - \sqrt{2x + 4}$

c) $y = \sqrt{-x - 1}$

d) $y = 2 + \sqrt{x + 3}$

e) $y = 1 + \sqrt{x - 1}$

f) $y = \sqrt{2(x - 1)}$

g) $y = -\sqrt{-(x + 2)}$

h) $y = 1 + \sqrt{1 - (x + 1)}$

a) $y = \sqrt{2 - x}$

$2 - x \geq 0 \rightarrow 2 \geq x \rightarrow$ Dominio = $(-\infty, 2]$

b) $y = 7 - \sqrt{2x + 4}$

$2x + 4 \geq 0 \rightarrow 2x \geq -4 \rightarrow x \geq -2 \rightarrow$ Dominio = $[-2, +\infty)$

c) $y = \sqrt{-x - 1}$

$-x - 1 \geq 0 \rightarrow -1 \geq x \rightarrow$ Dominio = $(-\infty, -1]$

d) $y = 2 + \sqrt{x + 3}$

$x + 3 \geq 0 \rightarrow x \geq -3 \rightarrow$ Dominio = $[-3, +\infty)$

e) $y = 1 + \sqrt{x - 1}$

$x - 1 \geq 0 \rightarrow x \geq 1 \rightarrow$ Dominio = $[1, +\infty)$

f) $y = \sqrt{2(x - 1)}$

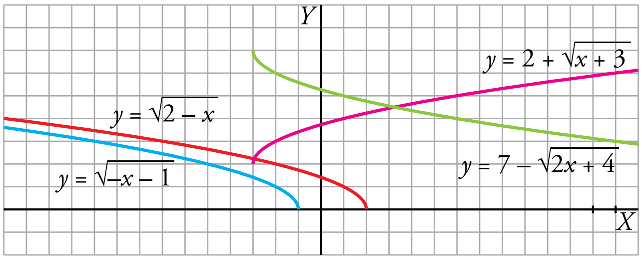
$2(x - 1) \geq 0 \rightarrow x - 1 \geq 0 \rightarrow x \geq 1 \rightarrow$ Dominio = $[1, +\infty)$

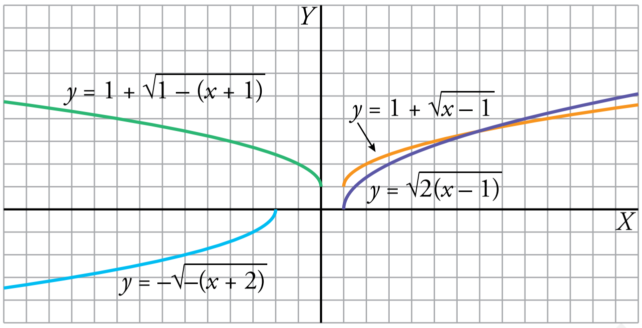
g) $y = -\sqrt{-(x + 2)}$

$-(x + 2) \geq 0 \rightarrow x + 2 \leq 0 \rightarrow x \leq -2 \rightarrow$ Dominio = $(-\infty, -2]$

h) $y = 1 + \sqrt{1 - (x + 1)}$

$1 - (x + 1) \geq 0 \rightarrow 1 \geq x + 1 \rightarrow x \leq 0 \rightarrow$ Dominio = $(-\infty, 0]$





28. **Representa las siguientes funciones haciendo, en cada caso, una tabla de valores. (Ayúdate de la calculadora).**

a) $y = 2^{-x}$ **b)** $y = 3^x + 1$ **c)** $y = \left(\dfrac{2}{3}\right)^x + 3$ **d)** $y = 0,75^{-x}$

a) $y = 2^{-x}$

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
y	8	4	2	1	1/2	1/4	1/8

b) $y = 3^x + 1$

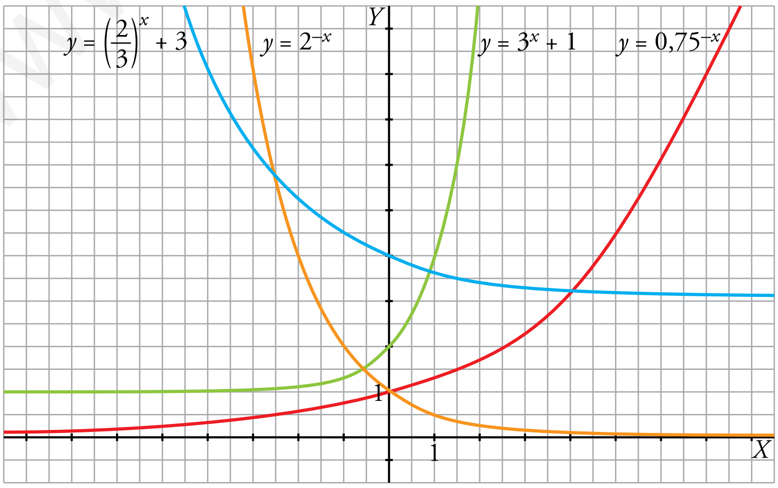
x	–2	–1	0	1	2	3
y	$1,\widehat{1}$	$1,\widehat{3}$	2	4	10	28

c) $y = \left(\dfrac{2}{3}\right)^x + 3$

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
y	6,375	5,25	4,5	4	$3,\widehat{6}$	$3,\widehat{4}$	3,3

d) $y = 0,75^{-x}$

x	–4	–2	–1	0	1	2	3	4	8
y	0,32	0,5625	0,75	1	$1,\widehat{3}$	$1,\widehat{7}$	2,37	3,16	9,99



29. **Representa cada par de funciones sobre los mismos ejes coordenados. ¿Qué relación hay entre ellos?**

a) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$; $y = 3^x$ **b)** $y = 0{,}25^x$; $y = 4^x$

a) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
$y = (1/3)^x$	27	9	3	1	1/3	1/9	1/27

$y = 3^x$

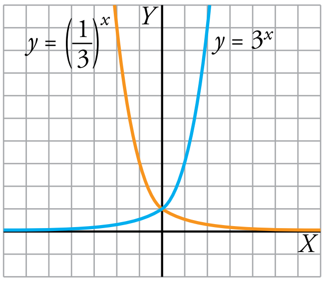
x	–3	–2	–1	0	1	2	3
$y = 3^x$	1/27	1/9	1/3	1	3	9	27

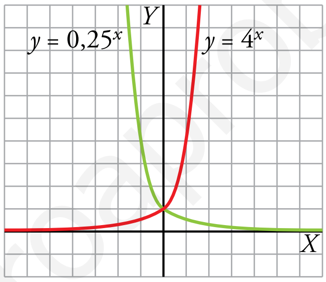
b) $y = 0{,}25^x \to y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$

x	–2	–1	0	1	2
$y = 0{,}25^x$	16	4	1	1/4	1/16

$y = 4^x$

x	–2	–1	0	1	2
$y = 4^x$	1/16	1/4	1	4	16





Sus gráficas son simétricas respecto al eje de ordenadas.

30. **a) Representa las funciones siguientes:**

$$y = 3^x \text{ e } y = \log_3 x$$

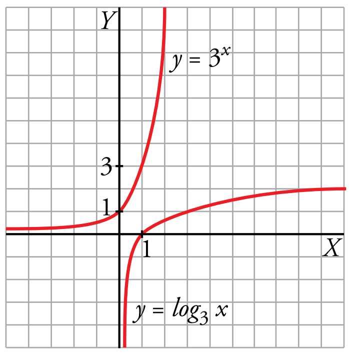
b) Comprueba si los puntos siguientes pertenecen a la gráfica de $y = \log_3 x$:

$$(243, 5) \quad \left(\frac{1}{27}, -3\right) \quad \left(\sqrt{3}; 0{,}5\right) \quad (-3, -1)$$

a) Una es inversa de la otra.

x	–2	–1	0	1	2
$y = 3^x$	1/9	1/3	1	3	9

x	1/9	1/3	1	3	9
$y = \log_3 x$	–2	–1	0	1	2



b) Se sabe que $y = \log_3 x \to 3^y = x$. Luego:

$(243,5) \to 3^5 = 243 \to \log_3 243 = 5 \to$ Sí pertenece.

$\left(\frac{1}{27}, -3\right) \to 3^{-3} = \frac{1}{3^3} = \frac{1}{27} \to \log_3 \frac{1}{27} = -3 \to$ Sí pertenece.

$\left(\sqrt{3}; 0,5\right) \to 3^{0,5} = 3^{1/2} = \sqrt{3} \to \log_3 \sqrt{3} = 0,5 \to$ Sí pertenece.

$(-3, -1) \to 3^{-1} = \frac{1}{3} \neq -3 \to$ No pertenece.

Página 116

Aplica lo aprendido

31. **Resuelve analítica y gráficamente los siguientes sistemas:**

a) $\begin{cases} y = 2x^2 - 5x - 6 \\ y = 3x + 4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} y = x^2 - 2x + 1 \\ y = -2x + 2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} y = 2x^2 - 8x - 3 \\ y = x^2 - 2x - 3 \end{cases}$ d) $\begin{cases} y = -x^2 + 5x \\ y = x^2 + 3x - (15/2) \end{cases}$

a) $\begin{cases} y = 2x^2 - 5x - 6 \\ y = 3x + 4 \end{cases}$

Analíticamente

Vemos los puntos de corte:

$2x^2 - 5x - 6 = 3x + 4 \to 2x^2 - 8x - 10 = 0 \to x^2 - 4x - 5 = 0$

$x = \dfrac{4 \pm \sqrt{16 + 20}}{2} = \dfrac{4 \pm 6}{2}$ $\begin{cases} x = 5 \to y = 19 \\ x = -1 \to y = 1 \end{cases}$

Hay dos puntos de corte: (5, 19), (–1, 1).

Gráficamente

Representamos en unos mismos ejes ambas funciones:

- $y = 2x^2 - 5x - 6$

  Puntos de corte con los ejes:

  Eje X: $2x^2 - 5x - 6 = 0 \to$

  $\to x = \dfrac{5 \pm \sqrt{25 + 48}}{2 \cdot 2} = \dfrac{5 \pm \sqrt{73}}{4} \to$

  $\begin{cases} \left(\dfrac{5 + \sqrt{73}}{4}, 0\right) \approx (3{,}38; 0) \\ \left(\dfrac{5 - \sqrt{73}}{4}, 0\right) \approx (-0{,}88; 0) \end{cases}$

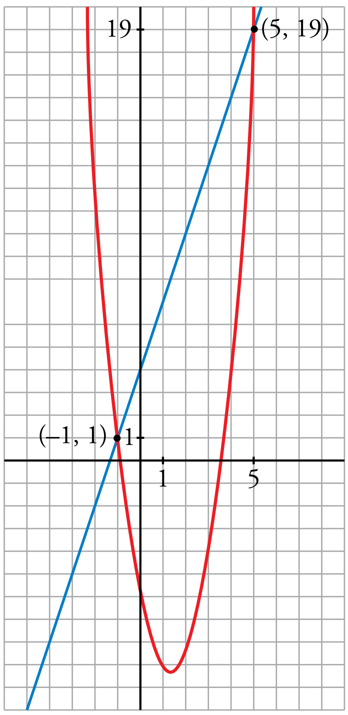
  Eje Y: $y = -6 \to (0, -6)$

  Vértice: $\left(\dfrac{5}{4}, -\dfrac{73}{8}\right)$

- $y = 3x + 4$

  Hacemos una tabla de valores:

x	–1	5
y	1	19



b) $\begin{cases} y = x^2 - 2x + 1 \\ y = -2x + 2 \end{cases}$

Analíticamente

Puntos de corte entre ambas:

$x^2 - 2x + 1 = -2x + 2 \rightarrow x^2 - 1 = 0 \rightarrow x = \pm 1 \rightarrow y = \begin{cases} 0 \\ 4 \end{cases}$

Los puntos de corte son: (1, 0), (–1, 4).

Gráficamente

Representamos en unos mismos ejes ambas funciones:

- $y = x^2 - 2x + 1$

  Puntos de corte con los ejes:

  Eje X: $x^2 - 2x + 1 = 0 \rightarrow x = \dfrac{2 \pm \sqrt{4-4}}{2} = 1 \rightarrow$ Raíz doble: (1, 0)

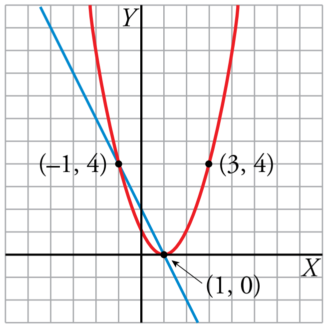
  Eje Y: $y = 1 \rightarrow (0, 1)$

  Vértice: (1, 0)

- $y = -2x + 2$

  Hacemos una tabla de valores:

x	1	–1
y	0	4



c) $\begin{cases} y = 2x^2 - 8x - 3 \\ y = x^2 - 2x - 3 \end{cases}$

Analíticamente

$2x^2 - 8x - 3 = x^2 - 2x - 3 \rightarrow x^2 - 6x = 0 \rightarrow$

$\rightarrow x(x-6) = 0 \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 6 \end{cases}$

Si $x_1 = 0 \rightarrow y_1 = -3$

Si $x_2 = 6 \rightarrow y_2 = 6^2 - 2 \cdot 6 - 3 = 21$

Solución: $x_1 = 0,\ y_1 = -3;\ x_2 = 6,\ y_2 = 21$

Gráficamente

Representamos cada una de la parábolas:

- $y = 2x^2 - 8x - 3$

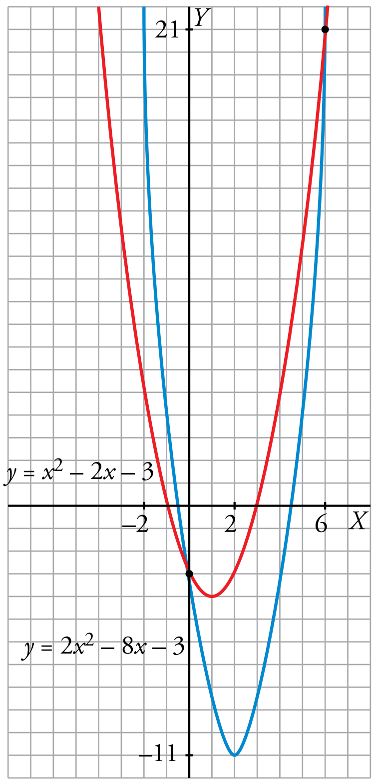
  Cortes con los ejes:

  Eje X: $y = 0 \rightarrow 2x^2 - 8x - 3 = 0$

  $x = \dfrac{8 \pm \sqrt{64 - 4 \cdot (-3) \cdot 2}}{2 \cdot 2} = \dfrac{8 \pm \sqrt{88}}{4} = \dfrac{4 \pm \sqrt{22}}{2} \begin{cases} (4{,}34;\ 0) \\ (-0{,}34;\ 0) \end{cases}$

  Eje Y: $x = 0 \rightarrow y = -3 \rightarrow (0, -3)$

  Vértice: (2, –11)



- $y = x^2 - 2x - 3$

  Cortes con los ejes:

  Eje X: $y = 0 \rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \rightarrow x = \dfrac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot (-3)}}{2} = \dfrac{2 \pm 4}{2} < \begin{matrix}(3, 0) \\ (-1, 0)\end{matrix}$

  Eje Y: $x = 0 \rightarrow y = -3 \rightarrow (0, -3)$

  Vértice: $(1, -4)$

d) $\begin{cases} y = -x^2 + 5x \\ y = x^2 + 3x - (15/2) \end{cases}$

Analíticamente

Vemos los puntos de corte:

$-x^2 + 5x = x^2 + 3x - 15/2 \rightarrow 2x^2 - 2x - 15/2 = 0 \rightarrow 4x^2 - 4x - 15 = 0$

$x = \dfrac{4 \pm \sqrt{256}}{8} = \dfrac{4 \pm 16}{8} < \begin{matrix} x_1 = 5/2 \\ x_2 = -3/2 \end{matrix}$

Si $x_1 = \dfrac{5}{2} \rightarrow y_1 = \dfrac{25}{4}$

Si $x_2 = -\dfrac{3}{2} \rightarrow y_2 = -\dfrac{39}{4}$

Gráficamente

Representamos cada una de las parábolas:

- $y = -x^2 + 5x$

  Cortes con los ejes:

  Eje X: $y = 0 \rightarrow -x^2 + 5x = 0 \rightarrow x(-x + 5) = 0 < \begin{matrix}(0, 0) \\ (5, 0)\end{matrix}$

  Eje Y: $x = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow (0, 0)$

  Vértice: $\left(\dfrac{5}{2}, \dfrac{25}{4}\right)$

- $y = x^2 + 3x - 15/2$

  Cortes con los ejes:

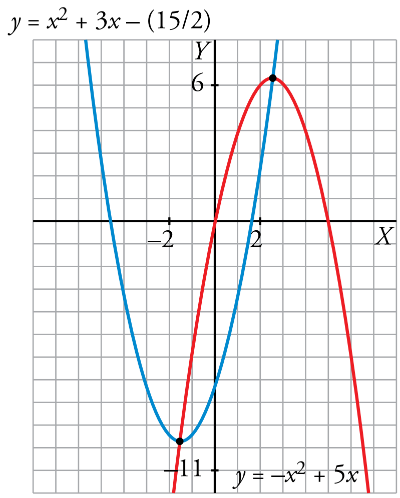
  Eje X: $y = 0 \rightarrow 2x^2 + 6x - 15 = 0$

  $x = \dfrac{-6 \pm \sqrt{36 + 120}}{4} = \dfrac{-6 \pm \sqrt{156}}{4} \rightarrow$

  $< \begin{matrix} \left(\dfrac{-6 + \sqrt{156}}{4}, 0\right) \approx (1{,}62; 0) \\ \left(\dfrac{-6 - \sqrt{156}}{4}, 0\right) \approx (-4{,}62; 0) \end{matrix}$

  Eje Y: $x = 0 \rightarrow y = -15/2 \rightarrow (0, -15/2)$

  Vértice: $\left(\dfrac{-3}{2}, \dfrac{-39}{4}\right)$



32. **a) Calcula b y c para que el vértice de la parábola $y = x^2 + bx + c$ esté en el punto (3, 1).**

b) ¿Cuál es su eje de simetría?

c) ¿Cuáles son sus puntos de corte con los ejes?

a) Vértice en $x = 3 \to -\dfrac{b}{2a} = 3 \to -b = 6a = 6 \to b = -6$

Pasa por (3, 1) $\to 1 = 9 - 18 + c \to c = 10$

$y = x^2 - 6x + 10$

b) Su eje de simetría es $x = 3$.

c) Cortes con los ejes:

$x = 0 \to y = 10 \to$ Punto (0, 10)

$x^2 - 6x + 10 = 0 \to x = \dfrac{6 \pm \sqrt{36 - 40}}{2} \to$ No tiene solución, por tanto, no corta al eje X.

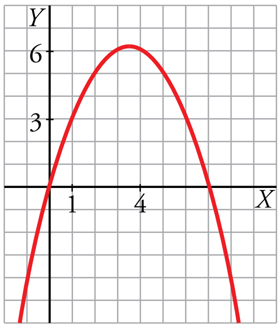
33. **La parábola $y = ax^2 + bx + c$ pasa por el origen de coordenadas. ¿Cuánto valdrá c?**

Si, además, sabemos que pasa por los puntos (1, 3) y (4, 6), halla a y b y representa la parábola.

$c = 0 \qquad y = ax^2 + bx$

$$\left.\begin{array}{l} (1, 3) \to 3 = a + b \\ (4, 6) \to 6 = 16a + 4b \end{array}\right\} \begin{array}{l} a = 3 - b \to a = -1/2 \\ 6 = 16(3 - b) + 4b \to b = 7/2 \end{array}$$

$y = -\dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{7}{2}x$



34. **Calcula a y b para que la función $y = \dfrac{a}{x - b}$ pase por los puntos (2, 2) y (–1, –1).**

$$\left.\begin{array}{l} 2 = \dfrac{a}{2 - b} \\ -1 = \dfrac{a}{-1 - b} \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} a = 4 - 2b \\ a = 1 + b \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} 1 + b = 4 - 2b \to b = 1 \\ a = 2 \end{array}\right\} y = \dfrac{2}{x - 1}$$

35. **La gráfica de una función exponencial del tipo $y = ka^x$ pasa por los puntos (0, 3) y (1; 3,6).**

a) Calcula k y a.

b) ¿Es creciente o decreciente?

c) Representa la función.

a) Si pasa por el punto (0, 3) $\to 3 = ka^0 \to k = 3$

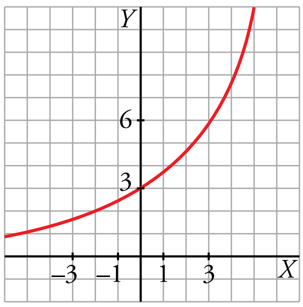
Si pasa por el punto (1; 3,6) $\to 3{,}6 = ka^1 \to 3{,}6 = 3a \to a = 1{,}2$

Tenemos la función: $y = 3 \cdot 1{,}2^x$

b) Es una función creciente.

c) Hacemos una tabla de valores:

x	–2	–1	0	1	2	3
y	2,08	2,5	3	3,6	4,32	5,18



36. **La función exponencial $y = ka^x$ pasa por los puntos (0, 2) y (2; 1,28). Calcula k y a y represéntala.**

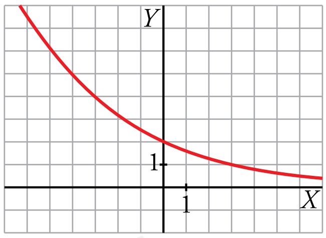
$y = ka^x$

Pasa por el punto (0, 2): $2 = k \cdot a^0 \rightarrow 2 = k$

Pasa por (2; 1,28): $1{,}28 = k \cdot a^2 \rightarrow 1{,}28 = 2a^2 \rightarrow a^2 = 0{,}64 \rightarrow a = 0{,}8$

La función es: $y = 2 \cdot 0{,}8^x$

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
y	3,906	3,125	2,5	2	1,6	1,28	1,024

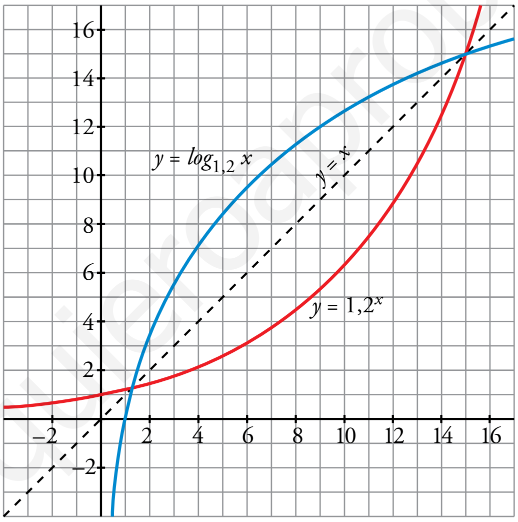


37. **a) Representa gráficamente la función exponencial $y = 1{,}2^x$ haciendo uso de una tabla de valores.**

b) ¿Cuál es la función inversa o recíproca de $y = 1{,}2^x$? Represéntala en los mismos ejes.

La función inversa de $y = 1{,}2^x$ es $y = log_{1,2}\, x$.

x	**y**
–4	0,48
0	1
1	1,2
2	1,44
4	2,07
8	4,3
10	6,2
12	8,9
16	18,5



38. **Representa las siguientes funciones:**

a) $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x < 0 \\ \sqrt{x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 1 \\ \dfrac{1}{x} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

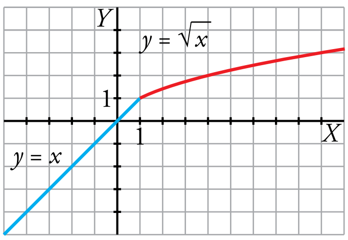
a) $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x < 0 \\ \sqrt{x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

• $y = x$ (si $x < 0$) $\rightarrow$

x	0	–1	–2
y	0	–1	–2

• $y = \sqrt{x}$ (si $x \geq 0$) $\rightarrow$

x	0	1	4	9
y	0	1	2	3



b) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 1 \\ \dfrac{1}{x} & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$

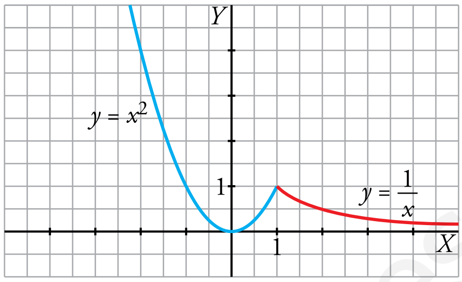
- $y = x^2$ (si $x < 1$) $\rightarrow$ Vértice: (0, 0)

x	1	0	–1	–2
y	1	0	1	4

- $y = \dfrac{1}{x}$ (si $x \ge 1$)

$y = 0 \rightarrow$ Asíntota horizontal

x	1	2	3	4
y	1	1/2	1/3	1/4



39. **Calcula el valor del parámetro k para que la siguiente función sea continua:**

$$y = \begin{cases} -x^2 - kx - 5 & \text{si } x \le -2 \\ \dfrac{1}{2}x + 4 & \text{si } x > -2 \end{cases}$$

$\left.\begin{array}{l} y_1(x) = -x^2 - kx - 5 \text{ es una función cuadrática y, por tanto, continua en } \mathbb{R} \text{ para todo } k \\ y_2(x) = \dfrac{1}{2}x + 4 \text{ es una función lineal y, por tanto, continua en } \mathbb{R} \end{array}\right\} \rightarrow$

$\rightarrow y(x)$ es continua en $(-\infty, -2) \cup (-2, +\infty)$ para todo k

Debemos hallar el valor de k para que $y(x)$ también sea continua en $x = -2$.

$y(x)$ será continua en $x = -2$ si $y_1(-2) = y_2(-2)$, es decir:

$$-(-2)^2 - k \cdot (-2) - 5 = \frac{1}{2} \cdot (-2) + 4 \rightarrow -4 + 2k - 5 = -1 + 4 \rightarrow$$

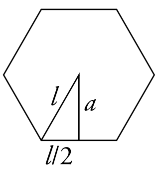
$$\rightarrow 2k = 12 \rightarrow k = 6$$

Resuelve problemas

40. **¿Cuál es la ecuación de la función que nos da el perímetro de un hexágono dependiendo de cuánto mida su lado? ¿Y la que nos da su área? Dibuja ambas funciones.**

$p = 6l$

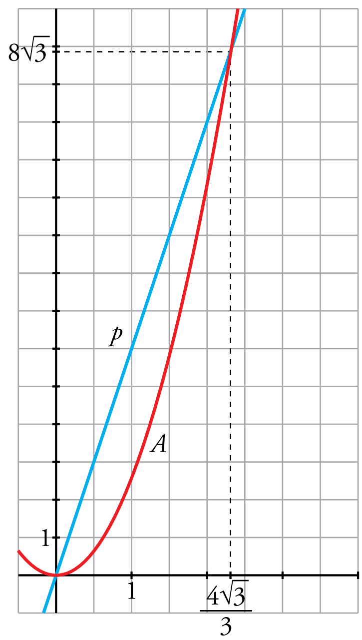
La fórmula del área es $A = \dfrac{p \cdot a}{2} = 3l \cdot a$



Debemos, por tanto, expresar la apotema en función del lado:

$$a^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 = l^2 \rightarrow a = \frac{\sqrt{3}}{2}l$$

Por tanto: $A = 3l \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2}l = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}l^2$



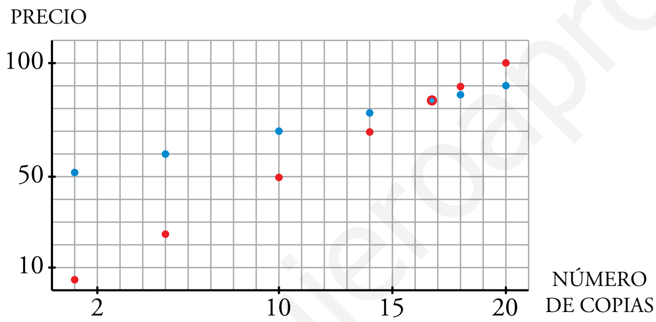
41. **Una casa de reprografía cobra 5 céntimos por cada fotocopia. Ofrece también un servicio de multicopia, por el que cobra 50 cént. fijos y 2 cént. por cada copia de un mismo ejemplar.**

Haz, para cada caso, una tabla de valores que muestre lo que hay que pagar según el número de copias realizadas. Representa las funciones obtenidas.

¿Tiene sentido unir los puntos en cada una? Obtén la expresión analítica de cada función. ¿A partir de cuántas copias es más barato usar la multicopista?

FOTOCOPIAS	
UNIDADES	PRECIO
1	5
5	25
10	50
14	70
18	90
20	100

MULTICOPIA	
UNIDADES	PRECIO
1	52
5	60
10	70
14	78
18	86
20	90



No tiene sentido unir los puntos; solo se pueden dar valores naturales.

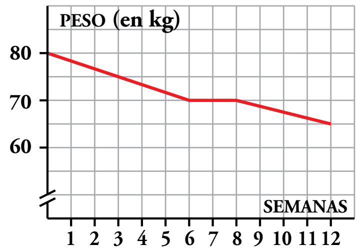
Expresiones analíticas:

Fotocopias (puntos rojos): $y = 5x$

Multicopias (puntos azules): $y = 50 + 2x$

A partir de 17 copias, es más económico utilizar la multicopia.

42. **El médico ha puesto a Marcos un régimen de adelgazamiento de 12 semanas y le ha hecho esta gráfica para explicarle lo que espera conseguir:**



a) ¿Cuánto pesaba Marcos al comenzar el régimen?

b) ¿Cuánto debe adelgazar por semana en la primera etapa del régimen? ¿Y entre la 6.ª y la 8.ª semanas?

c) Halla la expresión analítica de esa función.

a) Marcos pesaba 80 kg al comenzar el régimen.

b) $\frac{5}{3}$ = 1,67 kg por semana.

Entre la sexta y la octava semana no tiene que adelgazar nada.

c) Buscamos la ecuación de cada uno de los tramos:

- Para $0 \le x \le 6$, la pendiente $m = -\frac{10}{6} = -\frac{5}{3}$ y $n = 80 \rightarrow y = -\frac{5}{3}x + 80$
- Para $6 < x \le 8$, $y = 70$.
- Para $8 < x \le 12$, $m = -\frac{5}{4}$ y pasa por (12, 65).

$$y - 65 = -\frac{5}{4}(x - 12) \rightarrow y = -\frac{5}{4}x + 80$$

Luego, la expresión analítica de esta función será:

$$y = \begin{cases} -\frac{5}{3}x + 80 & \text{si } 0 \le x \le 6 \\ 70 & \text{si } 6 < x \le 8 \\ -\frac{5}{4}x + 80 & \text{si } 8 < x \le 12 \end{cases}$$

43. **Andrea ha comprado por 100 € un regalo de cumpleaños para Carlos. El resto de los amigos del grupo deciden pagar el regalo entre todos.**

Construye una función que nos dé el dinero que debe poner cada uno dependiendo del número de personas que haya y dibújala.

Si el número de amigos es x, $x \in \mathbb{N}$, la función que da lo que debe pagar cada uno es $y = \frac{100}{x}$.

44. **El sueldo inicial de Ana es de 24 000 € anuales. En su contrato de trabajo figura que subirá un 8 % anual. ¿Cuánto ganará dentro de 10 años?**

a) Escribe la función que relaciona el sueldo con el tiempo.

b) ¿Para qué valores de la variable está definida?

El sueldo inicial es 24 000 €.

Al cabo de un año será $24\,000 \cdot 1{,}08$.

Al cabo de dos años será $24\,000 \cdot 1{,}08^2$.

Es decir, al cabo de 10 años será $24\,000 \cdot 1{,}08^{10} = 51\,814{,}20$ €.

a) $s(t) = 24\,000 \cdot 1{,}08^t$

b) Para los valores naturales de t.

Página 117

Problemas "+"

45. **La altura, h, a la que se encuentra en cada instante, *t*, una flecha que lanzamos con el arco hacia arriba con una velocidad de 40 m/s es h = $40t - 5t^2$.**

a) Representa gráficamente la función.

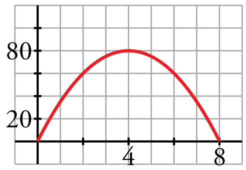
b) Di cuál es su dominio de definición.

c) ¿En qué momento alcanza su altura máxima? ¿Cuál es esa altura?

d) ¿En qué momento se clava la flecha en el suelo?

e) ¿En qué intervalo de tiempo la flecha está a una altura superior a 35 metros?

a)



b) [0, 8]

c) Alcanza 80 m a los 4 segundos.

d) A los 8 segundos.

e) $40x - 5x^2 > 35 \rightarrow 5x^2 - 40x + 35 < 0 \rightarrow$

$\rightarrow x \in (1, 7)$

46. **Este año, Verónica ha conseguido recoger de su cosecha 240 kg de aguacates que hoy se venderían a 1,20 €/kg. A partir de ahora, cada día que pasa se estropean 4 kg, pero el precio aumenta 0,10 €/kg. ¿Cuándo debe vender los aguacates para obtener el máximo beneficio? ¿Cuál será ese beneficio?**

La función beneficio es $B(t) = (240 - 4t) \cdot (1{,}20 + 0{,}1t) = -0{,}4t^2 + 19{,}2t + 288$, donde t son los días transcurridos.

La gráfica será una parábola de vértice con abscisa $p = \dfrac{19{,}2}{0{,}8} = 24$.

Como $B(24) = 518{,}4$, la respuesta es que debe vender los aguacates a los 24 días y obtendrá un beneficio de 518,4 euros.

47. **El coste por unidad de fabricación de un tipo de cajas disminuye según el número de unidades fabricadas y viene dado por la función:**

$$y = \frac{0{,}3x + 1\,000}{x}$$

a) ¿Qué valores toma la variable independiente, *x*?

b) Calcula el coste por unidad y el coste total para fabricar 10 cajas. Haz lo mismo para 100 000 cajas.

c) ¿A cuánto crees que se acerca el coste por unidad cuando el número de cajas se hace muy grande?

a) x toma valores naturales.

b) • Para 10 cajas:

Coste por unidad $= \dfrac{3 + 1000}{10} = 100{,}3$

Coste total de 10 unidades = 1 003

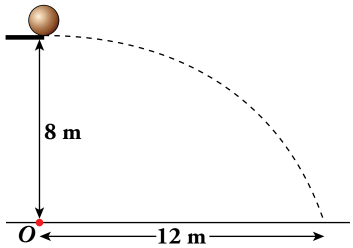
- Para 100 000 cajas:

$$\text{Coste por unidad} = \frac{30\,000 + 1\,000}{100\,000} = 0{,}31$$

Coste total de 100 000 unidades = 31 000

c) El coste por unidad se acerca a 0,3.

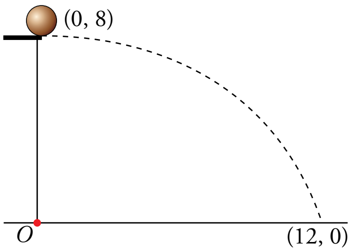
48. **En una piscina hay un trampolín a 8 m del agua. Esther lanza una pelota rodando y cae al agua a 12 m de la vertical del trampolín.**



Escribe la ecuación de la trayectoria descrita por la pelota desde que sale del trampolín hasta que toca el agua. Da su dominio de definición.

La trayectoria es una parábola $y = ax^2 + bx + c$ con su vértice en el punto de caída. Toma O como centro de coordenadas y ten en cuenta que el vértice es (0, 8).

RESOLUCIÓN 1



Tomando el centro de coordenadas en el punto O, el vértice de la parábola es (0, 8). La ecuación de la parábola queda así:

$$\left.\begin{array}{l} y = ax^2 + b \\ \text{Para } x = 0,\ y = 8 \ \rightarrow\ 8 = b \end{array}\right\} y = ax^2 + 8$$

Calculamos el valor de a sabiendo que pasa por (12, 0):

$$0 = a \cdot 12^2 + 8 \ \rightarrow\ a = -\frac{8}{144} = -\frac{1}{18}$$

La ecuación de la trayectoria es $y = -\frac{1}{18}x^2 + 8$, definida en [0, 12].

RESOLUCIÓN 2

En la resolución anterior se ha tenido en cuenta que la trayectoria es una parábola con su vértice en el punto de caída. Resolvámoslo, ahora, como lo haría un físico, teniendo en cuenta, solamente, las leyes del movimiento:

Tiempo que tarda en caer 8 m: (movimiento uniformemente acelerado. Aceleración, g):

$\frac{1}{2}gt^2 = 8$. Tomamos $g = 10 \text{ m/s}^2 \ \rightarrow\ 5t^2 = 8 \ \rightarrow\ t = \sqrt{\frac{8}{5}}$

¿A qué velocidad rueda la pelota por el trampolín? Tengamos en cuenta que, a esa velocidad, recorre 12 m en $\sqrt{\frac{8}{5}}$ s (componente horizontal).

Movimiento uniforme $e = v \cdot t \ \rightarrow\ 12 = v \cdot \sqrt{\frac{8}{5}} \ \rightarrow\ v = \frac{12}{\sqrt{8/5}}$

Obtengamos la ecuación de la trayectoria tomando O como origen de coordenadas:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Comp. horizontal: } x = \dfrac{12}{\sqrt{8/5}}t \\ \text{Comp. vertical: } y = 8 - 5t^2\end{array}\right\} \begin{array}{l} t = \dfrac{\sqrt{8/5}\,x}{12} \to t^2 = \dfrac{8/5}{144}x^2 = \dfrac{1}{90}x^2 \\ y = 8 - 5 \cdot \dfrac{1}{90}x^2 = 8 - \dfrac{1}{18}x^2 \end{array}$$

Hemos obtenido la trayectoria $y = 8 - \dfrac{1}{18}x^2$, la misma que antes como es natural.

Reflexiona sobre la teoría

49. **Di cuál es la pendiente de cada una de las siguientes rectas y di si son crecientes o decrecientes:**

a) $y = \dfrac{5x-8}{3}$ **b)** $\dfrac{y+4}{2} = 1$ **c)** $3x + y + 4 = 0$

¿Qué relación hay entre el crecimiento o decrecimiento de una recta y su pendiente?

a) $m = \dfrac{5}{3}$. Creciente.

b) $m = 0$. Ni crece ni decrece, es constante.

c) $m = -3$. Decreciente.

Si la pendiente es positiva, hay crecimiento. Si la pendiente es negativa, hay decrecimiento.

50. **Dibuja y escribe la ecuación, en cada caso, de las parábolas que cumplen estas condiciones:**

a) Su eje es $x = 2$, el coeficiente de la x^2 es –1 y corta al eje X en un solo punto.

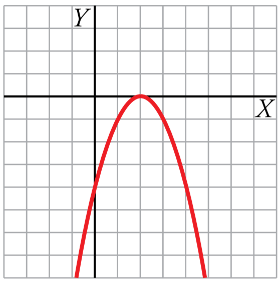
b) Tiene el vértice en el punto (3, –2) y tiene la misma forma que $y = x^2$.

c) Tiene el vértice en el origen de coordenadas y pasa por el punto (–3, –18).

a) La parábola es de la forma: $y = -x^2 + bx + c$

- Eje: $x = 2 \to -\dfrac{b}{2a} = 2 \to \dfrac{-b}{-2} = 2 \to b = 4$
- Corta al eje X en un único punto $\to$ pasa por $(2, 0) \to$
  $\to 0 = -4 + 4 \cdot 2 + c \to c = -4$

La parábola es $y = -x^2 + 4x - 4$.



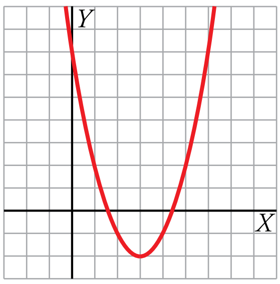
b) Vértice en $(3, -2) \to -\dfrac{b}{2a} = 3 \to b = -6a$

Tiene la misma forma que $y = x^2$, luego $a = 1$.

La función es de la forma $y = x^2 - 6x + c$.

Pasa por $(3, -2) \to 9 - 18 + c = -2 \to c = 7$

Por tanto, $y = x^2 - 6x + 7$.



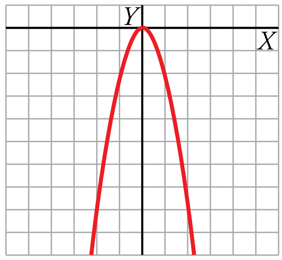
c) $y = ax^2 + bx + c$

$-\dfrac{b}{2a} = 0 \rightarrow b = 0$

Pasa por (0, 0), luego $c = 0$.

Pasa por (–3, –18) $\rightarrow 9a = -18 \rightarrow a = -2$

La parábola es $y = -2x^2$.



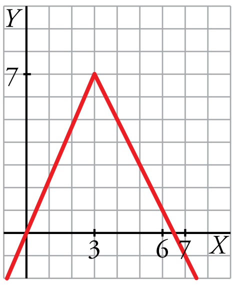
51. **Construye funciones definidas a trozos que cumplan las siguientes condiciones y dibújalas:**

a) Es continua y está compuesta por dos trozos de rectas. Pasa por el origen de coordenadas y tiene pendiente –2 en $x = 4$. Tiene un máximo en (3, 7).

b) Es continua y está compuesta por un trozo de parábola y un trozo de recta en este orden. Tiene un mínimo relativo en (0, 0) y un máximo relativo en (2, 4).

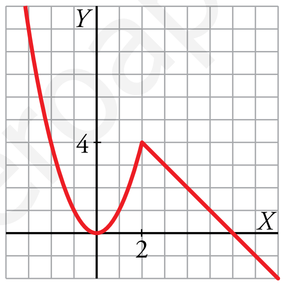
a) Por ejemplo:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{7}{3}x & \text{si } x < 3 \\ -2x + 13 & \text{si } x \ge 3 \end{cases}$$



b) Por ejemplo:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \le 2 \\ -x + 6 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$



52. **Todas las funciones exponenciales de la forma $y = a^x$ pasan por un mismo punto. Indica qué punto es y justifícalo. ¿En qué casos (valores de a) la función es decreciente?**

Todas pasan por el punto (0, 1), ya que $a^0 = 1$.

Si $a < 1$, la función es decreciente.

53. **¿Verdadero o falso?**

a) Las funciones $y = \sqrt{x}$ e $y = \sqrt{-x}$ forman una parábola tumbada al representarlas en los mismos ejes.

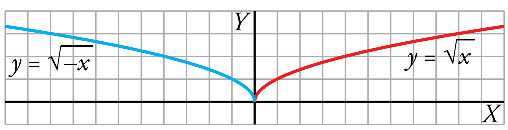
b) Si el eje de una parábola es $x = 2$, no puede pasar por los puntos (–1, 6) y (5, 8).

c) Las funciones $y = 4^x$ e $y = -4^x$ son simétricas respecto al eje Y.

d) Las funciones $y = 4^x$ e $y = \left(\dfrac{1}{4}\right)^x$ son simétricas respecto al eje Y.

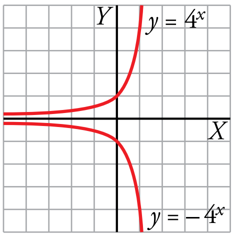
e) La función $y = log_3 x$ tiene dos asíntotas, una vertical y otra horizontal.

a) Falso.

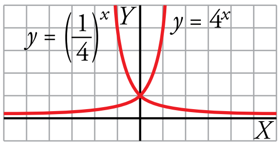


b) Verdadero. Las parábolas son simétricas respecto a su eje, por tanto, se debe verificar que $y(-1) = y(5)$.

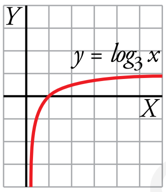
c) Falso. Son simétricas respecto al eje de abscisas.



d) Verdadero.



e) Falso. Solo tiene una asíntota vertical en $x = 0$.



Página 118

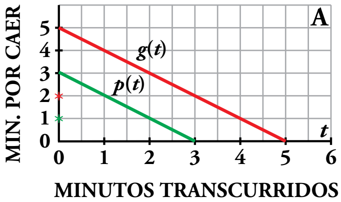
Interpreta y describe

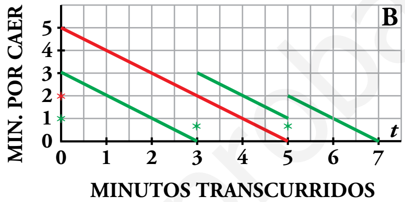
Dos funciones coordinadas

Cuando se voltea un reloj de arena, la función que relaciona el tiempo que falta para que la arena termine de caer con el tiempo que ha transcurrido es lineal. En el gráfico A se han representado dos funciones de este tipo: $g(t)$, en trazo rojo, para el reloj grande, y $p(t)$, en trazo verde, para el reloj pequeño.

El gráfico B describe el proceso que se ha de seguir para medir 7 minutos manipulando ambos relojes.

Cada asterisco indica el instante en que se voltea el reloj del color correspondiente.





- **Describe verbalmente la información que contiene el gráfico B.**

Se ponen en funcionamiento los dos relojes a la vez.

A los 3 minutos se acaba el reloj verde y quedan 2 minutos en el reloj rojo. Damos la vuelta al reloj verde.

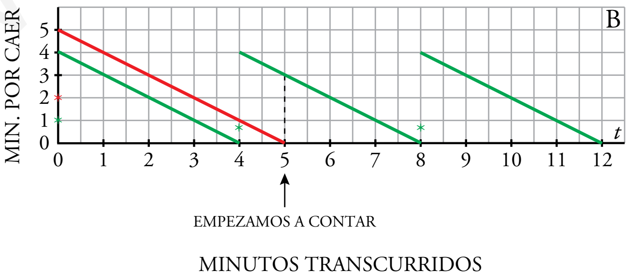
Pasados 2 minutos se acaba el reloj rojo y se da la vuelta al verde.

Pasados 2 minutos se acaba el reloj verde.

$$3 \text{ min} + 2 \text{ min} + 2 \text{ min} = 7 \text{ min}$$

- **Construye una gráfica similar a la B que indique el proceso que hay que seguir para medir siete minutos con un reloj de cuatro y otro de cinco minutos.**

La gráfica es la siguiente:



Se ponen en funcionamiento los dos relojes a la vez. Cuando se acaba el de 4 min (verde), en el de 5 min (rojo) queda 1 min. Le damos la vuelta al de 4 min. Cuando se acaba el minuto del de 5 min, en el de 4 min quedan 3 min. Empezamos a contar en este momento. Acaban los 3 min y le damos la vuelta para que pasen otros 4 min.

Infórmate

La prueba del carbono catorce (C^{14})

El carbono catorce es un isótopo radiactivo del carbono que se va desintegrando espontáneamente, de forma que se reduce a la mitad cada 5 568 años.

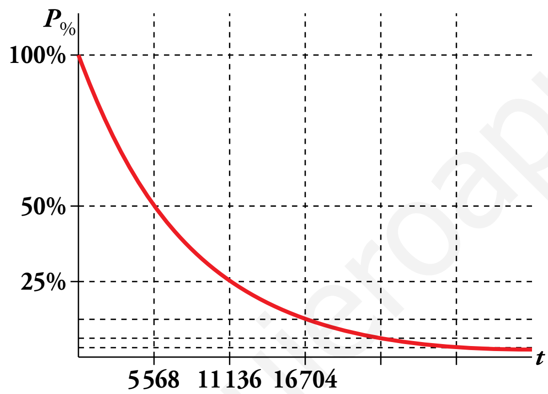
Por otro lado, el carbono catorce está en la atmósfera y es absorbido por las plantas, que lo incorporan en una determinada proporción.

Cuando una planta muere y queda almacenada en un yacimiento geológico, su carbono catorce sigue el proceso de desintegración mencionado, según una función exponencial decreciente:

$$P_{\%} = 100 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5\,568}}$$

$P_{\%} \to$ **Porcentaje de C^{14} respecto al que había inicialmente**

$t \to$ **Edad en años**



Así, analizando la proporción de C^{14} de un fósil y conociendo la inicial (planta viva), con la ecuación anterior se puede averiguar su edad geológica; es decir, el tiempo que hace que se formó.

- **¿Qué porcentaje de C^{14} tendrá un fósil con una edad de 33 000 años?**

$$t = 33\,000 \text{ años} \to P_{\%} = 100 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{33\,000}{5\,568}} \to P_{\%} = 1{,}64\,\%$$

El fósil tendrá un 1,64 % de C^{14}.

- **¿Cuál será la antigüedad de un fósil si tiene el 10 % del C^{14} de la planta viva?**

$$P_{\%} = 10\,\% \to 100 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5\,568}} = 10 \to 0{,}5^{\frac{t}{5\,568}} = 0{,}1 \to \log 0{,}5^{\frac{t}{5\,568}} = \log 0{,}1 \to$$

$$\to \frac{t}{5\,568} \cdot \log 0{,}5 = -1 \to t = \frac{-5\,568}{\log 0{,}5} \to t \approx 18\,496 \text{ años}$$

El fósil tendrá aproximadamente 18 500 años.

Página 119

Entrénate resolviendo problemas

- **Una vela dura una hora. Con las sobras de 10 velas se fabrica una nueva.**

  a) ¿Cuántas horas de luz tendremos con 442 velas?

  b) ¿Cuántas velas se necesitan para 1 000 horas de luz?

a) Con 442 velas se tiene luz para **442 horas** y hay 442 sobrantes.

Con 442 sobrantes se hacen 44 velas + 2 sobrantes $\to$ **44 horas** de luz y 46 sobrantes.

Con 46 sobrantes se hacen 4 velas y 6 sobrantes $\to$ **4 horas** de luz y 10 sobrantes.

Con 10 sobrantes se hace 1 vela $\to$ **1 hora** de luz y 1 sobrante.

Total: $442 + 44 + 4 + 1 = 491$ horas de luz.

OTRA FORMA DE RESOLVERLO (MÁS TÉCNICA)

Con una vela se consigue 1 hora de luz y sobra $\frac{1}{10}$ de vela.

Por tanto, una hora de luz se consigue con $\frac{9}{10}$ de vela.

Como hay 442 velas $\to$ $442 : \frac{9}{10} = 491 + \frac{1}{9}$

Es decir, se consiguen 491 horas de luz y sobra algo de vela.

b) El número de velas que necesitamos debe estar alrededor de $1\,000 \cdot \frac{9}{10} = 900$. Veamos, con más exactitud, cuántas necesitamos.

Con 900 velas se tiene luz para **900 horas** y hay 900 sobrantes.

Con 900 sobrantes se hacen 90 velas $\to$ **90 horas** de luz y 90 sobrantes.

Con 90 sobrantes se hacen 9 velas $\to$ **9 horas** de luz y 9 sobrantes.

Conseguimos, en total, 999 horas de luz y nos quedan 9 sobrantes.

Necesitamos, por tanto, una vela más, 901, aunque con ellas conseguiremos, no 1 000, sino 1 001 horas de luz.

- **Una granjera fue al mercado a vender una cesta de huevos. La primera clienta compró la mitad de los huevos más medio huevo. La segunda compró la mitad de los que le quedaban más medio huevo, y lo mismo hizo la tercera. Con esto concluyó la venta, ya que a la granjera no le quedaban más huevos.**

  ¿Cuántos huevos tenía?

RESOLUCIÓN UTILIZANDO ÁLGEBRA

	TENÍA	VENDE	LE QUEDA
1.ª VENTA	x	$\frac{x}{2}+\frac{1}{2}=\frac{x+1}{2}$	$x-\frac{x+1}{2}=\frac{x-1}{2}$
2.ª VENTA	$\frac{x-1}{2}$	$\frac{x-1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{x+1}{4}$	$\frac{x-1}{2}-\frac{x+1}{4}=\frac{2x-2-x-1}{4}=\frac{x-3}{4}$
3.ª VENTA	$\frac{x-3}{4}$	$\frac{x-3}{8}+\frac{1}{2}=\frac{x+1}{8}$	$\frac{x-3}{4}-\frac{x+1}{8}=\frac{2x-6-x-1}{8}=\frac{x-7}{8}$

Después de la tercera venta, no le queda nada. Por tanto, $\frac{x-7}{8}=0 \rightarrow x=7$

Comprobación:

	TENÍA	VENDE	LE QUEDA
1.ª VENTA	7	$\frac{7}{2}+\frac{1}{2}=4$	3
2.ª VENTA	3	$\frac{3}{2}+\frac{1}{2}=2$	1
3.ª VENTA	1	$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$	0

RESOLUCIÓN SIN UTILIZAR ÁLGEBRA

Si después de una compra le quedan a huevos, antes de la compra tenía:

$\left(a+\frac{1}{2}\right)\cdot 2 = 2a+1$ huevos.

	LE QUEDAN	TENÍA ANTES
3.ª VENTA	0	$2\cdot 0+1=1$
2.ª VENTA	1	$2\cdot 1+1=3$
1.ª VENTA	3	$2\cdot 3+1=7$

- **Un padre repartió entre sus hijos un rebaño de ovejas.**

  — El mayor de ellos se llevó una oveja más 1/7 de las restantes.

  — Al segundo le correspondieron dos ovejas más 1/7 de las restantes.

  — El tercero recibió tres ovejas más 1/7 de las que quedaban.

  — Y así sucesivamente hasta llegar al más pequeño.

  De esta manera, todos recibieron la misma herencia y no sobró ninguna oveja.

  ¿Cuántos hermanos eran?

  ¿Cuántas ovejas había en el rebaño?

	HABÍA	LE TOCAN	SOBRAN
PRIMERO	x	$1+\frac{x-1}{7}=\frac{x+6}{7}$	$x-\frac{x+6}{7}=\frac{6x-6}{7}$
SEGUNDO	$\frac{6x-6}{7}$	$2+\frac{\frac{6x-6}{7}-2}{7}=\frac{49\cdot 2+6x-6-2\cdot 7}{49}=\frac{6x+78}{49}$	

Como a todos les toca lo mismo, $\frac{x+6}{7}=\frac{6x+78}{49} \to x=36$. Había 36 ovejas.

Al primer hermano (y a todos los demás) le tocan 1 + (35/7) = 6 ovejas. Hay, por tanto, 36 : 6 = 6 hermanos.

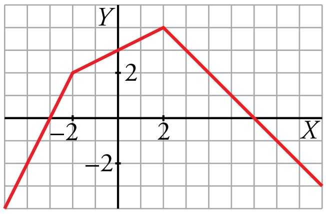
Comprobación:

	HABÍA	LE TOCA	SOBRAN
1.º	36	1 + (35/7) = 6	30
2.º	30	2 + (28/7) = 6	24
3.º	24	3 + (21/7) = 6	18
4.º	18	4 + (14/7) = 6	12
5.º	12	5 + (7/7) = 6	6
6.º	6	6 + (0/7) = 6	0

Autoevaluación

1. Representa la función definida a trozos cuya ecuación es:

$$y = \begin{cases} 2x + 6 & \text{si } x < -2 \\ x/2 + 3 & \text{si } -2 \le x < 2 \\ -x + 6 & \text{si } x \ge 2 \end{cases}$$



2. Halla el vértice de cada una de las siguientes parábolas y represéntalas:

a) $y = \dfrac{x^2}{2} - 2$

b) $y = x^2 + 4x - 5$

c) $y = (5 - x)(x + 1)$

d) $y = -(x - 3)^2 - 1$

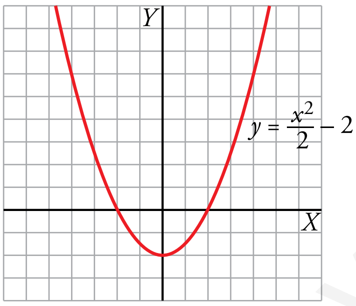
e) $y = 2x^2 + 4x$

f) $y = 9 - (x - 1)^2$

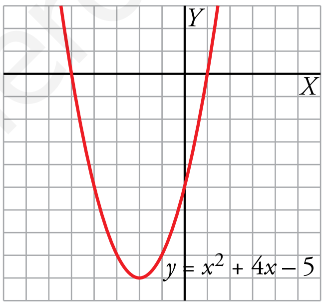
g) $y = 2(x - 1)(x + 3)$

h) $y = (x + 2)^2 - 2x^2$

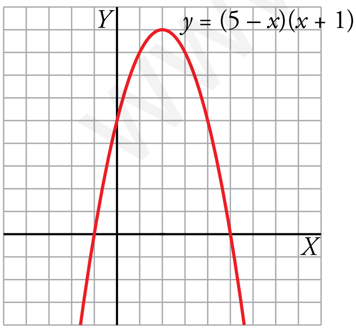
a) Vértice en el punto (0, –2).



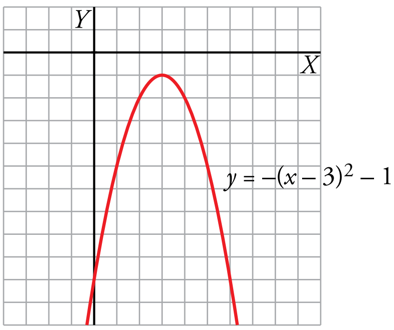
b) Vértice en el punto (–2, –9).



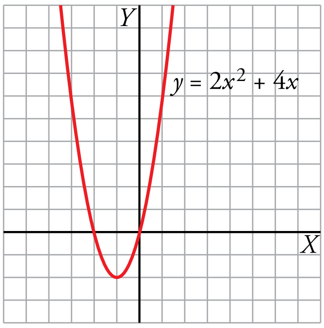
c) Vértice en el punto (2, 9).



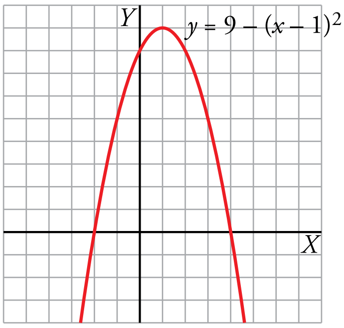
d) Vértice en el punto (3, –1).



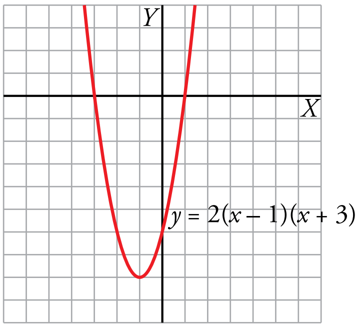
e) Vértice en el punto (–1, –2).



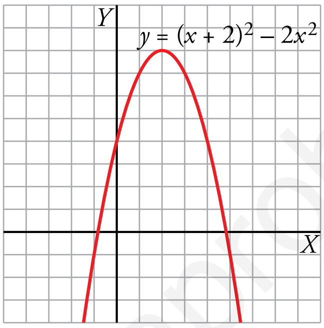
f) Vértice en el punto (1, 9).



g) Vértice en el punto (–1, –8).



h) Vértice en el punto (2, 8).



3. **Expresa estas funciones sin utilizar el valor absoluto (del tipo definidas a trozos). Represéntalas.**

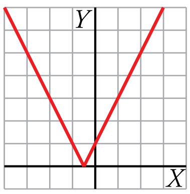
a) $y = |2x + 1|$

b) $y = \left|1 - \frac{x}{4}\right|$

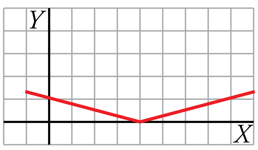
c) $y = |-x^2 + 4x - 3|$

d) $y = |9 - (x - 2)^2|$

a) $y = |2x + 1| = \begin{cases} -(2x+1) & \text{si } 2x+1 < 0 \\ 2x+1 & \text{si } 2x+1 \geq 0 \end{cases} \rightarrow y = \begin{cases} -2x-1 & \text{si } x < -\frac{1}{2} \\ 2x+1 & \text{si } x \geq -\frac{1}{2} \end{cases}$

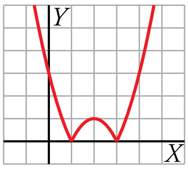


b) $y = \left|1 - \frac{x}{4}\right| = \begin{cases} -\left(1 - \frac{x}{4}\right) & \text{si } 1 - \frac{x}{4} < 0 \\ 1 - \frac{x}{4} & \text{si } 1 - \frac{x}{4} \geq 0 \end{cases} \rightarrow y = \begin{cases} -1 + \frac{x}{4} & \text{si } x > 4 \\ 1 - \frac{x}{4} & \text{si } x \leq 4 \end{cases}$



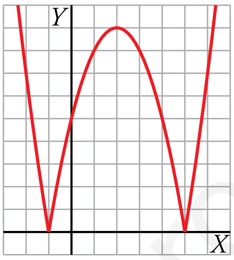
c) $y = |-x^2 + 4x - 3| \rightarrow y = \begin{cases} -(-x^2 + 4x - 3) & \text{si } -x^2 + 4x - 3 < 0 \\ -x^2 + 4x - 3 & \text{si } -x^2 + 4x - 3 \geq 0 \end{cases} \rightarrow$

$\rightarrow y = \begin{cases} x^2 - 4x + 3 & \text{si } x < 1 \text{ o } x > 3 \\ -x^2 + 4x - 3 & \text{si } 1 \leq x \leq 3 \end{cases}$



d) $y = |9 - (x - 2)^2| \rightarrow y = |-x^2 + 4x + 5| \rightarrow y = \begin{cases} -(-x^2 + 4x + 5) & \text{si } -x^2 + 4x + 5 < 0 \\ -x^2 + 4x + 5 & \text{si } -x^2 + 4x + 5 \geq 0 \end{cases} \rightarrow$

$\rightarrow y = \begin{cases} x^2 - 4x - 5 & \text{si } x < -1 \text{ o } x > 5 \\ -x^2 + 4x + 5 & \text{si } -1 \leq x \leq 5 \end{cases}$

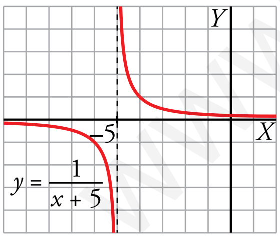


4. Representa las siguientes funciones e indica sus dominios de definición:

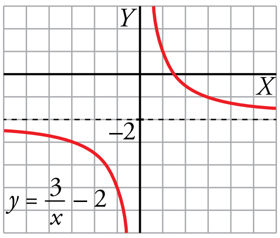
a) $y = \dfrac{1}{x + 5}$ **b)** $y = \dfrac{3}{x} - 2$ **c)** $y = \dfrac{3}{x - 1} + 1$

d) $y = \sqrt{x + 2}$ **e)** $y = 2\sqrt{x - 1}$ **f)** $y = -\sqrt{x - 3}$

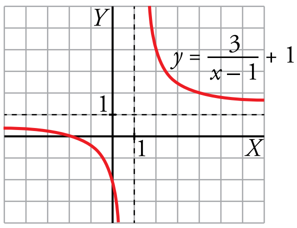
a) Dominio = $\mathbb{R} - \{-5\}$



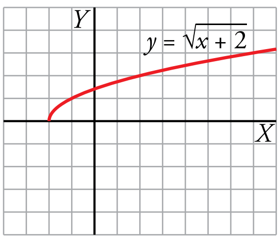
b) Dominio = $\mathbb{R} - \{0\}$



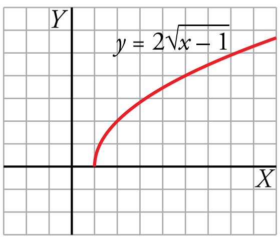
c) Dominio = $\mathbb{R} - \{1\}$



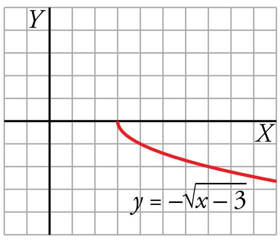
d) Dominio = $[-2, +\infty)$



e) Dominio = $[1, +\infty)$



f) Dominio = $[3, +\infty)$

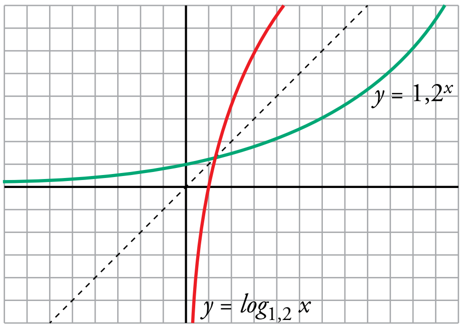


5. Representa estos pares de funciones:

a) $y = 1{,}2^x$; $y = \log_{1,2} x$ **b)** $y = 2{,}2^x$; $y = \log_{2,2} x$

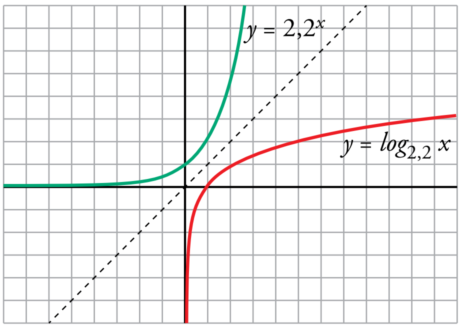
¿Respecto a qué recta son simétricas las dos funciones de cada par?

a)



Las funciones son simétricas respecto a $y = x$.

b)



Las funciones son simétricas respecto a $y = x$.

6. Con un listón de madera de 3 metros de largo, queremos fabricar un marco para un cuadro.

a) Si la base del cuadro midiera 0,5 m, ¿cuánto mediría la altura? ¿Y la superficie?

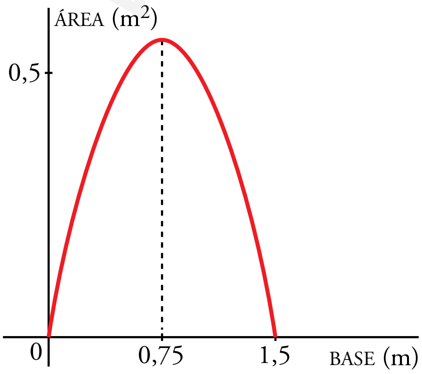
b) ¿Cuál es el valor de la superficie para una base cualquiera, *x*?

c) ¿Para qué valor de la base se obtiene la superficie máxima? ¿Cuánto vale dicha superficie?

a) Altura = 1 m; Área = 0,5 m^2

b) Base = x, altura = $\frac{3-2x}{2} = 1{,}5 - x$; Área = $x(1{,}5 - x) = 1{,}5x - x^2$

c)



$y = -x^2 + 1{,}5x$ es una parábola que corta al eje X en los puntos de abscisas 0 y 1,5.

La abscisa del vértice es $\frac{1{,}5}{2} = 0{,}75$.

Su ordenada es 0,5625. Este es el punto "más alto de la curva".

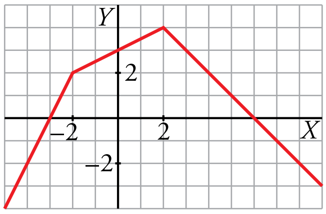
Por tanto, el área máxima se obtiene para $x = 0{,}75$ m, y es de 0,5625 m^2.

NOTA: Se trata de un cuadrado de 0,75 m de lado.

Autoevaluación

1. Representa la función definida a trozos cuya ecuación es:

$$y = \begin{cases} 2x + 6 & \text{si } x < -2 \\ x/2 + 3 & \text{si } -2 \le x < 2 \\ -x + 6 & \text{si } x \ge 2 \end{cases}$$



2. Halla el vértice de cada una de las siguientes parábolas y represéntalas:

a) $y = \frac{x^2}{2} - 2$

b) $y = x^2 + 4x - 5$

c) $y = (5 - x)(x + 1)$

d) $y = -(x - 3)^2 - 1$

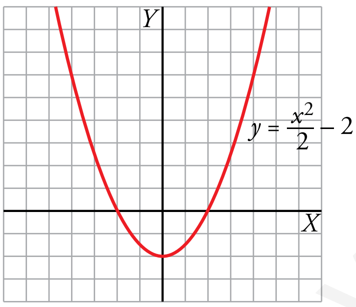
e) $y = 2x^2 + 4x$

f) $y = 9 - (x - 1)^2$

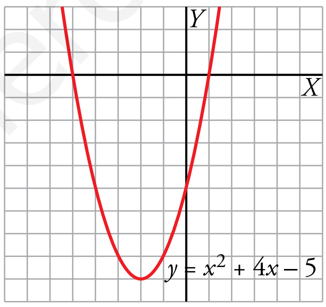
g) $y = 2(x - 1)(x + 3)$

h) $y = (x + 2)^2 - 2x^2$

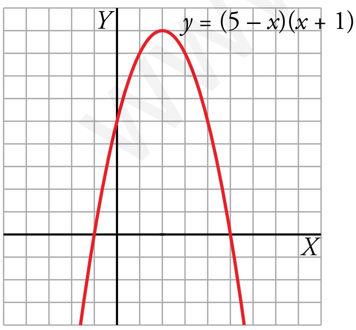
a) Vértice en el punto (0, –2).



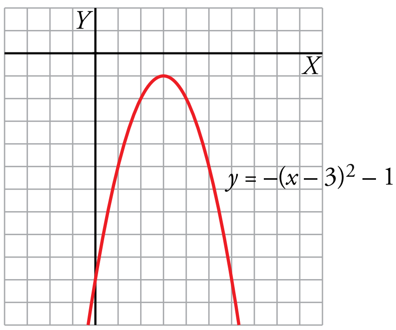
b) Vértice en el punto (–2, –9).



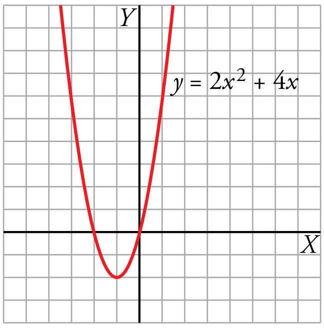
c) Vértice en el punto (2, 9).



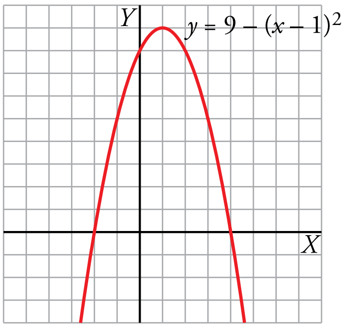
d) Vértice en el punto (3, –1).



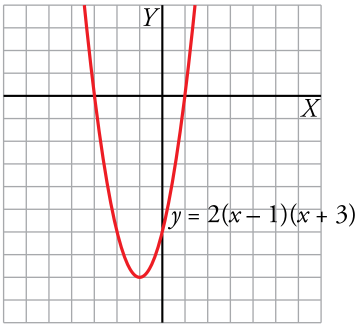
e) Vértice en el punto (–1, –2).



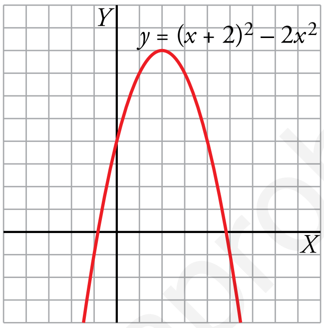
f) Vértice en el punto (1, 9).



g) Vértice en el punto (–1, –8).



h) Vértice en el punto (2, 8).



3. Expresa estas funciones sin utilizar el valor absoluto (del tipo definidas a trozos). Represéntalas.

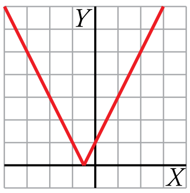
a) $y = |2x + 1|$

b) $y = \left|1 - \dfrac{x}{4}\right|$

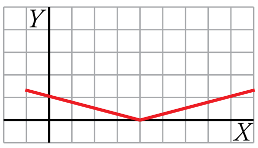
c) $y = |-x^2 + 4x - 3|$

d) $y = |9 - (x - 2)^2|$

a) $y = |2x + 1| = \begin{cases} -(2x+1) & \text{si } 2x + 1 < 0 \\ 2x + 1 & \text{si } 2x + 1 \geq 0 \end{cases} \rightarrow y = \begin{cases} -2x - 1 & \text{si } x < -\dfrac{1}{2} \\ 2x + 1 & \text{si } x \geq -\dfrac{1}{2} \end{cases}$

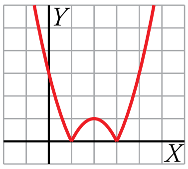


b) $y = \left|1 - \dfrac{x}{4}\right| = \begin{cases} -\left(1 - \dfrac{x}{4}\right) & \text{si } 1 - \dfrac{x}{4} < 0 \\ 1 - \dfrac{x}{4} & \text{si } 1 - \dfrac{x}{4} \geq 0 \end{cases} \rightarrow y = \begin{cases} -1 + \dfrac{x}{4} & \text{si } x > 4 \\ 1 - \dfrac{x}{4} & \text{si } x \leq 4 \end{cases}$



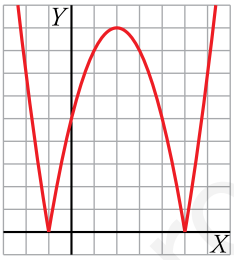
c) $y = |-x^2 + 4x - 3| \rightarrow y = \begin{cases} -(-x^2 + 4x - 3) & \text{si } -x^2 + 4x - 3 < 0 \\ -x^2 + 4x - 3 & \text{si } -x^2 + 4x - 3 \geq 0 \end{cases} \rightarrow$

$\rightarrow y = \begin{cases} x^2 - 4x + 3 & \text{si } x < 1 \text{ o } x > 3 \\ -x^2 + 4x - 3 & \text{si } 1 \leq x \leq 3 \end{cases}$



d) $y = |9 - (x - 2)^2| \rightarrow y = |-x^2 + 4x + 5| \rightarrow y = \begin{cases} -(-x^2 + 4x + 5) & \text{si } -x^2 + 4x + 5 < 0 \\ -x^2 + 4x + 5 & \text{si } -x^2 + 4x + 5 \geq 0 \end{cases} \rightarrow$

$\rightarrow y = \begin{cases} x^2 - 4x - 5 & \text{si } x < -1 \text{ o } x > 5 \\ -x^2 + 4x + 5 & \text{si } -1 \leq x \leq 5 \end{cases}$

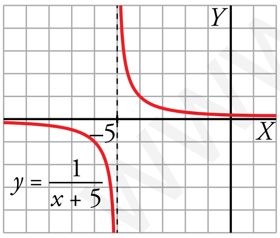


4. **Representa las siguientes funciones e indica sus dominios de definición:**

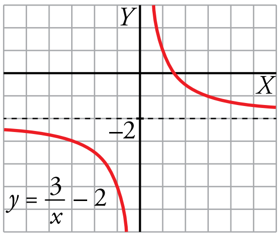
a) $y = \dfrac{1}{x+5}$ **b)** $y = \dfrac{3}{x} - 2$ **c)** $y = \dfrac{3}{x-1} + 1$

d) $y = \sqrt{x+2}$ **e)** $y = 2\sqrt{x-1}$ **f)** $y = -\sqrt{x-3}$

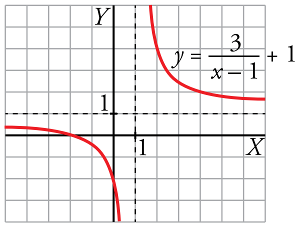
a) Dominio = $\mathbb{R} - \{-5\}$



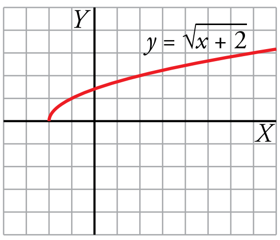
b) Dominio = $\mathbb{R} - \{0\}$



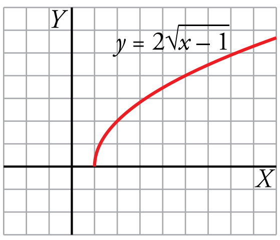
c) Dominio = $\mathbb{R} - \{1\}$



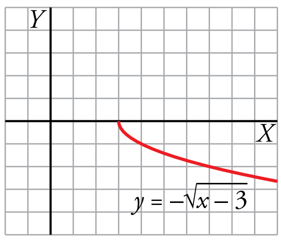
d) Dominio = $[-2, +\infty)$



e) Dominio = $[1, +\infty)$



f) Dominio = $[3, +\infty)$

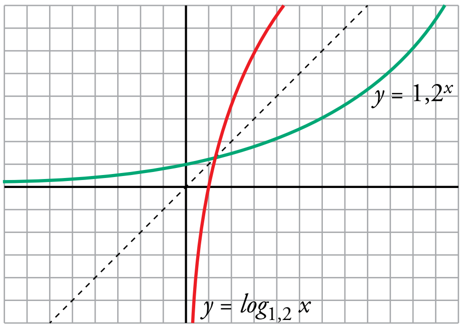


5. **Representa estos pares de funciones:**

a) $y = 1{,}2^x$; $y = log_{1{,}2}\, x$ **b)** $y = 2{,}2^x$; $y = log_{2{,}2}\, x$

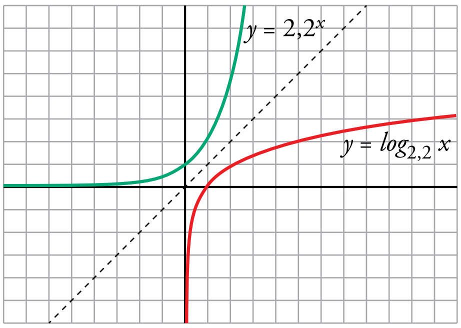
¿Respecto a qué recta son simétricas las dos funciones de cada par?

a)



Las funciones son simétricas respecto a $y = x$.

b)



Las funciones son simétricas respecto a $y = x$.

6. **Con un listón de madera de 3 metros de largo, queremos fabricar un marco para un cuadro.**

a) Si la base del cuadro midiera 0,5 m, ¿cuánto mediría la altura? ¿Y la superficie?

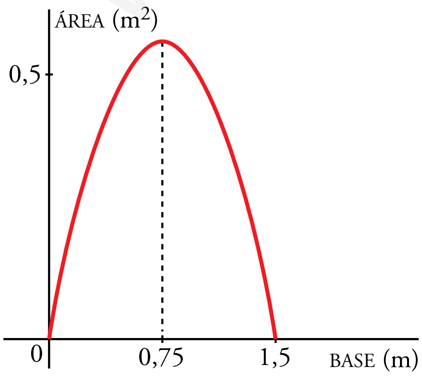
b) ¿Cuál es el valor de la superficie para una base cualquiera, x**?**

c) ¿Para qué valor de la base se obtiene la superficie máxima? ¿Cuánto vale dicha superficie?

a) Altura = 1 m; Área = 0,5 m^2

b) Base = x, altura = $\frac{3 - 2x}{2} = 1{,}5 - x$; Área = $x\,(1{,}5 - x) = 1{,}5x - x^2$

c)



$y = -x^2 + 1{,}5x$ es una parábola que corta al eje X en los puntos de abscisas 0 y 1,5.

La abscisa del vértice es $\frac{1{,}5}{2} = 0{,}75$.

Su ordenada es 0,5625. Este es el punto "más alto de la curva".

Por tanto, el área máxima se obtiene para $x = 0{,}75$ m, y es de 0,5625 m^2.

NOTA: Se trata de un cuadrado de 0,75 m de lado.

Página 123

Resuelve

1. Sabiendo que 1 estadio = 185 m, halla en kilómetros el radio de la Tierra que obtuvo *Eratóstenes*. Compáralo con la realidad: 6 371 km.

Si a 1/50 del ángulo total le corresponde un arco de 5 000 estadios, al ángulo total le corresponden $50 \times 5\,000 = 250\,000$ estadios. Esta es la longitud de la circunferencia terrestre. El radio R se obtiene así:

$$2\pi R = 250\,000 \;\rightarrow\; R = \frac{250\,000}{2\pi} = 39\,788{,}7 \text{ estadios} = 7\,360\,916 \text{ m} \approx 7\,361 \text{ km}$$

2. ¿Cuánto mide el lado de la ciudad china?

Llamamos x a la medida, en pasos, del lado del cuadrado (ciudad).

Los catetos del triángulo rectángulo que tiene el ángulo recto en la puerta norte, N, miden $\frac{x}{2}$ y 20 pasos.

Este triángulo es semejante al grande, cuyos catetos miden 1 775 pasos y $20 + x + 14 = x + 34$ pasos.

La semejanza de los dos triángulo permite poner:

$$\frac{\frac{x}{2}}{1775} = \frac{20}{x+34} \;\rightarrow\; \frac{x}{3\,550} = \frac{20}{x+34} \;\rightarrow$$

$$\rightarrow\; x^2 + 34x - 71\,000 = 0 \;\rightarrow\; x = \frac{-34 \pm \sqrt{34^2 + 284\,000}}{2} = \frac{-34 \pm 534}{2}$$

Solo es válida la raíz positiva: $x = 250$ pasos.

1 Semejanza

Página 125

1. Para construir una carpa semiesférica para su maqueta, Gonzalo ha necesitado 402 cm^2 de tela. Sabiendo que tiene un diámetro de 16 cm, calcula la superficie y el volumen de la carpa en la realidad.

Calculamos en primer lugar el volumen de la carpa, en maqueta:

$$V_{\text{ESFERA MAQUETA}} = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot 8^3 = 2\,144{,}60 \text{ cm}^3$$

$$V_{\text{CARPA MAQUETA}} = 2\,144{,}60 : 2 = 1\,072{,}30 \text{ cm}^3$$

Por tanto:

$$V_{\text{CARPA REAL}} = V_{\text{CARPA MAQUETA}} \cdot 500^3 = 134\,037\,500\,000 \text{ cm}^3 = 134\,037{,}5 \text{ m}^3$$

$$S_{\text{CARPA REAL}} = S_{\text{CARPA MAQUETA}} \cdot 500^2 = 100\,500\,000 \text{ cm}^2 = 10\,050 \text{ m}^2$$

2. La Estatua de la Libertad de Nueva York mide 30,6 m de los pies a la cabeza. Si con ella se reprodujo a una persona cuya estatura era de 170 cm, ¿qué escala utilizaron para su construcción?

30,6 m = 3 060 cm

3 060 cm de la escultura corresponden a 170 cm en la realidad.

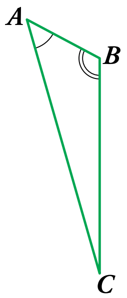
Escala $\rightarrow$ 3 060 : 170 = 18

La escala es 18:1; es decir, 18 cm en la escultura representan 1 cm en la realidad.

2 Semejanza de triángulos

Página 127

1. Estamos en A. Queremos calcular la distancia a un lugar lejano e inaccesible, C. Para eso, señalamos otro punto próximo, B, y medimos: $\overline{AB}$ = 53 m. Medimos también los ángulos $\hat{A}$ = 46° y $\hat{B}$ = 118°.



Ahora dibujamos en nuestro cuaderno un triángulo $A'B'C'$ con las siguientes medidas: $\overline{A'B'}$ = 53 mm, $\hat{A}'$ = 46°, $\hat{B}'$ = 118°.

a) Construye el triángulo $A'B'C'$ en tu cuaderno.

b) Explica por qué $\widehat{A'B'C'}$ es semejante a $\widehat{ABC}$.

c) Mide $\overline{A'C'}$ con la regla.

d) Deduce cuánto mide la distancia buscada, $\overline{AC}$.

a) Se construye el triángulo con las indicaciones dadas.

b) Los triángulos son semejantes porque tienen dos ángulos iguales.

c) $\overline{A'C'}$ mide unos 17 cm.

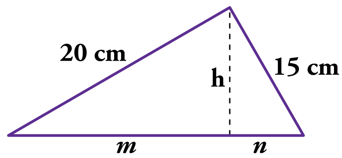
d) Si llamamos $x = \overline{AC}$:

$$\frac{53 \text{ mm}}{53 \text{ m}} = \frac{170 \text{ mm}}{x} \rightarrow x = 170 \text{ m}$$

3 La semejanza en los triángulos rectángulos

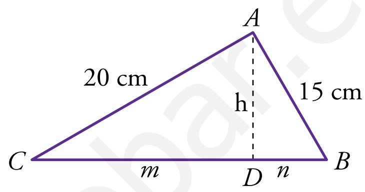
Página 129

1. En este triángulo rectángulo, calcula las longitudes h, *m* y *n*.



En $\widehat{ABC}$ aplicamos el teorema de Pitágoras:

$(m + n)^2 = 20^2 + 15^2 \rightarrow (m + n)^2 = 625 \rightarrow m + n = 25$



Ahora aplicamos el teorema del cateto.

$$\left.\begin{array}{l} 20^2 = (m + n) \cdot m \\ 15^2 = (m + n) \cdot n \end{array}\right\} \text{ Como } m + n = 25:$$

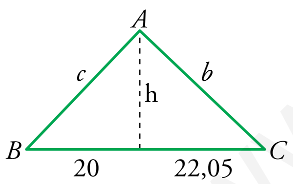
$$20^2 = 25m \rightarrow m = \frac{400}{25} = 16 \text{ cm}$$

$$15^2 = 25n \rightarrow n = \frac{225}{25} = 9 \text{ cm}$$

Por último aplicamos el teorema de la altura:

$\text{h}^2 = m \cdot n \rightarrow \text{h}^2 = 16 \cdot 9 = 144 \rightarrow \text{h} = 12 \text{ cm}$

2. En un triángulo rectángulo, las proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa miden 20 cm y 22,05 cm, respectivamente. Calcula las medidas de los catetos y de la altura sobre la hipotenusa.



Aplicamos el teorema del cateto a $\widehat{ABC}$:

$b^2 = (20 + 22{,}05) \cdot 22{,}05 = 927{,}2025 \rightarrow b = 30{,}45$ cm

$c^2 = (20 + 22{,}05) \cdot 20 = 841 \rightarrow c = 29$ cm

Para calcular la altura sobre la hipotenusa de $\widehat{ABC}$ utilizamos el teorema de la altura:

$\text{h}^2 = 20 \cdot 22{,}05 = 441 \rightarrow \text{h} = 21$ cm

4 Aplicaciones de la semejanza de triángulos

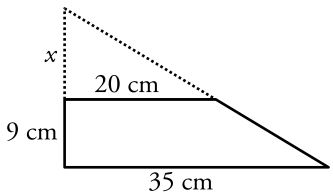
Página 130

1. Calcula el volumen de un tronco de cono cuya altura es 9 cm y cuyas bases tienen radios de 20 cm y 35 cm.

a) Hazlo paso a paso, razonadamente.

b) Compruébalo aplicando la fórmula anterior.

a)



$\dfrac{x}{20} = \dfrac{x+9}{35} \rightarrow 35x = 20x + 180 \rightarrow$

$\rightarrow 15x = 180 \rightarrow x = 12$ cm

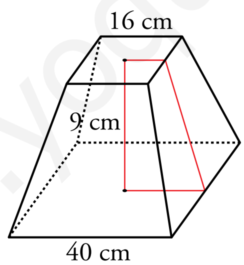
$$V_{\text{TRONCO}} = \frac{1}{3}\pi \cdot 35^2 \cdot (12+9) - \frac{1}{3}\pi \cdot 20^2 \cdot 12 = \frac{1}{3}\pi(25\,725 - 4\,800) = 21\,912{,}61 \text{ cm}^3$$

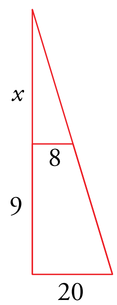
b) $V_{\text{TRONCO}} = \dfrac{1}{3}\pi(35^2 + 35 \cdot 20 + 20^2) \cdot 9 = \dfrac{1}{3}\pi \cdot 2\,325 \cdot 9 = 21\,912{,}61 \text{ cm}^3$

2. Calcula el volumen de un tronco de pirámide cuadrangular regular cuyas bases son cuadrados.

Lados de los cuadrados: 40 cm y 16 cm

Altura: 9 cm





$\dfrac{x+9}{20} = \dfrac{x}{8} \rightarrow 8x + 72 = 20x \rightarrow 12x = 72 \rightarrow x = 6$ cm

$$V_{\text{TRONCO}} = \frac{1}{3}[40^2 \cdot (9+6)] - \frac{1}{3}(16^2 \cdot 6) = \frac{1}{3}(24\,000 - 1\,536) = 7\,488 \text{ cm}^3$$

Página 131

3. **Un globo sube 643 m sobre la superficie de la Tierra. Averigua qué superficie terrestre se verá desde arriba. Hazlo de dos formas:**

a) Razonadamente, utilizando el teorema del cateto.

b) Aplicando la fórmula anterior, para comprobar que la solución es correcta.

c) ¿A qué altura hemos de ascender para ver exactamente el 5 % de la superficie de la Tierra? (Aplica la fórmula).

a) Por el teorema del cateto:

$R^2 = (R - \text{h})(R + d)$ donde: R = radio de la Tierra = 6 371 km

d = 643 m = 0,643 km

$$6\,371^2 = (6\,371 - \text{h})(6\,371 + 0{,}643) \rightarrow \text{h} = \frac{6\,371 \cdot 6\,371{,}643 - 6\,371^2}{6\,371{,}643} = 0{,}643 \text{ km}$$

$$A_{\text{CASQUETE}} = 2\pi R\text{h} = 2\pi \cdot 6371 \cdot 0{,}643 = 25\,726{,}35 \text{ km}^2$$

b) $$A_{\text{CASQUETE}} = \frac{2\pi R^2 d}{R + d} = \frac{2\pi \cdot 6\,371^2 \cdot 0{,}643}{6\,371{,}643} \approx 25\,723{,}76 \text{ km}^2$$

c) $S_{\text{TIERRA}} = 4\pi R^2 = 509\,805\,890{,}96 \text{ km}^2$

5 % de $S_{\text{TIERRA}} = 25\,490\,294{,}548 \text{ km}^2$

$$A = \frac{2\pi R^2 d}{R + d} \rightarrow AR + Ad = 2\pi R^2 d \rightarrow AR = d(2\pi R^2 - A) \rightarrow d = \frac{AR}{2\pi R^2 - A}$$

$$d = \frac{25\,490\,294{,}548 \cdot 6\,371}{2\pi \cdot 6\,371^2 - 25\,490\,294{,}548} = 707{,}9 \text{ km}$$

4. **Un cohete se aproxima a la Luna, cuyo diámetro, según sabemos, es de 3 500 km.**

a) Averigua qué superficie de Luna se ve desde el cohete cuando se encuentra a 1 000 km de distancia. Hazlo razonadamente y comprueba el resultado aplicando la fórmula.

b) ¿A qué distancia debe estar el cohete para poder asegurar que sus ocupantes pueden ver al 10 % de la superficie de la Luna? (Aplica la fórmula).

a) $$\frac{R}{R + d} = \frac{R - \text{h}}{R} \rightarrow \frac{1750}{2\,750} = \frac{1750 - \text{h}}{1750} \rightarrow \text{h} = \frac{1750^2 - 1750 \cdot 2\,750}{-2\,750} = 636{,}36 \text{ km}$$

$$A_{\text{CASQUETE}} = 2\pi R\text{h} = 2\pi \cdot 1\,750 \cdot 636{,}36 = 6\,997\,143{,}654 \text{ km}^2$$

$$A_{\text{CASQUETE}} = \frac{2\pi R^2 d}{R + d} = \frac{2\pi \cdot 1750^2 \cdot 1\,000}{2\,750} = 6\,997\,183{,}638 \text{ km}^2$$

b) $S_{\text{LUNA}} = 4\pi R^2 = 38\,484\,510 \text{ km}^2$

10 % de $S_{\text{LUNA}} = 3\,848\,451 \text{ km}^2$

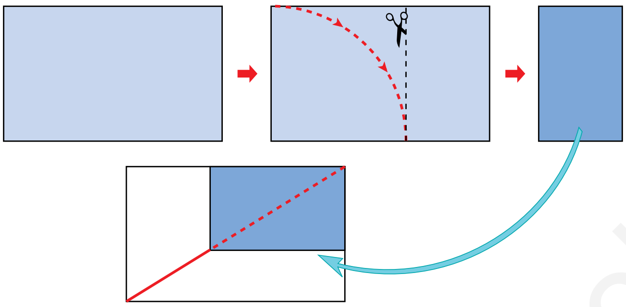
$$d = \frac{S_{\text{LUNA}} \cdot R}{2\pi R^2 - S_{\text{LUNA}}} = \frac{6\,734\,789\,250}{15\,393\,804} = 437{,}5 \text{ km}$$

5 Semejanza de rectángulos. Aplicaciones

Página 133

1. Si a una hoja A-4 se le corta una tira de 2,5 cm de ancho a lo largo del lado mayor, obtendrás un rectángulo áureo. Constrúyete dos.

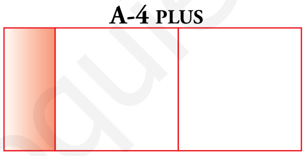
A uno de ellos, córtale un cuadrado. Comprueba que el rectángulo remanente es semejante al rectángulo inicial.



Experiencia práctica.

2. Si a una hoja A-4 le añadimos un cuadrado, el rectángulo resultante, al que llamaremos A-4 PLUS, tiene la siguiente propiedad: si le quitamos dos cuadrados, el rectángulo remanente es semejante al inicial.

El rectángulo sombreado es semejante al rectángulo total.



a) Compruébalo con una hoja A-4.

b) Demuéstralo teniendo en cuenta que las dimensiones del A-4 PLUS son $\sqrt{2}+1$ y 1, y las del rectángulo sobrante son 1 y $\sqrt{2}-1$.

a) Experiencia práctica.

b) Debemos comprobar que $\dfrac{\sqrt{2}+1}{1} = \dfrac{1}{\sqrt{2}-1}$.

$$\left(\sqrt{2}+1\right)\left(\sqrt{2}-1\right) = \sqrt{2}^{\,2} - 1^2 = 2 - 1 = 1$$

Página 134

Hazlo tú. ¿A qué distancia de nuestros ojos debemos poner una bola de 3 cm de diámetro para que al mirar a la Luna la tape completamente?

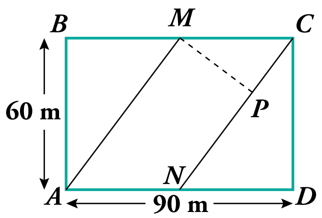
Distancia a la luna = 384 000 km = $3{,}84 \cdot 10^{10}$ cm　　Diámetro de la bola = 3 cm

Diámetro de la luna = 3 500 km = $3{,}5 \cdot 10^{8}$ cm　　Distancia a la bola = x cm

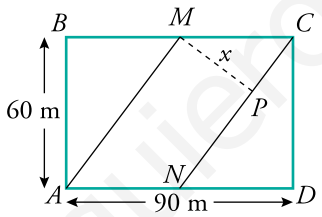
Como la luna y la bola tendrían el mismo tamaño aparente, la razón entre sus distancias a los ojos debe ser igual que la razón entre sus diámetros:

$$\frac{3{,}84 \cdot 10^{10}}{x} = \frac{3{,}5 \cdot 10^{8}}{3} \rightarrow x = \frac{3 \cdot 3{,}84 \cdot 10^{10}}{3{,}5 \cdot 10^{8}} = 329 \text{ cm} = 3{,}29 \text{ metros}$$

Hazlo tú. Si M y N son los puntos medios de BC y AD, calcula $\overline{MP}$.



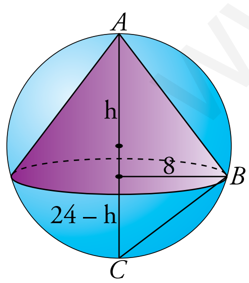
$\widehat{CDN}$ es semejante a $\widehat{MPC}$ por ser rectángulos y ser $\widehat{MCP} = \widehat{CND}$ (alternos internos).



Siendo $x = \overline{MP}$ podemos afirmar que:

$$\frac{x}{60} = \frac{45}{\sqrt{60^2 + 45^2}} \rightarrow \frac{x}{60} = \frac{45}{75} \rightarrow 75x = 2700 \rightarrow x = 36$$

Hazlo tú. En una esfera de diámetro 24 cm se inscribe un cono de radio 8 cm. ¿Cuál será su altura?



$\widehat{ABC}$ es rectángulo en $\widehat{B}$ (ángulo inscrito en una semicircunferencia).

El radio del cono es la altura sobre la hipotenusa de $\widehat{ABC}$.

$$\left.\begin{array}{l} \text{proyección de } AB \text{ sobre } AC \rightarrow h \\ \text{proyección de } BC \text{ sobre } AC \rightarrow 24 - h \end{array}\right\}$$

Por el teorema de la altura tenemos que:

$$8^2 = h \cdot (24 - h) \rightarrow 64 = 24h - h^2 \rightarrow h^2 - 24h + 64 = 0 = \begin{cases} 12 + 4\sqrt{5} \text{ cm} \\ 12 - 4\sqrt{5} \text{ cm} \end{cases}$$

Las dos soluciones son válidas, es decir, existen dos conos que cumplen las condiciones.

Ejercicios y problemas

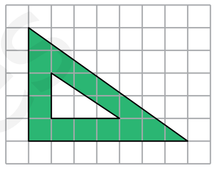
Página 135

Practica

Razón de semejanza. Escalas

1. **a) ¿Son semejantes los triángulos interior y exterior?**

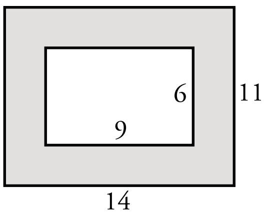
b) ¿Cuántas unidades medirán los catetos de un triángulo semejante al menor cuya razón de semejanza sea 2,5?



a) No. La razón entre los catetos es $\frac{2}{3}$ en el interior y $\frac{5}{7}$ en el exterior.

b) $\left.\begin{array}{l} 2 \cdot 2,5 = 5 \\ 3 \cdot 2,5 = 7,5 \end{array}\right\}$ Los catetos medirán 5 y 7,5 unidades.

2. **Una fotografía de 9 cm de ancha y 6 cm de alta tiene alrededor un marco de 2,5 cm de ancho. ¿Son semejantes los rectángulos interior y exterior del marco? Responde razonadamente.**

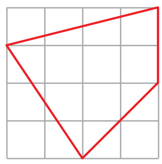


$\frac{14}{9} \neq \frac{11}{6} \rightarrow$ No son semejantes.

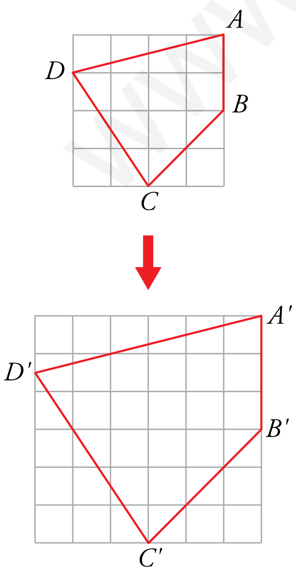
3. **Queremos reproducir la figura adjunta a escala 3/2.**

a) Haz un dibujo de la figura ampliada.

b) Calcula la longitud de sus lados.



a)



b) $\overline{A'B'} = 3$

$\overline{B'C'} = \sqrt{3^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}$

$\overline{A'D'} = \sqrt{6^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{153}{4}} = \frac{3}{2}\sqrt{17}$

$\overline{D'C'} = \sqrt{3^2 + \left(\frac{9}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{117}{4}} = \frac{3}{2}\sqrt{13}$

Se observa que, en todos los casos:

Longitud lado ampliado $= \frac{3}{2} \cdot$ Longitud lado original

puesto que:

$\overline{AB} = 2$ $\qquad \overline{BC} = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

$\overline{AD} = \sqrt{1^2 + 4^2} = \sqrt{17}$ $\qquad \overline{DC} = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$

4. **En un mapa cuya escala es 1:1 500 000, la distancia entre dos ciudades es 2,5 cm.**

a) ¿Cuál es la distancia real entre ellas?

b) ¿Cuál será la distancia en ese mapa entre dos ciudades A y B cuya distancia real es 360 km?

a) $\left.\begin{array}{ccc} 1 & \rightarrow & 1\,500\,000 \\ 2{,}5 & \rightarrow & x \end{array}\right\}\ x = 2{,}5 \cdot 1\,500\,000 = 3\,750\,000 \text{ cm} = 37{,}5 \text{ km}$

b) $\left.\begin{array}{ccc} 1\,500\,000 & \rightarrow & 1 \\ 36\,000\,000 & \rightarrow & x \end{array}\right\}\ x = \dfrac{36\,000\,000}{1\,500\,000} = 24 \text{ cm}$

5. **Indica, en cada caso, cuál es la escala del plano:**

a) 1 mm del plano representa 10 m reales.

b) 50 km reales se representan por 1 dm en el plano.

c) 0,001 mm reales se representan por 1 cm en el plano.

a) Como 10 m = 10 000 mm, la escala es 1:10 000.

b) Como 50 km = 500 000 dm, la escala es 1:500 000.

c) Como 0,001 mm = 0,0001 cm, la escala es 10 000:1.

6. **En el plano de un piso cuya escala es 1:200, el salón ocupa una superficie de 7 cm². ¿Cuál es la superficie real del salón?**

$7 \cdot 200^2 = 280\,000 \text{ cm}^2 = 28 \text{ m}^2$

7. **Un rombo cuyas diagonales miden 275 cm y 150 cm, ¿qué área ocupará en un plano de escala 1:25?**

$\text{Área} = \dfrac{275 \cdot 150}{2} = 20\,625 \text{ cm}^2$

En el plano ocupará $\dfrac{20\,625}{25^2} = 33 \text{ cm}^2$.

8. **Una maqueta está hecha a escala 1:250. Calcula:**

a) Las dimensiones de una torre cilíndrica que en la maqueta mide 6 cm de altura y 4 cm de diámetro.

b) La superficie de un jardín que en la maqueta ocupa 40 cm².

c) El volumen de una piscina que en la maqueta contiene 20 cm³ de agua.

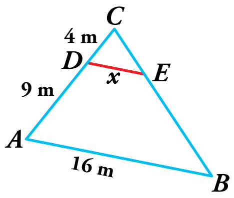
a) $\left.\begin{array}{ccc} 1 \text{ cm} & \rightarrow & 250 \text{ cm} \\ 6 \text{ cm} & \rightarrow & h \\ 4 \text{ cm} & \rightarrow & d \end{array}\right\}\ \left.\begin{array}{l} h = 1500 \text{ cm} = 15 \text{ m} \\ d = 1000 \text{ cm} = 10 \text{ m} \end{array}\right\}$ La torre cilíndrica mide 15 m de altura y 10 m de diámetro.

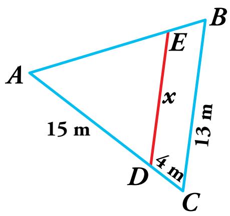
b) $40 \cdot 250^2 = 2\,500\,000 \text{ cm}^2 = 250 \text{ m}^2$

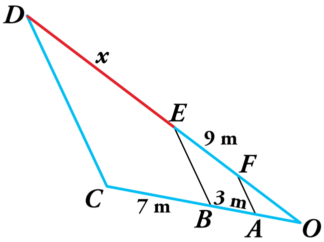
c) $20 \cdot 250^3 = 312\,500\,000 \text{ cm}^3 = 312{,}5 \text{ m}^3$

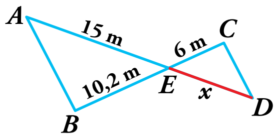
Semejanza de triángulos

9. **Identifica triángulos en posición de Tales en cada figura y calcula, en cada caso, la longitud del segmento** ***DE*****:**

a)


b)


c)


d)


a) Los triángulos $\widehat{ACB}$ y $\widehat{DCE}$ están en posición de Tales porque tienen $\hat{C}$ en común y los lados DE y AB son paralelos. Por tanto, son semejantes y se cumple:

$$\frac{x}{16} = \frac{4}{13} \rightarrow x = \frac{16 \cdot 4}{13} = \frac{64}{13} = 4{,}92 \text{ m}$$

b) $\widehat{BAC}$ y $\widehat{EAD}$ están en posición de Tales porque $\hat{A}$ es común a ambos y ED y BC son paralelos. Por tanto, son semejantes y:

$$\frac{x}{13} = \frac{15}{19} \rightarrow x = \frac{15 \cdot 13}{19} = 10{,}26 \text{ m}$$

c) $\widehat{FOA}$, $\widehat{EOB}$ y $\widehat{DOC}$ están en posición de Tales, porque $\hat{O}$ es común a los tres triángulos y $FA \,//\, EB \,//\, DC$. Por tanto:

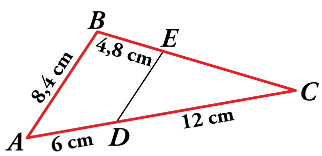
$$\frac{x}{7} = \frac{9}{3} \rightarrow x = \frac{9 \cdot 7}{3} = \frac{63}{3} = 21 \text{ m}$$

d) $\widehat{AEB}$ y $\widehat{CED}$ están en posición de Tales, porque $\widehat{AEB} = \widehat{CED}$ (opuestos por el vértice) y $AB \,//\, CD$. Por tanto:

$$\frac{15}{x} = \frac{10{,}2}{6} \rightarrow x = \frac{6 \cdot 15}{10{,}2} = 8{,}82 \text{ m}$$

10. **En la figura, el segmento** ***DE*** **es paralelo a** ***AB*****.**

Justifica que los triángulos ***ABC*** **y** ***CDE*** **son semejantes y calcula** $\overline{DE}$ **y** $\overline{EC}$**.**



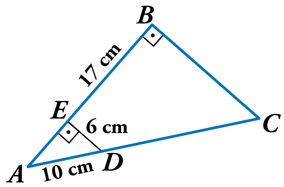
Los triángulos ABC y CDE son semejantes porque tienen un ángulo común, $\hat{C}$, y los lados opuestos a ese ángulo son paralelos, $DE \,//\, AB$. Están en posición de Tales.

$$\frac{\overline{DE}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{DC}}{\overline{AC}} \rightarrow \frac{\overline{DE}}{8{,}4} = \frac{12}{18} \rightarrow \overline{DE} = \frac{12 \cdot 8{,}4}{18} = 5{,}6 \text{ cm}$$

$$\frac{\overline{EC}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{AB}} \rightarrow \frac{x}{4{,}8 + x} = \frac{5{,}6}{8{,}4} \rightarrow 8{,}4x = 26{,}88 + 5{,}6x \rightarrow 2{,}8x = 26{,}88 \rightarrow x = 9{,}6 \rightarrow$$

$$\rightarrow \overline{EC} = 9{,}6 \text{ cm}$$

11. **¿Por qué son semejantes los triángulos *ABC* y *AED*?**
Halla el perímetro del trapecio *EBCD*.



Porque son rectángulos con un ángulo agudo común, $\hat{A}$. Tienen los tres ángulos iguales.

- Hallamos $\overline{EA}$ aplicando el teorema de Pitágoras:

  $\overline{EA} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$ cm, $\overline{AB} = 8 + 17 = 25$ cm

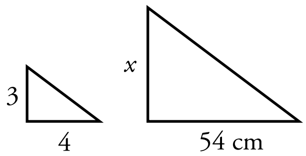
- $\dfrac{\overline{AC}}{\overline{AD}} = \dfrac{\overline{AB}}{\overline{EA}} \rightarrow \dfrac{10 + x}{10} = \dfrac{25}{8} \rightarrow 80 + 8x = 250 \rightarrow 8x = 170$

  $x = 21{,}25 \rightarrow \overline{DC} = 21{,}25$ cm

- $\dfrac{\overline{BC}}{\overline{ED}} = \dfrac{\overline{AB}}{\overline{AE}} \rightarrow \dfrac{\overline{BC}}{6} = \dfrac{25}{8} \rightarrow \overline{BC} = \dfrac{150}{8} = 18{,}75$ cm

- Perímetro de $EBCD = 17 + 18{,}75 + 21{,}25 + 6 = 63$ cm

12. **En un triángulo rectángulo, la relación entre los catetos es 3/4. Halla el perímetro de otro triángulo semejante en el que el cateto menor mide 54 cm.**



$\dfrac{54}{x} = \dfrac{3}{4} \rightarrow x = \dfrac{54 \cdot 4}{3} = 72$ cm mide el cateto mayor.

$h = \sqrt{54^2 + 72^2} = 90$ cm mide la hipotenusa.

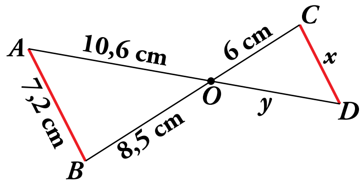
Perímetro $= 54 + 72 + 90 = 216$ cm

13. **La razón de semejanza entre dos triángulos es 2/5. Si el área del mayor es 150 cm^2, ¿cuál es el área del menor?**

El área del menor es $150 \cdot \left(\dfrac{2}{5}\right)^2 = 24$ cm^2.

Página 136

14. Observa esta figura, en la que el segmento *AB* es paralelo a *CD*.



a) Di por qué son semejantes los triángulos *AOB* y *ODC*.

b) Calcula *x* e *y*.

a) Son semejantes porque tienen un ángulo igual, $\widehat{AOB} = \widehat{COD}$ por ser opuestos por el vértice, y los lados opuestos a ese ángulo son paralelos.

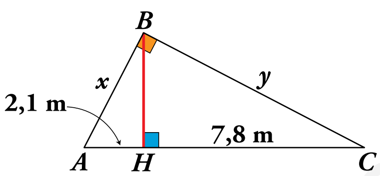
b) $\dfrac{x}{7{,}2} = \dfrac{6}{8{,}5} \rightarrow x = \dfrac{7{,}2 \cdot 6}{8{,}5} \approx 5{,}08$ cm

$\dfrac{6}{8{,}5} = \dfrac{y}{10{,}6} \rightarrow y = \dfrac{10{,}6 \cdot 6}{8{,}5} \approx 7{,}48$ cm

Teoremas del cateto y de la altura

15. En cada uno de los siguientes triángulos rectángulos se ha trazado la altura *BH* sobre la hipotenusa. Halla, en cada caso, los segmentos *x* e *y*.

a)

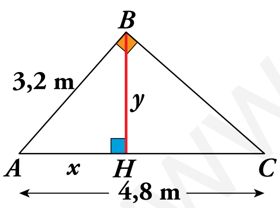


a) $\overline{BH}^2 = 2{,}1 \cdot 7{,}8 \rightarrow \overline{BH} \approx 4{,}05$ m

En el triángulo ABH, $x^2 = 2{,}1^2 + 4{,}05^2 \rightarrow x \approx 4{,}56$ m

En el triángulo BHC, $y^2 = 7{,}8^2 + 4{,}05^2 \rightarrow y \approx 8{,}79$ m

b)

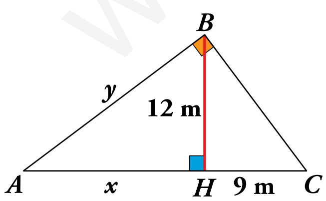


b) Por el teorema del cateto:

$3{,}2^2 = 4{,}8x \rightarrow x \approx 2{,}13$ m

En el triángulo ABH, $y^2 = 3{,}2^2 - 2{,}13^2 \rightarrow y \approx 2{,}39$ m

c)



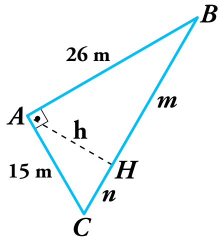
c) Por el teorema de la altura:

$12^2 = x \cdot 9 \rightarrow x = 16$ m

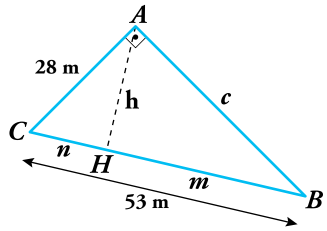
En el triángulo ABH, $y^2 = 12^2 + 16^2 \rightarrow y = 20$ m

16. **Calcula los valores que faltan en cada uno de los siguientes triángulos, rectángulos en A:**

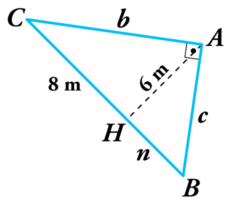
a)



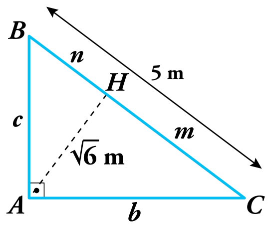
b)



c)



d)



a) Por el teorema de Pitágoras:

$(m + n)^2 = 15^2 + 26^2 \rightarrow$

$\rightarrow\ m + n = \sqrt{901} \approx 30{,}02$ m

Por el teorema del cateto:

$15^2 = 30{,}02 \cdot n \ \rightarrow\ n = 7{,}50$ m

$26^2 = 30{,}02 \cdot m \ \rightarrow\ m = 22{,}52$ m

Por el teorema de la altura:

$\text{h}^2 = 7{,}50 \cdot 22{,}52 \ \rightarrow\ \text{h} = 13$ m

b) Por el teorema de Pitágoras:

$53^2 = 28^2 + c^2 \ \rightarrow\ c = 45$ m

Por el teorema del cateto:

$28^2 = 53 \cdot n \ \rightarrow\ n = 14{,}79$ m

$45^2 = 53 \cdot m \ \rightarrow\ m = 38{,}21$ m

Por el teorema de la altura:

$\text{h}^2 = 14{,}79 \cdot 38{,}21 \ \rightarrow\ \text{h} = 23{,}77$ m

c) Por el teorema de la altura:

$6^2 = 8 \cdot n \ \rightarrow\ n = 4{,}5$ m

Por el teorema de Pitágoras:

$b^2 = 8^2 + 6^2 \ \rightarrow\ b = 10$ m

Por el teorema del cateto:

$c^2 = (8 + 4{,}5) \cdot 4{,}5 \ \rightarrow\ c = 7{,}5$ m

d) Por el teorema de la altura $\left(\sqrt{6}\right)^2 = m \cdot n$:

$$\left.\begin{aligned} \left(\sqrt{6}\right)^2 &= m \cdot n \\ 5 &= m + n \end{aligned}\right\} \rightarrow\ m = 5 - n$$

$6 = (5 - n)\, n \ \rightarrow\ 6 = 5n - n^2 \ \rightarrow\ n^2 - 5n + 6 = 0$

$$n = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{2} = \begin{cases} 3 \\ 2 \end{cases}$$

- Si $n = 3$, por el teorema de Pitágoras:

  $c^2 = 3^2 + \left(\sqrt{6}\right)^2 \ \rightarrow\ c = \sqrt{15} = 3{,}87$ m

  Si $n = 3 \ \rightarrow\ m = 2$, y por el teorema de Pitágoras:

  $b^2 = 2^2 + \left(\sqrt{6}\right)^2 \ \rightarrow\ b = \sqrt{10} = 3{,}16$ m

- Si $n = 2$, por el teorema de Pitágoras:

  $c^2 = 2^2 + \left(\sqrt{6}\right)^2 \ \rightarrow\ c = 3{,}16$ m

  $b^2 = 3^2 + \left(\sqrt{6}\right)^2 \ \rightarrow\ b = 3{,}87$ m

Las soluciones son complementarias.

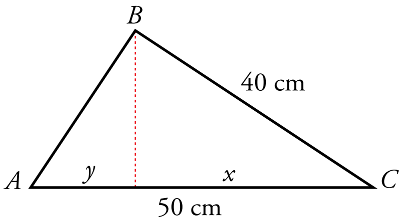
17. **Dibuja, en cada caso, un triángulo rectángulo y traza su altura sobre la hipotenusa.**

a) Calcula la proyección del cateto menor sobre la hipotenusa si esta mide 50 cm y el cateto mayor, 40 cm.

b) La hipotenusa mide 25 cm, y la proyección del cateto menor sobre la hipotenusa, 9 cm. Halla el cateto mayor.

c) La altura relativa a la hipotenusa mide 6 cm, y la proyección del cateto menor sobre la hipotenusa, 4,5 cm. Halla la hipotenusa.

a)



$40^2 = 50 \cdot x \rightarrow x = 32$ cm

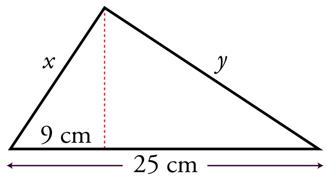
Proyección de AB sobre AC:

$50 - 32 = 18$ cm

O bien: $\overline{AB} = \sqrt{50^2 - 40^2} = 30$ cm

$30^2 = 50 \cdot y \rightarrow y = 18$ cm

b)



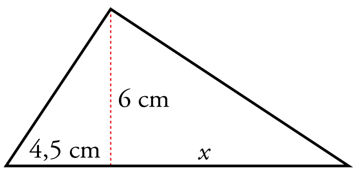
La proyección de y sobre la hipotenusa es:

$25 - 9 = 16$ cm

Por el teorema del cateto:

$y^2 = 25 \cdot 16 \rightarrow y = 20$ cm

c)



Por el teorema de la altura:

$6^2 = 4{,}5 \cdot x \rightarrow x = 8$ cm

Hipotenusa $= 4{,}5 + 8 = 12{,}5$ cm

18. **El mástil de una bandera está sujeto a tierra por dos cables que forman un ángulo recto en el punto más alto del mástil. Las distancias desde la base del mástil a los puntos de sujeción de los cables son 12 m y 15 m. Calcula la altura del mástil.**

Por el teorema de la altura:

$h^2 = 12 \cdot 15 = 180 \rightarrow h = \sqrt{180} = 13{,}42$ m

Aplica lo aprendido

19. **Dos depósitos cilíndricos semejantes tienen un volumen de 100 m³ y 250 m³, respectivamente. Si la altura del menor es 1,5 m, ¿cuánto mide el radio del mayor?**

Como los depósitos son semejantes, sabemos que $V_{\text{MAYOR}} = k^3 \cdot V_{\text{MENOR}}$, con k = razón de semejanza:

$$250 = k^3 \cdot 100 \rightarrow k^3 = \frac{250}{100} = \frac{5}{2} \rightarrow k = \sqrt[3]{\frac{5}{2}}$$

Por otra parte:

$$V_{\text{MENOR}} = \pi \cdot r^2 \cdot h \rightarrow 100 = \pi \cdot r^2 \cdot 1{,}50 \rightarrow r^2 = \frac{100}{1{,}50\pi} = \frac{200}{3\pi} \rightarrow r = \sqrt{\frac{200}{3\pi}} \text{ m}$$

Por lo que podemos calcular el radio del mayor:

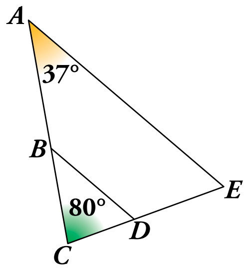
$$R = k \cdot r = \sqrt[3]{\frac{5}{2}} \cdot \sqrt{\frac{200}{3\pi}} = 6{,}25 \text{ m}$$

20. **Si BD es paralelo a AE, y $\overline{AC}$ = 15 cm, $\overline{CE}$ = 11 cm y $\overline{BC}$ = 6,4 cm:**

a) Calcula $\overline{CD}$.

b) ¿Podemos saber cuánto vale $\overline{AE}$ sin medirlo directamente?

c) Si $\hat{A}$ = 37° y $\hat{C}$ = 80°, calcula $\hat{E}$, $\hat{B}$ y $\hat{D}$.



a) Los triángulos ACE y BCD son semejantes.

Por tanto: $\dfrac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \dfrac{\overline{CE}}{\overline{CD}} \rightarrow \dfrac{15}{6,4} = \dfrac{11}{\overline{CD}} \rightarrow \overline{CD} = \dfrac{11 \cdot 6,4}{15} \approx 4,69$ cm

b) No podemos saber lo que mide AE porque no conocemos la medida del lado correspondiente, BD.

c) $\hat{E} = 180° - (37° + 80°) = 63°$; $\hat{B} = \hat{A} = 37°$; $\hat{D} = \hat{E} = 63°$

21. **Los lados mayores de dos triángulos semejantes miden 8 cm y 13,6 cm, respectivamente. Si el área del primero es 26 cm², ¿cuál es el área del segundo?**

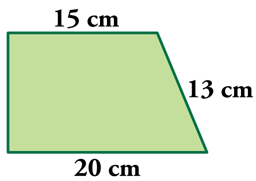
Como los triángulos son semejantes, sus lados son proporcionales. Así:

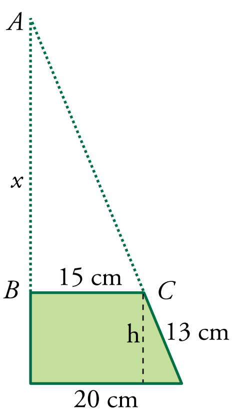
$k = \dfrac{13,6}{8} = 1,7$ es la razón de semejanza.

Por tanto:

Área del mayor = k^2 · Área del menor = $1,7^2 \cdot 26 = 75,14$ cm²

22. **Calcula el perímetro del triángulo cuya base coincide con la base mayor de este trapecio rectángulo y que se obtiene al prolongar los lados no paralelos hasta que se corten.**





$h = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$ cm

$\dfrac{x}{15} = \dfrac{x+12}{20} \rightarrow 20x = 15x + 180 \rightarrow x = 36$ cm

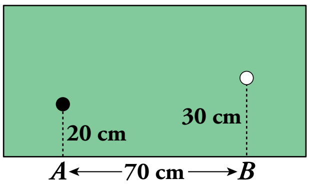
Catetos del triángulo: 20 cm y 48 cm

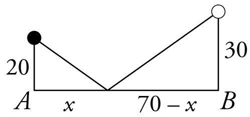
Hipotenusa: $\sqrt{20^2 + 48^2} = 52$ cm

Perímetro: 20 + 48 + 52 = 120 cm

Página 137

23. **¿En qué punto comprendido entre *A* y *B* debe dar la bola blanca para que al rebotar alcance a la bola negra?**

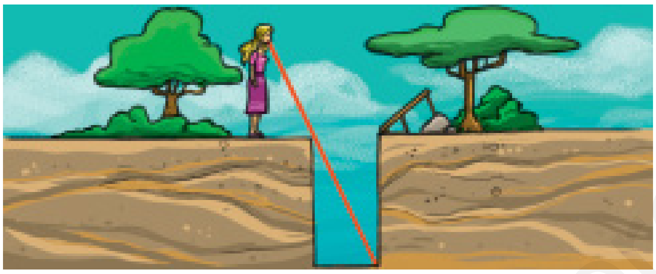


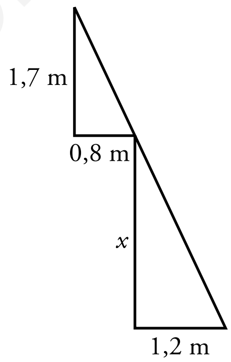


$$\frac{20}{x} = \frac{30}{70-x} \rightarrow 1\,400 - 20x = 30x \rightarrow 1\,400 = 50x \rightarrow x = 28 \text{ cm}$$

Debe dar a 28 cm del punto *A*.

24. **¿Cuál es la profundidad de un pozo, si su anchura es 1,2 m y alejándote 0,8 m del borde, desde una altura de 1,7 m, ves que la visual une el borde del pozo con la línea del fondo?**

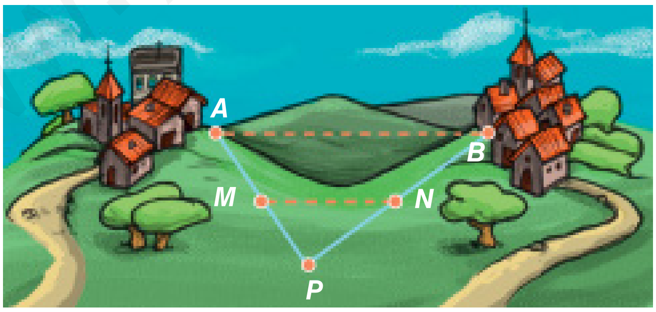


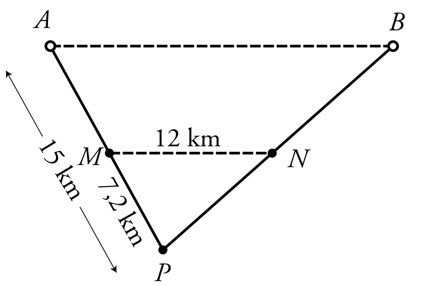


$$\frac{x}{1,7} = \frac{1,2}{0,8} \rightarrow x = \frac{1,2 \cdot 1,7}{0,8} \rightarrow x = 2,55 \text{ m}$$

La profundidad es de 2,55 m.

25. **Entre dos pueblos *A* y *B* hay una colina. Para medir la distancia $\overline{AB}$, fijamos un punto *P* desde el que se ven los dos pueblos y tomamos las medidas $\overline{AP}$ = 15 km, $\overline{PM}$ = 7,2 km y $\overline{MN}$ = 12 km. (*MN* es paralela a *AB*). Halla la distancia $\overline{AB}$.**



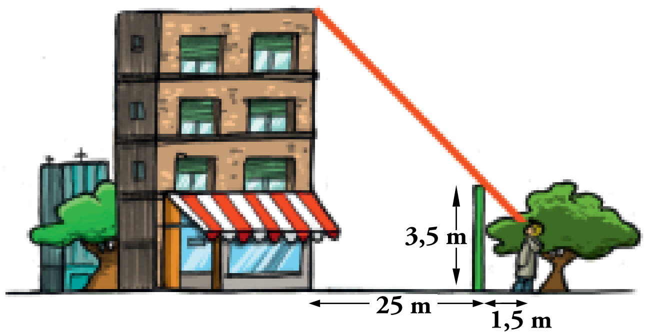


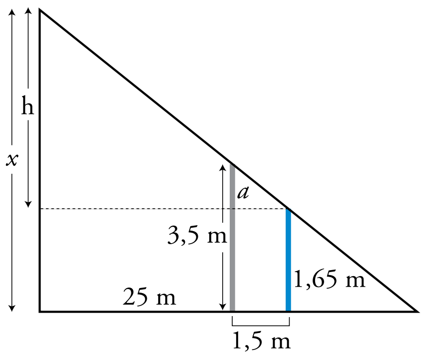
Los triángulos *APB* y *MPN* son semejantes.

Por tanto:

$$\frac{\overline{AB}}{12} = \frac{15}{7,2} \rightarrow \overline{AB} = \frac{15 \cdot 12}{7,2} = 25 \text{ km}$$

26. **Para medir la altura de la casa, Álvaro, de 165 cm de altura, se situó a 1,5 m de la verja y tomó las medidas indicadas. ¿Cuánto mide la casa?**





$a = 3{,}5 - 1{,}65 = 1{,}85$ m

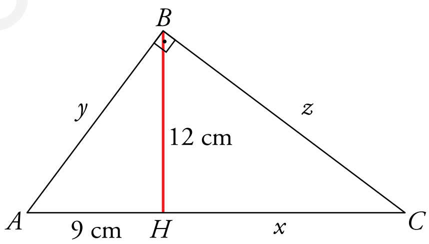
$$\frac{25 + 1{,}5}{1{,}5} = \frac{h}{1{,}85} \rightarrow h = \frac{26{,}5 \cdot 1{,}85}{1{,}5} = 32{,}68 \text{ m}$$

Altura de la casa: $32{,}68 + 1{,}65 = 34{,}33$ m

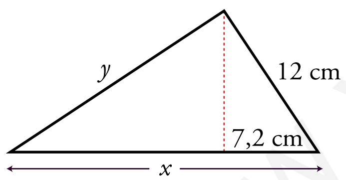
27. **La altura relativa a la hipotenusa del triángulo *ABC*, rectángulo en *B*, mide 12 cm y la proyección del cateto *AB* sobre la hipotenusa mide 9 cm. Halla el perímetro de ese triángulo.**

Por el teorema de la altura: $12^2 = 9 \cdot x \rightarrow x = 16$

$$\left.\begin{array}{l} y^2 = 12^2 + 9^2 \rightarrow y = 15 \text{ cm} \\ z^2 = 12^2 + 16^2 \rightarrow z = 20 \text{ cm} \end{array}\right\} \text{ Perímetro: } 15 + 20 + 25 = 60 \text{ cm}$$



28. **Uno de los catetos de un triángulo rectángulo mide 12 m y su proyección sobre la hipotenusa mide 7,2 m. Calcula el área y el perímetro del triángulo.**



Por el teorema del cateto:

$12^2 = 7{,}2x \rightarrow x = 20$ m

$y^2 = 20^2 - 12^2 \rightarrow y = 16$ m

$$\text{Área} = \frac{16 \cdot 12}{2} = 96 \text{ m}^2, \text{ Perímetro} = 16 + 12 + 20 = 48 \text{ m}$$

29. **El perímetro de un triángulo isósceles es 64 m, y el lado desigual mide 14 m.**

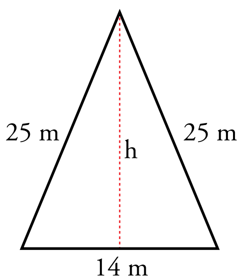
Calcula el área de un triángulo semejante cuyo perímetro es de 96 m.

Altura del triángulo: $h^2 = 25^2 - 7^2 \rightarrow h = 24$ m

$$\text{Área} = \frac{14 \cdot 24}{2} = 168 \text{ m}^2$$

$$\text{Razón de semejanza} = \frac{96}{64} = \frac{3}{2}$$

$$\text{Área del triángulo semejante} = 168 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 378 \text{ cm}^2$$



30. **Dos triángulos *ABC* y *PQR* son semejantes. Los lados del primero miden 24 m, 28 m y 34 m.**

Calcula la medida de los lados del segundo triángulo sabiendo que su perímetro es 129 m.

Perímetro del triángulo *ABC*: $24 + 28 + 34 = 86$ m

Razón de semejanza: $\dfrac{129}{86} = \dfrac{3}{2}$

Lados del triángulo *PQR*: $24 \cdot \dfrac{3}{2} = 36$ cm; $28 \cdot \dfrac{3}{2} = 42$ cm; $34 \cdot \dfrac{3}{2} = 51$ cm

31. **Las áreas de dos triángulos isósceles semejantes son 48 m² y 108 m². Si el lado desigual del primer triángulo es 12 m, ¿cuál es el perímetro del segundo?**

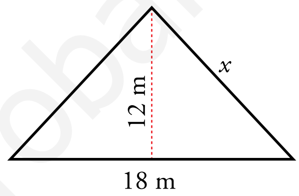
Razón de semejanza: $\sqrt{\dfrac{108}{48}} = 1{,}5$

Lado desigual del segundo: $12 \cdot 1{,}5 = 18$ cm

Altura del segundo: $108 = \dfrac{18 \cdot h}{2} \rightarrow h = 12$ cm

Lados desiguales del segundo: $x^2 = 12^2 + 9^2 \rightarrow x = 15$ cm

Perímetro del segundo: $18 + 15 + 15 = 48$ cm



32. **Los lados de un triángulo *ABC* miden:**

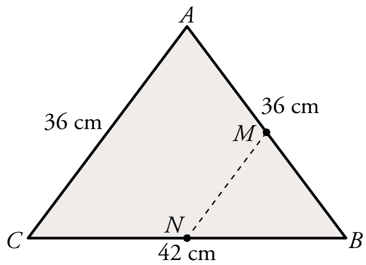
$$\overline{AC} = \overline{AB} = 36 \text{ cm}, \quad \overline{CB} = 42 \text{ cm}$$

Desde un punto *M* de *AB* se traza una paralela a *AC*, que corta al lado *BC* en un punto *N*. ¿Cuánto deben medir los lados del triángulo *MBN* para que su área sea 1/9 de la del triángulo *ABC*?

$\dfrac{\text{Área de } MNB}{\text{Área de } ABC} = \dfrac{1}{9} \rightarrow k^2 = \dfrac{1}{9} \rightarrow k = \dfrac{1}{3}$

$36 \cdot \dfrac{1}{3} = 12$ cm; $42 \cdot \dfrac{1}{3} = 14$ cm

$\overline{MB} = \overline{MN} = 12$ cm; $\overline{NB} = 14$ cm



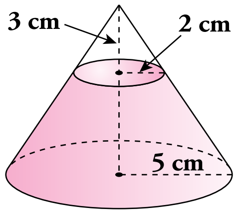
33. **Queremos construir un ortoedro de volumen 36 015 cm³ que sea semejante a otro de dimensiones 25 × 15 × 35 cm. ¿Cuánto medirán sus aristas?**

$V = 25 \cdot 15 \cdot 35 = 13\,125$ cm³

$k^3 = \dfrac{36\,015}{13\,125} = 2{,}744 \rightarrow k = 1{,}4$

Las aristas del ortoedro deben medir: $25 \cdot 1{,}4 = 35$ cm; $15 \cdot 1{,}4 = 21$ cm y $35 \cdot 1{,}4 = 49$ cm.

34. **De un cono de radio 5 cm hemos cortado otro cono de radio 2 cm y altura 3 cm. Calcula el volumen del cono grande.**

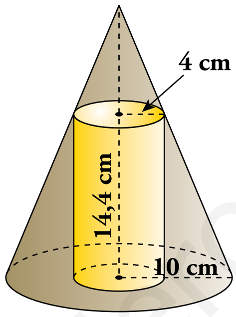


Calculamos la altura del cono grande, x:

$\frac{x}{3} = \frac{5}{2} \rightarrow x = \frac{15}{2} = 7{,}5$ cm

Volumen $= \frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{1}{3}\pi \cdot 5^2 \cdot 7{,}5 = 62{,}5\pi$ cm^3

35. **En un cono de 10 cm de radio hemos inscrito un cilindro de radio 4 cm y altura 14,4 cm. Halla la altura del cono.**



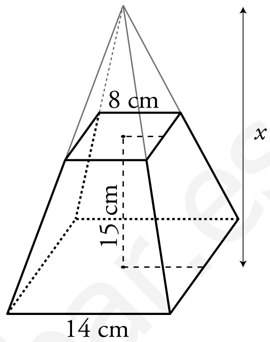
$\frac{x + 14{,}4}{x} = \frac{10}{4} \rightarrow 4x + 57{,}6 = 10x \rightarrow 6x = 57{,}6 \rightarrow x = 9{,}6$ cm

Altura del cono: 9,6 + 14,4 = 24 cm

Página 138

Resuelve problemas

36. **Calcula el volumen de un tronco de pirámide cuadrangular regular de 15 cm de altura en el que los lados de las bases miden 8 cm y 14 cm.**



Calculamos la altura de la pirámide menor, x:

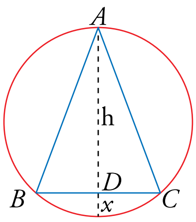
$$\frac{x+15}{x} = \frac{7}{4} \rightarrow 4x + 60 = 7x \rightarrow 60 = 3x \rightarrow x = 20 \text{ cm}$$

Volumen de la pirámide grande $= \frac{1}{3} \cdot 14^2 \cdot (20 + 15) = 2\,286{,}67 \text{ cm}^3$

Volumen de la pirámide pequeña $= \frac{1}{3} \cdot 8^2 \cdot 20 = 426{,}67 \text{ cm}^3$

Volumen del tronco de pirámide $= 2\,286{,}67 - 426{,}67 = 1\,860 \text{ cm}^3$

37. **En una circunferencia de radio desconocido, hemos inscrito un triángulo isósceles de lados $\overline{AB} = \overline{AC} = 16$ m y $\overline{BC} = 10$ m. Halla el radio de esa circunferencia.**



Por el teorema de Pitágoras sobre $\widehat{ADC}$:

$16^2 = \text{h}^2 + 5^2 \rightarrow \text{h} = \sqrt{231} = 15{,}20$ m

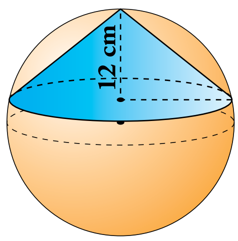
Observamos que $\widehat{ADB}$ y $\widehat{BDE}$ son semejantes. Por tanto:

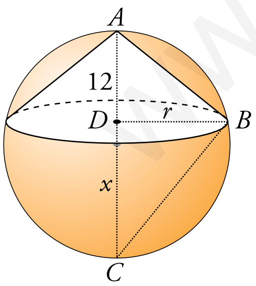
$$\frac{15{,}20}{5} = \frac{5}{x} \rightarrow 15{,}20x = 25 \rightarrow x = \frac{25}{15{,}20} = 1{,}64 \text{ m}$$

Luego, el radio de la circunferencia será:

$$\frac{\text{h} + x}{2} = \frac{15{,}20 + 1{,}64}{2} = 8{,}42 \text{ m}$$

38. **En una esfera de 15 cm de radio hemos inscrito un cono de altura 12 cm. Calcula su área lateral.**





Radio de la esfera: 15 cm

$\overline{DC} = 30 - 12 = 18$ cm

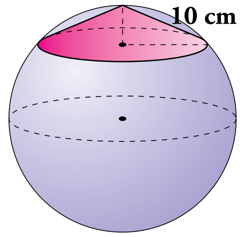
Calculamos el radio del cono utilizando el teorema de la altura en el triángulo ABC:

$r^2 = 12 \cdot 18 \rightarrow r \approx 14{,}7$ cm

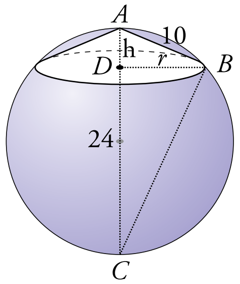
Generatriz del cono: $g^2 = 12^2 + 14{,}7^2 \rightarrow g \approx 18{,}98$ cm

Área lateral del cono: $\pi r g = \pi \cdot 14{,}7 \cdot 18{,}98 \approx 279\pi \text{ cm}^2$

39. **En una esfera de 24 cm de diámetro se inscribe un cono cuya generatriz mide 10 cm. Calcula el volumen del cono.**



Para calcular la altura del cono, aplicamos el teorema del cateto en el triángulo rectángulo *ABC*:

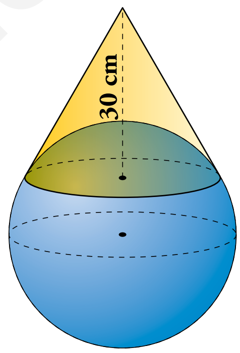


$$10^2 = \text{h} \cdot 24 \to \text{h} \approx 4{,}17 \text{ cm}$$

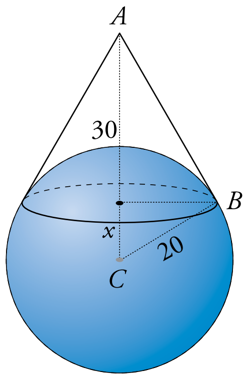
Radio del cono: $r^2 = 10^2 - 4{,}17^2 \to r \approx 9{,}09$ cm

$$V_{\text{CONO}} = \frac{1}{3}\pi \cdot 9{,}09^2 \cdot 4{,}17 \approx 114{,}85\pi \text{ cm}^3$$

40. **Sobre una esfera de 20 cm de radio se encaja un cono de 30 cm de altura. Halla el área del casquete esférico que determina el cono.**



Para hallar x, aplicamos el teorema del cateto en el triángulo rectángulo *ABC*:



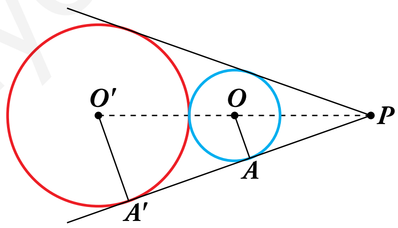
$$20^2 = (30 + x)x \to 400 = 30x + x^2$$

$$x^2 + 30x - 400 = 0 \to x = \frac{-30 \pm 50}{2} = \begin{cases} -40. \text{ No vale.} \\ 10 \text{ cm} \end{cases}$$

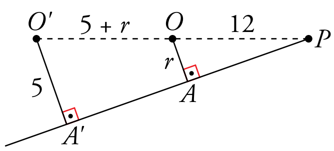
Altura del casquete = 20 – 10 = 10 cm

Área del casquete = $2\pi R\text{h} = 2\pi \cdot 20 \cdot 10 = 400\pi \text{ cm}^2$

41. **Desde un punto *P* trazamos tangentes a dos circunferencias tangentes exteriores. Si $\overline{OP}$ = 12 cm y $\overline{O'A'}$ = 5 cm, ¿cuánto mide el radio de la circunferencia menor?**



Los triángulos *OAP* y *O'A'P'* son semejantes por ser rectángulos con un ángulo agudo común.

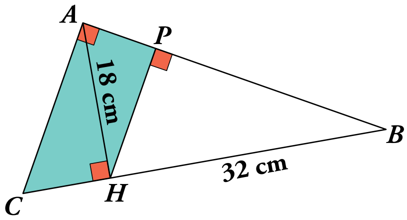


$$\frac{5}{r} = \frac{17 + r}{12} \to 60 = 17r + r^2 \to r^2 + 17r - 60 = 0$$

$$r = \frac{-17 \pm 23}{2} = \begin{cases} -20. \text{ No vale} \\ 3 \end{cases}$$

El radio de la circunferencia menor mide 3 cm.

42. **En el triángulo *ABC*, rectángulo en *A*, conocemos $\overline{AH}$ = 18 cm y $\overline{HB}$ = 32 cm.**



a) Calcula $\overline{CH}$, $\overline{AC}$ y $\overline{AB}$.

b) Aplica el teorema del cateto en el triángulo rectángulo *AHB* para obtener $\overline{AP}$. Calcula $\overline{PH}$.

c) Halla el área y el perímetro del trapecio *APHC*.

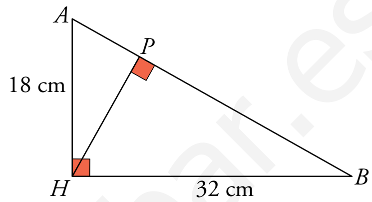
a) Por el teorema de la altura:

$\overline{AH}^2 = \overline{CH} \cdot \overline{HB} \rightarrow 18^2 = \overline{CH} \cdot 32 \rightarrow \overline{CH} = 10{,}125$ cm

$\overline{AC}^2 = \overline{AH}^2 + \overline{CH}^2 \rightarrow \overline{AC} = \sqrt{18^2 + 10{,}125^2} \rightarrow$

$\rightarrow \overline{AC} \approx 20{,}65$ cm

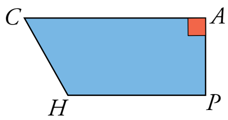
$\overline{AB} = \sqrt{18^2 + 32^2} \rightarrow \overline{AB} \approx 36{,}72$ cm



b) $\overline{AH}^2 = \overline{AB} \cdot \overline{AP} \rightarrow \overline{AP} = \dfrac{\overline{AH}^2}{\overline{AB}} = \dfrac{18^2}{36{,}71} \approx 8{,}83$ cm

$\overline{HP} = \sqrt{\overline{AH}^2 - \overline{PA}^2} = \sqrt{18^2 - 8{,}83^2} \rightarrow \overline{HP} \approx 15{,}69$ cm

c)



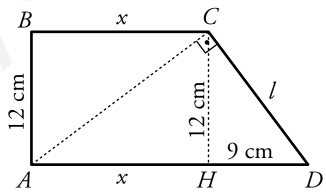
Perímetro $(APHC) = \overline{CH} + \overline{HP} + \overline{PA} + \overline{AC} = 55{,}295$ cm

Área $(APHC) = \dfrac{\overline{PH} + \overline{AC}}{2} \cdot \overline{AP} =$

$= \dfrac{15{,}69 + 20{,}65}{2} \cdot 8{,}83 \approx 160{,}44 \text{ cm}^2$

43. **En un trapecio rectángulo, la diagonal menor es perpendicular al lado oblicuo, la altura mide 12 cm y la diferencia entre las bases es de 9 cm.**

Calcula el perímetro y el área del trapecio.



En el triángulo *ACD*:

$12^2 = x \cdot 9 \rightarrow x = 16$ cm $\rightarrow \overline{AD} = 9 + 16 = 25$ cm

En el triángulo *CHD*:

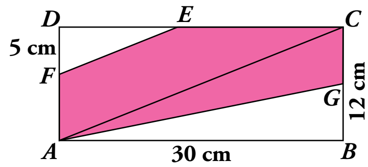
$l^2 = 12^2 + 9^2 \rightarrow l = 15$ cm

Perímetro del trapecio: 12 + 16 + 15 + 25 = 68 cm

Área del trapecio: $\dfrac{16 + 25}{2} \cdot 12 = 246 \text{ cm}^2$

44. **En el rectángulo de la figura, *EF* es paralelo a *AC*, y *G* es el punto medio de *BC*.**

Si $\overline{DF}$ = 5 cm, ¿cuál es el área y el perímetro del pentágono *FECGA*?



$\overline{AC}^2 = 30^2 + 12^2 \rightarrow \overline{AC} \approx 32{,}31$ cm

Los triángulos *FDE* y *ADC* son semejantes. Por ello:

$$\frac{\overline{DF}}{\overline{DA}} = \frac{\overline{FE}}{\overline{AC}} \rightarrow \frac{5}{12} = \frac{\overline{FE}}{32{,}31} \rightarrow \overline{FE} \approx 13{,}46 \text{ cm}$$

En el triángulo *FDE*, $\overline{DE}^2 = \overline{FE}^2 - \overline{DF}^2 = 13{,}46^2 - 5^2 \rightarrow \overline{DE} \approx 12{,}5$ cm

$\overline{EC} = \overline{DC} - \overline{DE} = 30 - 12{,}5 = 17{,}5$ cm

$\overline{CG} = 6$ cm

$\overline{AG}^2 = 30^2 + 6^2 \rightarrow \overline{AG} \approx 30{,}59$ cm

$\overline{AF} = 7$ cm

Área del triángulo $FDE = \dfrac{12{,}5 \cdot 5}{2} = 31{,}25 \text{ cm}^2$

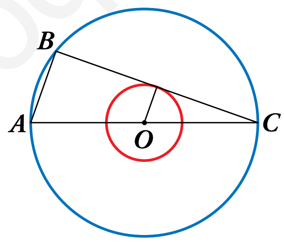
Área del triángulo $ABG = \dfrac{30 \cdot 6}{2} = 90 \text{ cm}^2$

Área del pentágono $= 30 \cdot 12 - 31{,}25 - 90 = 238{,}75 \text{ cm}^2$

Perímetro del pentágono:

$$\overline{FE} + \overline{EC} + \overline{CG} + \overline{GA} + \overline{AF} = 13{,}46 + 17{,}5 + 6 + 30{,}59 + 7 = 74{,}55 \text{ cm}$$

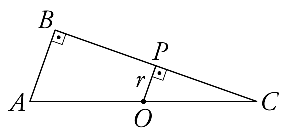
45. **En estas dos circunferencias concéntricas, el radio de la mayor es el triple que el de la menor.**



Hemos trazado el diámetro *AC* y la cuerda *BC*, que es tangente a la circunferencia interior.

Si $\overline{AB}$ = 10 cm, ¿cuánto miden los radios de cada circunferencia?

Los triángulos *ABC* y *OPC* son semejantes, por ser rectángulos con un ángulo agudo común.

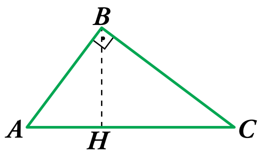


Si $\overline{OP} = r \rightarrow \overline{OC} = 3r \rightarrow \overline{AC} = 6r$

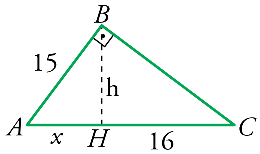
$$\frac{\overline{AB}}{\overline{OP}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{OC}} \rightarrow \frac{10}{r} = \frac{6r}{3r} \rightarrow 10 = 2r \rightarrow r = 5$$

Los radios miden 5 cm y 15 cm.

46. **En el triángulo rectángulo *ABC*, hemos trazado la altura sobre la hipotenusa *BH*.**



Halla el área del triángulo en el que conocemos $\overline{AB}$ = 15 cm y $\overline{HC}$ = 16 cm.



$$\left.\begin{array}{l} h^2 + x^2 = 15^2 \\ h^2 = 16 \cdot x \end{array}\right\} \; 16x + x^2 = 225 \;\rightarrow\; x^2 + 16x - 225 = 0 \;\rightarrow$$

$$\rightarrow\; x = \frac{-16 \pm 34}{2} = \begin{cases} -25.\ \text{No vale} \\ 9 \end{cases}$$

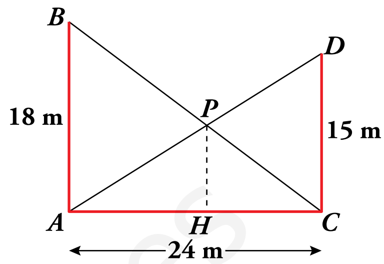
$h^2 = 16 \cdot 9 \;\rightarrow\; h = 12$ cm

$\text{Área} = \dfrac{25 \cdot 12}{2} = 150 \text{ cm}^2$

Página 139

Problemas "+"

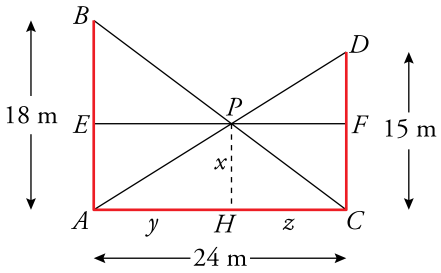
47. **AB y CD son dos edificios de 18 m y 15 m, respectivamente, y que distan entre sí 24 m. Desde el punto de corte, P, de las rectas AD y CB, se traza una perpendicular a AC. H es el pie de esa perpendicular.**



a) Calcula $\overline{PH}$.

b) Demuestra que la longitud de PH depende de la altura de los edificios y no de su separación.

a)



Trazamos el segmento EF paralelo a AC y que pasa por P.

Los triángulos $\widehat{BEP}$ y $\widehat{PHC}$ son semejantes porque son rectángulos y $\widehat{BPE} = \widehat{PCH}$. Por una razón análoga también lo son $\widehat{DPF}$ y $\widehat{PAH}$.

Tenemos, por tanto:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{18-x}{x} = \dfrac{y}{z} \\[2ex] \dfrac{15-x}{x} = \dfrac{z}{y} \end{array}\right\} \to \frac{18-x}{x} = \frac{x}{15-x} \to (18-x)(15-x) = x^2 \to$$

$$\to 270 - 18x - 15x + x^2 = x^2 \to x = \frac{270}{33} = 8{,}18 \text{ m}$$

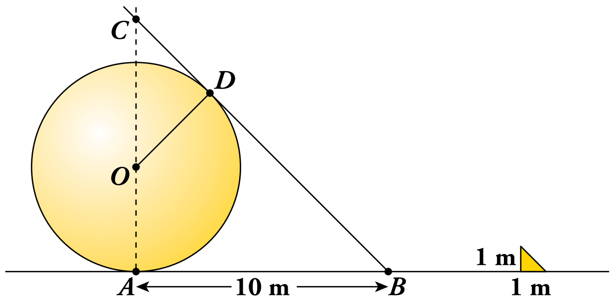
b) Hemos visto que la ecuación de la que hemos obtenido $\overline{PH}$ es:

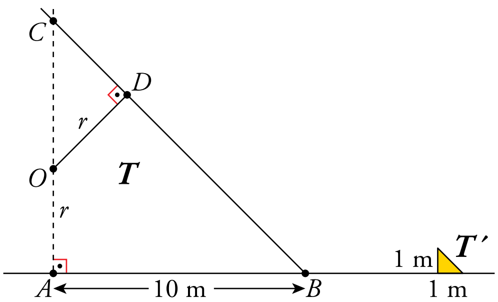
$$\frac{\mathrm{h} - x}{x} = \frac{x}{\mathrm{h}' - x}$$

donde h y h' son las alturas de los edificios.

Esta ecuación no depende de y ni de z, los parámetros de los que depende la separación de los edificios.

48. **Una esfera apoyada en el suelo proyecta una sombra que llega hasta 10 m del punto donde la esfera toca el suelo. En ese momento, un poste vertical de 1 m de alto produce una sombra de 1 m. Calcula el radio de la esfera.**





Los triángulos T y T' son semejantes.

$\overline{AC} = \overline{AB} = 10$ m

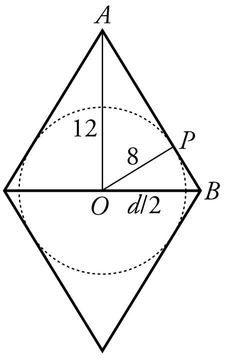
$\overline{CB} = \sqrt{10^2 + 10^2} = 10\sqrt{2}$ cm

Por la semejanza de OCD y ABC, tenemos:

$$\frac{\overline{OD}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OC}}{\overline{CB}} \rightarrow \frac{r}{10} = \frac{10 - r}{10\sqrt{2}} \rightarrow \sqrt{2}\,r = 10 - r \rightarrow$$

$$\rightarrow r\left(\sqrt{2} + 1\right) = 10 \rightarrow r = \frac{10}{1 + \sqrt{2}} = 10\left(\sqrt{2} - 1\right) \approx 4{,}14 \text{ cm}$$

49. **Una de las diagonales de un rombo mide 24 cm y el radio del círculo inscrito en dicho rombo es 8 cm. Calcula el perímetro y el área del rombo.**



En el triángulo rectángulo OAP:

$\overline{AP}^2 = 12^2 - 8^2 \rightarrow \overline{AP} = \sqrt{80} \approx 8{,}94$ cm

En el triángulo rectángulo OAB:

$8^2 = \overline{AP} \cdot \overline{PB} \rightarrow \overline{PB} = \dfrac{64}{8{,}94} \approx 7{,}16$ cm

Lado del rombo: 8,94 + 7,16 = 16,1 cm

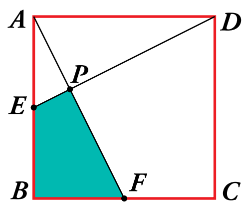
Perímetro del rombo: 4 · 16,1 = 64,4 cm

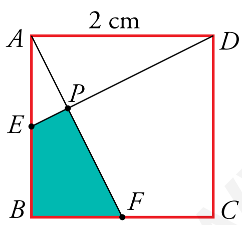
Diagonal: $\left(\dfrac{d}{2}\right)^2 = 16{,}1^2 - 12^2 \rightarrow \dfrac{d}{2} \approx 10{,}73 \rightarrow d \approx 21{,}46$ cm

Área: $\dfrac{24 \cdot 21{,}46}{2} = 257{,}52 \text{ cm}^2$

50. **En el cuadrado de la figura, *E* es el punto medio del lado *AB*, y *F*, el punto medio de *BC*.**

Si el lado del cuadrado mide 2 cm, ¿cuál es el área del cuadrilátero *EPFB*?





Calcularemos el área de $EPFB$ como el área del triángulo ABF menos el área del triángulo AEP.

$\overline{ED} = \overline{AF} = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$

Los triángulos ABF y AEP son semejantes porque:

$$\begin{cases} \hat{A} \text{ es común.} \\ \widehat{AEP} = \widehat{AFB} \text{ por la igualdad de los triángulos } ADE \text{ y } AFB. \end{cases}$$

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{AF}} = \frac{\overline{EP}}{\overline{BF}} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\overline{EP}}{1} \rightarrow \overline{EP} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{AF}} = \frac{\overline{AP}}{\overline{AB}} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\overline{AP}}{2} \rightarrow \overline{AP} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$A_{EPFB} = A_{ABF} - A_{APE} = \frac{2 \cdot 1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5} \text{ cm}^2$$

Reflexiona sobre la teoría

51. **¿Verdadero o falso? Justifica tu respuesta.**

a) Dos triángulos rectángulos que tienen la misma hipotenusa son semejantes.

b) Todos los pentágonos regulares son semejantes.

c) Si los lados de un triángulo son a, b, c; y los de otro, $a + 1$, $b + 1$, $c + 1$, no son semejantes.

d) Las pirámides cuadrangulares son todas semejantes entre sí.

e) Una escala 100:1 significa que 1 cm del dibujo corresponde a 1 m en la realidad.

a) Falso. Cualquier triángulo inscrito en una circunferencia y que abarque un ángulo llano es rectángulo, pero no todos son semejantes.

b) Verdadero. Todos los polinomios regulares con el mismo número de lados tienen sus ángulos iguales y los lados proporcionales.

c) Falso. Por ejemplo, si el triángulo es equilátero $(a = b = c)$, entonces $a + 1 = b + 1 = c + 1$ y los triángulos son semejantes.

d) Falso. Las bases serán semejantes pero para que lo sean las pirámides, debería coincidir el cociente entre el lado de la base y la altura, cosa que no necesariamente ocurre.

e) Falso. Una escala 100:1 es de ampliación, es decir, a 1 cm de la realidad le corresponde 1 m del dibujo.

52. **Justifica en qué casos podemos asegurar que los triángulos ABC y $A'B'C'$ son semejantes:**

a) $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \dfrac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}}$, $\hat{C} = \hat{C}'$

b) $\dfrac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} = \dfrac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}}$, $\hat{A} = \hat{A}'$

c) $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} \neq \dfrac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}}$, $\hat{B} = \hat{B}'$

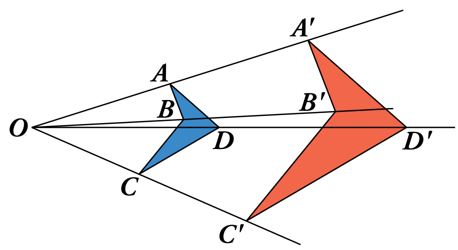
d) $\hat{A} = \hat{A}'$, $\hat{B} = \hat{B}'$

En b), porque tienen dos lados proporcionales e igual el ángulo que forman.

En d), porque tienen los tres ángulos iguales.

53. **Se llama homotecia de centro O y razón k a una transformación que hace corresponder a cada punto P otro P' tal que O, P y P' están alineados y $\overline{OP'} : \overline{OP} = k$.**

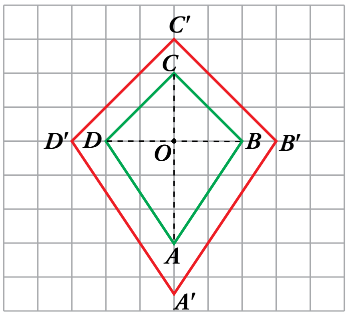
Justifica si las figuras azul y roja son homotéticas y en caso afirmativo di cuál es el centro y la razón.



Sí se trata de una homotecia de centro O y $k = 2$, puesto que:

- O, A, A' están alineados.
- O, B, B' están alineados.
- O, C, C' están alineados.
- O, D, D' están alineados.
- $\dfrac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} = \dfrac{\overline{OB'}}{\overline{OB}} = \dfrac{\overline{OC'}}{\overline{OC}} = \dfrac{\overline{OD'}}{\overline{OD}} = 2$

54. **Hemos aplicado una homotecia al cuadrilátero *ABCD* para obtener el cuadrilátero *A'B'C'D'*.**



a) ¿Cuál es el centro y cuál es la razón?

b) Justifica que *ABCD* y *A'B'C'D'* son semejantes.

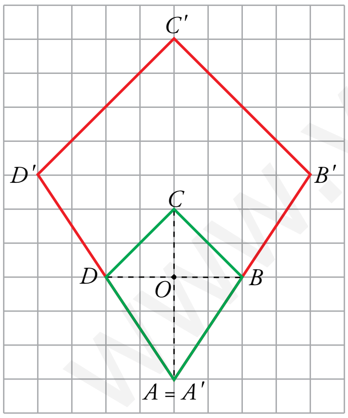
c) Aplica a *ABCD* una homotecia de centro *A* y razón 2.

a) El centro de la homotecia es O y la razón es $k = \frac{3}{2}$, puesto que:

- O, A, A' están alineados.
- O, B, B' están alineados.
- O, C, C' están alineados.
- O, D, D' están alineados.
- $\frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{OB'}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{OC'}}{\overline{OC}} = \frac{\overline{OD'}}{\overline{OD}} = \frac{3}{2}$

b) Las figuras son semejantes puesto que todos sus lados son proporcionales, según se ha visto en el apartado a). Además, los ángulos son iguales.

c)



Página 140

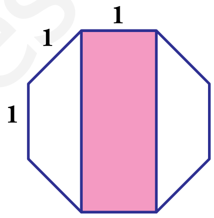
Aprende y reflexiona

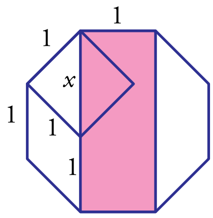
El número de plata y el triángulo cordobés

- **Compruébalo:** $\dfrac{\sqrt{2}+1}{1} \overset{?}{=} \dfrac{1}{\sqrt{2}-1}$

  Visto en el ejercicio 2b de la página 133.

- **Demuestra que el rectángulo coloreado sobre el octógono regular de la derecha es de plata.**





x es la diagonal de un cuadrado de radio 1.

Su medida es $\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$.

Los lados del rectángulo miden, por tanto, 1 y $1+\sqrt{2}$.

La relación entre ellos es $\dfrac{1+\sqrt{2}}{1}=1+\sqrt{2}$, número de plata.

- **Prueba que la relación entre los lados del triángulo cordobés (radio y lado del octógono regular) es:**

$$\frac{r}{1}=\sqrt{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2-\sqrt{2}}}=1{,}306562964 \text{ (número cordobés)}$$

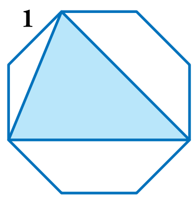
El radio del octógono es la mitad de la diagonal del rectángulo anterior:

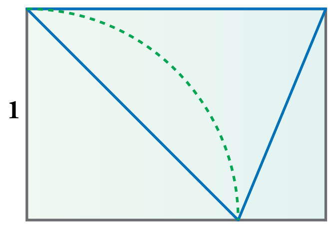
$$d=\sqrt{\left(1+\sqrt{2}\right)^2+1^2}=\sqrt{1+2+2\sqrt{2}+1}=\sqrt{4+2\sqrt{2}}$$

$$r=\frac{d}{2}=\sqrt{\frac{4+2\sqrt{2}}{4}}=\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2}}=\sqrt{\frac{\left(2+\sqrt{2}\right)\left(2-\sqrt{2}\right)}{2\left(2-\sqrt{2}\right)}}=\sqrt{\frac{4-2}{2\left(2-\sqrt{2}\right)}}=\sqrt{\frac{1}{2-\sqrt{2}}}=1{,}306562964$$

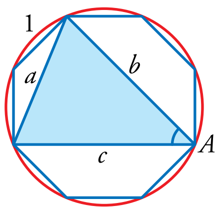
- **Demostrar que estos dos triángulos son cordobeses es fácil (45° e isósceles). Otra cosa es obtener sus dimensiones a partir del lado 1 en cada figura y probar que su cociente es el número cordobés.**

  Intenta hacer ambas cosas en cada una de las dos figuras.





- Triángulo construido en el octógono:



Por construcción, $b=c$ y $a \neq b$.

El triángulo es isósceles.

El ángulo $\hat{A}$ es un ángulo inscrito en la circunferencia y abarca un ángulo de $\dfrac{2}{8}$ de 360° = 90°.

Por tanto, $\hat{A}=45°$.

El triángulo es, por tanto, cordobés.

Calculamos ahora la medida de los lados del triángulo. En el ejercicio anterior vimos que el radio del octógono es $r = \sqrt{\dfrac{1}{2-\sqrt{2}}}$.

El lado a es la hipotenusa de un triángulo rectángulo con dos catetos de medida r. Por tanto:

$$a = \sqrt{\frac{1}{2-\sqrt{2}} + \frac{1}{2-\sqrt{2}}} = \sqrt{\frac{2}{2-\sqrt{2}}} = \sqrt{\frac{2\left(2+\sqrt{2}\right)}{4-2}} = \sqrt{2+\sqrt{2}}$$

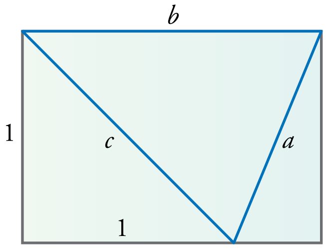
El lado b, según vimos, es $b = 1 + \sqrt{2}$.

Veamos que el cociente $\dfrac{b}{a}$ es el número de plata:

$$\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} = \frac{1}{\sqrt{\dfrac{2+\sqrt{2}}{\left(1+\sqrt{2}\right)^2}}} = \frac{1}{\sqrt{\dfrac{2+\sqrt{2}}{1+2+2\sqrt{2}}}} = \frac{1}{\sqrt{\dfrac{2+\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}}}} = \frac{1}{\sqrt{\dfrac{\left(2+\sqrt{2}\right)\left(3-2\sqrt{2}\right)}{9-8}}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{6-4\sqrt{2}+3\sqrt{2}-4}} = \frac{1}{\sqrt{2-\sqrt{2}}}, \text{ el número cordobés}$$

- Triángulo construido en una hoja A-4:



Los lados de una hoja A-4 están en la relación $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Es decir, $b = \sqrt{2}$.

Calculamos el lado c aplicando el teorema de Pitágoras: $c = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$.

Como $b = c \neq a$, el triángulo es isósceles.

El lado c es la diagonal de un cuadrado, luego el ángulo menor del triángulo es de 45°.

El triángulo construido es cordobés.

Nos falta calcular la medida del lado a, que es la hipotenusa de un triángulo rectángulo de catetos 1 y $\sqrt{2} - 1$:

$$a = \sqrt{1^2 + \left(\sqrt{2}-1\right)^2} = \sqrt{1+2+1-2\sqrt{2}} = \sqrt{4-2\sqrt{2}} = \sqrt{2\left(2-\sqrt{2}\right)}$$

Comprobamos que la relación entre los lados es el número cordobés:

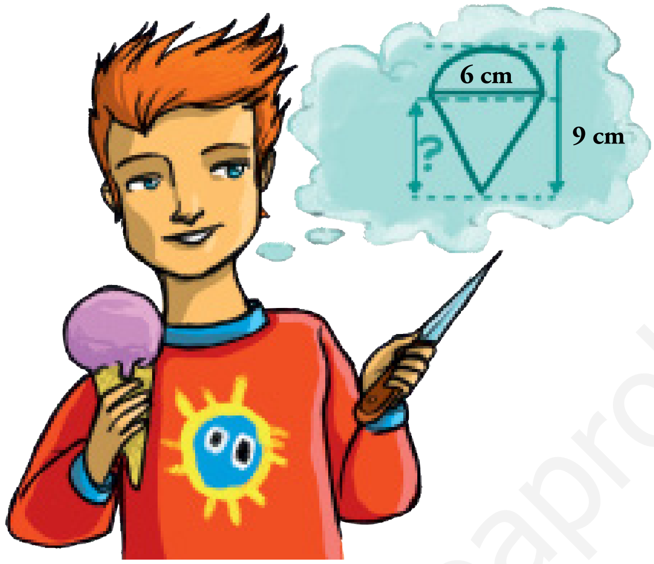
$$\frac{b}{a} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2\left(2-\sqrt{2}\right)}} = \frac{1}{\sqrt{2-\sqrt{2}}}$$

Página 141

Entrénate resolviendo problemas

- **Roberto y Carmina van a compartir un helado.**

  ¿A qué altura deben cortar el cucurucho para que las dos mitades sean iguales?



Hallamos primero el volumen del cucurucho entero:

Volumen de la media esfera:

$$V_1 = \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 3^3\right] = \frac{36\pi}{2} = 18\pi \text{ cm}^3$$

Volumen del cono: $V_2 = \frac{1}{3} \cdot [\pi \cdot 3^2 \cdot 6] = 18\pi \text{ cm}^3$

Luego, simplemente, habría que cortar a 6 cm de altura; es decir, el cono (cucurucho) para uno y la media esfera para el otro.

- **Para preparar una empanada de 15 pulgadas de diámetro y 1 pulgada de grosor, se necesitan 18 onzas de masa. ¿Cuántas onzas de masa se necesitarán para una empanada de pulgada y media de grosor y 25 pulgadas de diámetro?**

El volumen de la primera empanada es, en pulgadas cúbicas, $\pi \cdot \left(\frac{15}{2}\right)^2 \cdot 1$, y para prepararla se necesitan 18 onzas.

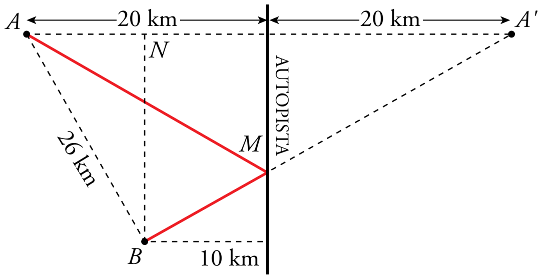
Para la segunda empanada se necesitarán este número de onzas:

$$18 \cdot \left(\frac{25}{15}\right)^2 \cdot \frac{1,5}{1} = 18 \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^2 \cdot \frac{3}{2} = \frac{18 \cdot 25 \cdot 3}{3^2 \cdot 2} = 75 \text{ onzas}$$

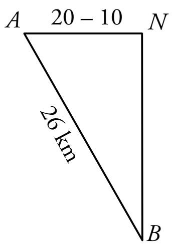
- **Dos localidades A y B se encuentran al mismo lado de una autopista recta, de la cual distan 20 km y 10 km, respectivamente.**

  Se desea construir una carretera lo más corta posible, que una ambas localidades en un punto de la autopista. Sabiendo que la distancia entre A y B es de 26 km, halla la longitud de la carretera.

  El dibujo nos ayuda a relacionar los datos con lo que se nos pregunta.



Observamos que el recorrido AMB tiene la misma longitud que $A'MB$. Y que este recorrido es mínimo cuando el punto M está alineado con A' y B. Por tanto:



$$\overline{BN} = \sqrt{\overline{AB}^2 - \overline{AN}^2} = \sqrt{676 - 100} = 24 \text{ km}$$

La longitud de la carretera es:

$$\overline{AM} + \overline{MB} = \overline{BA'} = \sqrt{\overline{BN}^2 + \overline{NA'}^2} = \sqrt{24^2 + (10 + 20)^2} = 38{,}42 \text{ km}$$

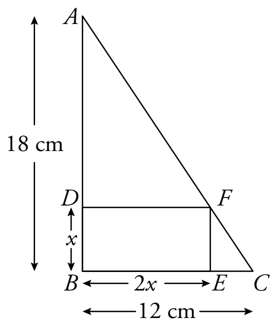
Autoevaluación

1. Queremos hacer una maqueta de un jardín rectangular a escala 1:400. Su perímetro es de 850 m, y su área, de 37 500 m². ¿Cuáles serán estas medidas en la maqueta?

$$\text{Perímetro} = \frac{850}{400} = 2{,}125 \text{ m} = 212{,}5 \text{ cm}$$

$$\text{Área} = \frac{37\,500}{400^2} = 0{,}234375 \text{ m}^2 = 2\,343{,}75 \text{ cm}^2$$

2. En un triángulo rectángulo, se inscribe un rectángulo de lados paralelos a los catetos en el que la base mide el doble que la altura. Si los catetos miden 12 cm y 18 cm, ¿cuáles son las dimensiones del rectángulo?



Los triángulos $\widehat{ABC}$ y $\widehat{FEC}$ son semejantes, por lo que podemos afirmar:

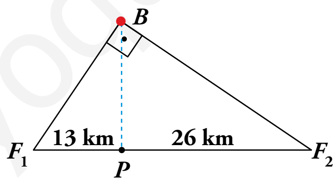
$$\frac{18}{x} = \frac{12}{12-2x} \to 18(12-2x) = 12x \to$$

$$\to 216 - 36x = 12x \to 216 = 48x \to x = 4{,}5 \text{ cm}$$

La altura es de 4,5 cm y la base, 9 cm.

3. Un barco B que navega hacia puerto se sitúa en un punto tal que su posición forma un ángulo recto con los faros F_1 y F_2. Desde ese punto, la línea que lo une al puerto P es perpendicular a la costa.

Sabemos que $\overline{PF_1} = 13$ km y que $\overline{PF_2} = 26$ km.



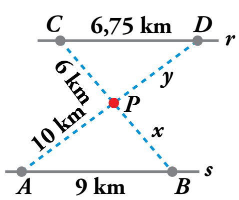
Calcula la distancia del barco al puerto y a cada uno de los faros.

- Para calcular $\overline{BP}$, aplicamos el teorema de la altura:

  $\overline{BP}^2 = 13 \cdot 26 \to \overline{BP} = 18{,}38$ km

- $\overline{BF}_1^2 = 13 \cdot 26 + 13^2 \to \overline{BF}_1 = 22{,}52$ km
- $\overline{BF}_2^2 = 13 \cdot 26 + 26^2 \to \overline{BF}_2 = 31{,}84$ km

4. Un centro comercial P está situado entre dos vías paralelas r y s. Se quiere unir, mediante carreteras, con las poblaciones A, B, C y D. Con los datos de la figura, calcula x e y.

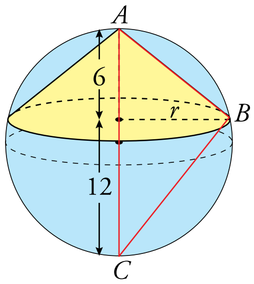


Los triángulos CDP y APB son semejantes.

$$\frac{6}{x} = \frac{6{,}75}{9} \to x = 8 \text{ km}$$

$$\frac{y}{10} = \frac{6{,}75}{9} \to y = 7{,}5 \text{ km}$$

5. En una esfera de diámetro 18 cm, se inscribe un cono cuya altura es 6 cm. ¿Cuánto medirá el radio de la base del cono?



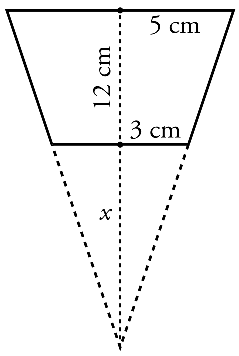
El triángulo $\widehat{ABC}$ es rectángulo en $\hat{B}$.

El radio del cono, r, es la altura sobre la hipotenusa de $\widehat{ABC}$.

Utilizando el teorema de la altura:

$r^2 = 6 \cdot 12 \rightarrow r = \sqrt{72} \approx 8{,}49$ cm

6. Tenemos un vaso con forma de tronco de cono en el que los diámetros de las bases miden 10 cm y 6 cm y su altura es de 12 cm. Si lo llenamos, ¿cabe más de medio litro de agua, o menos?



$$\frac{12 + x}{x} = \frac{5}{3} \rightarrow 5x = 36 + 3x \rightarrow 2x = 36 \rightarrow x = 18$$

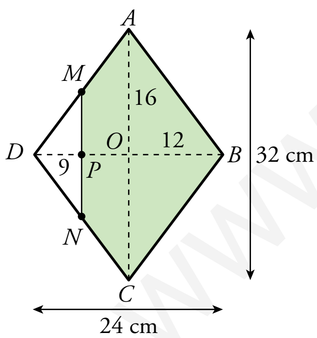
$$V_{\text{CONO GRANDE}} = \frac{1}{3}\pi \cdot 5^2 \cdot (12 + 18) = 250\pi \text{ cm}^3$$

$$V_{\text{CONO PEQUEÑO}} = \frac{1}{3}\pi \cdot 3^2 \cdot 18 = 54\pi \text{ cm}^3$$

$$V_{\text{VASO}} = 250\pi - 54\pi = 196\pi \approx 615{,}75 \text{ cm}^3$$

En el vaso cabe más de medio litro de agua.

7. Las diagonales de un rombo miden $\overline{AC} = 32$ cm y $\overline{BD} = 24$ cm. Por un punto P de la diagonal menor, tal que $\overline{PD} = 9$ cm, se traza una paralela a la diagonal AC, que corta en M y N a los lados AD y CD. Calcula el área y el perímetro del pentágono $MABCN$.



Los triángulos AOD y MPD son semejantes. Por ello:

$$\frac{16}{12} = \frac{\overline{MP}}{9} \rightarrow \overline{MP} = \frac{16 \cdot 9}{12} = 12 \text{ cm}$$

$$\overline{AD} = \sqrt{16^2 + 12^2} = 20 \text{ cm}$$

$$\overline{MD} = \sqrt{12^2 + 9^2} = 15 \text{ cm} \rightarrow \overline{MA} = 20 - 15 = 5 \text{ cm}$$

Perímetro $MABCN = 2\left(\overline{MA} + \overline{AB} + \overline{MP}\right) = 2(5 + 20 + 12) = 74$ cm

Área pentágono = Área rombo – Área triángulo MND =

$$= \frac{32 \cdot 24}{2} - \frac{9 \cdot 12}{2} \cdot 2 = 384 - 108 = 276 \text{ cm}^2$$

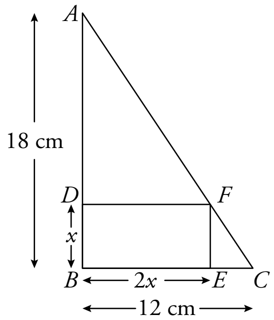
Autoevaluación

1. **Queremos hacer una maqueta de un jardín rectangular a escala 1:400. Su perímetro es de 850 m, y su área, de 37 500 m². ¿Cuáles serán estas medidas en la maqueta?**

$$\text{Perímetro} = \frac{850}{400} = 2{,}125 \text{ m} = 212{,}5 \text{ cm}$$

$$\text{Área} = \frac{37\,500}{400^2} = 0{,}234375 \text{ m}^2 = 2\,343{,}75 \text{ cm}^2$$

2. **En un triángulo rectángulo, se inscribe un rectángulo de lados paralelos a los catetos en el que la base mide el doble que la altura. Si los catetos miden 12 cm y 18 cm, ¿cuáles son las dimensiones del rectángulo?**



Los triángulos $\widehat{ABC}$ y $\widehat{FEC}$ son semejantes, por lo que podemos afirmar:

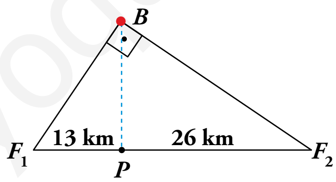
$$\frac{18}{x} = \frac{12}{12 - 2x} \to 18(12 - 2x) = 12x \to$$

$$\to 216 - 36x = 12x \to 216 = 48x \to x = 4{,}5 \text{ cm}$$

La altura es de 4,5 cm y la base, 9 cm.

3. **Un barco B que navega hacia puerto se sitúa en un punto tal que su posición forma un ángulo recto con los faros F_1 y F_2. Desde ese punto, la línea que lo une al puerto P es perpendicular a la costa.**

Sabemos que $\overline{PF_1} = 13$ km y que $\overline{PF_2} = 26$ km.



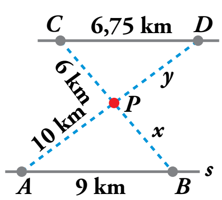
Calcula la distancia del barco al puerto y a cada uno de los faros.

- Para calcular $\overline{BP}$, aplicamos el teorema de la altura:

  $\overline{BP}^2 = 13 \cdot 26 \to \overline{BP} = 18{,}38$ km

- $\overline{BF}_1^{\,2} = 13 \cdot 26 + 13^2 \to \overline{BF}_1 = 22{,}52$ km
- $\overline{BF}_2^{\,2} = 13 \cdot 26 + 26^2 \to \overline{BF}_2 = 31{,}84$ km

4. **Un centro comercial P está situado entre dos vías paralelas r y s. Se quiere unir, mediante carreteras, con las poblaciones A, B, C y D. Con los datos de la figura, calcula x e y.**

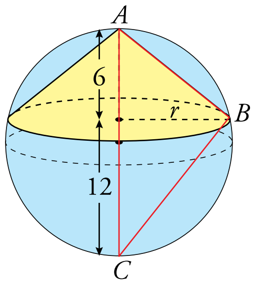


Los triángulos CDP y APB son semejantes.

$$\frac{6}{x} = \frac{6{,}75}{9} \to x = 8 \text{ km}$$

$$\frac{y}{10} = \frac{6{,}75}{9} \to y = 7{,}5 \text{ km}$$

5. En una esfera de diámetro 18 cm, se inscribe un cono cuya altura es 6 cm. ¿Cuánto medirá el radio de la base del cono?



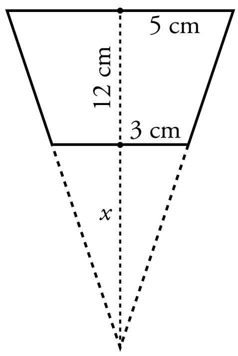
El triángulo $\widehat{ABC}$ es rectángulo en $\hat{B}$.

El radio del cono, r, es la altura sobre la hipotenusa de $\widehat{ABC}$.

Utilizando el teorema de la altura:

$r^2 = 6 \cdot 12 \rightarrow r = \sqrt{72} \approx 8{,}49$ cm

6. Tenemos un vaso con forma de tronco de cono en el que los diámetros de las bases miden 10 cm y 6 cm y su altura es de 12 cm. Si lo llenamos, ¿cabe más de medio litro de agua, o menos?



$$\frac{12 + x}{x} = \frac{5}{3} \rightarrow 5x = 36 + 3x \rightarrow 2x = 36 \rightarrow x = 18$$

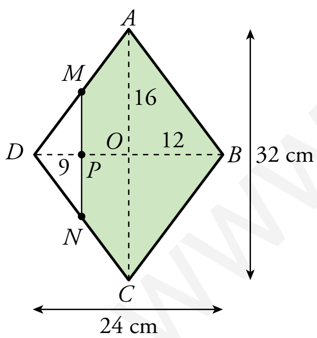
$$V_{\text{CONO GRANDE}} = \frac{1}{3}\pi \cdot 5^2 \cdot (12 + 18) = 250\pi \text{ cm}^3$$

$$V_{\text{CONO PEQUEÑO}} = \frac{1}{3}\pi \cdot 3^2 \cdot 18 = 54\pi \text{ cm}^3$$

$$V_{\text{VASO}} = 250\pi - 54\pi = 196\pi \approx 615{,}75 \text{ cm}^3$$

En el vaso cabe más de medio litro de agua.

7. Las diagonales de un rombo miden $\overline{AC} = 32$ cm y $\overline{BD} = 24$ cm. Por un punto P de la diagonal menor, tal que $\overline{PD} = 9$ cm, se traza una paralela a la diagonal AC, que corta en M y N a los lados AD y CD. Calcula el área y el perímetro del pentágono $MABCN$.



Los triángulos AOD y MPD son semejantes. Por ello:

$$\frac{16}{12} = \frac{\overline{MP}}{9} \rightarrow \overline{MP} = \frac{16 \cdot 9}{12} = 12 \text{ cm}$$

$$\overline{AD} = \sqrt{16^2 + 12^2} = 20 \text{ cm}$$

$$\overline{MD} = \sqrt{12^2 + 9^2} = 15 \text{ cm} \rightarrow \overline{MA} = 20 - 15 = 5 \text{ cm}$$

Perímetro $MABCN = 2\left(\overline{MA} + \overline{AB} + \overline{MP}\right) = 2(5 + 20 + 12) = 74$ cm

Área pentágono = Área rombo – Área triángulo MND =

$$= \frac{32 \cdot 24}{2} - \frac{9 \cdot 12}{2} \cdot 2 = 384 - 108 = 276 \text{ cm}^2$$

Página 143

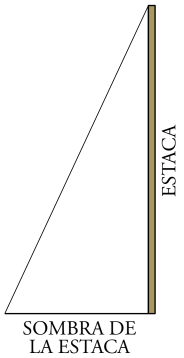
Resuelve

1. **a) Razona que la estaca y su sombra forman un triángulo rectángulo. ¿Ocurre lo mismo con cada árbol y su sombra?**

b) ¿Por qué se han de dar prisa en señalar los extremos de las sombras? Razona que todos los triángulos formados por un árbol, o la estaca, y sus correspondientes sombras en cada instante son semejantes.

c) Sabiendo que hay un chopo cuya sombra midió 3,92 m, halla su altura.

a)



La estaca es vertical y el suelo es horizontal. La sombra se proyecta sobre el suelo. Por tanto, la estaca y su sombra son los catetos de un triángulo rectángulo.

Lo mismo ocurre con cada árbol y su sombra. (Los árboles hay que idealizarlos para considerarlos como segmentos verticales).

b) Hay que señalar las sombras muy deprisa para que no les afecte el movimiento del Sol. Los triángulos formados por una estaca y su sombra y por un árbol y su sombra siempre serán semejantes porque siempre serán rectángulos y compartirán un ángulo agudo (el que corresponde a la inclinación de los rayos del Sol).

c) $\begin{cases} \text{Longitud estaca} = 163 \text{ cm} \\ \text{Sombra de la estaca} = 76 \text{ cm} \end{cases}$ $\begin{cases} \text{Altura del chopo} = x \\ \text{Sombra del chopo} = 3{,}92 \text{ m} = 392 \text{ cm} \end{cases}$

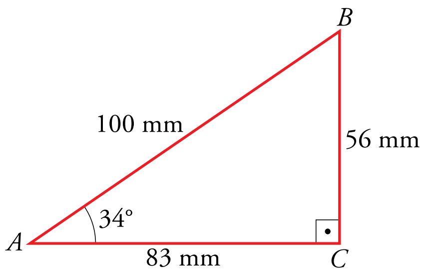
$$\frac{x}{392} = \frac{163}{76} \rightarrow x = 392 \cdot \frac{163}{76} \rightarrow x = 840{,}7 \text{ cm} = 8{,}407 \text{ m}$$

1 Razones trigonométricas de un ángulo agudo

Página 144

1. **Dibuja sobre un ángulo como el anterior, 34°, un triángulo rectángulo de tal modo que $\overline{AB}$ = 100 mm.**

Halla sus razones trigonométricas y observa que obtienes, aproximadamente, los mismos valores que en el ejemplo de arriba.



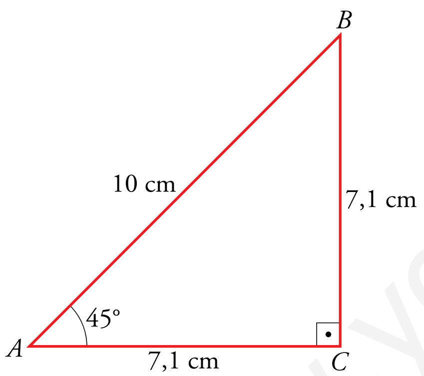
$$sen\ 34° = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{56}{100} = 0{,}56$$

$$cos\ 34° = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{83}{100} = 0{,}83$$

$$tg\ 34° = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{56}{83} = 0{,}67$$

2. **Dibuja, sobre un ángulo de 45°, un triángulo rectángulo cuya hipotenusa mida 10 cm.**

Calcula, como en el ejemplo de arriba, las razones trigonométricas de 45°. ¿Cómo son entre sí el seno y el coseno? ¿Cuánto vale la tangente? Explica por qué.



$$sen\ 45° = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{7{,}1}{10} = 0{,}71$$

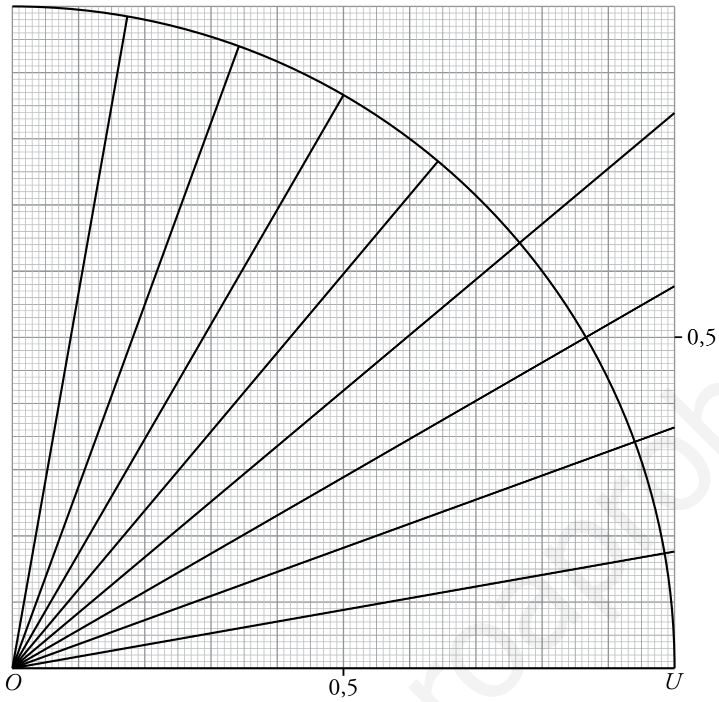
$$cos\ 45° = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{7{,}1}{10} = 0{,}71$$

$$tg\ 45° = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{7{,}1}{7{,}1} = 1$$

El triángulo además de rectángulo es isósceles y, por tanto, los dos catetos tienen la misma longitud, de ahí que el seno y el coseno de 45° sean iguales y la tangente valga 1.

Página 145

3. Utilizando una plantilla de papel milimetrado como la de arriba y un transportador de ángulos, calcula el seno y el coseno de 10°, 20°, 30°, 40°, 50°, 60°, 70° y 80°, y la tangente de aquellos que puedas.



sen 10° = 0,18, *cos* 10° = 0,98, *tg* 10° = 0,18

sen 20° = 0,34, *cos* 20° = 0,94, *tg* 20° = 0,37

sen 30° = 0,5, *cos* 30° = 0,86, *tg* 30° = 0,58

sen 40° = 0,64, *cos* 40° = 0,76, *tg* 40° = 0,84

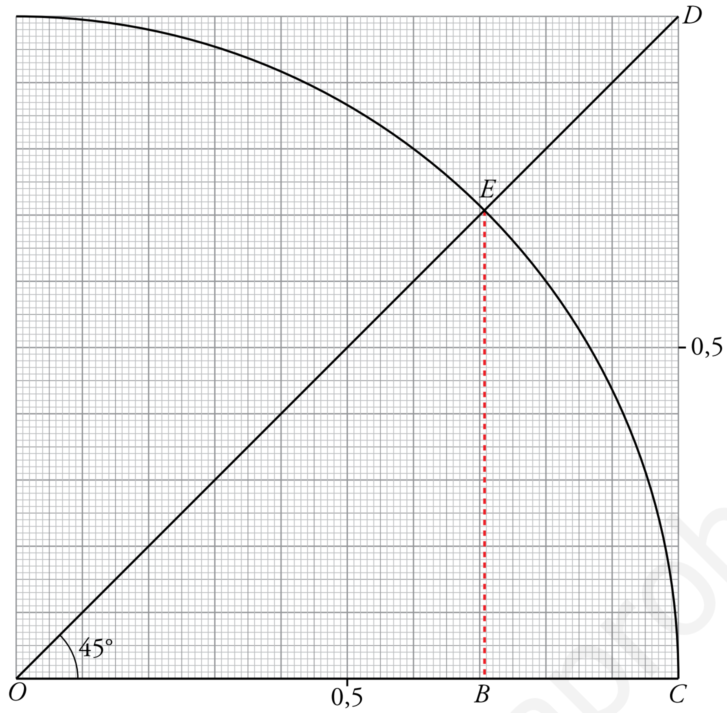
sen 50° = 0,76, *cos* 50° = 0,64

sen 60° = 0,86, *cos* 60° = 0,5

sen 70° = 0,94, *cos* 70° = 0,34

sen 80° = 0,98, *cos* 80° = 0,18

4. Calcula las razones trigonométricas, seno, coseno y tangente, de 45° y comprueba que coinciden (excepto decimales) con lo que calculaste en el ejercicio 2 de la página anterior.



$$sen\ 45° = \frac{\overline{EB}}{1} \rightarrow sen\ 45° = \overline{EB} \rightarrow sen\ 45° = 0{,}71$$

$$cos\ 45° = \frac{\overline{OB}}{1} \rightarrow cos\ 45° = \overline{OB} \rightarrow cos\ 45° = 0{,}71$$

$$tg\ 45° = \frac{\overline{CD}}{\overline{OC}} = \frac{\overline{CD}}{1} = \overline{CD} \rightarrow tg\ 45° = 1$$

2 Relaciones trigonométricas fundamentales

Página 146

1. ***sen*** **α = 0,6. Calcula *cos* α y *tg* α.**

- $sen^2\ \alpha + cos^2\ \alpha = 1 \rightarrow 0{,}6^2 + cos^2\ \alpha = 1 \rightarrow cos^2\ \alpha = 1 - 0{,}6^2 \rightarrow$

$$\rightarrow cos^2\ \alpha = 0{,}64 \xrightarrow[\text{raíz positiva}]{\text{tomamos la}} cos\ \alpha = 0{,}8$$

- $tg\ \alpha = \dfrac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha} \rightarrow tg\ \alpha = \dfrac{0{,}6}{0{,}8} \rightarrow tg\ \alpha = 0{,}75$

Por tanto, $cos\ \alpha = 0{,}8$ y $tg\ \alpha = 0{,}75$.

2. ***tg*** **β = 0,53. Calcula *sen* β y *cos* β.**

- $\left.\begin{array}{l} \dfrac{sen\ \beta}{cos\ \beta} = 0{,}53 \\ sen^2\ \beta + cos^2\ \beta = 1 \end{array}\right\} \rightarrow sen\ \beta = 0{,}53\ cos\ \beta$

$(0{,}53 cos\ \beta)^2 + cos^2\ \beta = 1 \rightarrow 0{,}2809 cos^2\ \beta + cos^2\ \beta = 1 \rightarrow 1{,}2809 cos^2\ \beta = 1 \rightarrow$

$$\rightarrow cos^2\ \beta = \frac{1}{1{,}2809} \xrightarrow[\text{raíz positiva}]{\text{tomamos la}} cos\ \beta = 0{,}88$$

- $sen\ \beta = 0{,}53 cos\ \beta \rightarrow sen\ \beta = 0{,}47$

Por tanto, $sen\ \beta = 0{,}47$ y $cos\ \beta = 0{,}88$.

Página 147

3. Teniendo en cuenta que *tg* 45° = 1, deduce el valor de *sen* 45° y de *cos* 45° mediante las relaciones fundamentales.

$\frac{sen\ 45°}{cos\ 45°} = 1;\ sen\ 45° = cos\ 45°$

$(sen\ 45°)^2 + (cos\ 45°)^2 = 1$

$(cos\ 45°)^2 + (cos\ 45°)^2 = 1 \rightarrow cos\ 45° = \pm\sqrt{\frac{1}{2}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

Solo tomamos el resultado positivo: $cos\ 45° = \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow sen\ 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$

4. Teniendo en cuenta que *sen* 30° = 1/2, halla el valor de *cos* 30° y de *tg* 30° mediante las relaciones fundamentales.

$sen\ 30° = \frac{1}{2}$

$(sen\ 30°)^2 + (cos\ 30°)^2 = 1 \rightarrow \frac{1}{4} + (cos\ 30°)^2 = 1 \rightarrow cos\ 30° = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

Tomamos el resultado positivo: $cos\ 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$tg\ 30° = \frac{1/2}{\sqrt{3}/2} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

5. Calcula el seno y la tangente de un ángulo cuyo coseno vale 0,8.

$cos\ \alpha = 0{,}8$

$(sen\ \alpha)^2 + (cos\ \alpha)^2 = 1 \rightarrow (0{,}8)^2 + (sen\ \alpha)^2 = 1 \rightarrow sen\ \alpha = \pm 0{,}6$

Tomamos solo el valor positivo: $sen\ \alpha = 0{,}6$

$tg\ \alpha = \frac{0{,}6}{0{,}8} = 0{,}75$

6. Halla el seno y el coseno de un ángulo cuya tangente vale 0,7.

$tg\ \alpha = \frac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha} = 0{,}7;\ sen\ \alpha = 0{,}7 \cdot cos\ \alpha$

$(sen\ \alpha)^2 + (cos\ \alpha)^2 = 1$

$(0{,}7 cos\ \alpha)^2 + (cos\ \alpha)^2 = 1 \rightarrow 1{,}49(cos\ \alpha)^2 = 1 \rightarrow cos\ \alpha = \pm 0{,}82$

Solo tomamos el valor positivo: $cos\ \alpha = 0{,}82$

$sen\ \alpha = 0{,}7 \cdot 0{,}82 \rightarrow sen\ \alpha = 0{,}57$

7. **Copia en tu cuaderno y completa la siguiente tabla de razones trigonométricas:**

sen α	**0,94**		**4/5**			
cos α		**0,82**			**$\sqrt{3}/2$**	
tg α				**3,5**		**1**

En las operaciones donde aparezcan fracciones o radicales, trabaja con ellos; no utilices su expresión decimal.

En todos los casos, solo tomaremos los resultados positivos.

- $sen\ \alpha = 0{,}94$

  $(cos\ \alpha)^2 + (0{,}94)^2 = 1 \rightarrow cos\ \alpha = 0{,}34$

  $tg\ \alpha = \dfrac{0{,}94}{0{,}34} = 2{,}76$

- $sen\ \alpha = \dfrac{4}{5}$

  $\left(\dfrac{4}{5}\right)^2 + (cos\ \alpha)^2 = 1 \rightarrow cos\ \alpha = \dfrac{3}{5}$

  $tg\ \alpha = \dfrac{4/5}{3/5} = \dfrac{4}{3}$

- $cos\ \alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

  $(sen\ \alpha)^2 + \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 1 \rightarrow sen\ \alpha = \dfrac{1}{2}$

  $tg\ \alpha = \dfrac{1/2}{\sqrt{3}/2} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

- $cos\ \alpha = 0{,}82$

  $(sen\ \alpha)^2 + (0{,}82)^2 = 1 \rightarrow sen\ \alpha = 0{,}57$

  $tg\ \alpha = \dfrac{0{,}57}{0{,}82} = 0{,}69$

- $tg\ \alpha = 3{,}5 = \dfrac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha} \rightarrow sen\ \alpha = 3{,}5 \cdot cos\ \alpha$

  $(sen\ \alpha)^2 + (cos\ \alpha)^2 = 1$

  $(3{,}5 cos\ \alpha)^2 + (cos\ \alpha)^2 = 1 \rightarrow cos\ \alpha = 0{,}27$

  $sen\ \alpha = 3{,}5 \cdot 0{,}27 \rightarrow sen\ \alpha = 0{,}96$

- $tg\ \alpha = 1$

  $\dfrac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha} = 1;\ sen\ \alpha = cos\ \alpha$

  $(sen\ \alpha)^2 + (cos\ \alpha)^2 = 1$

  $(cos\ \alpha)^2 + (cos\ \alpha)^2 = 1 \rightarrow cos\ \alpha = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

  $sen\ \alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

sen α	0,94	0,57	4/5	0,96	1/2	$\sqrt{2}/2$
cos α	0,34	0,82	3/5	0,27	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$
tg α	2,76	0,69	4/3	3,5	$\sqrt{3}/3$	1

3 Utilización de la calculadora en trigonometría

Página 148

1. Obtén las siguientes razones trigonométricas y escribe en tu cuaderno los resultados redondeando a las milésimas.

a) ***sen*** **86°**

b) ***cos*** **59°**

c) ***tg*** **22°**

d) ***sen*** **15° 25' 43''**

e) ***cos*** **59° 27'**

f) ***tg*** **86° 52'**

g) ***sen*** **10° 30'' (atención, 10° 0' 30'')**

a) *sen* 86° = 0,998

b) *cos* 59° = 0,515

c) *tg* 22° = 0,404

d) *sen* (15° 25' 43") = 0,266

e) *cos* (59° 27') = 0,508

f) *tg* (86° 52') = 18,268

g) *sen* (10° 30") = 0,174

Página 149

2. Da el valor del ángulo α en forma sexagesimal, en cada caso:

a) $sen\ \alpha = 0,91$ **b)** $tg\ \alpha = 5,83$

c) $cos\ \alpha = 0,42$ **d)** $tg\ \alpha = 0,34$

e) $sen\ \alpha = 0,08$ **f)** $cos\ \alpha = 0,88$

a) $\alpha = 65° 30' 19''$ b) $\alpha = 80° 16' 1''$

c) $\alpha = 65° 9' 55''$ d) $\alpha = 18° 46' 41''$

e) $\alpha = 4° 35' 19''$ f) $\alpha = 28° 21' 27''$

3. a) Calcula $sen\ \alpha$ sabiendo que $cos\ \alpha = 0,91$.

b) Calcula $cos\ \alpha$ sabiendo que $tg\ \alpha = 6,41$.

c) Calcula $tg\ \alpha$ sabiendo que $cos\ \alpha = 0,06$.

d) Calcula $tg\ \alpha$ sabiendo que $cos\ \alpha = 0,96$.

e) Calcula $sen\ \alpha$ sabiendo que $tg\ \alpha = 0,1$.

a) $cos\ \alpha = 0,91 \rightarrow sen\ \alpha = 0,415$

b) $tg\ \alpha = 6,41 \rightarrow cos\ \alpha = 0,154$

c) $cos\ \alpha = 0,06 \rightarrow tg\ \alpha = 16,637$

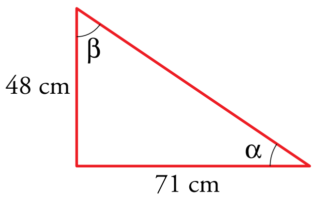
d) $cos\ \alpha = 0,96 \rightarrow tg\ \alpha = 0,292$

e) $tg\ \alpha = 0,1 \rightarrow sen\ \alpha = 0,0995$

4 Resolución de triángulos rectángulos

Página 150

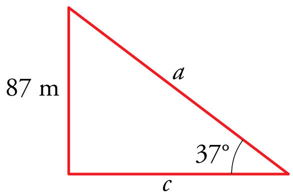
1. Los dos catetos de un triángulo rectángulo miden 48 cm y 71 cm. Halla los dos ángulos agudos.



$$tg\ \alpha = \frac{48}{71} = 0{,}676 \rightarrow \alpha = 34°\ 3'\ 39{,}27''$$

$$\beta = 90° - 34°\ 3'\ 39{,}27'' = 55°\ 86'\ 51{,}73''$$

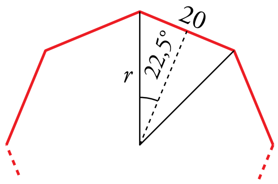
2. En un triángulo rectángulo, un ángulo agudo mide 37°, y el cateto opuesto, 87 m.
Halla el otro cateto y la hipotenusa.



$$sen\ 37° = \frac{87}{a} \rightarrow a = \frac{87}{sen\ 37°} = 144{,}56 \text{ m}$$

$$tg\ 37° = \frac{87}{c} \rightarrow c = \frac{87}{tg\ 37°} = 115{,}45 \text{ m}$$

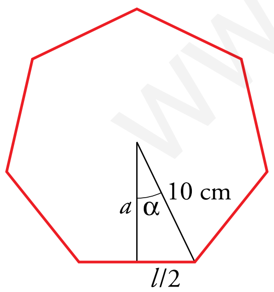
3. Calcula el radio de un octógono regular de 20 cm de lado. ¿Cuánto mide su apotema?



$$sen\ 22{,}5° = \frac{10}{r} \rightarrow r = \frac{10}{sen\ 22{,}5°} \approx 26{,}13 \text{ cm}$$

$$cos\ 22{,}5° = \frac{\text{apotema}}{r} \rightarrow \text{apotema} \approx 24{,}14 \text{ cm}$$

4. Halla la apotema de un heptágono regular de 10 cm de radio.
Calcula también la longitud del lado.



$$\alpha = 360° : 14 = 25°\ 42'\ 51''$$

$$cos\ (25°\ 42'\ 51'') = \frac{a}{10} \rightarrow a = 10 \cdot cos\ (25°\ 42'\ 51'') \rightarrow$$

$$\rightarrow a = 9 \text{ cm}$$

$$sen\ (25°\ 42'\ 51'') = \frac{l/2}{10} \rightarrow \frac{l}{2} = 10 \cdot sen\ (25°\ 42'\ 51'') \rightarrow$$

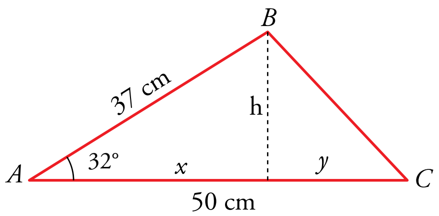
$$\rightarrow \frac{l}{2} = 4{,}34 \text{ cm} \rightarrow l = 8{,}68 \text{ cm}$$

Por tanto, el lado del heptágono mide 8,68 cm y su apotema 9 cm.

5 Resolución de triángulos oblicuángulos

Página 151

1. **En un triángulo *ABC*, halla $\overline{BC}$ conociendo $\overline{AB}$ = 37 cm, $\overline{AC}$ = 50 cm y $\hat{A}$ = 32°.**



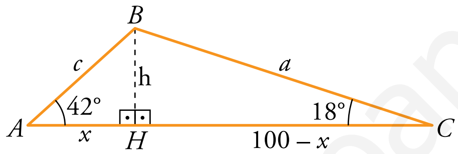
$$\cos 32° = \frac{x}{37} \rightarrow x = 31{,}38 \text{ cm}$$

$$\operatorname{sen} 32° = \frac{h}{37} \rightarrow h = 19{,}61 \text{ cm}$$

$$y = 50 - x = 50 - 31{,}38 = 18{,}62 \text{ cm}$$

$$\overline{BC} = \sqrt{h^2 + y^2} = 27{,}04 \text{ cm}$$

2. **Halla los lados $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ de un triángulo *ABC* en el que sabemos $\overline{AC}$ = 100 cm, $\hat{A}$ = 42° y $\hat{C}$ = 18°.**



- Trazamos la altura sobre AC y dividimos el triángulo $\overset{\frown}{ABC}$ en dos triángulos rectángulos $\overset{\frown}{ABH}$ y $\overset{\frown}{BHC}$.

$$\left.\begin{array}{l} \text{En } \overset{\frown}{ABH}: \ tg\, 42° = \dfrac{h}{x} \\[2ex] \text{En } \overset{\frown}{BHC}: \ tg\, 18° = \dfrac{h}{100 - x} \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} 0{,}900 = \dfrac{h}{x} \\[2ex] 0{,}325 = \dfrac{h}{100 - x} \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} h = 0{,}900x \\ h = 0{,}325\,(100 - x) \end{array}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow 0{,}900x = 0{,}325(100 - x) \rightarrow 0{,}900x = 32{,}5 - 0{,}325x \rightarrow$$

$$\rightarrow 1{,}225x = 32{,}5 \rightarrow x = \frac{32{,}5}{1{,}225} \rightarrow x = 26{,}5 \text{ cm} \rightarrow$$

$$\rightarrow h = 23{,}85 \text{ cm}$$

- Conociendo x y h podemos hallar los lados $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$.

$$\text{En } \overset{\frown}{ABH}: \ \cos 42° = \frac{26{,}5}{c} \rightarrow c = \frac{26{,}5}{\cos 42°} \rightarrow c = 35{,}7 \text{ cm}$$

$$\text{En } \overset{\frown}{BHC}: \ \cos 18° = \frac{100 - 26{,}5}{a} \rightarrow a = \frac{73{,}5}{\cos 18°} \rightarrow a = 77{,}3 \text{ cm}$$

Por tanto, $\overline{AB} = c = 35{,}7$ cm y $\overline{BC} = a = 77{,}3$ cm.

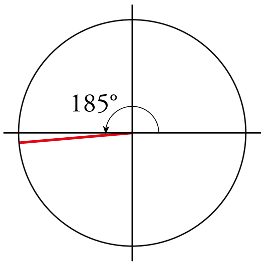
6 Razones trigonométricas de 0° a 360°

Página 153

1. Indica el signo de cada una de estas razones trigonométricas, situando aproximadamente los ángulos en la circunferencia goniométrica:

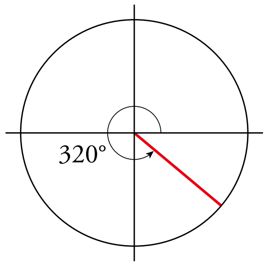
a) ***sen*** **185°**	**b)** ***cos*** **320°**	**c)** ***tg*** **100°**
d) ***cos*** **350°**	**e)** ***cos*** **120°**	**f)** ***tg*** **95°**
g) ***cos*** **275°**	**h)** ***sen*** **85°**	**i)** ***tg*** **265°**

a)



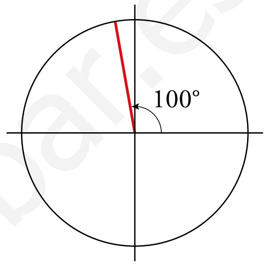
sen 185° < 0

b)



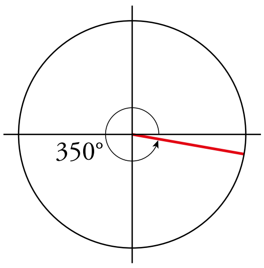
cos 320° > 0

c)



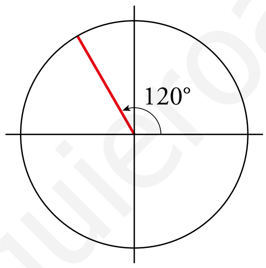
tg 100° < 0

d)



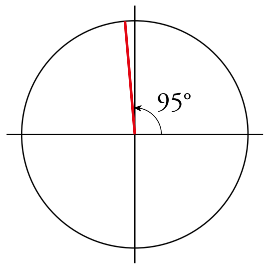
cos 350° > 0

e)



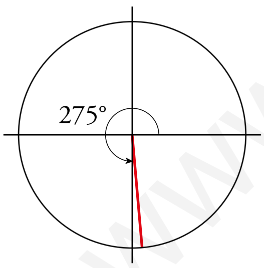
cos 120° < 0

f)



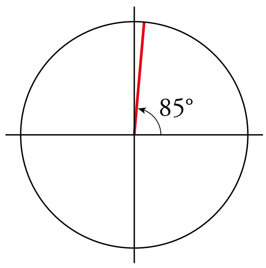
tg 95° < 0

g)



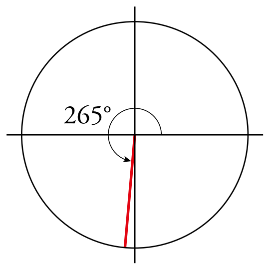
cos 275° > 0

h)



sen 85° > 0

i)



tg 265° > 0

2. Indica en qué cuadrante se encuentra cada uno de los ángulos α, β, γ y ϕ:

a) ***sen*** $\alpha < 0$ **y** ***tg*** $\alpha > 0$	**b)** ***cos*** $\beta > 0$ **y** ***tg*** $\beta < 0$
c) ***sen*** $\gamma < 0$ **y** ***cos*** $\gamma < 0$	**d)** ***cos*** $\phi > 0$ **y** ***sen*** $\phi < 0$

¿Qué signo tiene cada una de las razones trigonométricas que faltan?

a) $\left.\begin{array}{l} sen\ \alpha < 0 \to \alpha \in \text{III o IV cuadrante} \\ tg\ \alpha > 0 \to \alpha \in \text{I o III cuadrante} \end{array}\right\} \to \alpha \in \text{III cuadrante}$

Además, $cos\ \alpha < 0$.

b) $\left.\begin{array}{l} \cos\beta > 0 \rightarrow \beta \in \text{I o IV cuadrante} \\ tg\,\beta < 0 \rightarrow \beta \in \text{II o IV cuadrante} \end{array}\right\} \rightarrow \beta \in \text{IV cuadrante}$

Además, $sen\,\beta < 0$.

c) $\left.\begin{array}{l} sen\,\gamma < 0 \rightarrow \gamma \in \text{III o IV cuadrante} \\ \cos\gamma < 0 \rightarrow \gamma \in \text{II o III cuadrante} \end{array}\right\} \rightarrow \gamma \in \text{III cuadrante}$

Además, $tg\,\gamma > 0$.

d) $\left.\begin{array}{l} \cos\phi > 0 \rightarrow \phi \in \text{I o IV cuadrante} \\ sen\,\phi < 0 \rightarrow \phi \in \text{III o IV cuadrante} \end{array}\right\} \rightarrow \phi \in \text{IV cuadrante}$

Además, $tg\,\phi < 0$.

3. Dibuja sobre una circunferencia goniométrica, en papel milimetrado, los ángulos siguientes:

62°, 154°, 243° y 300°

Representa sus razones trigonométricas y da su valor aproximado.

sen 62° = 0,88	*cos* 62° = 0,47	*tg* 62° = 1,88
sen 154° = 0,44	*cos* 154° = –0,9	*tg* 154° = –0,49
sen 243° = –0,89	*cos* 243° = –0,45	*tg* 243° = 1,96
sen 300° = –0,87	*cos* 300° = 0,5	*tg* 300° = –1,73

4. En la página anterior, en la circunferencia goniométrica sobre la que se han representado el seno y el coseno, hay un triángulo coloreado, $OA'A$.

a) Razonando sobre él y teniendo en cuenta que $\overline{OA} = 1$, justifica que $\cos\alpha = \overline{OA'}$ y $sen\,\alpha = \overline{A'A}$.

b) Aplicando el teorema de Pitágoras en este triángulo, justifica que $(sen\,\alpha)^2 + (\cos\alpha)^2 = 1$.

c) Justifica que $(sen\,\beta)^2 + (\cos\beta)^2 = 1$, razonando sobre el correspondiente triángulo.

a) $\cos\alpha = \dfrac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} = \dfrac{\overline{OA'}}{1} = \overline{OA'}$

b) $(sen\,\alpha)^2 + (\cos\alpha)^2 = \left(\overline{AA'}\right)^2 + \left(\overline{OA'}\right)^2 = \left(\overline{OA}\right)^2 = 1$

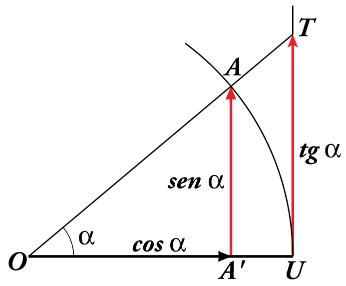
c) $(sen\,\beta)^2 + (\cos\beta)^2 = \overline{OB}^{\,2} = 1$

5. Di el valor de $sen\,\alpha$ y $\cos\alpha$ cuando α vale 0°, 90°, 180°, 270° y 360°.

α	0°	90°	180°	270°	360°
sen α	0	1	0	–1	0
cos α	1	0	–1	0	1

6. **Teniendo en cuenta la semejanza de los triángulos** $OA'A$ **y** OUT**, y que** $\overline{OU} = 1$**, demuestra que:**

$$\frac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha} = tg\ \alpha$$



Por la semejanza de triángulos:

$$\frac{\overline{OA'}}{\overline{AA'}} = \frac{\overline{OU}}{\overline{UT}} \to \overline{UT} = \frac{\overline{AA'} \cdot \overline{OU}}{\overline{OA'}} = \frac{\overline{AA'}}{\overline{OA'}} \to tg\ \alpha = \frac{\overline{AA'}}{\overline{OA'}} = \frac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha}$$

7 Ángulos de medidas cualesquiera. Razones trigonométricas

Página 154

1. Expresa con valores comprendidos entre –180° y 180° estos ángulos:

a) 1 837° **b) 3 358°** **c) 1 381°** **d) 3 805°**

Comprueba con la calculadora que, en cada caso, coinciden las razones trigonométricas de uno y otro ángulo.

a) $\begin{array}{r|l} 1\,837 & 360 \\ \hline 37 & 5 \end{array}$

$1\,837° = 5 \cdot 360° + 37° = 37°$

$sen\ 1\,837° = sen\ 37° = 0{,}602$

$cos\ 1\,837° = cos\ 37° = 0{,}799$

$tg\ 1\,837° = tg\ 37° = 0{,}754$

b) $\begin{array}{r|l} 3\,358 & 360 \\ \hline 118 & 9 \end{array}$

$3\,358° = 9 \cdot 360° + 118° = 118°$

$sen\ 3\,358° = sen\ 118° = 0{,}883$

$cos\ 3\,358° = cos\ 118° = -0{,}469$

$tg\ 3\,358° = tg\ 118° = -1{,}881$

c) $\begin{array}{r|l} 1\,381 & 360 \\ \hline 301 & 3 \end{array}$

$1\,381° = 3 \cdot 360° + 301° = 301° = 301° - 360° = -59°$

$sen\ 1\,381° = sen\ (-59°) = -0{,}857$

$cos\ 1\,381° = cos\ (-59°) = 0{,}515$

$tg\ 1\,381° = tg\ (-59°) = -1{,}664$

d) $\begin{array}{r|l} 3\,805 & 360 \\ \hline 205 & 10 \end{array}$

$3\,805° = 10 \cdot 360° + 205° = 205° = 205° - 360° = -155°$

$sen\ 3\,805° = sen\ (-155°) = -0{,}423$

$cos\ 3\,805° = cos\ (-155°) = -0{,}906$

$tg\ 3\,805° = tg\ (-155°) = 0{,}466$

8 Funciones trigonométricas. El radián

Página 155

1. Pasa a radianes los siguientes ángulos:

a) 25° **b) 100°** **c) 150°** **d) 250°**

Expresa el resultado en función de π y, luego, en forma decimal. Por ejemplo: 180° = π rad = 3,14 rad.

a) $25° = \dfrac{25 \cdot 2\pi}{360}$ rad $= \dfrac{5\pi}{36}$ rad = 0,44 rad

b) $100° = \dfrac{100 \cdot 2\pi}{360}$ rad $= \dfrac{5\pi}{9}$ rad = 1,74 rad

c) $150° = \dfrac{150 \cdot 2\pi}{360}$ rad $= \dfrac{5\pi}{6}$ rad = 2,62 rad

d) $250° = \dfrac{250 \cdot 2\pi}{360}$ rad $= \dfrac{25\pi}{18}$ rad = 4,36 rad

2. Pasa a grados los siguientes ángulos:

a) 0,5 rad **b) 1,5 rad** **c) $\dfrac{\pi}{3}$ rad**

d) $\dfrac{3\pi}{4}$ rad **e) 4,8 rad** **f) 3π rad**

a) 0,5 rad $= \dfrac{0,5 \cdot 360°}{2\pi} = 28°\ 39'\ 36''$

b) 1,5 rad $= \dfrac{1,5 \cdot 360°}{2\pi} = 85°\ 59'\ 24''$

c) $\dfrac{\pi}{3}$ rad $= \dfrac{180°}{3} = 60°$

d) $\dfrac{3\pi}{4}$ rad $= \dfrac{3 \cdot 180°}{4} = 135°$

e) 4,8 rad $= \dfrac{4,8 \cdot 360°}{2\pi} = 275°\ 8'\ 36''$

f) 3π rad = 3 · 180° = 540°

Página 156

3. ¿Verdadero o falso?

a) El radián es una medida de longitud equivalente al radio.

b) Un radián es un ángulo algo menor que 60°.

c) Puesto que la longitud de la circunferencia es $2\pi r$, un ángulo completo (360°) tiene 2π radianes.

d) 180° es algo menos de 3 radianes.

e) Un ángulo recto mide $\pi/2$ radianes.

f) Las funciones trigonométricas son periódicas.

g) Las funciones *sen x* y *cos x* tienen un periodo de 2π.

h) La función *tg x* tiene periodo π.

i) La función *cos x* es como *sen x* desplazada $\pi/2$ a la izquierda.

a) Falso, el radián es una unidad de medida de ángulos. Se llama radián a un ángulo tal que el arco que abarca tiene la misma longitud que el radio con el que se ha trazado.

b) Verdadero. 1 rad = 57° 17' 45"

c) Verdadero.

d) Falso. $180° = \pi \text{ rad} \approx 3,14 \text{ rad}$

e) Verdadero.

f) Verdadero.

g) Verdadero.

h) Verdadero.

i) Verdadero, se cumple $sen\left(\alpha + \dfrac{\pi}{2}\right) = cos\,\alpha,\ \forall\ \alpha.$

Página 157

Hazlo tú. Repite el problema anterior suponiendo que el satélite ve la Tierra bajo un ángulo de 100°.

a) En este caso, $\widehat{TSO} = 50°$ y, por tanto, $\widehat{SOT} = 40°$.

Siguiendo el mismo razonamiento que en el libro de texto:

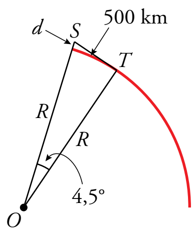
$$d = \frac{6\,371}{\cos 40°} - 6\,371 \approx 1\,946 \text{ km}$$

b) $h = R \cdot (1 - \cos 40°) = 6\,371 \cdot (1 - \cos 40°) = 1\,490{,}53$

Área del casquete $= 2\pi R \cdot h \approx 59\,635\,926 \text{ km}^2$

El área de la porción visible de la Tierra es de unos 60 millones de km^2.

Hazlo tú. ¿A qué altura hemos de subir para ver un lugar situado a 500 km?



Como el cuadrante de meridiano terrestre tiene 10 000 km y corresponde a un ángulo recto, al arco de 500 km le corresponde un ángulo de 4,5°.

Siguiendo el mismo razonamiento que en el ejercicio resuelto en el libro de texto:

$$d = 6\,371 \cdot \left(\frac{1}{\cos 4{,}5°} - 1\right) = 19{,}17 \text{ km}$$

Deberíamos elevarnos unos 19 km.

Hazlo tú. Repite el problema con estos datos: 1.ª medición, 50°; camina 10 m; 2.ª medición, 25°.

Siguiendo el planteamiento del ejercicio resuelto del libro de texto:

$$\left.\begin{array}{l} tg\ 50° = \dfrac{y}{x} \\ tg\ 25° = \dfrac{y}{x+10} \end{array}\right\} \begin{array}{l} \to\ y = 1{,}19x \\ \to\ y = (x+10)\cdot 0{,}47 \end{array}\Bigg\} \to\ x = 6{,}53;\ \ y = 7{,}77$$

El ancho del río es 6,53 m y la altura del árbol, 7,77 m.

Ejercicios y problemas

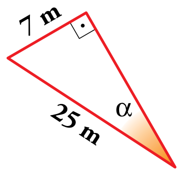
Página 158

Practica

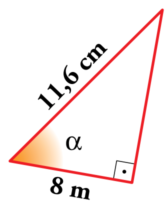
Razones trigonométricas de un ángulo agudo

1. **Halla las razones trigonométricas del ángulo α en cada uno de estos triángulos:**

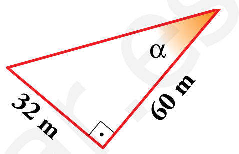
a)



b)



c)



a) $sen\ \alpha = \dfrac{7}{25} = 0{,}28$; $cos\ \alpha = \dfrac{\sqrt{25^2 - 7^2}}{25} = \dfrac{24}{25} = 0{,}96$; $tg\ \alpha = \dfrac{7}{24} \approx 0{,}29$

b) $sen\ \alpha = \dfrac{\sqrt{11{,}6^2 - 8^2}}{11{,}6} = \dfrac{8{,}4}{11{,}6} \approx 0{,}724$

$cos\ \alpha = \dfrac{8}{11{,}6} \approx 0{,}69$; $tg\ \alpha = \dfrac{8{,}4}{8} = 1{,}05$

c) $sen\ \alpha = \dfrac{32}{\sqrt{32^2 + 60^2}} = \dfrac{32}{68} = \dfrac{8}{17} \approx 0{,}47$

$cos\ \alpha = \dfrac{60}{68} = \dfrac{15}{17} \approx 0{,}88$; $tg\ \alpha = \dfrac{32}{60} = \dfrac{8}{15} \approx 0{,}53$

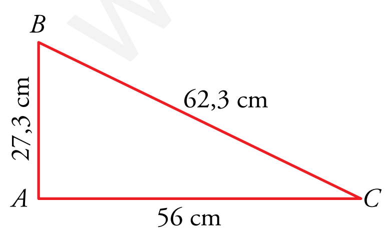
2. **Halla las razones trigonométricas de los ángulos agudos de los siguientes triángulos rectángulos ($\hat{A} = 90°$):**

a) $b = 56$ cm; $a = 62{,}3$ cm

b) $b = 33{,}6$ cm; $c = 4{,}5$ cm

c) $b = 16$ cm; $a = 36$ cm

a)



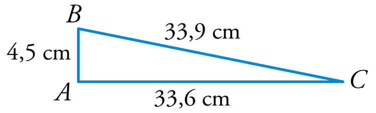
$sen\ \hat{B} = \dfrac{56}{62{,}3} \approx 0{,}90$

$cos\ \hat{B} = \dfrac{\sqrt{62{,}3^2 - 56^2}}{62{,}3} = \dfrac{27{,}3}{62{,}3} \approx 0{,}438$

$tg\ \hat{B} = \dfrac{56}{27{,}3} \approx 2{,}051$

$sen\ \hat{C} = \dfrac{27{,}3}{62{,}3} \approx 0{,}438$; $cos\ \hat{C} = \dfrac{56}{62{,}3} \approx 0{,}90$; $tg\ \hat{C} = \dfrac{27{,}3}{56} = 0{,}4875$

b)



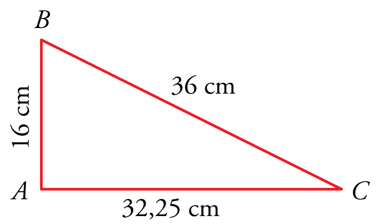
$$sen\ \hat{B} = \frac{33,6}{\sqrt{4,5^2 + 33,6^2}} = \frac{33,6}{33,9} \approx 0{,}991$$

$$cos\ \hat{B} = \frac{4,5}{33,9} \approx 0{,}133$$

$$tg\ \hat{B} = \frac{33,6}{4,5} \approx 7{,}467$$

$$sen\ \hat{C} = \frac{4,5}{33,9} \approx 0{,}133; \quad cos\ \hat{C} = \frac{33,6}{33,9} \approx 0{,}991; \quad tg\ \hat{C} = \frac{4,5}{33,6} \approx 9{,}955$$

c)



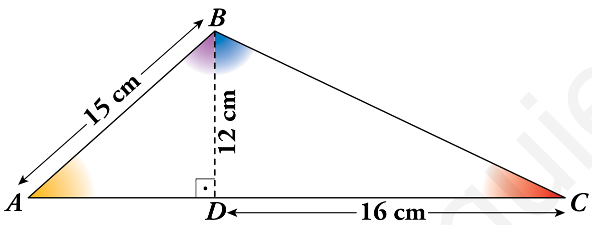
$$sen\ \hat{B} = \frac{\sqrt{36^2 - 16^2}}{36} \approx \frac{32,25}{36} \approx 0{,}896$$

$$cos\ \hat{B} = \frac{16}{36} = 0,\widehat{4}$$

$$tg\ \hat{B} = \frac{32,25}{16} \approx 2{,}016$$

$$sen\ \hat{C} = \frac{16}{36} = 0,\widehat{4}; \quad cos\ \hat{C} = \frac{32,25}{36} \approx 0{,}896; \quad tg\ \hat{C} = \frac{16}{32,25} \approx 0{,}496$$

3. **Calcula las razones trigonométricas de los ángulos $\hat{A}$, $\hat{C}$, $\widehat{ABD}$ y $\widehat{CBD}$.**



$$\overline{AD} = \sqrt{15^2 - 12^2} = 9 \text{ cm}$$

$$\overline{BC} = \sqrt{12^2 + 16^2} = 20 \text{ cm}$$

	$\hat{A}$	$\hat{C}$	$\widehat{ABD}$	$\widehat{CBD}$
sen	$\frac{12}{15} = 0{,}8$	$\frac{12}{20} = 0{,}6$	$\frac{9}{15} = 0{,}6$	$\frac{16}{20} = 0{,}8$
cos	$\frac{9}{15} = 0{,}6$	$\frac{16}{20} = 0{,}8$	$\frac{12}{15} = 0{,}8$	$\frac{12}{20} = 0{,}6$
tg	$\frac{12}{9} = 1,\widehat{3}$	$\frac{12}{16} = 0{,}75$	$\frac{9}{12} = 0{,}75$	$\frac{16}{12} = 1,\widehat{3}$

Relaciones fundamentales

4. **Si $sen\ \alpha = 0{,}28$, calcula $cos\ \alpha$ y $tg\ \alpha$ utilizando las relaciones fundamentales ($\alpha < 90°$).**

$$cos\ \alpha = \sqrt{1 - 0,28^2} = 0{,}96; \quad tg\ \alpha = \frac{0,28}{0,96} = 0{,}292$$

5. **Halla el valor exacto (con radicales) de $sen\ \alpha$ y $tg\ \alpha$ sabiendo que $cos\ \alpha = 2/3$ ($\alpha < 90°$).**

$$sen\ \alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}; \quad tg\ \alpha = \frac{\sqrt{5}/3}{2/3} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

6. **Si $tg\,\alpha = \sqrt{5}$, calcula $sen\,\alpha$ y $cos\,\alpha$ ($\alpha < 90°$).**

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{sen\,\alpha}{cos\,\alpha} = \sqrt{5} \\ sen^2\,\alpha + cos^2\,\alpha = 1\end{array}\right\} \begin{array}{l} s = \sqrt{5}\,c \\ (\sqrt{5}\,c)^2 + c^2 = 1 \to 6c^2 = 1 \to cos\,\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{6}} = \dfrac{\sqrt{6}}{6}\end{array}$$

$$sen\,\alpha = \sqrt{5} \cdot \frac{\sqrt{6}}{6} = \frac{\sqrt{30}}{6}$$

7. **Completa en tu cuaderno esta tabla con las razones trigonométricas que faltan siendo $\alpha < 90°$. Utiliza radicales cuando sea posible.**

$sen\,\alpha$	0,92			2/3		
$cos\,\alpha$		0,12			$\sqrt{2}/3$	
$tg\,\alpha$			0,75			2

Como $\alpha < 90° \to sen\,\alpha > 0$, $cos\,\alpha > 0$ y $tg\,\alpha > 0$ en todos los casos.

- $sen\,\alpha = 0{,}92 \to cos\,\alpha = \sqrt{1 - 0{,}92^2} = 0{,}39 \to tg\,\alpha = \dfrac{0{,}92}{0{,}39} = 2{,}36$
- $cos\,\alpha = 0{,}12 \to sen\,\alpha = \sqrt{1 - 0{,}12^2} = 0{,}99 \to tg\,\alpha = \dfrac{0{,}99}{0{,}12} = 8{,}25$
- $tg\,\alpha = 0{,}75$

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{sen\,\alpha}{cos\,\alpha} = 0{,}75 \\ sen^2\,\alpha + cos^2\,\alpha = 1\end{array}\right\} \to sen\,\alpha = 0{,}75 \cdot cos\,\alpha$$

$$(0{,}75 \cdot cos\,\alpha)^2 + cos^2\,\alpha = 1 \to 0{,}5625 cos^2\,\alpha + cos^2\,\alpha = 1 \to 1{,}5625 cos^2\,\alpha = 1 \to$$

$$\to cos^2\,\alpha = \frac{1}{1{,}5625} \to cos\,\alpha = 0{,}8$$

$sen\,\alpha = 0{,}75 \cdot cos\,\alpha \to sen\,\alpha = 0{,}6$

- $sen\,\alpha = \dfrac{2}{3} \to cos\,\alpha = \sqrt{1 - \dfrac{4}{9}} = \sqrt{\dfrac{5}{9}} = \dfrac{\sqrt{5}}{3} \to tg\,\alpha = \dfrac{2/3}{\sqrt{5}/3} = \dfrac{2}{\sqrt{5}} = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$
- $cos\,\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{3} \to sen\,\alpha = \sqrt{1 - \dfrac{2}{9}} = \sqrt{\dfrac{7}{9}} = \dfrac{\sqrt{7}}{3} \to tg\,\alpha = \dfrac{\sqrt{7}/3}{\sqrt{2}/3} = \dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{14}}{2}$
- $tg\,\alpha = 2$

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{sen\,\alpha}{cos\,\alpha} = 2 \\ sen^2\,\alpha + cos^2\,\alpha = 1\end{array}\right\} \to sen\,\alpha = 2 \cdot cos\,\alpha$$

$$(2 \cdot cos\,\alpha)^2 + cos^2\,\alpha = 1 \to 4cos^2\,\alpha + cos^2\,\alpha = 1 \to 5cos^2\,\alpha = 1 \to$$

$$\to cos^2\,\alpha = \frac{1}{5} \to cos\,\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$sen\,\alpha = 2 \cdot cos\,\alpha \to sen\,\alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

Por tanto:

sen α	0,92	0,99	0,6	2/3	$\sqrt{7}/3$	$2\sqrt{5}/5$
cos α	0,39	0,12	0,8	$\sqrt{5}/3$	$\sqrt{2}/3$	$\sqrt{5}/5$
tg α	2,36	8,25	0,75	$2\sqrt{5}/5$	$\sqrt{14}/2$	2

8. **Calcula el valor de las siguientes expresiones sin utilizar la calculadora:**

a) ***sen*** **45° –** ***cos*** **45°**

b) ***sen*** **30° +** ***cos*** **60°**

c) ***sen*** **30° +** ***cos*** **30°**

d) ***tg*** **30° +** ***tg*** **60°**

e) ***tg*** **45° –** ***cos*** **60°**

f) ***tg*** **45° +** ***sen*** **45°**

a) $sen\ 45° - cos\ 45° = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$

b) $sen\ 30° + cos\ 60° = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$

c) $sen\ 30° + cos\ 30° = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$

d) $tg\ 30° + tg\ 60° = \frac{\sqrt{3}}{3} + \sqrt{3} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$

e) $tg\ 45° - cos\ 60° = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

f) $tg\ 45° + sen\ 45° = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2+\sqrt{2}}{2}$

Calculadora

9. **Completa en tu cuaderno la tabla siguiente, utilizando la calculadora:**

α	15°	55° 20'	72° 25' 40''	85,5°
sen α	0,26	0,82	0,95	0,997
cos α	0,97	0,57	0,30	0,078
tg α	0,27	1,45	3,16	12,71

10. **Halla el ángulo $\alpha < 90°$ en cada caso. Exprésalo en grados, minutos y segundos.**

a) ***sen*** α **= 0,58**

b) ***cos*** α **= 0,75**

c) ***tg*** α **= 2,5**

d) ***sen*** $\alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$

e) ***cos*** $\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$

f) ***tg*** $\alpha = 3\sqrt{2}$

a) α = 35° 27' 2''

b) α = 41° 24' 35''

c) α = 68° 11' 55''

d) α = 48° 11' 23''

e) α = 54° 44' 8''

f) α = 76° 44' 14''

11. **Halla, con la calculadora, las otras razones trigonométricas del ángulo $\alpha < 90°$ en cada uno de los casos siguientes:**

a) ***sen*** α **= 0,23**

b) ***cos*** α **= 0,74**

c) ***tg*** α **= 1,75**

d) ***sen*** $\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$

e) ***tg*** $\alpha = \sqrt{3}$

f) ***cos*** $\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$

a) *cos* α = 0,97; *tg* α = 0,24

b) *sen* α = 0,67; *tg* α = 0,91

c) *sen* α = 0,87; *cos* α = 0,5

d) *cos* α = 0,71; *tg* α = 1

e) *sen* α = 0,87; *cos* α = 0,5

f) *sen* α = 0,5; *tg* α = 0,58

Resolución de triángulos

12. **Resuelve los siguientes triángulos rectángulos ($\hat{C} = 90°$) hallando la medida de todos los elementos desconocidos:**

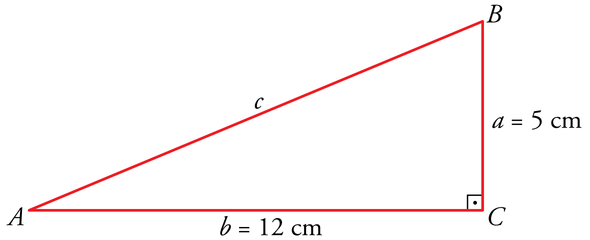
a) $a = 5$ **cm,** $b = 12$ **cm.** **Halla** c, $\hat{A}$, $\hat{B}$.

b) $a = 43$ **m,** $\hat{A} = 37°$. **Halla** b, c, $\hat{B}$.

c) $a = 7$ **m,** $\hat{B} = 58°$. **Halla** b, c, $\hat{A}$.

d) $c = 5{,}8$ **km,** $\hat{A} = 71°$. **Halla** a, b, $\hat{B}$.

a)

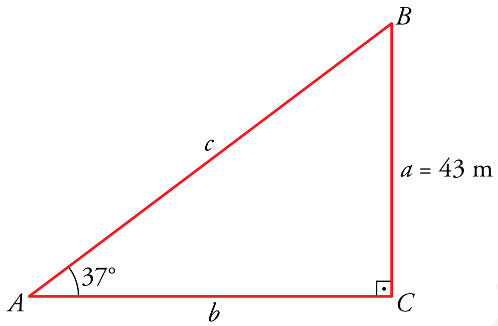


- Por el teorema de Pitágoras:

  $c^2 = 5^2 + 12^2 \to c^2 = 169 \to c = 13$ cm

- $tg\,\hat{A} = \dfrac{5}{12} \to \hat{A} = 22°\ 37'\ 11''$
- $\hat{B} = 90° - \hat{A} \to \hat{B} = 67°\ 22'\ 49''$

b)



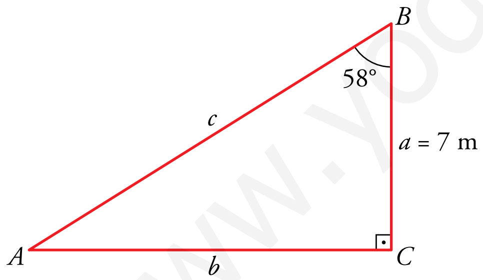
- $\hat{B} = 90° - \hat{A} \to \hat{B} = 53°$
- $sen\ 37° = \dfrac{43}{c} \to c = \dfrac{43}{sen\ 37°} \to$

  $\to c = 71{,}45$ m

- $tg\ 37° = \dfrac{43}{b} \to b = \dfrac{43}{tg\ 37°} \to$

  $\to b = 57{,}06$ m

c)



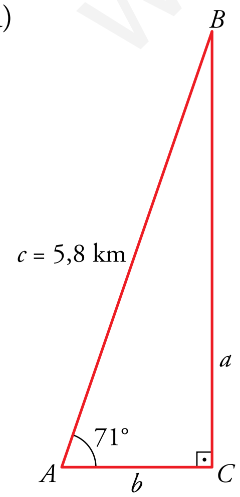
- $\hat{A} = 90° - \hat{B} \to \hat{A} = 32°$
- $tg\ 58° = \dfrac{b}{7} \to b = 7 \cdot tg\ 58° \to$

  $\to b = 11{,}20$ m

- $cos\ 58° = \dfrac{7}{c} \to c = \dfrac{7}{cos\ 58°} \to$

  $\to c = 13{,}21$ m

d)



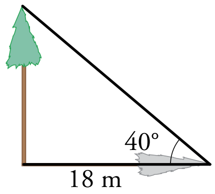
- $\hat{B} = 90° - \hat{A} \to \hat{B} = 19°$
- $sen\ 71° = \dfrac{a}{5{,}8} \to a = 5{,}8 \cdot sen\ 71° \to$

  $\to a = 5{,}48$ km

- $cos\ 71° = \dfrac{b}{5{,}8} \to b = 5{,}8 \cdot cos\ 71° \to$

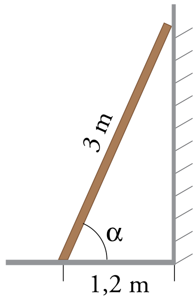
  $\to b = 1{,}89$ km

13. **Cuando los rayos del sol forman 40° con el suelo, la sombra de un árbol mide 18 m. ¿Cuál es su altura?**



$tg\ 40° = \dfrac{x}{18} \rightarrow$ El árbol mide $x = 15{,}1$ m.

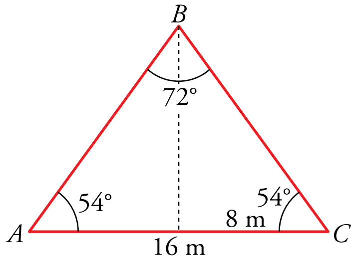
14. **Una escalera de 3 m está apoyada en una pared. ¿Qué ángulo forma la escalera con el suelo si su base está a 1,2 m de la pared?**



$cos\ \alpha = \dfrac{1{,}2}{3} = 0{,}4 \rightarrow \alpha = 66°\ 25'\ 19''$

Página 159

15. **Calcula el perímetro y el área de un triángulo isósceles en el que el ángulo desigual mide 72° y la medida del lado opuesto a ese ángulo es de 16 m.**



$$\hat{A} = \frac{180° - 72°}{2} = 54°$$

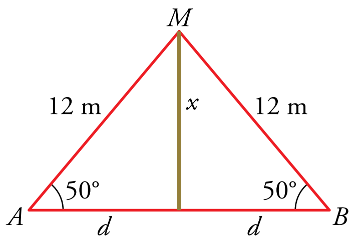
$$cos\ 54° = \frac{8}{\overline{BC}} \rightarrow \overline{BC} = \frac{8}{cos\ 54°} = 13{,}6 \text{ m}$$

Perímetro = 13,6 · 2 + 16 = 43,2 m

Altura, h: $tg\ 54° = \frac{h}{8} \rightarrow h = 8 \cdot tg\ 54° = 11{,}01$ m

$$\text{Área} = \frac{16 \cdot 11{,}01}{2} \approx 88{,}1 \text{ m}^2$$

16. **Un mástil está sujeto a tierra con dos cables de 12 m que forman ángulos de 50° con el suelo. Calcula la altura del mástil y la distancia de la base a los puntos de sujeción.**

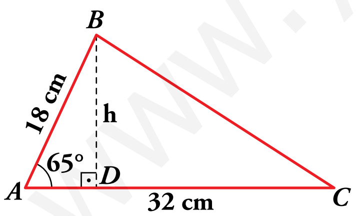


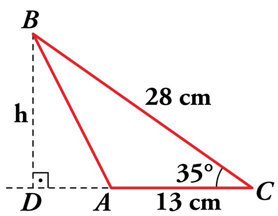
$$sen\ 50° = \frac{x}{12} \rightarrow x = 12 \cdot sen\ 50° \rightarrow x = 9{,}19 \text{ m}$$

$$cos\ 50° = \frac{d}{12} \rightarrow d = 12 \cdot cos\ 50° \rightarrow d = 7{,}71 \text{ m}$$

El mástil mide 9,19 m y la distancia de la base del mástil a los puntos de sujeción A y B es 7,71 m.

17. **Calcula la altura, h, y el área de los siguientes triángulos:**





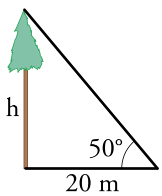
$$sen\ 65° = \frac{h}{18} \rightarrow h \approx 16{,}3 \text{ cm}$$

$$A = \frac{32 \cdot 16{,}3}{2} = 260{,}8 \text{ cm}^2$$

$$sen\ 35° = \frac{h}{18} \rightarrow h \approx 16{,}1 \text{ cm}$$

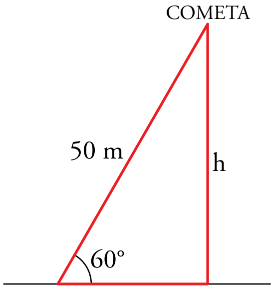
$$A = \frac{13 \cdot 16{,}1}{2} = 104{,}61 \text{ cm}^2$$

18. **Para medir la altura de un árbol, nos situamos a 20 m de su base y observamos, desde el suelo, su parte más alta bajo un ángulo de 50°. ¿Cuánto mide el árbol?**



$$tg\ 50° = \frac{h}{20} \rightarrow h = 20 \cdot tg\ 50° = 23{,}8 \text{ m}$$

19. **Una cometa está sujeta al suelo mediante un hilo que mide 50 m y que forma con la horizontal un ángulo de 60°. ¿A qué altura está la cometa?**



$$sen\ 60° = \frac{h}{50} \to h = 50 \cdot sen\ 60° \to h = 50 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \to$$

$$\to h = 25\sqrt{3}\ \text{m}$$

La cometa está a una altura de $25\sqrt{3}$ m.

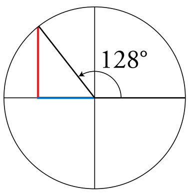
Razones trigonométricas de ángulos cualesquiera

20. **Sitúa en la circunferencia goniométrica los siguientes ángulos e indica el signo de sus razones trigonométricas.**

a) 128° **b)** 198° **c)** 87° **d)** 98° **e)** 285° **f)** 305°

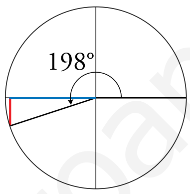
Compruébalo con la calculadora.

a)



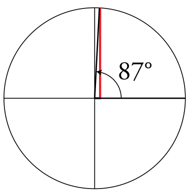
128°	
sen	+
cos	–
tg	–

b)



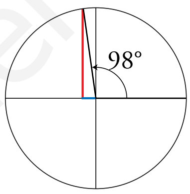
198°	
sen	–
cos	–
tg	+

c)



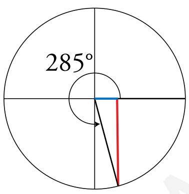
87°	
sen	+
cos	+
tg	+

d)



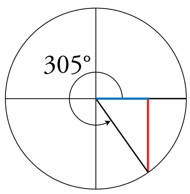
98°	
sen	+
cos	–
tg	–

e)



285°	
sen	–
cos	+
tg	–

f)



305°	
sen	–
cos	+
tg	–

21. **Explica en qué cuadrante está el ángulo α en cada caso y calcula las razones trigonométricas que faltan:**

a) $sen\ \alpha = 0{,}6$; $cos\ \alpha < 0$ **b)** $cos\ \alpha = -1/3$; $tg\ \alpha > 0$

c) $tg\ \alpha = -2$; $sen\ \alpha > 0$ **d)** $sen\ \alpha = -2/3$; $tg\ \alpha < 0$

Representa el ángulo α en una circunferencia goniométrica en cada caso.

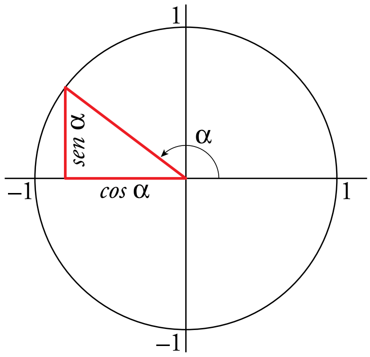
a) $\left.\begin{array}{l} sen\ \alpha = 0{,}6 > 0 \to \alpha \in \text{I o II cuadrante} \\ cos\ \alpha < 0 \to \alpha \in \text{II o III cuadrante} \end{array}\right\} \to \alpha \in \text{II cuadrante}$

- $sen^2\ \alpha + cos^2\ \alpha = 1 \to cos^2\ \alpha = 1 - sen^2\ \alpha \to cos^2\ \alpha = 1 - 0{,}6^2 \to cos^2\ \alpha = 0{,}64 \to$

  $\to cos\ \alpha = -\sqrt{0{,}64} \to cos\ \alpha = -0{,}8$

- $tg\ \alpha = \dfrac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha} \to tg\ \alpha = \dfrac{0{,}6}{-0{,}8} \to tg\ \alpha = -0{,}75$

• Representación de α en una circunferencia goniométrica:



$$sen\ \alpha = 0{,}6 \ \rightarrow\ \alpha = \begin{cases} 36°\ 52'\ 12'' \\ 143°\ 7'\ 48'' \end{cases} \rightarrow$$

$$\xrightarrow{\alpha\ \in\ \text{II cuadrante}}\ \alpha = 143°\ 7'\ 48''$$

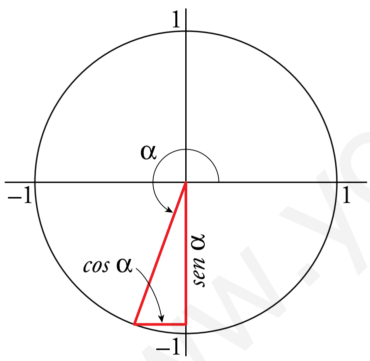
b) $\left.\begin{array}{l} cos\ \alpha = -\dfrac{1}{3} < 0 \ \rightarrow\ \alpha \in \text{II o III cuadrante} \\ tg\ \alpha > 0 \ \rightarrow\ \alpha \in \text{I o III cuadrante} \end{array}\right\} \rightarrow\ \alpha \in \text{III cuadrante}$

• $sen^2\ \alpha + cos^2\ \alpha = 1 \ \rightarrow\ sen^2\ \alpha = 1 - cos^2\ \alpha \ \rightarrow\ sen^2\ \alpha = 1 - \left(-\dfrac{1}{3}\right)^2 \ \rightarrow\ sen^2\ \alpha = \dfrac{8}{9} \ \rightarrow$

$$\rightarrow\ sen\ \alpha = -\sqrt{\frac{8}{9}} \ \rightarrow\ sen\ \alpha = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

• $tg\ \alpha = \dfrac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha} \ \rightarrow\ tg\ \alpha = \dfrac{\frac{-2\sqrt{2}}{3}}{-\frac{1}{3}} \ \rightarrow\ tg\ \alpha = 2\sqrt{2}$

• Representación de α en la circunferencia goniométrica:



$$cos\ \alpha = -\frac{1}{3} \ \rightarrow\ \alpha = \begin{cases} 109°\ 28'\ 16'' \\ 250°\ 31'\ 44'' \end{cases} \rightarrow$$

$$\xrightarrow{\alpha\ \in\ \text{III cuadrante}}\ \alpha = 250°\ 31'\ 44''$$

c) $\left.\begin{array}{l} tg\ \alpha = -2 < 0 \ \rightarrow\ \alpha \in \text{II o IV cuadrante} \\ sen\ \alpha > 0 \ \rightarrow\ \alpha \in \text{I o II cuadrante} \end{array}\right\} \rightarrow\ \alpha \in \text{II cuadrante}$

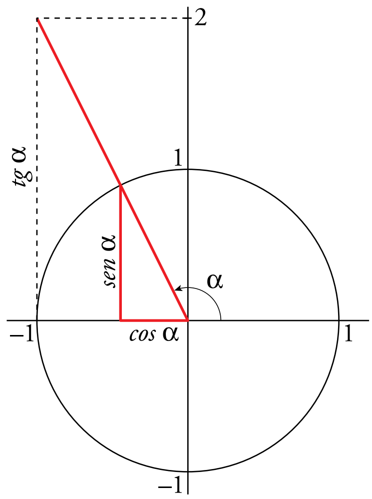
• $\left.\begin{array}{l} \dfrac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha} = -2 \\ sen^2\ \alpha + cos^2\ \alpha = 1 \end{array}\right\} \rightarrow\ sen\ \alpha = -2\ cos\ \alpha$

$(-2cos\ \alpha)^2 + cos^2\ \alpha = 1 \ \rightarrow\ 4cos^2\ \alpha + cos^2\ \alpha = 1 \ \rightarrow\ 5cos^2\ \alpha = 1 \ \rightarrow\ cos^2\ \alpha = \dfrac{1}{5} \ \rightarrow$

$$\rightarrow\ cos\ \alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}} = -\frac{\sqrt{5}}{5}$$

• $sen\ \alpha = -2cos\ \alpha \ \rightarrow\ sen\ \alpha = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

- Representación de α en la circunferencia goniométrica:



$$tg\ \alpha = -2 \to \alpha = \begin{cases} 116°\ 33'\ 54'' \\ 296°\ 33'\ 54'' \end{cases} \to$$

$$\xrightarrow{\alpha \in \text{ II cuadrante}} \alpha = 116°\ 33'\ 54''$$

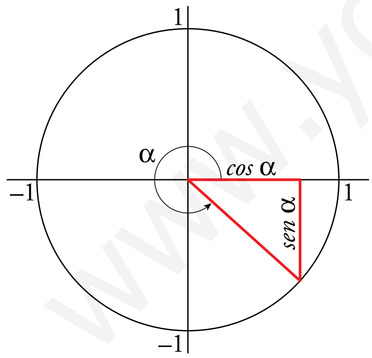
d) $\left.\begin{array}{l} sen\ \alpha = -\dfrac{2}{3} < 0 \to \alpha \in \text{ III o IV cuadrante} \\ tg\ \alpha < 0 \to \alpha \in \text{ II o IV cuadrante} \end{array}\right\} \to \alpha \in \text{ IV cuadrante}$

- $sen^2\ \alpha + cos^2\ \alpha = 1 \to cos^2\ \alpha = 1 - sen^2\ \alpha \to cos^2\ \alpha = 1 - \left(-\dfrac{2}{3}\right)^2 \to$

$$\to cos^2\ \alpha = \frac{5}{9} \to cos\ \alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

- $tg\ \alpha = \dfrac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha} \to tg\ \alpha = \dfrac{-\dfrac{2}{3}}{\dfrac{\sqrt{5}}{3}} \to tg\ \alpha = -\dfrac{2}{\sqrt{5}} = -\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

- Representación de α en la circunferencia goniométrica:



$$sen\ \alpha = -\frac{2}{3} \to \alpha = \begin{cases} 318°\ 11'\ 23'' \\ 221°\ 48'\ 37'' \end{cases} \to$$

$$\xrightarrow{\alpha \in \text{ IV cuadrante}} \alpha = 318°\ 11'\ 23''$$

22. **Justifica en qué cuadrante está α, en cada caso, y calcula las restantes razones trigonométricas:**

a) $sen\ \alpha = 4/5;\ \alpha < 90°$ **b)** $cos\ \alpha = 2/3;\ \alpha > 270°$

c) $tg\ \alpha = 3;\ \alpha > 180°$ **d)** $cos\ \alpha = -3/4;\ \alpha < 180°$

a) $sen\ \alpha = \dfrac{4}{5},\ \alpha < 90° \to \alpha \in$ I cuadrante y $cos\ \alpha > 0$

- $sen^2\ \alpha + cos^2\ \alpha = 1 \to cos^2\ \alpha = 1 - \left(\dfrac{4}{5}\right)^2 \to cos^2\ \alpha = \dfrac{9}{25} \to cos\ \alpha = \sqrt{\dfrac{9}{25}} = \dfrac{3}{5}$

- $tg\ \alpha = \dfrac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha} \to tg\ \alpha = \dfrac{4/5}{3/5} = \dfrac{4}{3}$

b) $cos\ \alpha = \frac{2}{3},\ \alpha > 270° \rightarrow \alpha \in$ IV cuadrante y $sen\ \alpha < 0$

• $sen^2\ \alpha + cos^2\ \alpha = 1 \rightarrow sen^2\ \alpha = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 \rightarrow sen^2\ \alpha = \frac{5}{9} \rightarrow sen\ \alpha = -\sqrt{\frac{5}{9}} = -\frac{\sqrt{5}}{3}$

• $tg\ \alpha = \frac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha} \rightarrow tg\ \alpha = \frac{-\frac{\sqrt{5}}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{-\sqrt{5}}{2}$

c) $tg\ \alpha = 3,\ \alpha > 180° \rightarrow \alpha \in$ III cuadrante

• $\left.\begin{array}{l} \frac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha} = 3 \\ sen^2\ \alpha + cos^2\ \alpha = 1 \end{array}\right\} \rightarrow sen\ \alpha = 3\ cos\ \alpha$

$(3cos\ \alpha)^2 + cos^2\ \alpha = 1 \rightarrow 9cos^2\ \alpha + cos^2\ \alpha = 1 \rightarrow 10cos^2\ \alpha = 1 \rightarrow cos^2\ \alpha = \frac{1}{10} \rightarrow$

$\rightarrow cos\ \alpha = -\sqrt{\frac{1}{10}} = -\frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{-\sqrt{10}}{10}$

• $sen\ \alpha = 3cos\ \alpha \rightarrow sen\ \alpha = -\frac{3\sqrt{10}}{10}$

d) $cos\ \alpha = -\frac{3}{4},\ \alpha < 180° \rightarrow \alpha \in$ II cuadrante y $sen\ \alpha > 0$

• $sen^2\ \alpha + cos^2\ \alpha = 1 \rightarrow sen^2\ \alpha = 1 - cos^2\ \alpha \rightarrow sen^2\ \alpha = 1 - \left(-\frac{3}{4}\right)^2 \rightarrow$

$\rightarrow sen^2\ \alpha = \frac{7}{16} \rightarrow sen\ \alpha = \sqrt{\frac{7}{16}} = \frac{\sqrt{7}}{4}$

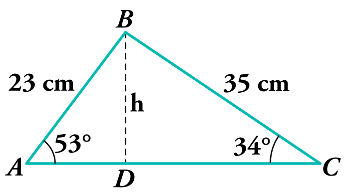
• $tg\ \alpha = \frac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha} \rightarrow tg\ \alpha = \frac{\frac{\sqrt{7}}{4}}{-\frac{3}{4}} = \frac{-\sqrt{7}}{3}$

Aplica lo aprendido

23. **Halla:**

a) La longitud $\overline{AC}$.

b) El área del triángulo *ABC*.



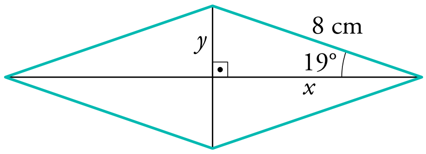
a) $\left.\begin{array}{l} \text{En } \widehat{ABD},\ cos\ 53° = \frac{\overline{AD}}{23} \rightarrow \overline{AD} \approx 13,84 \text{ cm} \\ \text{En } \widehat{BDC},\ cos\ 34° = \frac{\overline{DC}}{23} \rightarrow \overline{DC} \approx 29 \text{ cm} \end{array}\right\} \overline{AC} \approx 13,84 + 29 = 42,84 \text{ cm}$

b) Hallamos la altura h en el triángulo *ABD*:

$sen\ 53° = \frac{h}{23} \rightarrow h \approx 18,37$ cm

$A_{ABC} = \frac{\overline{AC} \cdot h}{2} = \frac{42,84 \cdot 18,37}{2} \approx 393,49 \text{ cm}^2$

24. **El lado de un rombo mide 8 cm y el ángulo menor es de 38°. ¿Cuánto miden las diagonales del rombo?**



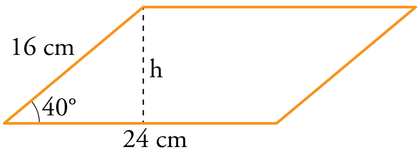
- $sen\ 19° = \dfrac{y}{8} \rightarrow y = 8 \cdot sen\ 19° \rightarrow y = 2{,}60$ cm

  Diagonal menor $= 2y = 5{,}20$ cm

- $cos\ 19° = \dfrac{x}{8} \rightarrow x = 8 \cdot cos\ 19° \rightarrow x = 7{,}56$ cm

  Diagonal mayor $= 2x = 15{,}12$ cm

25. **Halla el área de un paralelogramo cuyos lados miden 16 cm y 24 cm y forman un ángulo de 40°.**



$sen\ 40° = \dfrac{h}{16} \rightarrow h = 16 \cdot sen\ 40° \rightarrow h = 10{,}28$ cm

Área $= 24 \cdot 10{,}28 = 246{,}72$ cm^2

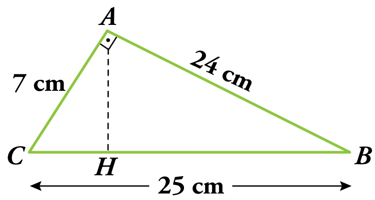
26. **En una carretera de montaña, una señal indica una altitud de 785 m. Tres kilómetros más adelante, la altitud es de 1 065 m. Halla la pendiente media de la carretera y el ángulo que forma con la horizontal.**

$sen\ \alpha = \dfrac{280}{3\,000} \rightarrow sen\ \alpha = \dfrac{7}{75} \rightarrow \alpha = 5°\ 21'\ 19''$

$tg\ \alpha = 0{,}093 \rightarrow$ pendiente $= 9{,}3\,\%$

27. **a) En el triángulo *ABC*, rectángulo en *A*, calcula $\overline{BH}$ y $\overline{AH}$.**

b) Halla las razones trigonométricas del ángulo $\hat{B}$ en el triángulo *ABC* y en el triángulo *ABH* y comprueba que coinciden.



a) Por el teorema del cateto:

$24^2 = 25 \cdot \overline{BH} \rightarrow \overline{BH} = \dfrac{24^2}{25} \rightarrow \overline{BH} = 23{,}04$ cm

Por el teorema de Pitágoras:

$\overline{AH}^2 = 24^2 - 23{,}04^2 \rightarrow \overline{AH} = \sqrt{24^2 - 23{,}04^2} \rightarrow \overline{AH} = 6{,}72$ cm

b) Razones trigonométricas de $\hat{B}$ en $\widehat{ABH}$:

$sen\ \hat{B} = \dfrac{\overline{AH}}{\overline{AB}} = \dfrac{6{,}72}{24} = 0{,}28$

$cos\ \hat{B} = \dfrac{\overline{BH}}{\overline{AB}} = \dfrac{23{,}04}{24} = 0{,}96$

$tg\ \hat{B} = \dfrac{\overline{AH}}{\overline{BH}} = \dfrac{6{,}72}{23{,}04} = 0{,}29$

Razones trigonométricas de $\hat{B}$ en $\widehat{ABC}$:

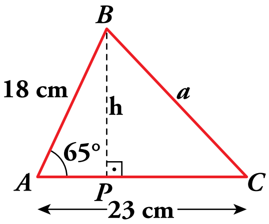
$sen\ \hat{B} = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \dfrac{7}{25} = 0{,}28$

$cos\ \hat{B} = \dfrac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \dfrac{24}{25} = 0{,}96$

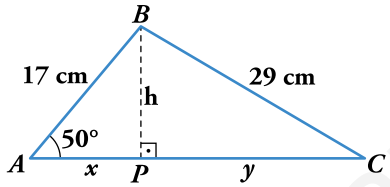
$tg\ \hat{B} = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \dfrac{7}{24} = 0{,}29$

28. **Halla, en cada triángulo, la altura y el lado desconocido:**

a)



b)



a) En el triángulo ABP:

$sen\ 65° = \dfrac{h}{18} \ \rightarrow\ h \approx 16{,}31$ cm

$cos\ 65° = \dfrac{\overline{AP}}{18} \ \rightarrow\ \overline{AP} \approx 7{,}61$

$\overline{PC} = \overline{AC} - \overline{AP} = 23 - 7{,}61 = 15{,}39$

$a = \sqrt{h^2 + \overline{PC}^2} = \sqrt{16{,}31^2 + 15{,}39^2} \approx 22{,}42$ cm

b) En el triángulo ABP:

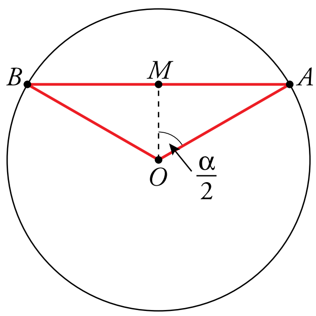
$cos\ 50° = \dfrac{x}{17} \ \rightarrow\ x \approx 10{,}93$ cm

$sen\ 50° = \dfrac{h}{17} \ \rightarrow\ h \approx 13{,}02$ cm

En el triángulo BCP: $y = \sqrt{29^2 - h^2} = \sqrt{29^2 - 13{,}02^2} \approx 25{,}91$ cm

$x + y \approx 36{,}84$ cm

29. **En una circunferencia de radio 6 cm trazamos una cuerda AB a 3 cm del centro O. Halla el ángulo $\widehat{AOB}$.**



$\overline{OA} = \overline{OB} = 6$ cm; $\overline{OM} = 3$ cm

$cos\ \dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{3}{6} \ \rightarrow\ cos\ \dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1}{2} \ \rightarrow\ \dfrac{\alpha}{2} = 60° \ \rightarrow$

$\rightarrow\ \alpha = \widehat{AOB} = 120°$

30. **a) Expresa en radianes los ángulos de 30°, 45°, 60° y 90° a partir de la equivalencia 180° = π rad.**

b) Expresa en radianes los siguientes ángulos teniendo en cuenta que son múltiplos de los anteriores: 150°; 135°; 240°; 300° y 270°.

a) $30° = \frac{30\pi}{180}$ rad $= \frac{\pi}{6}$ rad

$45° = \frac{45\pi}{180}$ rad $= \frac{\pi}{4}$ rad

$60° = \frac{60\pi}{180}$ rad $= \frac{\pi}{3}$ rad

$90° = \frac{90\pi}{180}$ rad $= \frac{\pi}{2}$ rad

b) $150° = 5 \cdot 30° = \frac{5\pi}{6}$ rad

$135° = 3 \cdot 45° = \frac{3\pi}{4}$ rad

$240° = 4 \cdot 60° = \frac{4\pi}{3}$ rad

$300° = 5 \cdot 60° = \frac{5\pi}{3}$ rad

$270° = 3 \cdot 90° = \frac{3\pi}{2}$ rad

Página 160

31. **Expresa en grados los siguientes ángulos dados en radianes:**

$$\frac{2\pi}{3};\ \frac{3\pi}{2};\ \frac{5\pi}{4};\ \frac{7\pi}{6};\ \frac{\pi}{9};\ \frac{\pi}{5}$$

Teniendo en cuenta que π rad = 180°:

$\frac{2\pi}{3}\text{ rad} = \frac{2\cdot 180°}{3} = 120°$ $\qquad$ $\frac{3\pi}{2}\text{ rad} = \frac{3\cdot 180°}{2} = 270°$

$\frac{5\pi}{4}\text{ rad} = \frac{5\cdot 180°}{4} = 225°$ $\qquad$ $\frac{7\pi}{6}\text{ rad} = \frac{7\cdot 180°}{6} = 210°$

$\frac{\pi}{9}\text{ rad} = \frac{180°}{9} = 20°$ $\qquad$ $\frac{\pi}{5}\text{ rad} = \frac{180°}{5} = 36°$

32. **a) En una circunferencia de 8 cm de radio, dibujamos un ángulo de 2,5 radianes. ¿Qué longitud tendrá el arco correspondiente?**

b) Si en la misma circunferencia, un arco mide 12 cm, halla la medida del ángulo central en grados y en radianes.

a) Sabemos que si un ángulo mide 1 rad entonces el arco correspondiente tendrá una longitud igual al radio, por tanto, a un ángulo de 2,5 rad le corresponde un arco cuya longitud es 2,5 veces el radio. En nuestro caso:

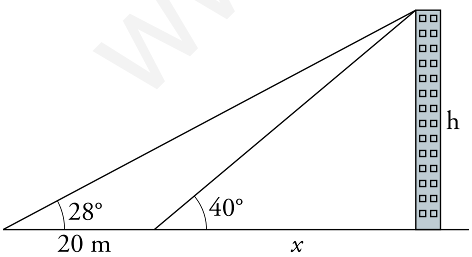
Longitud del arco = $\alpha \cdot r = 2{,}5 \cdot 8 = 20$ cm

b) $\left.\begin{array}{l}\text{Longitud del arco} = 12\text{ cm}\\ \text{Radio} = 8\text{ cm}\end{array}\right\} \to \alpha = \frac{\text{Longitud del arco}}{r} = \frac{12}{8}\text{ rad} = 1{,}5\text{ rad}$

$\left.\begin{array}{lcl}180° & \text{——} & \pi\text{ rad}\\ x & \text{——} & 1{,}5\text{ rad}\end{array}\right\} \to x = \frac{1{,}5\cdot 180°}{\pi} = 85°\ 59'\ 14''$

Resuelve problemas

33. **Desde el punto donde estoy, la visual al punto más alto del edificio que tengo en frente forma un ángulo de 28° con la horizontal. Si me acerco 20 m, el ángulo es de 40°. ¿Cuál es la altura del edificio?**



$$\left.\begin{array}{l} tg\ 40° = \dfrac{h}{x} \\ tg\ 28° = \dfrac{h}{20 + x}\end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} h = tg\ 40° \cdot x \\ h = tg\ 28° \cdot (20 + x)\end{array}\right\} \to$$

$\to tg\ 40° \cdot x = tg\ 28° \cdot (20 + x) \to tg\ 40° \cdot x = 20 \cdot tg\ 28° + tg\ 28° \cdot x \to$

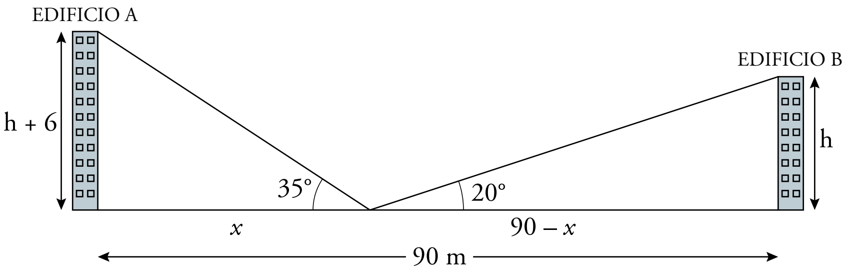
$\to (tg\ 40° - tg\ 28°) \cdot x = 20 \cdot tg\ 28° \to x = \dfrac{20 \cdot tg\ 28°}{tg\ 40° - tg\ 28°} \to x = 34{,}59$ m

$h = tg\ 40° \cdot x \to h = 29{,}02$ m

Por tanto, el edificio mide 29,02 m.

34. **Dos edificios distan entre sí 90 m. Desde un punto que está entre los dos edificios vemos que las visuales a los puntos más altos de estos forman con la horizontal ángulos de 35° y 20°. ¿Cuál es la altura de los edificios si sabemos que uno es 6 m más alto que el otro?**

- Primera solución: el edificio A es más alto que el B.



$$\left.\begin{array}{l} tg\ 35° = \dfrac{h+6}{x} \\[2ex] tg\ 20° = \dfrac{h}{90-x} \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{l} h = tg\ 35° \cdot x - 6 \\ h = tg\ 20° \cdot (90 - x) \end{array}\right\} \to tg\ 35° \cdot x - 6 = tg\ 20° \cdot (90 - x) \to$$

$$\to tg\ 35° \cdot x - 6 = 90 \cdot tg\ 20° - tg\ 20° \cdot x \to tg\ 35° \cdot x + tg\ 20° \cdot x = 90 \cdot tg\ 20° + 6 \to$$

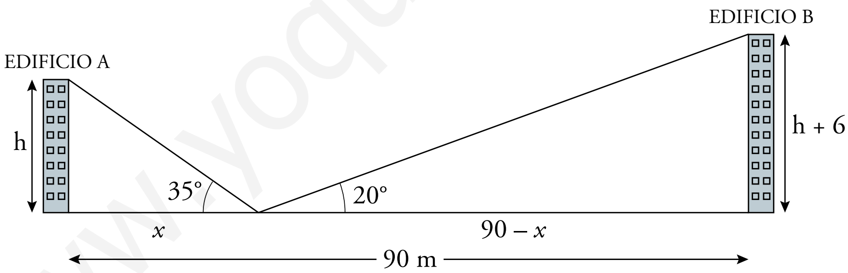
$$\to (tg\ 35° + tg\ 20°) \cdot x = 90 \cdot tg\ 20° + 6 \to x = \frac{90 \cdot tg\ 20° + 6}{tg\ 35° + tg\ 20°} \to x = 36{,}42 \text{ m}$$

$h = tg\ 35° \cdot x - 6 \to h = 19{,}50$ m

Altura del edificio A = h + 6 = 25,50 m

Altura del edificio B = h = 19,50 m

- Segunda solución: el edificio B es más alto que el A.



$$\left.\begin{array}{l} tg\ 35° = \dfrac{h}{x} \\[2ex] tg\ 20° = \dfrac{h+6}{90-x} \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{l} h = x \cdot tg\ 35° \\ tg\ 20° \cdot (90 - x) = h + 6 \end{array}\right\} \to tg\ 20° \cdot (90 - x) = x \cdot tg\ 35° + 6 \to$$

$$\to 90 \cdot tg\ 20° - x \cdot tg\ 20° = x \cdot tg\ 35° + 6 \to 90 \cdot tg\ 20° - 6 = x \cdot (tg\ 35° + tg\ 20°) \to$$

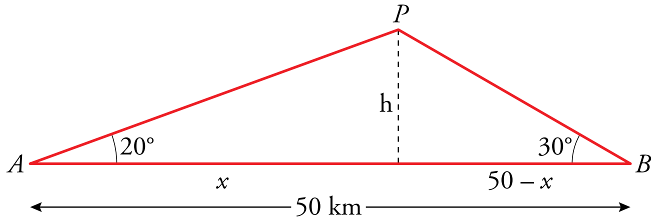
$$\to x = \frac{90 \cdot tg\ 20° - 6}{tg\ 35° + tg\ 20°} \to x = 25{,}14 \text{ m}$$

$h = x \cdot tg\ 35° \to h = 17{,}60$ m

Altura del edificio A = h = 17,60 m

Altura del edificio B = h + 6 = 23,60 m

35. **Un avión P vuela entre dos ciudades A y B que distan entre sí 50 km. Desde el avión se miden los ángulos $\widehat{PAB} = 20°$ y $\widehat{PBA} = 30°$. ¿A qué altura está el avión?**



$$\left.\begin{array}{l} tg\ 20° = \dfrac{h}{x} \\ tg\ 30° = \dfrac{h}{50-x} \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} h = tg\ 20° \cdot x \\ h = tg\ 30° \cdot (50-x) \end{array}\right\} \rightarrow tg\ 20° \cdot x = tg\ 30° \cdot (50-x) \rightarrow$$

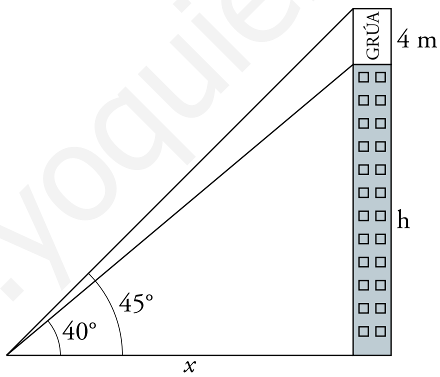
$$\rightarrow tg\ 20° \cdot x = 50 \cdot tg\ 30° - tg\ 30° \cdot x \rightarrow$$

$$\rightarrow x = \frac{50 \cdot tg\ 30°}{tg\ 20° + tg\ 30°} \rightarrow x = 30{,}67 \text{ km}$$

$h = tg\ 20° \cdot x \rightarrow h = 11{,}16$ km

Por tanto, el avión vuela a 11,16 km de altura.

36. **En lo alto de un edificio en construcción hay una grúa de 4 m. Desde un punto del suelo se ve el punto más alto de la grúa bajo un ángulo de 45° con respecto a la horizontal y el punto más alto del edificio bajo un ángulo de 40° con la horizontal. Calcula la altura del edificio.**



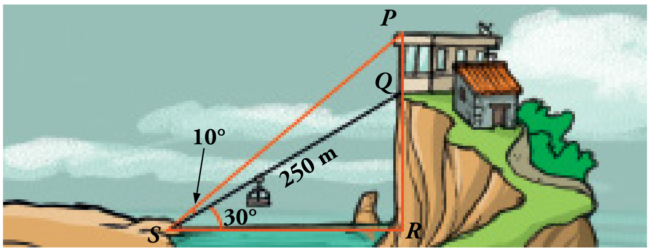
$$\left.\begin{array}{l} tg\ 40° = \dfrac{h}{x} \\ tg\ 45° = \dfrac{h+4}{x} \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} h = tg\ 40° \cdot x \\ h = tg\ 45° \cdot x - 4 \end{array}\right\} \rightarrow tg\ 40° \cdot x = tg\ 45° \cdot x - 4 \rightarrow$$

$$\rightarrow 4 = (tg\ 45° - tg\ 40°) \cdot x \rightarrow x = \frac{4}{tg\ 45° - tg\ 40°} \rightarrow x = 24{,}86 \text{ m}$$

$h = tg\ 40° \cdot x \rightarrow h = 20{,}86$ m

Por tanto, el edificio mide 20,86 m de altura.

37. **Para calcular la altura del edificio, $\overline{PQ}$, hemos medido los ángulos que indica la figura. Sabemos que hay un funicular para ir de S a Q, cuya longitud es de 250 m. Halla $\overline{PQ}$.**



• Calculamos $\overline{SR}$ y $\overline{RQ}$ en el triángulo $\widehat{SRQ}$:

$$sen\ 30° = \frac{\overline{RQ}}{250} \to \overline{RQ} = 250 \cdot sen\ 30° \to \overline{RQ} = 125 \text{ m}$$

$$cos\ 30° = \frac{\overline{SR}}{250} \to \overline{SR} = 250 \cdot cos\ 30° \to \overline{SR} = 125\sqrt{3} \text{ m}$$

• Calculamos $\overline{RP}$ en el triángulo $\widehat{SPR}$:

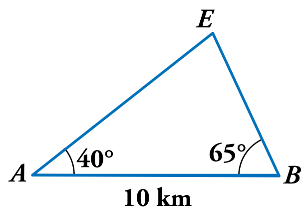
$$tg\ 40° = \frac{\overline{RP}}{\overline{SR}} \to tg\ 40° = \frac{\overline{RP}}{125\sqrt{3}} \to \overline{RP} = 125\sqrt{3} \cdot tg\ 40° \to \overline{RP} = 181{,}67 \text{ m}$$

Luego $\overline{PQ} = \overline{RP} - \overline{RQ} = 181{,}67 \text{ m} - 125 \text{ m} = 56{,}67 \text{ m}$

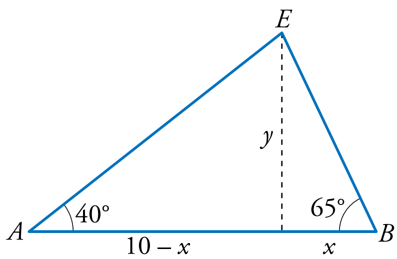
Por tanto, la altura del edificio es de 56,67 m.

38. **Para localizar una emisora clandestina, dos receptores, A y B, que distan entre sí 10 km, orientan sus antenas hacia el punto donde está la emisora.**

Estas direcciones forman con AB ángulos de 40° y 65°. ¿A qué distancia de A y B se encuentra la emisora?



$$\left.\begin{array}{l} tg\ 65° = \dfrac{y}{x} \\ tg\ 40° = \dfrac{y}{10 - x} \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{l} y = tg\ 65° \cdot x \\ y = tg\ 40° \cdot (10 - x) \end{array}\right\} \to$$



$$\to tg\ 65° \cdot x = tg\ 40° \cdot (10 - x) \to tg\ 65° \cdot x = 10 \cdot tg\ 40° - tg\ 40° \cdot x \to$$

$$\to (tg\ 65° + tg\ 40°) \cdot x = 10 \cdot tg\ 40° \to x = \frac{10 \cdot tg\ 40°}{tg\ 65° + tg\ 40°} \to x = 2{,}81 \text{ km}$$

$$y = tg\ 65° \cdot x \to y = 6{,}03 \text{ km}$$

Conocidos x e y podemos hallar las distancias de A y B a la emisora.

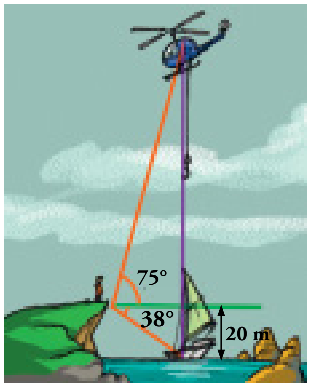
$$sen\ 40° = \frac{y}{\overline{AE}} \to \overline{AE} = \frac{y}{sen\ 40°} \to \overline{AE} = 9{,}38 \text{ km}$$

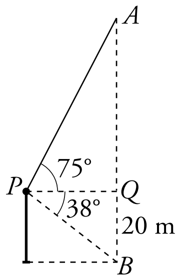
$$sen\ 65° = \frac{y}{\overline{BE}} \to \overline{BE} = \frac{y}{sen\ 65°} \to \overline{BE} = 6{,}65 \text{ km}$$

Por tanto, la emisora se encuentra a 9,38 km de A y a 6,65 km de B.

39. **Desde un acantilado a 20 m sobre el nivel del mar, se observa un helicóptero en prácticas de salvamento.**

Una persona desciende verticalmente hasta un barco en el que alguien está en peligro. Si los ángulos de observación son de 75° para el helicóptero y 38° para el barco, ¿cuánto medirá el cable que va desde el helicóptero al barco?



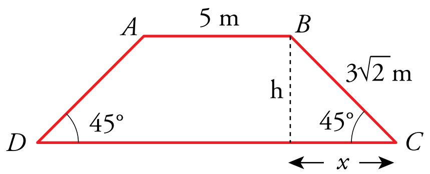


En el triángulo $PQB \rightarrow tg\ 38° = \dfrac{20}{\overline{PQ}} \rightarrow \overline{PQ} = 25{,}6$ m

En el triángulo $PQA \rightarrow tg\ 75° = \dfrac{\overline{AQ}}{\overline{PQ}} \rightarrow \overline{AQ} = 25{,}6 \cdot tg\ 75° = 95{,}5$ m

Longitud del cable = 95,5 + 20 = 115,5 m

40. **En un trapecio isósceles de bases AB y DC, conocemos los lados $\overline{AB} = 5$ m y $\overline{BC} = 3\sqrt{2}$ m, y los ángulos que forma la base mayor con los lados oblicuos, que son de 45°. Halla su área.**



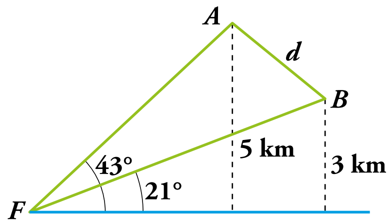
$sen\ 45° = \dfrac{h}{3\sqrt{2}} \rightarrow h = 3$ m

$cos\ 45° = \dfrac{x}{3\sqrt{2}} \rightarrow x = 3$ m

Base mayor = 5 + 3 + 3 = 11 m

Área $= \dfrac{(5+11)\cdot 3}{2} = 24\ m^2$

41. **Desde un faro F se observa un barco A bajo un ángulo de 43° con respecto a la línea de la costa; y un barco B, bajo un ángulo de 21°. El barco A está a 5 km de la costa, y el B, a 3 km. Calcula la distancia entre los barcos.**

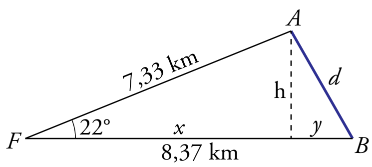


Calculamos $\overline{FA}$ y $\overline{FB}$:

$sen\ 43° = \dfrac{5}{\overline{FA}} \rightarrow \overline{FA} = \dfrac{5}{sen\ 43°} = 7{,}33$ km

$sen\ 21° = \dfrac{3}{\overline{FB}} \rightarrow \overline{FB} = \dfrac{3}{sen\ 21°} = 8{,}37$ km

Para calcular d utilizamos el triángulo de la derecha:



$sen\ 22° = \dfrac{h}{7{,}33}$

$h = 7{,}33 \cdot sen\ 22° = 2{,}74$ km

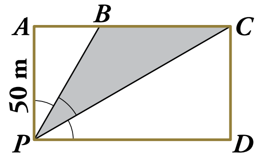
$cos\ 22° = \dfrac{x}{7{,}33} \rightarrow x = 7{,}33 \cdot cos\ 22° = 6{,}8$ km

$y = 8{,}37 - x \rightarrow y = 8{,}37 - 6{,}8 = 1{,}57$ km

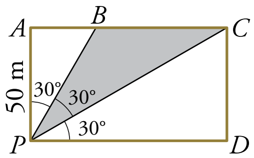
Utilizamos el teorema de Pitágoras: $d = \sqrt{h^2 + y^2} = \sqrt{2{,}74^2 + 1{,}57^2} = 3{,}16$ km

La distancia entre A y B es de 3,16 km.

42. **Para iluminar una parcela rectangular se han colocado tres focos en *P* de modo que los ángulos de iluminación $\widehat{APB}$, $\widehat{BPC}$ y $\widehat{CPD}$ son iguales.**



Una avería apaga el foco central. ¿Cuál es el área y el perímetro de la zona oscurecida, si $\overline{AP}$ = 50 m?



En el triángulo $PAB \rightarrow tg\ 30° = \dfrac{\overline{AB}}{50} \rightarrow \overline{AB} = 28{,}9$ m

En el triángulo $PAC \rightarrow tg\ 60° = \dfrac{\overline{AC}}{50} \rightarrow \overline{AC} = 86{,}6$ m

En el triángulo $PAC \rightarrow cos\ 60° = \dfrac{50}{\overline{PC}} \rightarrow \overline{PC} = 100$ m

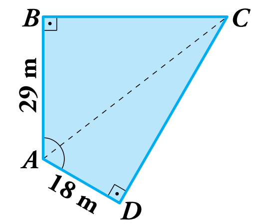
$$\left.\begin{array}{l} \text{Área rectángulo} = 50 \cdot 86{,}6 = 4\,330 \text{ m}^2 \\ \text{Área } APB = \dfrac{28{,}9 \cdot 50}{2} = 722{,}5 \text{ m}^2 \\ \text{Área } PDC = \dfrac{86{,}6 \cdot 50}{2} = 2165 \text{ m}^2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{Área de } PBC: \\ 4\,330 - (722{,}5 + 2165) = 1\,442{,}5 \text{ m}^2 \end{array}$$

Calculamos ahora el perímetro de PBC:

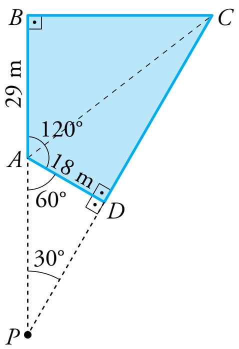
$$\left.\begin{array}{l} \text{En } APB,\ cos\ 30° = \dfrac{50}{\overline{PB}} \rightarrow \overline{PB} = 57{,}7 \text{ m} \\ \overline{BC} = 86{,}6 - 28{,}9 = 57{,}7 \text{ m} \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{Perímetro de } PBC: \\ \overline{PB} + \overline{BC} + \overline{PC} = 215{,}4 \text{ m} \end{array}$$

Página 161

43. **En la parcela $ABCD$ conocemos $\hat{B} = \hat{D} = 90°$; $\hat{A} = 120°$; $\overline{AD} = 18$ m y $\overline{AB} = 29$ m. Queremos averiguar la longitud de la diagonal AC.**



Un amigo topógrafo nos sugiere prolongar los lados BA y CD hasta que se corten en un punto P y averiguar cuánto mide el ángulo $\widehat{APD}$. Hazlo tú.



$\widehat{PAD} = 180° - 120° = 60°$

$\widehat{APD} = 90° - 60° = 30°$

En el triángulo APD, $sen\ 30° = \dfrac{18}{\overline{AP}} \rightarrow \overline{AP} = 36$ m

$\overline{BP} = 29 + 36 = 65$ m

En el triángulo BCP: $tg\ 30° = \dfrac{\overline{BC}}{65} \rightarrow \overline{BC} = 37{,}5$ m

En el triángulo $ABC \rightarrow \overline{AC} = \sqrt{29^2 + 37{,}5^2} = 47{,}4$ m

Problemas "+"

44. **Sobre la circunferencia goniométrica señalamos un ángulo α en el primer cuadrante y a partir de él dibujamos los ángulos:**

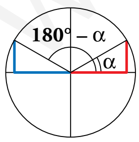
$180° - \alpha$ $\quad$ $180° + \alpha$ $\quad$ $360° - \alpha$

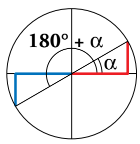
Busca la relación que existre entre:

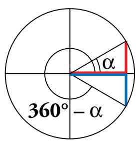
a) ***sen*** **$(180° - \alpha)$ y** ***sen*** **α**
cos **$(180° - \alpha)$ y** ***cos*** **α**
tg **$(180° - \alpha)$ y** ***tg*** **α**

b) ***sen*** **$(180° + \alpha)$ y** ***sen*** **α**
cos **$(180° + \alpha)$ y** ***cos*** **α**
tg **$(180° + \alpha)$ y** ***tg*** **α**

c) ***sen*** **$(360° - \alpha)$ y** ***sen*** **α**
cos **$(360° - \alpha)$ y** ***cos*** **α**
tg **$(360° - \alpha)$ y** ***tg*** **α**







a) $sen\ (180° - \alpha) = sen\ \alpha$
$cos\ (180° - \alpha) = -cos\ \alpha$
$tg\ (180° - \alpha) = -tg\ \alpha$

b) $sen\ (180° + \alpha) = -sen\ \alpha$
$cos\ (180° + \alpha) = -cos\ \alpha$
$tg\ (180° + \alpha) = tg\ \alpha$

c) $sen\ (360° - \alpha) = -sen\ \alpha$
$cos\ (360° - \alpha) = cos\ \alpha$
$tg\ (360° - \alpha) = -tg\ \alpha$

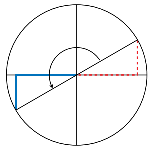
45. **Sitúa el ángulo dado sobre la circunferencia goniométrica y expresa sus razones trigonométricas utilizando un ángulo agudo como en el ejemplo:**

- **Ángulo: 215°**

  ***sen* 215° = –*sen* 35°**

  ***cos* 215° = –*cos* 35°**

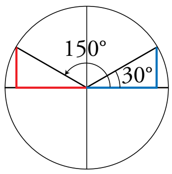
  ***tg* 215° = *tg* 35°**



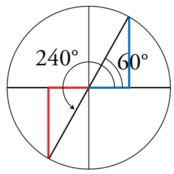
a) 150° **b) 240°** **c) 300°**

d) 225° **e) 100°** **f) 320°**

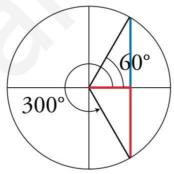
a) *sen* 150° = *sen* 30°
cos 150° = –*cos* 30°
tg 150° = –*tg* 30°



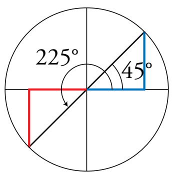
b) *sen* 240° = –*sen* 60°
cos 240° = –*cos* 60°
tg 240° = *tg* 60°



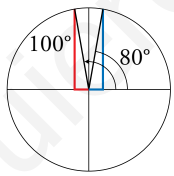
c) *sen* 300° = –*sen* 60°
cos 300° = *cos* 60°
tg 300° = –*tg* 60°



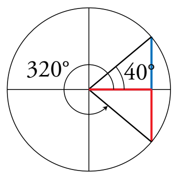
d) *sen* 225° = –*sen* 45°
cos 225° = –*cos* 45°
tg 225° = *tg* 45°



e) *sen* 100° = *sen* 80°
cos 100° = –*cos* 80°
tg 100° = –*tg* 80°



f) *sen* 320° = –*sen* 40°
cos 320° = *cos* 40°
tg 320° = –*tg* 40°



46. **Halla los ángulos comprendidos entre 0° y 360° que verifican las siguientes ecuaciones, como en el ejemplo:**

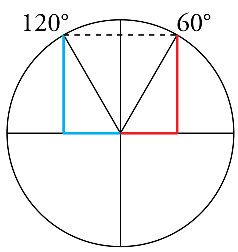
- **1 – 2*cos x* = 0 → *cos x* = 1/2 → *x* = 60°; *x* = 300°**

a) $2\,sen\,x = \sqrt{3}$ **b)** $2\,sen\,x = -\sqrt{2}$ **c)** $3\,tg\,x + 3 = 0$

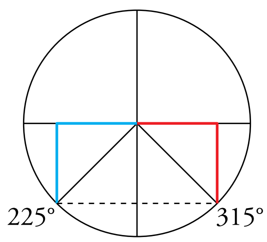
d) $(sen\,x)^2 = 1$ **e)** $(sen\,x)^2 - sen\,x = 0$ **f)** $4(sen\,x)^2 - 1 = 0$

g) $2(cos\,x)^2 - cos\,x - 1 = 0$

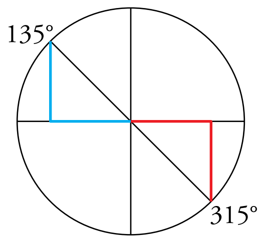
a) $2\,sen\,x = \sqrt{3} \;\rightarrow\; sen\,x = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \;\rightarrow\; \begin{cases} x = 60° \\ x = 120° \end{cases}$



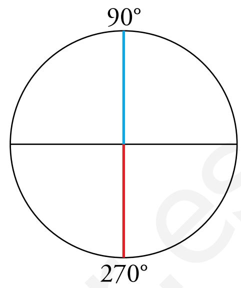
b) $2\,sen\,x = -\sqrt{2} \;\rightarrow\; sen\,x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \;\rightarrow\; \begin{cases} x = 225° \\ x = 315° \end{cases}$



c) $3tg\,x + 3 = 0 \;\rightarrow\; 3tg\,x = -3 \;\rightarrow\; tg\,x = -1 \;\rightarrow\; \begin{cases} x = 135° \\ x = 315° \end{cases}$



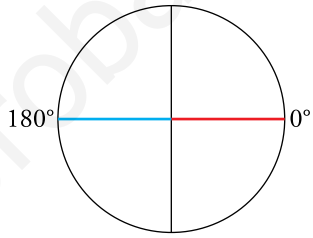
d) $sen^2\,x = 1 \;\rightarrow\; sen\,x = \pm 1 \;\rightarrow\; \begin{cases} sen\,x = 1 & \rightarrow\; x = 90° \\ sen\,x = -1 & \rightarrow\; x = 270° \end{cases}$



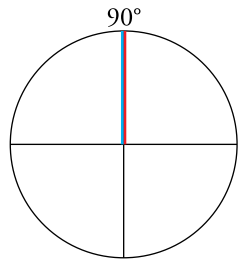
e) $(sen\,x)^2 - sen\,x = 0$

$sen\,x \cdot (sen\,x - 1) = 0$

- $sen\,x = 0 \;\rightarrow\; \begin{cases} x = 0° \\ x = 180° \end{cases}$



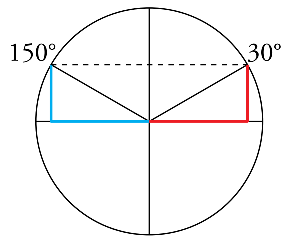
- $sen\,x - 1 = 0 \;\rightarrow\; sen\,x = 1 \;\rightarrow\; x = 90°$



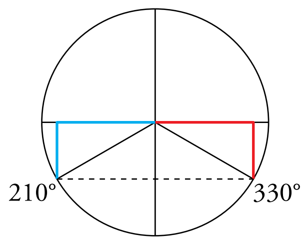
f) $4 \cdot (sen\,x)^2 = 0 \;\rightarrow\; 4sen^2\,x = 1 \;\rightarrow\; sen^2\,x = \dfrac{1}{4} \;\rightarrow$

$\rightarrow\; sen\,x = \pm\dfrac{1}{2}$

- $sen\,x = \dfrac{1}{2} \;\rightarrow\; \begin{cases} x = 30° \\ x = 150° \end{cases}$



- $sen\,x = -\dfrac{1}{2} \;\rightarrow\; \begin{cases} x = 210° \\ x = 330° \end{cases}$



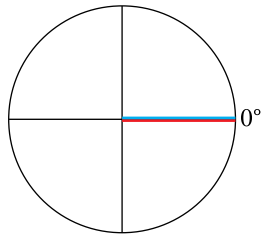
g) $2(\cos x)^2 - \cos x - 1 = 0$

Efectuamos el cambio de variable $\cos x = t \rightarrow 2t^2 - t - 1 = 0 \rightarrow$

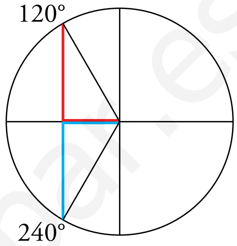
$$\rightarrow t = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{1 \pm 3}{4} = \begin{cases} t = 1 \\ t = -1/2 \end{cases}$$

Deshacemos el cambio de variable:

$t = 1 \rightarrow \cos x = 1 \rightarrow x = 0°$



$$t = -\frac{1}{2} \rightarrow \cos x = -\frac{1}{2} \rightarrow \begin{cases} x = 120° \\ x = 240° \end{cases}$$



47. **Usando las relaciones fundamentales, demuestra estas igualdades:**

a) $(\text{sen}\ \alpha + \cos \alpha)^2 + (\text{sen}\ \alpha - \cos \alpha)^2 = 2$

b) $\dfrac{(\text{sen}\ \alpha)^3 + \text{sen}\ \alpha \cdot (\cos \alpha)^2}{\text{sen}\ \alpha} = 1$

c) $\dfrac{(\text{sen}\ \alpha)^3 + \text{sen}\ \alpha \cdot (\cos \alpha)^2}{\cos \alpha} = \text{tg}\ \alpha$

d) $1 + (\text{tg}\ \alpha)^2 = \dfrac{1}{(\cos \alpha)^2}$

a) $(\text{sen}\ \alpha + \cos \alpha)^2 + (\text{sen}\ \alpha - \cos \alpha)^2 =$

$$= (\underbrace{\text{sen}^2\ \alpha + \cos^2 \alpha}_{1} + 2\text{sen}\ \alpha \cos \alpha) + (\underbrace{\text{sen}^2\ \alpha + \cos^2 \alpha}_{1} - 2\text{sen}\ \alpha \cos \alpha) =$$

$$= 1 + 2\text{sen}\ \alpha \cos \alpha + 1 - 2\text{sen}\ \alpha \cos \alpha = 2$$

b) $\dfrac{\text{sen}^3\ \alpha + \text{sen}\ \alpha \cdot \cos^2 \alpha}{\text{sen}\ \alpha} = \dfrac{\text{sen}\ \alpha \cdot (\text{sen}^2\ \alpha + \cos^2 \alpha)}{\text{sen}\ \alpha} = \text{sen}^2\ \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

c) $\dfrac{\text{sen}^3\ \alpha + \text{sen}\ \alpha \cdot \cos^2 \alpha}{\cos \alpha} = \dfrac{\text{sen}\ \alpha \cdot (\text{sen}^2\ \alpha + \cos^2 \alpha)}{\cos \alpha} = \dfrac{\text{sen}\ \alpha \cdot 1}{\cos \alpha} = \dfrac{\text{sen}\ \alpha}{\cos \alpha} = \text{tg}\ \alpha$

d) $1 + \text{tg}^2\ \alpha = 1 + \dfrac{\text{sen}^2\ \alpha}{\cos^2 \alpha} = \dfrac{\cos^2 \alpha + \text{sen}^2\ \alpha}{\cos^2 \alpha} = \dfrac{1}{\cos^2 \alpha}$

Reflexiona sobre la teoría

48. **¿Verdadero o falso? Justifica y pon ejemplos.**

a) En un ángulo agudo, el seno es siempre mayor que la tangente.

b) No existe ningún ángulo α tal que $sen\ \alpha = 3/5$ y $tg\ \alpha = 1/4$.

c) El coseno de un ángulo de π radianes es igual a –1.

d) El valor máximo de la tangente de un ángulo es 1.

e) Si $270° < \alpha < 360°$, entonces $tg\ \alpha < 0$ y $cos\ \alpha > 0$.

f) No existe ningún ángulo α tal que: $sen\ \alpha + 2cos\ \alpha = 0$

g) La altura de un triángulo es igual al producto de uno de sus lados por el seno del ángulo que forma dicho lado con la base.

a) Falso, por ejemplo, $sen\ 45° = \dfrac{\sqrt{2}}{2} < tg\ 45° = 1$.

b) Verdadero.

Si $sen\ \alpha = \dfrac{3}{5}$ y $tg\ \alpha = \dfrac{1}{4}$ entonces:

$tg\ \alpha = \dfrac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha} \to cos\ \alpha = \dfrac{sen\ \alpha}{tg\ \alpha} \to cos\ \alpha = \dfrac{12}{5}$, imposible.

c) Verdadero.

d) Falso, la tangente de un ángulo puede tomar cualquier valor real.

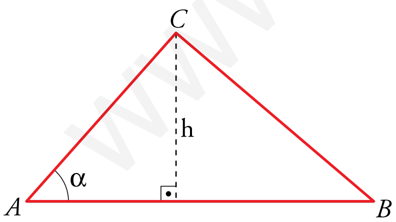
e) Verdadero.

f) Falso:

$$sen\ \alpha + 2cos\ \alpha = 0 \to sen\ \alpha = -2cos\ \alpha \to \frac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha} = -2 \to$$

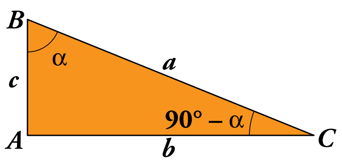
$$\to tg\ \alpha = -2 \to \begin{cases} \alpha = 116°\ 33'\ 54'' \\ \alpha = 296°\ 33'\ 54'' \end{cases}$$

g) Verdadero.



$$sen\ \alpha = \frac{h}{\overline{AC}} \to h = \overline{AC} \cdot sen\ \alpha$$

49. **Los dos ángulos agudos de un triángulo rectángulo se llaman complementarios porque su suma es uno recto. Observa la figura, copia y completa la tabla, y expresa simbólicamente lo que obtienes:**



	α	$90° - \alpha$
sen	b/a	c/a
cos	c/a	b/a
tg	b/c	c/b

$sen\ \alpha = cos\ (90° - \alpha)$

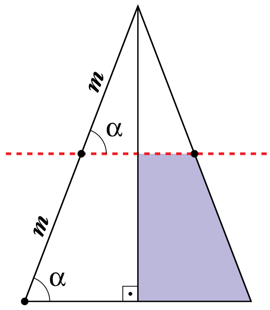
$cos\ \alpha = sen\ (90° - \alpha)$

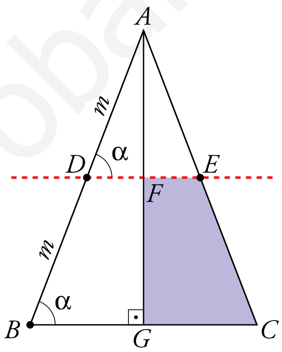
$tg\ \alpha = \dfrac{1}{tg\ (90° - \alpha)}$

Página 162

Entrénate resolviendo problemas

- **¿Qué fracción de la superficie del triángulo se ha coloreado?**





Los triángulos $\widehat{ABC}$ y $\widehat{ADE}$ están en posición de Tales,

son semejantes y la razón de semejanza es $\dfrac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \dfrac{m}{2m} = \dfrac{1}{2}$.

Si la razón de semejanza es $\dfrac{1}{2}$:

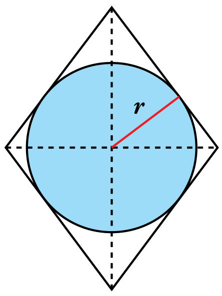
$$\text{Área } \widehat{ADE} = \frac{1}{4} \text{ Área } \widehat{ABC} \rightarrow \text{Área } \widehat{AFE} = \frac{1}{4}\text{Área } \widehat{AGC}$$

Por tanto:

$$\text{Área } \widehat{FEGC} = \text{Área } \widehat{AGC} - \text{Área } \widehat{AFE} = \text{Área } \widehat{AGC} - \frac{1}{4} \text{ Área } \widehat{AGC} = \frac{3}{4} \text{ Área } \widehat{AGC} =$$

$$= \frac{3}{4}\left[\frac{1}{2} \text{ Área } \widehat{ABC}\right] = \frac{3}{8} \text{ Área } \widehat{ABC}$$

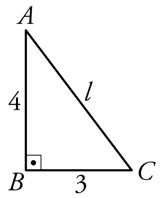
- **El rombo tiene una superficie de 24 cm², y su diagonal menor es igual a los tres cuartos de la mayor. Calcula el área del círculo inscrito.**



- En primer lugar hallaremos la longitud de las diagonales y del lado del rombo.

$$\left.\begin{array}{l} \text{Diagonal mayor} = x \\ \text{Diagonal menor} = \dfrac{3}{4}x \\ \text{Área rombo} = 24 \text{ cm}^2 \end{array}\right\} \rightarrow \frac{1}{2} \cdot \left(x \cdot \frac{3}{4}x\right) = 24 \rightarrow \frac{3x^2}{8} = 24 \rightarrow x^2 = 64 \rightarrow x = 8 \text{ cm}$$

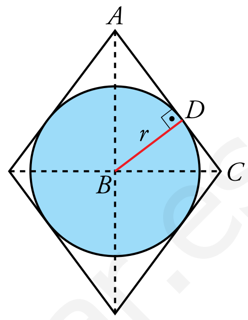
Luego: Diagonal mayor = 8 cm; Diagonal menor = 6 cm



Por el teorema de Pitágoras: $l = \sqrt{4^2 + 3^2} \to l = 5$ cm

Por tanto, el lado del rombo mide 5 cm.

- Ahora hallaremos la longitud del radio del círculo.



El círculo es tangente al rombo en $D \to BD \perp AC$, es decir, BD es la altura sobre la hipotenusa del triángulo rectángulo $\widehat{ABC}$ y divide a este en otros dos triángulos rectángulos, $\widehat{ABD}$ y $\widehat{BCD}$.

$$\left.\begin{array}{l} \text{En } \widehat{ABC}\text{: } sen\ \hat{A} = \dfrac{3}{5} \\[2ex] \text{En } \widehat{ABD}\text{: } sen\ \hat{A} = \dfrac{\overline{BD}}{4} \end{array}\right\} \to \frac{3}{5} = \frac{\overline{BD}}{4} \to \overline{BD} = \frac{3 \cdot 4}{5} = 2{,}4 \text{ cm} \to$$ El radio del círculo es $\overline{BD} = 2{,}4$ cm.

- Finalmente hallamos el área del círculo: Área = $\pi \cdot 2{,}4^2 = 5{,}76\pi$ cm^2 = 18,09 cm^2

Infórmate

Eclipses

- **Completa en tu cuaderno los datos que faltan en la tabla, y comprueba que el ángulo β es similar si se calcula a partir de los datos relativos a la Luna o de los relativos al Sol.**

	DIÁMETRO (km)	DISTANCIA MEDIA A LA TIERRA (km)	*tg* α	β
LUNA	**3 500**	**384 000**	**?**	**?**
SOL	**1 399 000**	**149 600 000**	**?**	**?**

LUNA:

Diámetro = 3 500 km $\to R = 1\,750$ km

$tg\ \alpha = \dfrac{1750}{384\,000} = 0{,}004557 \to \alpha = 0°\ 15'\ 40'' \to \beta = 2\alpha = 0°\ 31'\ 20''$

SOL:

Diámetro = 1 399 000 $\to R' = 699\,500$

$tg\ \alpha = \dfrac{699\,500}{149\,600\,000} = 0{,}004676 \to \alpha = 0°\ 16'\ 4'' \to \beta = 0°\ 32'\ 9''$

	DIÁMETRO (km)	DISTANCIA MEDIA A LA TIERRA (km)	*tg* α	β
LUNA	3 500	384 000	0,004557	0° 31' 20"
SOL	1 399 000	149 600 000	0,004676	0° 32' 9"

Página 163

Autoevaluación

1. **a) Si $\cos\alpha = 0{,}52$ y $\alpha < 90°$, calcula $\mathrm{sen}\,\alpha$ y $\mathrm{tg}\,\alpha$.**

b) Si $\mathrm{tg}\,\beta = \dfrac{12}{5}$ y $\beta < 90°$, calcula $\mathrm{sen}\,\beta$ y $\cos\beta$.

a) $\mathrm{sen}\,\alpha = \sqrt{1-(\cos\alpha)^2} = \sqrt{1-0{,}52^2} = 0{,}85$; $\mathrm{tg}\,\alpha = 0{,}85/0{,}52 = 1{,}63$

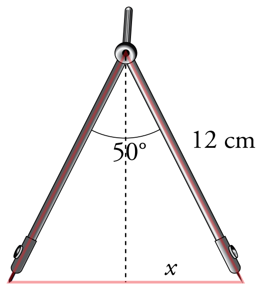
b) $\left.\begin{array}{l} \mathrm{tg}\,\beta = \dfrac{\mathrm{sen}\,\beta}{\cos\beta} = \dfrac{12}{5} \\ (\mathrm{sen}\,\beta)^2 + (\cos\beta)^2 = 1 \end{array}\right\}$ $\mathrm{sen}\,\beta = (12/5)\cos\beta$

$\dfrac{144}{25}(\cos\beta)^2 + (\cos\beta)^2 = 1 \rightarrow \dfrac{169}{25}(\cos\beta)^2 = 1 \rightarrow$

$\rightarrow (\cos\beta)^2 = \dfrac{25}{169} \rightarrow \cos\beta = \dfrac{5}{13}$

$\cos\beta = \dfrac{5}{13} \rightarrow \mathrm{sen}\,\beta = \dfrac{12}{5}\cdot\dfrac{5}{13} = \dfrac{12}{13}$

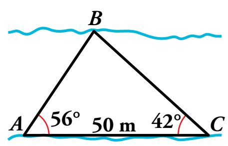
2. **Los brazos de un compás, que miden 12 cm, forman un ángulo de 50°. ¿Cuál es el radio de la circunferencia que puede trazarse con esa abertura?**

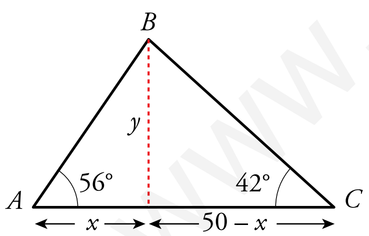


$\mathrm{sen}\,25° = \dfrac{x}{12} \rightarrow x \approx 5{,}07$ cm

Radio de la circunferencia ≈ 10,14 cm

3. **Para medir la anchura de un río, hemos tomado las medidas indicadas en la figura. Hállala.**





$\mathrm{tg}\,56° = \dfrac{y}{x} \rightarrow y = x\,\mathrm{tg}\,56°$

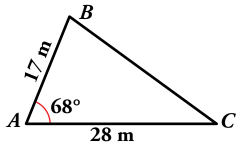
$\mathrm{tg}\,42° = \dfrac{y}{50-x} \rightarrow y = (50-x)\,\mathrm{tg}\,42°$

$x\,\mathrm{tg}\,56° = (50-x)\,\mathrm{tg}\,42° \rightarrow x = \dfrac{50\cdot\mathrm{tg}\,42°}{\mathrm{tg}\,56° + \mathrm{tg}\,42°} \approx 18{,}89$

$y = x\,\mathrm{tg}\,56° \approx 28$ m

El río tiene 28 m de anchura.

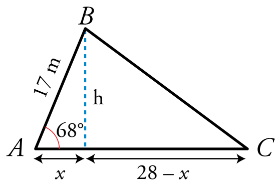
4. **En este triángulo, halla la altura sobre AC, el área del triángulo y el ángulo $\hat{C}$.**



- Altura sobre AC → h

$sen\ 68° = \frac{h}{17} \to h = 15,76$ m

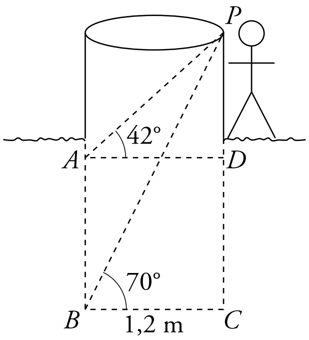
- Área del triángulo $= \frac{28 \cdot 15,76}{2} = 220,64\ m^2$

- 

$cos\ 68° = \frac{x}{17} \to x = 6,37$ m; $28 - x = 21,63$ m

$tg\ \hat{C} = \frac{h}{28 - x} = 0,729 \to \hat{C} = 36°\ 5'\ 31'' \approx 36°$

5. **En un huerto hay un pozo de 1,2 m de ancho. Cuando está vacío vemos, desde el brocal, el borde opuesto del fondo bajo un ángulo de 70° con la horizontal. Cuando el agua sube, vemos el borde opuesto del agua bajo un ángulo de 42°. ¿Cuál es la altura del pozo? ¿Cuánto subió el agua?**



En el triángulo $PBC \to tg\ 70° = \frac{\overline{PC}}{1,2} \to \overline{PC} = 3,3$ m

En el triángulo $PAD \to tg\ 42° = \frac{\overline{PD}}{1,2} \to \overline{PD} = 1,1$ m

Altura del pozo: $\overline{PC} = 3,3$ m

Altura del agua: $\overline{AB} = \overline{PC} - \overline{PD} = 3,3 - 1,1 = 2,2$ m

6. **Si $cos\ \alpha = -1/5$ y $tg\ \alpha < 0$, indica en qué cuadrante está el ángulo α y calcula sus restantes razones trigonométricas.**

$$\left.\begin{array}{l} cos\ \alpha = -\frac{1}{5} < 0 \to \alpha \in \text{II o III cuadrante} \\ tg\ \alpha < 0 \to \alpha \in \text{II o IV cuadrante} \end{array}\right\} \to \alpha \in \text{II cuadrante}$$

- $sen^2\ \alpha + cos^2\ \alpha = 1 \to sen^2\ \alpha = 1 - cos^2\ \alpha \to sen^2\ \alpha = 1 - \left(-\frac{1}{5}\right)^2 \to$

$$\to sen^2\ \alpha = \frac{24}{25} \to sen\ \alpha = \sqrt{\frac{24}{25}} \to sen\ \alpha = \frac{2\sqrt{6}}{5}$$

- $tg\ \alpha = \frac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha} \to tg\ \alpha = \frac{\frac{2\sqrt{6}}{5}}{-\frac{1}{5}} \to tg\ \alpha = -2\sqrt{6}$

Por tanto, $sen\ \alpha = \frac{2\sqrt{6}}{5}$, $cos\ \alpha = -\frac{1}{5}$ y $tg\ \alpha = -2\sqrt{6}$.

Página 163

Autoevaluación

1. **a) Si $\cos\alpha = 0{,}52$ y $\alpha < 90°$, calcula $sen\,\alpha$ y $tg\,\alpha$.**

b) Si $tg\,\beta = \dfrac{12}{5}$ y $\beta < 90°$, calcula $sen\,\beta$ y $\cos\beta$.

a) $sen\,\alpha = \sqrt{1-(\cos\alpha)^2} = \sqrt{1-0{,}52^2} = 0{,}85$; $tg\,\alpha = 0{,}85/0{,}52 = 1{,}63$

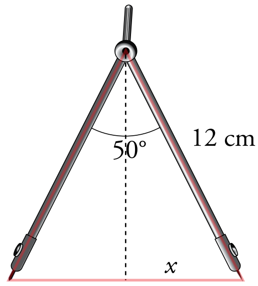
b) $\left.\begin{array}{l} tg\,\beta = \dfrac{sen\,\beta}{\cos\beta} = \dfrac{12}{5} \\ (sen\,\beta)^2 + (\cos\beta)^2 = 1 \end{array}\right\}$ $sen\,\beta = (12/5)\cos\beta$

$$\frac{144}{25}(\cos\beta)^2 + (\cos\beta)^2 = 1 \to \frac{169}{25}(\cos\beta)^2 = 1 \to$$

$$\to (\cos\beta)^2 = \frac{25}{169} \to \cos\beta = \frac{5}{13}$$

$$\cos\beta = \frac{5}{13} \to sen\,\beta = \frac{12}{5}\cdot\frac{5}{13} = \frac{12}{13}$$

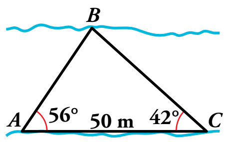
2. **Los brazos de un compás, que miden 12 cm, forman un ángulo de 50°. ¿Cuál es el radio de la circunferencia que puede trazarse con esa abertura?**

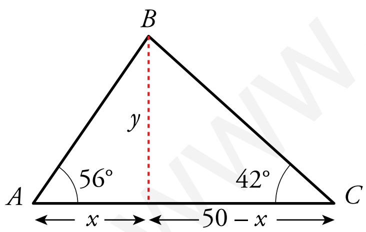


$sen\,25° = \dfrac{x}{12} \to x \approx 5{,}07$ cm

Radio de la circunferencia ≈ 10,14 cm

3. **Para medir la anchura de un río, hemos tomado las medidas indicadas en la figura. Hállala.**





$$tg\,56° = \frac{y}{x} \to y = x\,tg\,56°$$

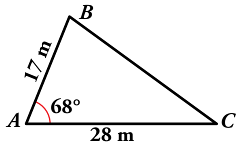
$$tg\,42° = \frac{y}{50-x} \to y = (50-x)\,tg\,42°$$

$$x\,tg\,56° = (50-x)\,tg\,42° \to x = \frac{50\cdot tg\,42°}{tg\,56° + tg\,42°} \approx 18{,}89$$

$y = x\,tg\,56° \approx 28$ m

El río tiene 28 m de anchura.

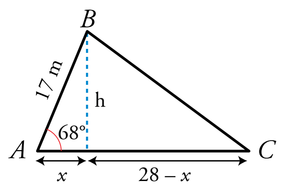
4. En este triángulo, halla la altura sobre AC, el área del triángulo y el ángulo $\hat{C}$.



- Altura sobre $AC \to$ h

$$sen\ 68° = \frac{h}{17} \to h = 15{,}76\text{ m}$$

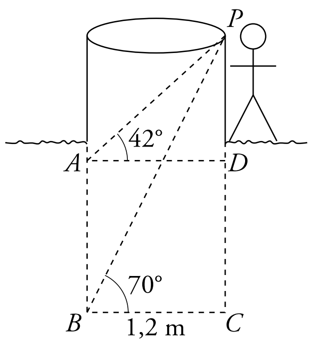
- Área del triángulo $= \dfrac{28 \cdot 15{,}76}{2} = 220{,}64\text{ m}^2$

- 

$$cos\ 68° = \frac{x}{17} \to x = 6{,}37\text{ m};\ \ 28 - x = 21{,}63\text{ m}$$

$$tg\ \hat{C} = \frac{h}{28 - x} = 0{,}729 \to \hat{C} = 36°\ 5'\ 31'' \approx 36°$$

5. En un huerto hay un pozo de 1,2 m de ancho. Cuando está vacío vemos, desde el brocal, el borde opuesto del fondo bajo un ángulo de 70° con la horizontal. Cuando el agua sube, vemos el borde opuesto del agua bajo un ángulo de 42°. ¿Cuál es la altura del pozo? ¿Cuánto subió el agua?



En el triángulo $PBC \to tg\ 70° = \dfrac{\overline{PC}}{1{,}2} \to \overline{PC} = 3{,}3$ m

En el triángulo $PAD \to tg\ 42° = \dfrac{\overline{PD}}{1{,}2} \to \overline{PD} = 1{,}1$ m

Altura del pozo: $\overline{PC} = 3{,}3$ m

Altura del agua: $\overline{AB} = \overline{PC} - \overline{PD} = 3{,}3 - 1{,}1 = 2{,}2$ m

6. Si $cos\ \alpha = -1/5$ y $tg\ \alpha < 0$, indica en qué cuadrante está el ángulo α y calcula sus restantes razones trigonométricas.

$$\left.\begin{array}{l} cos\ \alpha = -\frac{1}{5} < 0 \to \alpha \in \text{II o III cuadrante} \\ tg\ \alpha < 0 \to \alpha \in \text{II o IV cuadrante} \end{array}\right\} \to \alpha \in \text{II cuadrante}$$

- $sen^2\ \alpha + cos^2\ \alpha = 1 \to sen^2\ \alpha = 1 - cos^2\ \alpha \to sen^2\ \alpha = 1 - \left(-\frac{1}{5}\right)^2 \to$

$$\to sen^2\ \alpha = \frac{24}{25} \to sen\ \alpha = \sqrt{\frac{24}{25}} \to sen\ \alpha = \frac{2\sqrt{6}}{5}$$

- $tg\ \alpha = \dfrac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha} \to tg\ \alpha = \dfrac{\frac{2\sqrt{6}}{5}}{-\frac{1}{5}} \to tg\ \alpha = -2\sqrt{6}$

Por tanto, $sen\ \alpha = \dfrac{2\sqrt{6}}{5}$, $cos\ \alpha = -\dfrac{1}{5}$ y $tg\ \alpha = -2\sqrt{6}$.

Página 165

Resuelve

1. **El día después de la PRIMERA EXCURSIÓN van andando al bosquecillo *B*, y de allí, en barca, a *M*.**

Describe este último itinerario con vectores, $\overrightarrow{OB}$ + …, y con coordenadas.

$\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{OM} \to (-7, -3) + (12, 12) = (5, 9)$

2. **En la SEGUNDA EXCURSIÓN, los viajes por el río están descritos así: $\overrightarrow{OX} = (0, 4) + t(1, 1)$.**

a) Señala a qué lugares se llega para $t = 4$, $t = -1$ y $t = 0$.

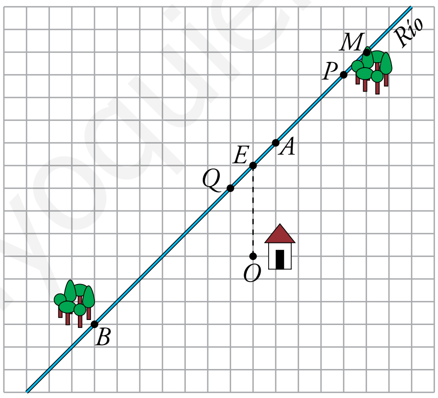
b) ¿Qué valor hay que dar a t para llegar al bosquecillo *B*?

Viajes por el río: $\overrightarrow{OX} = (0,4) + t(1, 1)$

a) $t = 4 \to (0, 4) + (4,4) = (4,8) \to$ Se llega al punto *P*.

$t = -1 \to (0, 4) + (-1, -1) = (-1, 3) \to$ Se llega al punto *Q*.

$t = 0 \to (0, 4) + (0, 0) = (0, 4) \to$ Se llega al punto *E*.



b) $\overrightarrow{OB} = (-7, -3)$

$(0, 4) + t(1, 1) = (-7, -3)$

$(0, 4) + (t, t) = (-7, -3)$

$(t, 4 + t) = (-7, -3) \to \begin{cases} t = -7 \\ 4 + t = -3 \end{cases} \to t = -7$

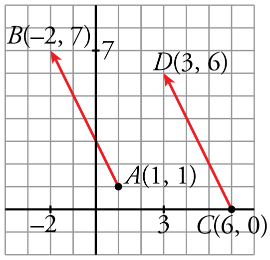
Para llegar al bosquecillo *B* hay que dar a t el valor -7.

1 Vectores en el plano

Página 166

1. Representa los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$, siendo $A(1, 1)$, $B(-2, 7)$, $C(6, 0)$, $D(3, 6)$ y observa que son iguales.

Comprueba que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ hallando sus coordenadas. Calcula su módulo.



$\overrightarrow{AB} = (-2, 7) - (1, 1) = (-3, 6)$

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-3)^2 + 6^2} = \sqrt{9 + 36} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$

$\overrightarrow{CD} = (3, 6) - (6, 0) = (-3, 6)$

$|\overrightarrow{CD}| = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$

2. Tenemos tres puntos de coordenadas:

$$A(3, -1),\ B(4, 6),\ C(0, 0)$$

Halla las coordenadas del punto D para que los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$ sean iguales.

Llamamos (a, b) a las coordenadas del punto D.

$\overrightarrow{AB} = (4, 6) - (3, -1) = (1, 7)$

$\overrightarrow{CD} = (a, b) - (0, 0) = (a, b)$

Como $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \rightarrow (1, 7) = (a, b)$

Las coordenadas del punto D son $(1, 7)$.

2 Operaciones con vectores

Página 167

1. a) Representa los vectores $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ y $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$, siendo $A(1, 3)$, $B(4, 5)$ y $C(6, -2)$. Halla sus coordenadas.

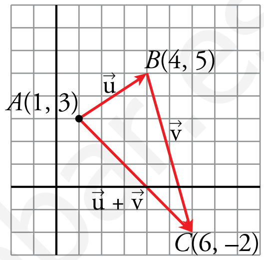
b) Representa $\vec{u} + \vec{v}$ y halla sus coordenadas.

c) Representa $3\vec{u}$, $-2\vec{u}$ y $0\vec{v}$ y halla sus coordenadas.

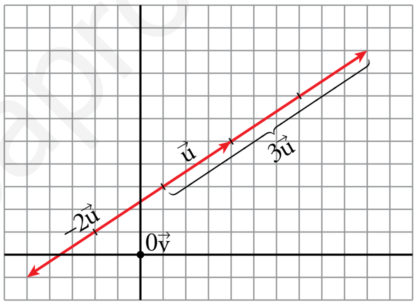
d) Representa y halla las coordenadas del vector: $3\vec{u} - 4\vec{v}$

a) $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = (4, 5) - (1, 3) = (3, 2)$

$\vec{v} = \overrightarrow{BC} = (6, -2) - (4, 5) = (2, -7)$



b) $\left.\begin{array}{l}\vec{u}\,(3, 2)\\ \vec{v}\,(2, -7)\end{array}\right\}\ \vec{u} + \vec{v} = (3, 2) + (2, -7) = (5, -5)$

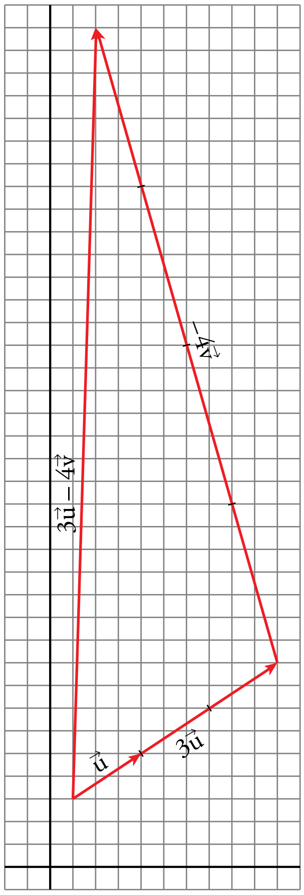


c) $3\vec{u} = 3\,(3, 2) = (9, 6)$

$-2\vec{u} = -2\,(3, 2) = (-6, -4)$

$0\vec{u} = (0, 0)$

d) $3\vec{u} - 4\vec{v} = 3\,(3, 2) - 4\,(2, -7) = (9, 6) - (8, -28) = (1, 34)$



Página 168

2. Comprueba si cada uno de los siguientes pares de vectores tienen o no la misma dirección:

a) $\vec{u}(3, -1)$, $\vec{v}(-3, 1)$ **b)** $\vec{u}(2, -4)$, $\vec{v}(1, 2)$

c) $\vec{u}(-2, 0)$, $\vec{v}(4, 0)$ **d)** $\vec{u}(5, 2)$, $\vec{v}(2,5; 1)$

e) $\vec{u}(-2, 6)$, $\vec{v}(-3, 1)$ **f)** $\vec{u}(0, -1)$, $\vec{v}(-2, 0)$

a) $\frac{3}{-3} = \frac{-1}{1} \to \vec{u}$ y $\vec{v}$ tienen la misma dirección.

b) $\frac{2}{1} \neq \frac{-4}{2} \to \vec{u}$ y $\vec{v}$ no tienen la misma dirección.

c) $\vec{v} = -2\vec{u} \to \vec{u}$ y $\vec{v}$ tienen la misma dirección.

d) $\frac{5}{2,5} = \frac{2}{1} \to \vec{u}$ y $\vec{v}$ tienen la misma dirección.

e) $\frac{-2}{-3} \neq \frac{6}{1} \to \vec{u}$ y $\vec{v}$ no tienen la misma dirección.

f) No existe $k \in \mathbb{R}$ tal que $\vec{v} = k\vec{u} \to \vec{u}$ y $\vec{v}$ no tienen la misma dirección.

3. Dados los siguientes vectores:

$$\vec{u}(-5, 8),\ \vec{v}(-41, -10),\ \vec{w}(3, 6)$$

a) Halla las coordenadas de $3\vec{u} - 2\vec{v} + 10\vec{w}$.

b) Averigua el valor de x e y para que se cumpla:

$$x\vec{u} + y\vec{w} = \vec{v}$$

a) $3\vec{u} - 2\vec{v} + 10\vec{w} = 3(-5, 8) - 2(-41, -10) + 10(3, 6) =$

$$= (-15, 24) - (-82, -20) + (30, 60) = (97, 104)$$

b) $x\vec{u} + y\vec{w} = \vec{v}$

$x(-5, 8) + y(3, 6) = (-41, -10) \to (-5x, 8x) + (3y, 6y) = (-41, -10)$

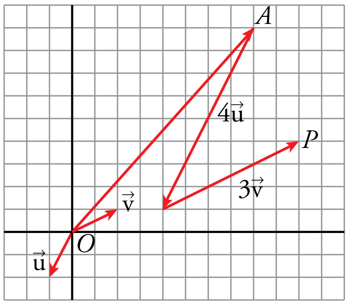
$$\left.\begin{aligned} -5x + 3y &= -41 \\ 8x + 6y &= -10 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} 10x - 6y &= 82 \\ 8x + 6y &= -10 \\ \hline 18x \quad &= 72 \\ x &= 4 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 8 \cdot 4 + 6y &= -10 \\ 6y &= -42 \\ y &= -7 \end{aligned}$$

Por tanto, $4\vec{u} - 7\vec{w} = \vec{v}$.

3 Vectores que representan puntos

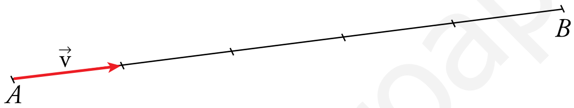
Página 169

1. **Desde el punto $A(8, 9)$ nos movemos en la dirección de $\vec{u}(-1, -2)$ cuatro veces su longitud. Después, nos movemos el triple de $\vec{v}(2, 1)$. ¿A qué punto llegamos?**



$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + 4\vec{u} + 3\vec{v} = (8, 9) + 4(-1, -2) + 3(2, 1) = (10, 4)$

2. **Dividimos el segmento de extremos $A(1, 2)$ y $B(16, 12)$ en cinco partes iguales. Halla las coordenadas de los cuatro puntos de separación.**



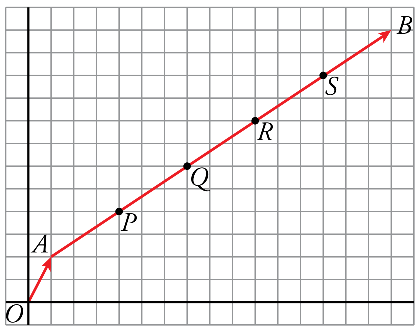
$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (16, 12) - (1, 2) = (15, 10)$

$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{5}\overrightarrow{AB} = (1, 2) + (3, 2) = (4, 4)$

$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OP} + \frac{1}{5}\overrightarrow{AB} = (4, 4) + (3, 2) = (7, 6)$

$\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OQ} + \frac{1}{5}\overrightarrow{AB} = (7, 6) + (3, 2) = (10, 8)$

$\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OR} + \frac{1}{5}\overrightarrow{AB} = (10, 8) + (3, 2) = (13, 10)$



Las coordenadas de P son (4, 4); las de Q, (7, 6); las de R, (10, 8), y las de S, (13, 10).

4 Punto medio de un segmento

Página 170

1. Halla las coordenadas del punto medio de cada segmento:

a) $A(-2, 5)$, $B(4, 1)$

b) $C(7, -3)$, $D(-5, 1)$

c) $E(1, 4)$, $F(7, 2)$

d) $G(-3, 5)$, $H(4, 0)$

a) $M\left(\frac{-2+4}{2}, \frac{5+1}{2}\right) \rightarrow M(1, 3)$

b) $M\left(\frac{7+(-5)}{2}, \frac{-3+1}{2}\right) \rightarrow M(1, -1)$

c) $M\left(\frac{1+7}{2}, \frac{4+2}{2}\right) \rightarrow M(4, 3)$

d) $M\left(\frac{-3+4}{2}, \frac{5+0}{2}\right) \rightarrow M\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right)$

2. Halla las coordenadas del punto simétrico de A respecto de P en los siguientes casos:

a) $A(4, -1)$, $P(-7, 2)$

b) $A(2, 4)$, $P(5, -1)$

a) Llamamos $A'(x, y)$ al punto simétrico de A respecto de P. El punto P será el punto medio del segmento de extremos A y A'.

$$\left.\begin{array}{l} -7 = \frac{4+x}{2} \rightarrow -14 = 4 + x \rightarrow x = -18 \\ 2 = \frac{-1+y}{2} \rightarrow 4 = -1 + y \rightarrow y = 5 \end{array}\right\} \text{ Las coordenadas de } A' \text{ son } (-18, 5).$$

b) $A'(x, y)$

$$\left.\begin{array}{l} 5 = \frac{2+x}{2} \rightarrow 10 = 2 + x \rightarrow x = 8 \\ -1 = \frac{4+y}{2} \rightarrow -2 = 4 + y \rightarrow y = -6 \end{array}\right\} \text{ Las coordenadas de } A' \text{ son } (8, -6).$$

5 Puntos alineados

Página 171

1. Comprueba si los puntos $R(2, 7)$, $S(5, -1)$ y $T(15, -25)$ están alineados.

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{RS} = (5-2, -1-7) = (3, -8)\\ \overrightarrow{ST} = (15-5, -25+1) = (10, -24)\end{array}\right\} \frac{3}{10} \neq \frac{8}{24} \to \overrightarrow{RS} \text{ no es paralelo a } \overrightarrow{RT}$$

Los tres puntos, R, S y T, no están alineados.

2. Averigua el valor de a para que los puntos $R(2, 7)$, $S(5, -1)$ y $Q(a, -25)$ estén alineados.

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{RS} = (3, -8)\\ \overrightarrow{SQ} = (a-5, -24)\end{array}\right\}$$

Para que R, S y Q estén alineados, se ha de cumplir que:

$$\frac{3}{a-5} = \frac{-8}{-24} \to \frac{3}{a-5} = \frac{1}{3} \to a-5 = 9 \to \text{Luego, } a = 14.$$

3. Averigua qué relación deben cumplir x e y para que $A(0, 1)$, $B(2, 5)$ y $P(x, y)$ estén alineados.

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AB} = (2-0, 5-1) = (2, 4)\\ \overrightarrow{AP} = (x-0, y-1) = (x, y-1)\end{array}\right\}$$

Para que P esté alineado con A y B:

$$\frac{2}{x} = \frac{4}{y-1} \to 2(y-1) = 4x \to y-1 = 2x \to y = 2x+1$$

La relación buscada entre x e y es $y = 2x + 1$.

4. Averigua el valor de t para que los puntos $A(1, 2)$, $B(7, -11)$ y $C(t, 2t)$ estén alineados.

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AB} = (7-1, -11-2) = (6, -13)\\ \overrightarrow{AC} = (t-1, 2t-2)\end{array}\right\}$$

A, B y C estarán alineados si:

$$\frac{6}{t-1} = \frac{-13}{2t-2} \to 6(2t-2) = -13(t-1) \to 12t-12 = -13t+13 \to 25t = 25 \to t = 1$$

6 Ecuaciones de la recta

Página 173

1. **Escribe las ecuaciones vectorial, paramétricas, en forma continua y explícita de las rectas que pasan por:**

a) $\boldsymbol{M(-2, 1),\ N(4, 5)}$

b) $\boldsymbol{P(0, 0),\ Q(3, -2)}$

c) $\boldsymbol{R(2, 5),\ S(8, 5)}$

d) $\boldsymbol{T(-2, 1),\ U(-2, -2)}$

a) $\left.\begin{matrix} M(-2, 1) \\ N(4, 5) \end{matrix}\right\} \to \overrightarrow{MN}(6, 4) \to \vec{v}(3, 2)$ es un vector dirección.

ECUACIÓN VECTORIAL:

$$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OM} + t\vec{v}$$

$$(x\ y) = (-2, 1) + t(3, 2)$$

ECUACIONES PARAMÉTRICAS:

$$\begin{cases} x = -2 + 3t \\ y = 1 + 2t \end{cases}$$

ECUACIÓN CONTINUA:

$$\frac{x+2}{3} = \frac{y-1}{2}$$

ECUACIÓN EXPLÍCITA: Despejando y en la ecuación anterior:

$$y = \frac{2}{3}x + \frac{7}{3}$$

b) $\left.\begin{matrix} P(0, 0) \\ Q(3, -2) \end{matrix}\right\} \to \overrightarrow{PQ}(3, -2) \to \vec{v}(3, -2)$ es un vector dirección.

ECUACIÓN VECTORIAL:

$$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + t\vec{v}$$

$$(x\ y) = (0, 0) + t(3, -2)$$

ECUACIONES PARAMÉTRICAS:

$$\begin{cases} x = 0 + 3t \\ y = 0 - 2t \end{cases} \to \begin{cases} x = 3t \\ y = -2t \end{cases}$$

ECUACIÓN CONTINUA:

$$\frac{x-0}{3} = \frac{y-0}{-2}$$

ECUACIÓN EXPLÍCITA: Despejando y en la ecuación anterior:

$$y = -\frac{2}{3}x$$

c) $\left.\begin{array}{l} R(2, 5) \\ S(8, 5) \end{array}\right\} \rightarrow \overrightarrow{RS}(6, 0) \rightarrow \vec{v}(1, 0)$ es un vector dirección.

ECUACIÓN VECTORIAL:

$$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OR} + t\vec{v}$$

$$(x\ y) = (2, 5) + t(1, 0)$$

ECUACIONES PARAMÉTRICAS:

$$\begin{cases} x = 2 + 1t \\ y = 5 + 0t \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 5 \end{cases}$$

ECUACIÓN CONTINUA:

$$\frac{x - 2}{1} = \frac{y - 5}{0}$$

ECUACIÓN EXPLÍCITA:

$$y = 5$$

d) $\left.\begin{array}{l} T(-2, 1) \\ U(-2, -2) \end{array}\right\} \rightarrow \overrightarrow{TU}(0, -3) \rightarrow \vec{v}(0, 1)$ es un vector dirección.

ECUACIÓN VECTORIAL:

$$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OT} + t\vec{v}$$

$$(x\ y) = (-2, 1) + t(0, 1)$$

ECUACIONES PARAMÉTRICAS:

$$\begin{cases} x = -2 + 0t \\ y = 1 + 1t \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 1 + t \end{cases}$$

ECUACIÓN CONTINUA:

$$\frac{x + 2}{0} = \frac{y - 1}{1}$$

ECUACIÓN EXPLÍCITA:

$$x = -2$$

7 Rectas. Paralelismo y perpendicularidad

Página 174

1. Halla la ecuación de la recta que pasa por:

a) $A(1, 3)$, $B(5, 5)$

b) $A(1, 6)$, $B(8, -2)$

a) Un vector dirección es $\overrightarrow{AB}(4, 2)$; otro vector dirección es $\vec{d}(2, 1)$.

La pendiente es: $m = \frac{1}{2}$

La ecuación es:

$$y - 3 = \frac{1}{2}(x - 1) \rightarrow y = \frac{1}{2}x - \frac{5}{2}$$

b) $\overrightarrow{AB}(7, -8)$ es un vector dirección $\rightarrow m = \frac{-8}{7}$

La ecuación será:

$$y - 6 = \frac{-8}{7}(x - 1) \rightarrow y = \frac{-8}{7}x + \frac{50}{7}$$

2. Halla la ecuación de la recta que pasa por (7, –5) y tiene por vector dirección (7, –4).

$\vec{d}(7, -4) \rightarrow$ la pendiente es: $m = -\frac{4}{7}$

La ecuación es:

$$y + 5 = -\frac{4}{7}(x - 7) \rightarrow y = -\frac{4}{7}x - 1$$

3. Halla la recta paralela a $5x - 6y + 14 = 0$ que pasa por (0, –3).

La pendiente de la recta $5x - 6y + 14 = 0$ es el coeficiente de la x cuando la y está despejada:

$$y = \frac{5}{6}x + \frac{14}{6} \rightarrow m = \frac{5}{6}$$

Por ser la recta pedida paralela a $5x - 6y + 14 = 0$, la pendiente es la misma: $m = \frac{5}{6}$

Así: $y = -3 + \frac{5}{6}x$

4. Halla la recta paralela a $5y - 10 = 0$ que pasa por (2, 4).

La recta $5y - 10 = 0$ es una recta paralela al eje X, luego $m = 0$.

La recta que pasa por (2, 4) y tiene pendiente $m = 0$ es $y = 4$.

Página 175

5. Da tres vectores perpendiculares a (–6, 1).

Tres vectores perpendiculares a (–6, 1) son: (1, 6), (2, 12) y (3, 18).

6. Halla la ecuación de la recta que pasa por $P(2, -5)$ y es perpendicular al vector $\vec{v}(5, 7)$.

El vector (–7, 5) es perpendicular a $\vec{v}$ y, por tanto, es un vector dirección de la recta buscada:

$$m = -\frac{5}{7} \qquad y = -5 - \frac{5}{7}(x-2) \rightarrow y = -\frac{5}{7}x - \frac{25}{7}$$

7. La recta r pasa por (3, 0), y la recta s, por (–5, 3). Ambas son perpendiculares a $4x + 2y - 7 = 0$.

Halla sus ecuaciones.

Pendiente de la recta $4x + 2y - 7 = 0$:

$$y = -2x + \frac{7}{2} \rightarrow m_1 = -2$$

Pendiente de r = pendiente de s:

$$m_2 = -\frac{1}{m_1} = \frac{1}{2}$$

Ecuación de r:

$$y = \frac{1}{2}(x-3) \rightarrow y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$$

Ecuación de s:

$$y = 3 + \frac{1}{2}(x+5) \rightarrow y = \frac{1}{2}x + \frac{11}{2}$$

8 Rectas paralelas a los ejes coordenados

Página 176

1. Representa r y s y da tres vectores paralelos y tres perpendiculares a cada una de ellas:

r: $5x - 7 = 0$

s: $3 + 4y = 0$

r: $5x - 7 = 0 \rightarrow x = \frac{7}{5}$

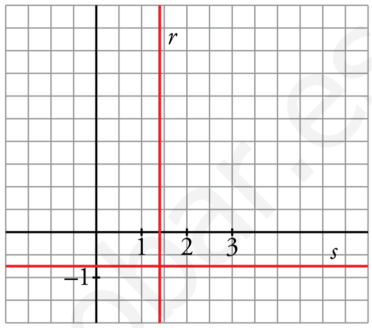
Vectores paralelos: (0, 1), (0, 2), (0, –2)

Vectores perpendiculares: (1, 0), (2, 0), (–2, 0)

s: $3 + 4y = 0 \rightarrow y = -\frac{3}{4}$

Vectores paralelos: (1, 0), (–1, 0), (–2, 0)

Vectores perpendiculares: (0, 1), (0, –1), (0, –2)

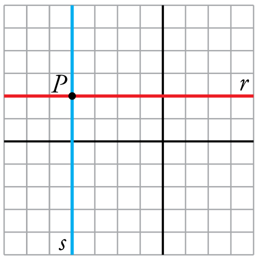


2. Representa dos rectas que pasen por el punto (–4, 2), una paralela al eje X y otra paralela al eje Y.

$P(-4, 2)$

r: $y = 2 \rightarrow$ Recta paralela al eje X

s: $x = -4 \rightarrow$ Recta paralela al eje Y



3. Las rectas r y s pasan por el punto (5, –3). La recta r es paralela a $5y + 17 = 0$, y s es perpendicular a ella. Representa r y s y da sus ecuaciones.

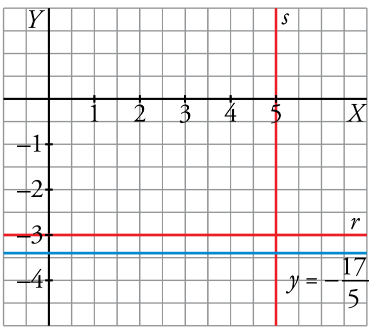
Representamos la recta $5y + 17 = 0 \rightarrow y = -\frac{17}{5}$ y a partir de ella, representamos r y s.

- r es una recta paralela a $y = -\frac{17}{5}$ que pasa por (5, –3).

  Su ecuación es $y = -3$.

- s es una recta perpendicular a $y = -\frac{17}{5}$ (paralela al eje Y) que pasa por (5, –3).

  Su ecuación es $x = 5$.



4. Halla la ecuación de la recta paralela al eje X que corte a la recta $2x - 3y = 5$ en el punto de abscisa $x = 1$.

- La recta pedida, r, es paralela al eje de abscisas, luego su ecuación es de la forma $r: y = k$.
- r corta a la recta $s: 2x - 3y = 5$ en el punto de abscisa $x = 1 \rightarrow$ el punto de corte es la solución del sistema.

$$\left.\begin{array}{r} 2x - 3y = 5 \\ x = 1 \end{array}\right\} \rightarrow 2 - 3y = 5 \rightarrow y = -1 \rightarrow P(1, -1) \in r$$

- Tenemos, pues, que:

$$\left.\begin{array}{l} r: y = k \\ P(1, -1) \in r \end{array}\right\} \rightarrow r: y = -1$$

9 Posiciones relativas de dos rectas

Página 177

1. Di la posición relativa de estos pares de rectas:

a) $r: 8x + 2y - 14 = 0$
$s: 5x - y - 20 = 0$

b) $r: 3x - 2y - 14 = 0$
s: **pasa por (1, –2) y por (10, 1).**

c) r: **pasa por (–1, 4) y (7, –2).**
$s: 3x + 4y = 0$

d) r: **pasa por (2, –1) y (8, 2).**
s: **su pendiente es 1/2 y pasa por (0, –2).**

a) $\left.\begin{array}{l} r: 8x + 2y - 14 = 0 \\ s: 5x - \ \ y - 20 = 0 \end{array}\right\}$ $\begin{array}{r} 4x + y - \ \ 7 = 0 \\ 5x - y - 20 = 0 \\ \hline 9x \qquad - 27 = 0 \end{array} \to x = 3$

$4 \cdot 3 + y - 7 = 0 \to y = -5$

Las rectas r y s se cortan en el punto (3, –5).

b) Veamos cuál es la ecuación de s:

Un vector dirección de s es (9, 3) // (3, 1). Su pendiente es, por tanto, $m = \frac{1}{3}$.

$s: y = -2 + \frac{1}{3}(x - 1) \to y = \frac{1}{3}x - \frac{7}{3} \to x - 3y - 7 = 0$

Resolvemos el sistema:

$\left.\begin{array}{l} r: 3x - 2y - 14 = 0 \\ s: \ \ x - 3y - \ \ 7 = 0 \end{array}\right\}$ $\begin{array}{r} 3x - 2y - 14 = 0 \\ -3x + 9y + 21 = 0 \\ \hline 7y + \ \ 7 = 0 \end{array} \to y = -1$

$3x - 2 \cdot (-1) - 14 = 0 \to 3x - 12 = 0 \to x = 4$

Las rectas r y s se cortan en el punto (4, –1).

c) Buscamos la ecuación de r:

Un vector dirección es (8, –6) // (4, –3). Su pendiente es, por tanto, $m = -\frac{3}{4}$.

$r: y = 4 - \frac{3}{4}(x + 1) \to y = -\frac{3}{4}x + \frac{13}{4} \to 3x + 4y - 13 = 0$

Resolvemos el sistema:

$\left.\begin{array}{l} r: 3x + 4y - 13 = 0 \\ s: 3x + 4y \qquad = 0 \end{array}\right\}$ $\begin{array}{r} 3x + 4y - 13 = 0 \\ -3x - 4y \qquad = 0 \\ \hline -13 = 0 \end{array} \to$ Contradicción.

Las rectas r y s no tienen ningún punto en común. Son paralelas, ya que tienen la misma pendiente, –3/4, pero distinta ordenada en el origen, 13/4 y 0.

d) Ecuación de r:

Un vector dirección es (6, 3) // (2, 1). Su pendiente es $m = \frac{1}{2}$.

$r: y = -1 + \frac{1}{2}(x - 2) \to y = \frac{1}{2}x - 2 \to x - 2y - 4 = 0$

Ecuación de s:

$y = \frac{1}{2}x - 2 \to 2y = x - 4 \to x - 2y - 4 = 0 \to r$ y s son la misma recta.

10 Distancia entre dos puntos

Página 178

1. Halla la distancia entre A y B.

a) $A(-7, 4)$, $B(6, 4)$ **b)** $A(3, 4)$, $B(3, 9)$

c) $A(-5, 11)$, $B(0, -1)$ **d)** $A(4, -6)$, $B(7, 4)$

a) $dist\ (A, B) = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(6+7)^2 + (4-4)^2} = 13$

b) $dist\ (A, B) = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(3-3)^2 + (9-4)^2} = 5$

c) $dist\ (A, B) = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(0+5)^2 + (-1-11)^2} = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13$

d) $dist\ (A, B) = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(7-4)^2 + (4+6)^2} = \sqrt{109} \approx 10,4$

2. Aplica la fórmula de Herón para hallar el área del triángulo de vértices $A(-5, -2)$, $B(7, 3)$, $C(4, 7)$.

Calculamos primero la medida de cada lado:

$a = dist\ (B, C) = |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = 5$

$b = dist\ (A, C) = |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{9^2 + 9^2} = 9\sqrt{2}$

$c = dist\ (A, B) = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13$

Semiperímetro del triángulo: $p = \dfrac{5 + 9\sqrt{2} + 13}{2} = 9 + \dfrac{9}{2}\sqrt{2}$

Área $= \sqrt{p \cdot (p-a) \cdot (p-b) \cdot (p-c)} =$

$$= \sqrt{\left(9 + \frac{9}{2}\sqrt{2}\right) \cdot \left(4 + \frac{9}{2}\sqrt{2}\right) \cdot \left(9 - \frac{9}{2}\sqrt{2}\right) \cdot \left(\frac{9}{2}\sqrt{2} - 4\right)} =$$

$$= \sqrt{\left(81 - \frac{81}{4} \cdot 2\right) \cdot \left(\frac{81}{4} \cdot 2 - 16\right)} = \sqrt{\left(81 - \frac{81}{2}\right) \cdot \left(\frac{81}{2} - 16\right)} =$$

$$= \sqrt{\frac{81}{2} \cdot \frac{49}{2}} = \frac{9 \cdot 7}{2} = 31,5\ \text{u}^2$$

3. Calcula el valor de c para que el punto $A(10, c)$ diste 13 unidades del punto $B(-2, 5)$.

$dist\ (A, B) = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-2-10)^2 + (5-c)^2} = 13 \to 144 + 25 + c^2 - 10c = 169$

$c^2 - 10c = 0 \left\langle \begin{array}{l} c = 0 \\ c = 10 \end{array} \right\}$ Hay dos soluciones: $A(10, 0)$, $A'(10, 10)$

4. Calcula el valor de a para que el punto $P(a, 7)$ esté a 10 unidades de distancia de $Q(5, 1)$.

$dist\ (P, Q) = |\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{(5-a)^2 + (-6)^2} = 10 \to 25 + a^2 - 10a + 36 = 100 \to a^2 - 10a - 39 = 0$

$a = \dfrac{10 \pm \sqrt{100 + 156}}{2} = \dfrac{10 \pm 16}{2} = \left\langle \begin{array}{l} 13 \\ -3 \end{array} \right\}$ Hay dos soluciones: $P(13, 7)$, $P'(-3, 7)$

11 Ecuación de una circunferencia

Página 179

1. Escribe, en cada caso, la ecuación de la circunferencia:

a) $C(7, 1)$, $r = 5$

b) $C(-2, 4)$, $r = 12$

a) $(x-7)^2 + (y-1)^2 = 25 \rightarrow x^2 + y^2 - 14x - 2y + 25 = 0$

b) $(x+2)^2 + (y-4)^2 = 144 \rightarrow x^2 + y^2 + 4x - 8y - 124 = 0$

2. Di el centro y el radio de las circunferencias siguientes:

a) $(x-3)^2 + (y-5)^2 = 25$

b) $(x+2)^2 + y^2 = 1$

a) Centro (3, 5). Radio, 5.

b) Centro (–2, 0). Radio, 1.

3. Una circunferencia de radio $r = \sqrt{45}$ tiene su centro en el punto $C(4, 9)$. ¿Pertenecen los puntos $A(-2, 6)$ y $B(8, 2)$ a esta circunferencia?

Ecuación de la circunferencia: $(x-4)^2 + (y-9)^2 = 45$

$A(-2, 6) \rightarrow (-6)^2 + (-3)^2 = 36 + 9 = 45$. Sí pertenece.

$B(8, 2) \rightarrow 4^2 + (-7)^2 = 16 + 49 = 65 \neq 45$. No pertenece.

4. Halla la ecuación de la circunferencia de centro $C(4, -2)$ que pasa por $P(5, 7)$.

El radio de la circunferencia es la distancia entre C y P.

Radio $= \sqrt{(5-4)^2 + (7+2)^2} = \sqrt{82}$

Ecuación de la circunferencia:

$$(x-4)^2 + (y+2)^2 = 82 \rightarrow x^2 + y^2 - 8x + 4y - 62 = 0$$

Página 180

Hazlo tú. En el triángulo cuyos vértices son $A(0, 4)$, $B(3, 0)$ y $C(-3, -2)$, halla las ecuaciones de la mediatriz del lado BC y de la altura que parte de A.

MEDIATRIZ DEL LADO BC:

La mediatriz r es perpendicular a BC en su punto medio.

- Punto medio de BC:

$$M\left(\frac{3+(-3)}{2}, \frac{0+(-2)}{2}\right) \to M(0, -1)$$

- $\overrightarrow{BC}(-6, -2)$:

  La pendiente de BC es $m = \frac{-2}{-6} = \frac{1}{3}$.

  La pendiente de la mediatriz r es $m' = -3$.

- La mediatriz r del lado BC es, por tanto, la recta que pasa por el punto $M(0, -1)$ y cuya pendiente es $m' = -3$:

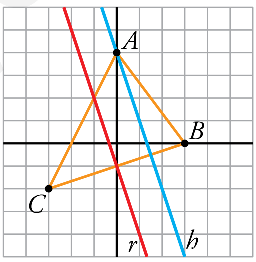
$$r: y = -1 - 3(x - 0) \to r: y = -3x - 1 \to r: 3x + y + 1 = 0$$

ALTURA QUE PARTE DE A:

La altura h pasa por A y es perpendicular al lado BC.

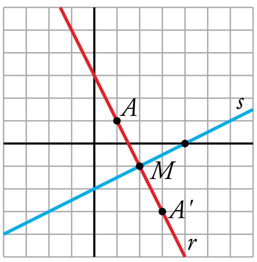
- Como h es perpendicular al lado BC, sabemos por el apartado anterior que su pendiente es $m = -3$.

- $$\left.\begin{array}{l} A(0, 4) \in \text{h} \\ \text{Pendiente } m = -3 \end{array}\right\} \to \text{h}: y = 4 - 3(x - 0) \to \text{h}: y = -3x + 4 \to \text{h}: 3x + y - 4 = 0$$



Hazlo tú. Halla el punto simétrico de $A(1, 1)$ respecto de la recta $s: x - 2y - 4 = 0$.

El punto simétrico de A respecto a s, A', es el punto simétrico de A respecto de un punto M, que es el punto de corte de s con la recta perpendicular a s que pasa por A.



- Determinamos, en primer lugar, la ecuación de la recta r, perpendicular a s que pasa por A.

$$s: x - 2y - 4 = 0 \ \to \ s: y = \frac{1}{2}x - 2 \ \to \ m_s = \frac{1}{2} \ \to \ m_r = -2$$

$$\left.\begin{array}{l} A(1,1) \in r \\ m_r = -2 \end{array}\right\} \to r: y = 1 - 2(x-1) \ \to \ r: y = -2x + 3 \ \to \ r: 2x + y - 3 = 0$$

- Hallamos el punto de corte de s y r:

$$\left.\begin{array}{l} s: x - 2y - 4 = 0 \\ r: 2x + y - 3 = 0 \end{array}\right\} \to \ M(2, -1)$$

- El punto M es el punto medio entre $A(1, 1)$ y $A'(x, y)$, siendo A' el punto simétrico de A respecto a s:

$$\left.\begin{array}{l} A(1,1) \\ A'(x, y) \\ M(2, -1) \end{array}\right\} \to \left(\frac{1+x}{2}, \frac{1+y}{2}\right) = (2, -1) \ \to \ \begin{cases} x = 3 \\ y = -3 \end{cases}$$

Por tanto, el punto buscado es $A'(3, -3)$.

Hazlo tú. Halla la ecuación de la circunferencia que tiene el mismo centro que:

$$\boldsymbol{x^2 + y^2 + 6x - 4y - 3 = 0}$$

y que pasa por el punto (1, –2).

Tenemos que hallar la ecuación de la circunferencia que tiene el mismo centro que $c: x^2 + y^2 + 6x - 4y - 3 = 0$ y que pasa por el punto $P(1, -2)$.

- Para hallar el centro de c debemos expresarla de la forma:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

$$c: x^2 + y^2 + 6x - 4y - 3 = 0 \ \to \ c: x^2 + 6x + \mathbf{9} + y^2 - 4y + \mathbf{4} = 3 + \mathbf{9} + \mathbf{4} \ \to$$

$$\to \ c: (x+3)^2 + (y-2)^2 = 16$$

El centro y el radio de c son:

Centro $\to \ C(-3, 2)$; Radio $\to \ r = 4$

La circunferencia que buscamos, c', tiene centro $C(-3, 2)$.

- $$\left.\begin{array}{l} \text{Centro de } c' \ \to \ C(-3, 2) \\ P(1, -2) \in c' \end{array}\right\}$$

El radio de c' es $r' = dist\,(P, C) \ \to \ r' = |\overrightarrow{PC}| = \sqrt{(-4)^2 + 4^2} = \sqrt{32}$

- La circunferencia que buscamos es:

$$c': (x+3)^2 + (y-2)^2 = 32$$

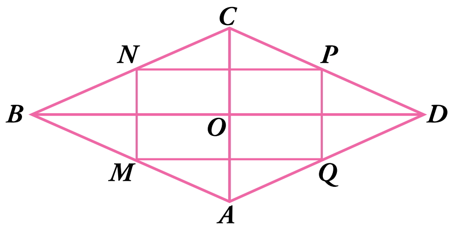
Ejercicios y problemas

Página 181

Practica

Vectores y puntos

1. **El cuadrilátero *ABCD* es un rombo, y *M*, *N*, *P* y *Q*, los puntos medios de sus lados.**



Indica si los siguientes pares de vectores tienen el mismo módulo y/o la misma dirección y sentido:

a) $\overrightarrow{AB}$ **y** $\overrightarrow{CD}$ **b)** $\overrightarrow{BN}$ **y** $\overrightarrow{AQ}$

c) $\overrightarrow{NC}$ **y** $\overrightarrow{CP}$ **d)** $\overrightarrow{AM}$ **y** $\overrightarrow{DC}$

a) $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$ tienen el mismo módulo y la misma dirección pero sentido contrario.

b) $\overrightarrow{BN}$ y $\overrightarrow{AQ}$ tienen el mismo módulo, la misma dirección y el mismo sentido.

c) $\overrightarrow{NC}$ y $\overrightarrow{CP}$ tienen el mismo módulo pero distinta dirección y sentido.

d) $\overrightarrow{AM}$ y $\overrightarrow{DC}$ tienen la misma dirección y el mismo sentido pero distinto módulo.

2. **Observa la figura del ejercicio anterior y sustituye en tu cuaderno los puntos suspensivos por un número para que los vectores sean iguales.**

a) $\overrightarrow{AC} = \dots \overrightarrow{AO}$ **b)** $\overrightarrow{OC} = \dots \overrightarrow{OA}$

c) $\overrightarrow{AQ} = \dots \overrightarrow{CB}$ **d)** $\overrightarrow{AD} = \dots \overrightarrow{NB}$

a) $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AO}$ b) $\overrightarrow{OC} = -\overrightarrow{OA}$

c) $\overrightarrow{AQ} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$ d) $\overrightarrow{AD} = -2\overrightarrow{NB}$

3. **Completa en tu cuaderno, con las letras que faltan, cada una de las siguientes sumas de vectores de la figura del ejercicio 1:**

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{A\dots}$ **b)** $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\dots}$

c) $2\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BO} = \overrightarrow{\dots}$ **d)** $\frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{\dots}$

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ b) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$

c) $2\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BO} = \overrightarrow{AO}$ d) $\frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{AB}$

4. **Dados los puntos $A(-2, 0)$, $B(4, 0)$, $C(5, 1)$ y $D(-3, 2)$, halla las coordenadas de los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$ y $\overrightarrow{AD}$. Calcula, también, sus módulos.**

$\overrightarrow{AB} = (4, 0) - (-2, 0) = (6, 0)$ y $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{6^2 + 0^2} = \sqrt{36} = 6$

$\overrightarrow{BC} = (5, 1) - (4, 0) = (1, 1)$ y $|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

$\overrightarrow{CD} = (-3, 2) - (5, 1) = (-8, 1)$ y $|\overrightarrow{CD}| = \sqrt{(-8)^2 + 1^2} = \sqrt{65}$

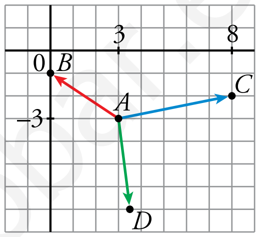
$\overrightarrow{AD} = (-3, 2) - (-2, 0) = (-1, 2)$ y $|\overrightarrow{AD}| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2} = \sqrt{5}$

5. **Con origen en el punto $A(3, -3)$, dibuja los vectores $\overrightarrow{AB}(-3, 2)$, $\overrightarrow{AC}(5, 1)$ y $\overrightarrow{AD}(1/2, -4)$. ¿Cuáles serán las coordenadas de los puntos B, C y D?**

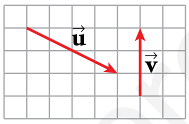
$\overrightarrow{AB} = B - A \rightarrow B = (-3, 2) + (3, -3) = (0, -1)$

$C = (5, 1) + (3, -3) = (8, -2)$

$D = \left(\frac{1}{2}, -4\right) + (3, -3) = \left(\frac{7}{2}, -7\right)$



6. **a) Di cuáles son las coordenadas de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.**

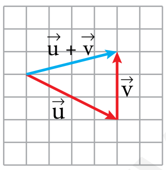


b) Dibuja los vectores $\vec{u} + \vec{v}$; $\vec{u} - \vec{v}$; $-\vec{u} + \vec{v}$; $\frac{1}{2}\vec{u} + 2\vec{v}$ y di cuáles son sus coordenadas.

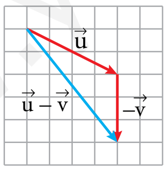
c) Halla el módulo de $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{u} + \vec{v}$ y $\vec{u} - \vec{v}$.

a) $\vec{u}(4, -2)$ y $\vec{v}(0, 3)$

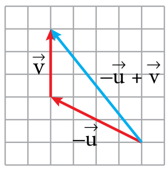
b) $\vec{u} + \vec{v}$



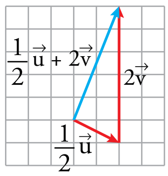
$\vec{u} - \vec{v}$



$-\vec{u} + \vec{v}$



$\frac{1}{2}\vec{u} + 2\vec{v}$



$\vec{u} + \vec{v} = (4, -2) + (0, 3) = (4, 1)$

$\vec{u} - \vec{v} = (4, -2) - (0, 3) = (4, -5)$

$-\vec{u} + \vec{v} = (-4, 2) + (0, 3) = (-4, 5)$

$\frac{1}{2}\vec{u} + 2\vec{v} = (2, -1) + (0, 6) = (2, 5)$

c) $|\vec{u}| = \sqrt{4^2 + (-2)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

$|\vec{v}| = \sqrt{0^2 + 3^2} = 3$

$|\vec{u} + \vec{v}| = \sqrt{4^2 + 1^2} = 17$

$|\vec{u} - \vec{v}| = \sqrt{4^2 + (-5)^2} = \sqrt{41}$

7. **Comprueba, sin representarlos, si los siguientes pares de vectores tienen la misma dirección:**

a) $\vec{u}(6, -3), \vec{v}(-2, 1)$

b) $\vec{u}(5, 3), \vec{v}(4, 2)$

c) $\vec{u}(10, 1), \vec{v}(5, 2)$

d) $\vec{u}(-4, 0), \vec{v}(9, 0)$

a) $\frac{6}{-2} = \frac{-3}{1} \rightarrow \vec{u}$ y $\vec{v}$ tienen la misma dirección.

b) $\frac{5}{4} \neq \frac{3}{2} \rightarrow \vec{u}$ y $\vec{v}$ no tienen la misma dirección.

c) $\frac{10}{5} \neq \frac{1}{2} \rightarrow \vec{u}$ y $\vec{v}$ no tienen la misma dirección.

d) $\vec{u} = -\frac{4}{9}\vec{v} \rightarrow \vec{u}$ y $\vec{v}$ tienen la misma dirección.

8. **Dados los vectores $\vec{u}(1, 3)$, $\vec{v}(-2, 5)$ y $\vec{w}(-1, -3)$, efectúa estas operaciones:**

a) $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$

b) $\vec{u} - \vec{v} - \vec{w}$

c) $-2\vec{u} + \vec{v} - 2\vec{w}$

d) $-3\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v}$

e) $\frac{2}{3}\vec{u} + \frac{1}{3}\vec{w}$

f) $-\frac{1}{5}\vec{v} - \vec{w} + \vec{u}$

a) $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = (1, 3) + (-2, 5) + (-1, -3) = (1 - 2 - 1, 3 + 5 - 3) = (-2, 5)$

b) $\vec{u} - \vec{v} - \vec{w} = (1, 3) - (-2, 5) - (-1, -3) = (1 + 2 + 1, 3 - 5 + 3) = (4, 1)$

c) $-2\vec{u} + \vec{v} - 2\vec{w} = (-2, -6) + (-2, 5) - (-2, -6) = (-2 - 2 + 2, -6 + 5 + 6) = (-2, 5)$

d) $-3\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v} = (-3, -9) + \left(-1, \frac{5}{2}\right) = \left(-3 - 1, -9 + \frac{5}{2}\right) = \left(-4, -\frac{13}{2}\right)$

e) $\frac{2}{3}\vec{u} + \frac{1}{3}\vec{w} = \left(\frac{2}{3}, 2\right) + \left(-\frac{1}{3}, -1\right) = \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3}, 2 - 1\right) = \left(\frac{1}{3}, 1\right)$

f) $-\frac{1}{5}\vec{v} - \vec{w} + \vec{u} = \left(\frac{2}{5}, -1\right) - (-1, -3) + (1, 3) = \left(\frac{2}{5} + 1 + 1, -1 + 3 + 3\right) = \left(\frac{12}{5}, 5\right)$

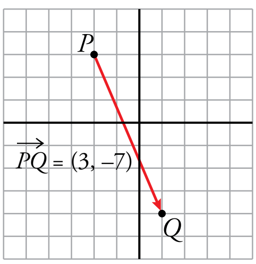
9. **Representa en unos ejes coordenados los vectores que verifican las siguientes condiciones:**

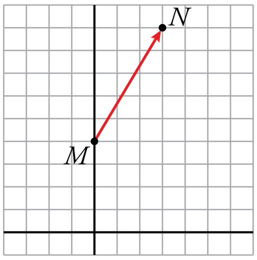
a) **Su origen es $P(-2, 3)$ y su extremo, $Q(1, -4)$.**

b) **Su origen es $M(0, 4)$ y sus coordenadas, $(3, 5)$.**

c) **Su extremo es $B(5, 0)$ y sus coordenadas, $(4, 4)$.**

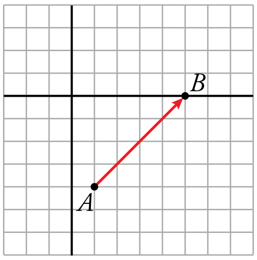
a)



b) 

$$\left.\begin{array}{l} M(0, 4) \\ N(x, y) \\ \overrightarrow{MN}(3, 5) \end{array}\right\} \to (x - 0, y - 4) = (3, 5) \to$$

$$\to \begin{cases} x = 3 \\ y - 4 = 5 \end{cases} \to \begin{cases} x = 3 \\ y = 9 \end{cases} \to N(3, 9)$$

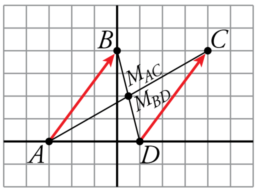
c) 

$$\left.\begin{array}{l} A(x, y) \\ B(5, 0) \\ \overrightarrow{AB}(4, 4) \end{array}\right\} \to (5 - x, 0 - y) = (4, 4) \to$$

$$\to \begin{cases} 5 - x = 4 \\ -y = 4 \end{cases} \to \begin{cases} x = 1 \\ y = -4 \end{cases} \to A(1, -4)$$

10. **a) Representa los puntos $A(-3, 0)$, $B(0, 4)$, $C(4, 4)$ y $D(1, 0)$ y halla los puntos medios de AC y de BD.**

b) Halla las coordenadas de $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{DC}$ y comprueba que son las mismas.

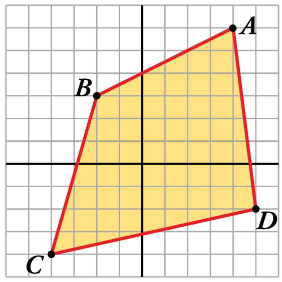
a) 

$$M_{AC} = \left(\frac{-3+4}{2}, \frac{0+4}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}, 2\right)$$

$$M_{BD} = \left(\frac{0+1}{2}, \frac{4+0}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}, 2\right)$$

b) $$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (0 + 3, 4) = (3, 4) \\ \overrightarrow{DC} = (4 - 1, 4 - 0) = (3, 4) \end{array}\right\} \text{Coinciden}$$

11. **Calcula las coordenadas de los puntos medios de los lados y de las diagonales del cuadrilátero $ABCD$.**



$A(4, 6)$, $B(-2, 3)$, $C(-4, -4)$, $D(5, -2)$

Por tanto:

Punto medio del lado AB: $\left(\frac{4-2}{2}, \frac{6+3}{2}\right) = \left(1, \frac{9}{2}\right)$

Punto medio del lado BC: $\left(\frac{-2-4}{2}, \frac{3-4}{2}\right) = \left(-3, \frac{-1}{2}\right)$

Punto medio del lado CD: $\left(\frac{-4+5}{2}, \frac{-4-2}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}, -3\right)$

Punto medio del lado AD: $\left(\frac{4+5}{2}, \frac{6-2}{2}\right) = \left(\frac{9}{2}, 2\right)$

Punto medio de la diagonal BD: $\left(\frac{-2+5}{2}, \frac{3-2}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$

Punto medio de la diagonal AC: $\left(\frac{4-4}{2}, \frac{6-4}{2}\right) = (0, 1)$

12. **Si $M(-3, 5)$ es el punto medio del segmento AB, halla el punto B en cada uno de los siguientes casos:**

a) $A(-1, 5)$ **b)** $A(6, -4)$ **c)** $A(-4, -7)$

a) $\left(\dfrac{-1+x}{2}, \dfrac{5+y}{2}\right) = (-3, 5) \to x = -5;\ y = 5 \to B(-5, 5)$

b) $\left(\dfrac{6+x}{2}, \dfrac{-4+y}{2}\right) = (-3, 5) \to x = -12;\ y = 14 \to B(-12, 14)$

c) $\left(\dfrac{-4+x}{2}, \dfrac{-7+y}{2}\right) = (-3, 5) \to x = -2;\ y = 17 \to B(-2, 17)$

13. **Halla, en cada caso, el punto simétrico de $A(-3, -5)$ respecto de:**

a) $P(-2, 0)$ **b)** $Q(2, -3)$ **c)** $O(0, 0)$

$A'(x, y)$ es el punto buscado.

a) $P(-2, 0)$ es el punto medio del segmento de extremos A y A':

$$\left(\frac{x-3}{2}, \frac{y-5}{2}\right) = (-2, 0) \quad \begin{cases} \dfrac{x-3}{2} = -2 \to x - 3 = -4 \to x = -1 \\ \dfrac{y-5}{2} = 0 \to y = 5 \end{cases}$$

Luego: $A'(-1, 5)$

b) $Q(2, -3)$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{x-3}{2} = 2 \to x - 3 = 4 \to x = 7 \\ \dfrac{y-5}{2} = -3 \to y - 5 = -6 \to y = -1 \end{array}\right\} A'(7, -1)$$

c) $O(0, 0)$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{x-3}{2} = 0 \to x - 3 = 0 \to x = 3 \\ \dfrac{y-5}{2} = 0 \to y - 5 = 0 \to y = 5 \end{array}\right\} A'(3, 5)$$

14. **Comprueba, en cada caso, si los puntos dados están alineados:**

a) $A(1, 2)$, $B(4, 3)$, $C(19, 8)$

b) $P(-2, -3)$, $Q(2, 0)$, $R(-26, -21)$

c) $M(-4, 3)$, $N(3, 4)$, $P(6, 5)$

a) $\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AB}(3, 1) \\ \overrightarrow{BC}(15, 5) \end{array}\right\} \dfrac{3}{15} = \dfrac{1}{5} \to \overrightarrow{AB} \,//\, \overrightarrow{BC} \to A$, B y C están alineados.

b) $\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{PQ}(4, 3) \\ \overrightarrow{QR}(-28, -21) \end{array}\right\} \dfrac{4}{-28} = \dfrac{3}{-21} \to \overrightarrow{PQ} \,//\, \overrightarrow{QR} \to P$, Q y R están alineados.

c) $\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{MN}(7, 1) \\ \overrightarrow{NP}(3, 1) \end{array}\right\} \dfrac{7}{3} \neq \dfrac{1}{1} \to M$, N y P no están alineados.

Página 182

Rectas

15. **Escribe, en cada caso, las ecuaciones vectorial, paramétricas, en forma continua y explícita de las rectas que pasan por el punto $P(-4, 3)$ y tienen como vector dirección:**

a) $\vec{d}(2, -1)$

b) $\vec{d}(-1, -3)$

c) $\vec{d}(2, 0)$

a) $P(-4, 3)$ $\vec{d}(2, -1)$

ECUACIÓN VECTORIAL: $\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + t \cdot \vec{d}$

$(x, y) = (-4, 3) + t(2, -1)$

ECUACIONES PARAMÉTRICAS: $\begin{cases} x = -4 + 2t \\ y = 3 - t \end{cases}$

ECUACIÓN CONTINUA: $\dfrac{x+4}{2} = \dfrac{y-3}{-1}$

ECUACIÓN EXPLÍCITA: $y = -\dfrac{1}{2}x + 1$

b) $P(-4, 3)$ $\vec{d}(-1, -3)$

ECUACIÓN VECTORIAL: $\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + t \cdot \vec{d}$

$(x, y) = (-4, 3) + t(-1, -3)$

ECUACIONES PARAMÉTRICAS: $\begin{cases} x = -4 - t \\ y = 3 - 3t \end{cases}$

ECUACIÓN CONTINUA: $\dfrac{x+4}{-1} = \dfrac{y-3}{-3}$

ECUACIÓN EXPLÍCITA: $y = 3x + 15$

c) $P(-4, 3)$ $\vec{d}(2, 0)$

ECUACIÓN VECTORIAL: $\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + t \cdot \vec{d}$

$(x, y) = (-4, 3) + t(2, 0)$

ECUACIONES PARAMÉTRICAS: $\begin{cases} x = -4 + 2t \\ y = 3 + 0t \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = -4 + 2t \\ y = 3 \end{cases}$

ECUACIÓN CONTINUA: $\dfrac{x+4}{2} = \dfrac{y-3}{0}$

ECUACIÓN EXPLÍCITA: $y = 3$

16. **Da, en cada caso, un vector dirección y escribe las ecuaciones vectorial, paramétricas, en forma continua y explícita de las rectas que pasan por *A* y *B*:**

a) $A(-1, 0)$, $B(0, 3)$

b) $A(0, -2)$, $B(5, -2)$

c) $A(-2, 3)$, $B(4, -1)$

d) $A(3, -1)$, $B(3, 5)$

a) $\left.\begin{array}{l} A(-1, 0) \\ B(0, 3) \end{array}\right\} \ \overrightarrow{AB}(1, 3) \ \to \ \vec{v}(1, 3)$ vector dirección

ECUACIÓN VECTORIAL: $\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} + t\vec{v}$

$(x, y) = (-1, 0) + t(1, 3)$

ECUACIONES PARAMÉTRICAS: $\begin{cases} x = -1 + t \\ y = 0 + 3t \end{cases}$

ECUACIÓN CONTINUA: $\dfrac{x+1}{1} = \dfrac{y-0}{3}$

ECUACIÓN EXPLÍCITA: $y = 3x + 3$

b) $\left.\begin{array}{l} A(0, -2) \\ B(5, -2) \end{array}\right\} \ \overrightarrow{AB}(5, 0) \ \to \ \vec{v}(1, 0)$ vector dirección

ECUACIÓN VECTORIAL: $\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} + t\vec{v}$

$(x, y) = (0, -2) + t(1, 0)$

ECUACIONES PARAMÉTRICAS: $\begin{cases} x = 0 + 1t \\ y = -2 + 0t \end{cases} \to \begin{cases} x = t \\ y = -2 \end{cases}$

ECUACIÓN CONTINUA: $\dfrac{x-0}{1} = \dfrac{y+2}{0}$

ECUACIÓN EXPLÍCITA: $y = -2$

c) $\left.\begin{array}{l} A(-2, 3) \\ B(4, -1) \end{array}\right\} \ \overrightarrow{AB}(6, -4) \ \to \ \vec{v}(3, -2)$ vector dirección

ECUACIÓN VECTORIAL: $\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} + t\vec{v}$

$(x, y) = (-2, 3) + t(3, -2)$

ECUACIONES PARAMÉTRICAS: $\begin{cases} x = -2 + 3t \\ y = 3 - 2t \end{cases}$

ECUACIÓN CONTINUA: $\dfrac{x+2}{3} = \dfrac{y-3}{-2}$

ECUACIÓN EXPLÍCITA: $y = -\dfrac{2}{3}x + \dfrac{5}{3}$

d) $\left.\begin{array}{l} A(3,-1) \\ B(3,5) \end{array}\right\} \overrightarrow{AB}(0,6) \rightarrow \vec{v}(0,1)$ vector dirección

ECUACIÓN VECTORIAL: $\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} + t\vec{v}$

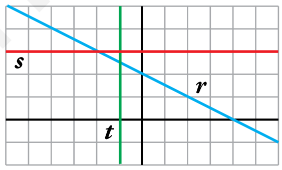
$(x, y) = (3, -1) + t(0, 1)$

ECUACIONES PARAMÉTRICAS: $\begin{cases} x = 3 + 0t \\ y = -1 + 1t \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = -1 + t \end{cases}$

ECUACIÓN CONTINUA: $\dfrac{x-3}{0} = \dfrac{y+1}{1}$

ECUACIÓN EXPLÍCITA: $x = 3$

17. **Escribe las ecuaciones paramétricas y explícita de las rectas r, s y t.**



- Recta r:

$\left.\begin{array}{l} A(0,2) \in r \\ B(2,1) \in r \end{array}\right\} \rightarrow \overrightarrow{AB}(2,-1) \,//\, r \rightarrow \vec{v}(2,-1)$ vector dirección

ECUACIONES PARAMÉTRICAS: $\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 1 - t \end{cases}$

ECUACIÓN EXPLÍCITA:

$\left.\begin{array}{l} B(2,1) \in r \\ \vec{v}(2,-1) \text{ vector dirección } \rightarrow m = -\dfrac{1}{2} \end{array}\right\} \rightarrow y = 1 - \dfrac{1}{2}(x-2) \rightarrow y = -\dfrac{1}{2}x + 2$

- Recta s: Recta paralela al eje de abscisas $\rightarrow \vec{v}(1, 0)$ vector dirección.

$\left.\begin{array}{l} P(0,3) \in s \\ \vec{v}(1,0) \text{ vector dirección} \end{array}\right\}$

ECUACIONES PARAMÉTRICAS:

$\begin{cases} x = t \\ y = 3 \end{cases}$

ECUACIÓN EXPLÍCITA:

s es una recta paralela al eje de abscisas, luego su ecuación explícita es de la forma $y = k$:

$P(0, 3) \in s \rightarrow y = 3$

- Recta t: Recta paralela al eje de ordenadas $\rightarrow \vec{v}(0, 1)$ vector dirección.

$\left.\begin{array}{l} Q(-1,0) \in t \\ \vec{v}(0,1) \text{ vector dirección} \end{array}\right\}$

ECUACIONES PARAMÉTRICAS:

$\begin{cases} x = -1 \\ y = t \end{cases}$

ECUACIÓN EXPLÍCITA:

$x = -1$

18. **Da un vector dirección y un punto de cada recta, y escribe sus ecuaciones continuas:**

a) $\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = \quad -3t \end{cases}$

b) $\begin{cases} x = \quad t \\ y = 1 - 5t \end{cases}$

a) $P(-1, 0)$; $\vec{v}(2, -3)$; $\dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y}{-3}$

b) $P(0, 1)$; $\vec{v}(1, -5)$; $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y-1}{-5}$

19. **Escribe la ecuación explícita de cada una de las rectas siguientes y da, en cada caso, un vector dirección y la pendiente:**

a) $\dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y+1}{3}$

b) $\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 1 + 3t \end{cases}$

a) $P(3, -1) \in r$

$\vec{v}(2, 3)$ vector dirección $\rightarrow$ $m = \dfrac{3}{2}$ (pendiente)

Ecuación explícita: $y = -1 + \dfrac{3}{2}(x - 3) \rightarrow y = \dfrac{3}{2}x - \dfrac{11}{2}$

b) $P(2, 1) \in r$

$\vec{v}(-1, 3)$ vector dirección $\rightarrow$ $m = \dfrac{3}{-1} = -3$ (pendiente)

Ecuación explícita: $y = 1 - 3(x - 2) \rightarrow y = -3x + 7$

20. **Halla dos puntos de cada una de las siguientes rectas y utilízalos para dar un vector dirección en cada caso:**

a) $y = 2x - 3$

b) $y = 3$

c) $x - 2y + 1 = 0$

a) $r: y = 2x - 3$

$\left.\begin{array}{l} P(0, -3) \in r \\ Q(1, -1) \in r \end{array}\right\} \rightarrow \overrightarrow{PQ}(1, 2)$ vector dirección de r

b) $r: y = 3$

$\left.\begin{array}{l} P(0, 3) \in r \\ Q(1, 3) \in r \end{array}\right\} \rightarrow \overrightarrow{PQ}(1, 0)$ vector dirección de r

c) $r: x - 2y + 1 = 0$

$\left.\begin{array}{l} P(-1, 0) \in r \\ Q(1, 1) \in r \end{array}\right\} \rightarrow \overrightarrow{PQ}(2, 1)$ vector dirección de r

21. **Escribe la ecuación de las siguientes rectas y da, en cada caso, un vector dirección:**

a) Pasa por (–4, 2) y su pendiente es $\frac{1}{2}$.

b) Pasa por (1, 3) y su pendiente es –2.

c) Pasa por (5, –1) y su pendiente es 0.

a) $\left.\begin{array}{l} P(-4, 2) \in r \\ m = \frac{1}{2} \text{ pendiente} \end{array}\right\} \rightarrow y = 2 + \frac{1}{2}(x + 4) \rightarrow y = 2 + \frac{1}{2}x + 2 \rightarrow$

$\rightarrow$ Ecuación explícita: $y = \frac{1}{2}x + 4$

Vector dirección: $\vec{v}(2, 1)$

b) $\left.\begin{array}{l} P(1, 3) \in r \\ m = -2 \text{ pendiente} \end{array}\right\} \rightarrow y = 3 - 2(x - 1) \rightarrow y = 3 - 2x + 2 \rightarrow$

$\rightarrow$ Ecuación explícita: $y = -2x + 5$

Vector dirección: $\vec{v}(1, -2)$

c) $\left.\begin{array}{l} P(5, -1) \in r \\ m = 0 \text{ pendiente} \end{array}\right\} \rightarrow y = -1 + 0(x - 5) \rightarrow y = -1$

Vector dirección: $\vec{v}(1, 0)$

22. **Halla la ecuación de las siguientes rectas:**

a) Paralela a $y = -2x + 3$ y pasa por (4, 5).

b) Paralela a $2x - 4y + 3 = 0$ y pasa por (4, 0).

c) Paralela a $3x + 2y - 6 = 0$ y pasa por (0, –3).

a) $m = -2$; $y = 5 - 2(x - 4)$

b) $m = \frac{1}{2}$; $y = 0 + \frac{1}{2}(x - 4) \rightarrow y = \frac{1}{2}(x - 4)$

c) $m = -\frac{3}{2}$; $y = -3 - \frac{3}{2}(x - 0) \rightarrow y = -3 - \frac{3}{2}x$

23. **Escribe, en cada caso, la ecuación de la recta que pasa por $P(3, -2)$ y es perpendicular al vector $\vec{v}$:**

a) $\vec{v}(2, 1)$ **b) $\vec{v}(-5, 4)$** **c) $\vec{v}(-1, 0)$**

a) $\vec{v}\,' = (-1, 2)$; $m = -2$; $y = -2 - 2(x - 3) \rightarrow 2x + y - 4 = 0$

b) $\vec{v}\,' = (4, 5)$; $m = \frac{5}{4}$; $y = -2 + \frac{5}{4}(x - 3) \rightarrow 5x - 4y - 23 = 0$

c) $\vec{v}\,' = (0, -1)$; no tiene pendiente; ecuación: $x = 3$

24. **Escribe la ecuación de la recta perpendicular a r y que pasa por el punto P en los siguientes casos:**

a) $r: y = -2x + 3;\ P(-3, 2)$

b) $r: 3x - 2y + 1 = 0;\ P(4, -1)$

c) $r: x = 3;\ P(0, 4)$

a) $m = \frac{1}{2};\ y = 2 + \frac{1}{2}(x + 3)$

b) $m = -\frac{2}{3};\ y = -1 - \frac{2}{3}(x - 4)$

c) $y = 4$

25. **Halla el punto de intersección de las rectas r y s en los casos siguientes:**

a) $\begin{cases} r: 3x - 5y + 17 = 0 \\ s: 7x + 3y - 63 = 0 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} r: 3x - 2y + 9 = 0 \\ s: x - 2y + 5 = 0 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{l} 3x - 5y = -17 \\ 7x + 3y = 63 \end{array}\right\} \to \begin{array}{r} 9x - 15y = -51 \\ 35x + 15y = 315 \\ \hline 44x \qquad = 264 \end{array} \to x = 6$

$7 \cdot 6 + 3y = 63 \to 3y = 21 \to y = 7$

r y s se cortan en el punto $P(6, 7)$.

b) $\left.\begin{array}{l} 3x - 2y + 9 = 0 \\ x - 2y + 5 = 0 \end{array}\right\} \to \begin{array}{r} 3x - 2y + 9 = 0 \\ -x + 2y - 5 = 0 \\ \hline 2x \qquad + 4 = 0 \end{array} \to x = -2$

$3 \cdot (-2) - 2y + 9 = 0 \to -6 - 2y + 9 = 0 \to 2y = 3 \to y = \frac{3}{2}$

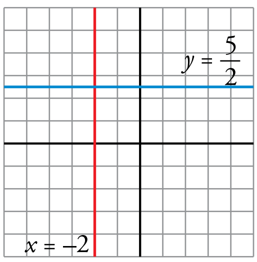
r y s se cortan en el punto $Q\left(-2, \frac{3}{2}\right)$.

26. **Representa las rectas $3x + 6 = 0$ y $2y - 5 = 0$ y halla su punto de intersección.**

$3x + 6 = 0 \to x = -2$ recta paralela al eje Y

$2y - 5 = 0 \to y = \frac{5}{2}$ recta paralela al eje X

Punto de intersección: $\left(-2, \frac{5}{2}\right)$



Distancias y circunferencias

27. **Calcula, en cada caso, la distancia entre P y Q:**

a) $P(3, 5)$, $Q(3, -7)$

b) $P(-8, 3)$, $Q(-6, 1)$

c) $P(0, -3)$, $Q(-5, 1)$

d) $P(-3, 0)$, $Q(15, 0)$

a) $dist\ (P, Q) = |\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{(3-3)^2 + (-7-5)^2} = \sqrt{12^2} = 12$

b) $dist\ (P, Q) = \sqrt{(-6+8)^2 + (1-3)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

c) $dist\ (P, Q) = \sqrt{(-5)^2 + (1+3)^2} = \sqrt{25+16} = \sqrt{41}$

d) $dist\ (P, Q) = \sqrt{(15+3)^2} = \sqrt{18^2} = 18$

28. **a) Halla el punto medio del segmento de extremos $A(-2, 0)$ y $B(6, 4)$.**

b) Comprueba que la distancia del punto medio a cada uno de los extremos es la misma.

a) $M = \left(\dfrac{-2+6}{2}, \dfrac{0+4}{2}\right) = (2, 2)$

b) $dist\ (A, M) = |\overrightarrow{AM}| = \sqrt{(2+2)^2 + 2^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20}$

$dist\ (B, M) = |\overrightarrow{BM}| = \sqrt{(2-6)^2 + (2-4)^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20}$

29. **Comprueba que el triángulo de vértices $A(-1, 0)$, $B(3, 2)$ y $C(7, 4)$ es isósceles. ¿Cuáles son los lados iguales?**

Un triángulo es isósceles cuando dos de sus lados miden lo mismo.

Calculamos, pues, $|\overrightarrow{AB}|$, $|\overrightarrow{AC}|$ y $|\overrightarrow{BC}|$:

$$\left.\begin{array}{l} |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(3+1)^2 + 2^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20} \\ |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{(7+1)^2 + 4^2} = \sqrt{64+16} = \sqrt{80} \\ |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{(7-3)^2 + (4-2)^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20} \end{array}\right\} |\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BC}|$$

El triángulo de vértices A, B y C es isósceles.

30. **Comprueba, mediante el teorema de Pitágoras, que el triángulo de vértices $A(-2, -1)$, $B(3, 1)$ y $C(1, 6)$ es rectángulo.**

$A(-2, -1)$, $B(3, 1)$, $C(1, 6)$:

$$\left.\begin{array}{l} |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{5^2 + 2^2} = \sqrt{25+4} = \sqrt{29} \\ |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{3^2 + 7^2} = \sqrt{9+49} = \sqrt{58} \\ |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{(-2)^2 + 5^2} = \sqrt{4+25} = \sqrt{29} \end{array}\right\} \begin{array}{l} |\overrightarrow{AB}|^2 + |\overrightarrow{BC}|^2 = |\overrightarrow{AC}|^2 \text{ por Pitágoras:} \\ (\sqrt{29})^2 + (\sqrt{29})^2 = (\sqrt{58})^2 \\ 29 + 29 = 58 \end{array}$$

El triángulo de vértices A, B y C es rectángulo.

31. **Escribe la ecuación de la circunferencia de centro C y radio r:**

a) $C(4, -3)$, $r = 3$

b) $C(0, 5)$, $r = 6$

c) $C(6, 0)$, $r = 2$

d) $C(0, 0)$, $r = 5$

a) $C(4, -3)$, $r = 3$

$(x-4)^2 + (y+3)^2 = 9 \rightarrow x^2 - 8x + 16 + y^2 + 6y + 9 = 9 \rightarrow x^2 + y^2 - 8x + 6y + 16 = 0$

b) $C(0, 5)$, $r = 6$

$(x-0)^2 + (y-5)^2 = 36 \rightarrow x^2 + y^2 - 10y + 25 = 36 \rightarrow x^2 + y^2 - 10y - 11 = 0$

c) $C(6, 0)$, $r = 2$

$(x-6)^2 + y^2 = 4 \rightarrow x^2 - 12x + 36 + y^2 = 4 \rightarrow x^2 + y^2 - 12x + 32 = 0$

d) $C(0, 0)$, $r = 5$

$x^2 + y^2 = 25 \rightarrow x^2 + y^2 - 25 = 0$

32. **Di cuáles son el centro y el radio de las circunferencias siguientes:**

a) $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 16$

b) $(x+1)^2 + y^2 = 81$

c) $x^2 + y^2 = 10$

a) $C(2, -3)$, $r = 4$

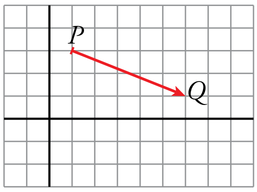
b) $C(-1, 0)$, $r = 9$

c) $C(0, 0)$, $r = \sqrt{10}$

Página 183

Aplica lo aprendido

33. **A partir del punto $P(1, 3)$, trazamos el vector $2\vec{u} + \vec{v} - \vec{w}$ y llegamos al punto Q. Averigua las coordenadas de Q si conocemos $\vec{u}(2, 1)$, $\vec{v}(3, -1)$ y $\vec{w}(2, 3)$.**



$2\vec{u} + \vec{v} - \vec{w} = 2(2, 1) + (3, -1) - (2, 3) = (4, 2) + (3, -1) + (-2, -3) = (5, -2)$

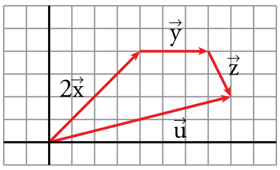
$\overrightarrow{PQ} = (5, -2)$

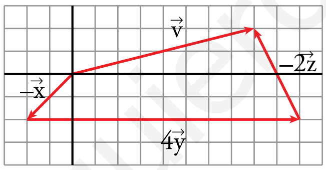
$Q = (5, -2) + (1, 3) = (6, 1)$

34. **a) Representa los vectores $\vec{u} = 2\vec{x} + \vec{y} + \vec{z}$ y $\vec{v} = -\vec{x} + 4\vec{y} - 2\vec{z}$ siendo $\vec{x}(2, 2)$, $\vec{y}(3, 0)$ y $\vec{z}(1, -2)$.**

b) Halla las coordenadas de $\vec{u}$ y $\vec{v}$. ¿Son iguales?

a)





b) $\left.\begin{aligned} \vec{u} &= 2\vec{x} + \vec{y} + \vec{z} = 2(2, 2) + (3, 0) + (1, -2) = (8, 2) \\ \vec{v} &= -\vec{x} + 4\vec{y} - 2\vec{z} = -(2, 2) + 4(3, 0) - 2(1, -2) = (8, 2) \end{aligned}\right\} \vec{u} = \vec{v}$

35. **a) ¿Cuáles de los siguientes vectores tienen la misma dirección?**

$$\vec{t}(-3, 2) \qquad \vec{u}(2, 3) \qquad \vec{v}\left(\frac{5}{3}, \frac{5}{2}\right) \qquad \vec{w}(6, -4)$$

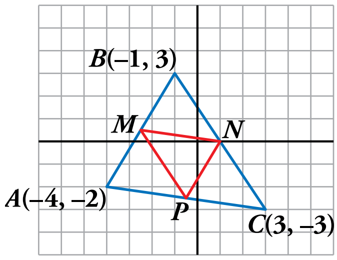
b) Calcula el valor de m y n para que se verifique $\vec{v} = m\vec{t} + n\vec{u}$.

a) $\vec{t}$ y $\vec{w}$ porque $\dfrac{-3}{6} = \dfrac{2}{-4}$.

$\vec{u}$ y $\vec{v}$ porque $\dfrac{2}{\frac{5}{3}} = \dfrac{3}{\frac{5}{2}}$.

b) $\left(\dfrac{5}{3}, \dfrac{5}{2}\right) = m(-3, 2) + n(2, 3) \rightarrow \begin{cases} \dfrac{5}{3} = -3m + 2n \\ \dfrac{5}{2} = 2m + 3n \end{cases} \rightarrow m = 0, \; n = \dfrac{5}{6}$

36. **a) Determina las coordenadas de los puntos M, N y P que son los puntos medios de los lados del triángulo ABC.**



b) Halla las coordenadas de los vectores $\vec{MN}$, $\vec{MP}$ y $\vec{PN}$ y comprueba que $\vec{MN} = \frac{1}{2}\vec{AC}$; $\vec{MP} = \frac{1}{2}\vec{BC}$ y $\vec{PN} = \frac{1}{2}\vec{AB}$.

a) M es el punto medio del segmento de extremos $A(-4, -2)$ y $B(-1, 3)$:

$$M = \left(\frac{-4-1}{2}, \frac{-2+3}{2}\right) = \left(-\frac{5}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

N es el punto medio del segmento de extremos $B(-1, 3)$ y $C(3, -3)$:

$$N = \left(\frac{-1+3}{2}, \frac{3-3}{2}\right) = (1, 0)$$

P es el punto medio del segmento de extremos A y C:

$$P = \left(\frac{-4+3}{2}, \frac{-2-3}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{5}{2}\right)$$

b) $\vec{MN} = (1, 0) - \left(-\frac{5}{2}, \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{7}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

$$\vec{MP} = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{5}{2}\right) - \left(-\frac{5}{2}, \frac{1}{2}\right) = (2, -3)$$

$$\vec{PN} = (1, 0) - \left(-\frac{1}{2}, -\frac{5}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$$

$$\vec{AC} = (3, -3) - (-4, -2) = (7, -1) = 2\vec{MN} \rightarrow \vec{MN} = \frac{1}{2}\vec{AC}$$

$$\vec{BC} = (3, -3) - (-1, 3) = (4, -6) = 2\vec{MP} \rightarrow \vec{MP} = \frac{1}{2}\vec{BC}$$

$$\vec{AB} = (-1, 3) - (-4, -2) = (3, 5) = 2\vec{PN} \rightarrow \vec{PN} = \frac{1}{2}\vec{AB}$$

37. **Dados los vectores $\vec{u}(3, 2)$, $\vec{v}(x, 5)$ y $\vec{w}(8, y)$, calcula x e y para que se verifique: $2\vec{u} - \vec{v} = \vec{w}$.**

$2\vec{u} - \vec{v} = \vec{w} \rightarrow 2(3, 2) - (x, 5) = (8, y) \rightarrow (6, 4) - (x, 5) = (8, y)$

$$(6 - x, -1) = (8, y) \begin{cases} 6 - x = 8 \rightarrow x = -2 \\ -1 = y \end{cases}$$

Luego: $x = -2$, $y = -1$

38. **Dados los vectores $\vec{u}(5, -3)$, $\vec{v}(1, 3)$ y $\vec{w}(2, 0)$, calcula el valor de m y n para que se verifique: $\vec{u} = m\vec{v} + n\vec{w}$.**

$\vec{u} = m\vec{v} + n\vec{w} \rightarrow (5, -3) = m(1, 3) + n(2, 0)$

$$\left.\begin{array}{l} 5 = m + 2n \\ -3 = 3m \end{array}\right\} \begin{array}{l} m = -1 \\ n = 3 \end{array}$$

39. **Calcula, en cada caso, el valor de m para que el punto $P(m, -2)$ pertenezca a la recta dada:**

a) r: pasa por $A(3, 1)$ y $B(-1, 0)$. **b) s: pasa por $A(1, 3)$ y $B(1, -4)$.**

a) $P(m, -2)$ pertenece a la recta que pasa por $A(3, 1)$ y $B(-1, 0)$ $\Leftrightarrow$ A, B y P están alineados $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AB} \,//\, \overrightarrow{BP}$.

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AB}(-4, -1) \\ \overrightarrow{BP}(m+1, -2) \end{array}\right\} \overrightarrow{AB} \,//\, \overrightarrow{BP} \rightarrow \frac{-4}{m+1} = \frac{-1}{-2} \rightarrow 8 = -m - 1 \rightarrow m = -9$$

b) $P(m, -2)$ pertenece a la recta que pasa por $A(1, 3)$ y $B(1, -4)$ $\Leftrightarrow$ A, B y P están alineados $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AB} \,//\, \overrightarrow{BP}$.

$\overrightarrow{AB}(0, -7) \rightarrow \overrightarrow{BP}(m-1, 2)$ es paralelo a $\overrightarrow{AB}$ si $m - 1 = 0 \Leftrightarrow m = 1$.

40. **Calcula m para que los puntos $R(5, -2)$, $S(-1, 1)$ y $T(2, m)$ estén alineados.**

$R(5, -2)$, $S(-1, 1)$ y $T(2, m)$

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{RS} = (-1, 1) - (5, -2) = (-6, 3) \\ \overrightarrow{ST} = (2, m) - (-1, 1) = (3, m-1) \end{array}\right\} \frac{-6}{3} = \frac{3}{m-1} \rightarrow -2(m-1) = 3$$

$-2m + 2 = 3 \rightarrow -2m = 1 \rightarrow m = -\frac{1}{2}$

41. **Comprueba si los puntos $A(18, 15)$ y $B(-43, -5)$ pertenecen a la recta $x - 3y + 27 = 0$.**

A: $18 - 3 \cdot 15 + 27 = 0 \rightarrow A \in r$

B: $-43 - 3 \cdot (-5) + 27 \neq 0 \rightarrow B \notin r$

42. **Calcula m y n para que las rectas $r: 3x + my - 8 = 0$ y $s: nx - 2y + 3 = 0$ se corten en el punto $P(1, 5)$.**

r: $3x + my - 8 = 0 \rightarrow 3 \cdot 1 + m \cdot 5 - 8 = 0 \rightarrow m = 1$

s: $nx - 2y + 3 = 0 \rightarrow n \cdot 1 - 10 + 3 = 0 \rightarrow n = 7$

43. **a) Calcula el valor de k para que la recta de ecuación $(k + 3)x - y - 2 = 0$ pase por el punto $A(2, 0)$.**

b) ¿Cuál es la pendiente de esa recta?

a) $A \in r$: $(k + 3)x - y - 2 = 0 \rightarrow (k + 3) \cdot 2 - 0 - 2 = 0 \rightarrow 2(k + 3) = 2 \rightarrow$

$\rightarrow k + 3 = 1 \rightarrow k = -2$

b) $k = -2 \rightarrow r: x - y - 2 = 0 \rightarrow r: y = x - 2 \rightarrow m = 1$

44. **Estudia la posición relativa de los siguientes pares de rectas y halla el punto de intersección cuando sea posible:**

a) $r: \begin{cases} x = 3 + t \\ y = -2 - 2t \end{cases}$ $\qquad s: x - 1 = \dfrac{y}{2}$

b) $r: y = 2x - 3$ $\qquad s: \begin{cases} x = t \\ y = 2t \end{cases}$

a) $r: \begin{cases} x = 3 + t \\ y = -2 - 2t \end{cases} \to \begin{cases} P_r(3, -2) \text{ punto de } r \\ \vec{v}_r(1, -2) \text{ vector dirección de } r \end{cases}$

$s: x - 1 = \dfrac{y}{2} \to \begin{cases} P_s(1, 0) \text{ punto de } s \\ \vec{v}_s(1, 2) \text{ vector dirección de } s \end{cases}$

$\dfrac{1}{1} \neq \dfrac{-2}{2} \to \vec{v}_r$ y $\vec{v}_s$ no son paralelos $\to r$ y s se cortan en un punto.

Para hallar el punto de corte, hallamos la ecuación explícita de cada recta y resolvemos el sistema formado por ambas ecuaciones:

$\left. \begin{array}{l} P_r(3, -2) \in r \\ \vec{v}_r(1, -2) \to m_r = -2 \end{array} \right\} \to r: y = -2 - 2(x - 3) \to r: y = -2x + 4$

$s: x - 1 = \dfrac{y}{2} \to s: y = 2x - 2$

$\left. \begin{array}{l} y = -2x + 4 \\ y = 2x - 2 \end{array} \right\}$ El punto de corte es: $M\left(\dfrac{3}{2}, 1\right)$

b) $r: y = 2x - 3 \to m_r = 2$

$s: \begin{cases} x = t \\ y = 2t \end{cases} \to \vec{v}_s(1, 2) \to m_s = 2$

$m_r = m_s \to r$ y s o son paralelas o coincidentes.

s pasa por el origen de coordenadas pero r no, por tanto r y s son paralelas.

45. **Determina el valor de m para que las rectas $r: \dfrac{x+1}{3} = \dfrac{y}{2}$ y $s: \dfrac{x}{2} = \dfrac{y-1}{m}$ sean:**

a) Paralelas. **b) Perpendiculares.** **c) Se corten en el punto $P(-1, 0)$.**

$r: \dfrac{x+1}{3} = \dfrac{y}{2} \to \begin{cases} (-1, 0) \in r \\ \vec{v}_r(3, 2) \to m_r = \dfrac{2}{3} \end{cases}$ $\qquad s: \dfrac{x}{2} = \dfrac{y-1}{m} \to \begin{cases} (0, 1) \in s \\ \vec{v}_s(2, m) \to m_s = \dfrac{m}{2} \end{cases}$

a) $\left. \begin{array}{l} r \,//\, s \to m_r = m_s \to \dfrac{2}{3} = \dfrac{m}{2} \to m = \dfrac{4}{3} \\ (0, 1) \notin r \text{ ya que } \dfrac{0+1}{3} \neq \dfrac{1}{2} \end{array} \right\}$ r y s son paralelas si $m = \dfrac{4}{3}$

b) $r \perp s \to \vec{v}_r \perp \vec{v}_s \to m_r \cdot m_s = -1 \to \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{m}{2} = -1 \to m = -3$

c) • $P \in r$ (obvio, por la definición de r)

• $P \in s \to \dfrac{-1}{2} = \dfrac{0-1}{m} \to -\dfrac{1}{2} = -\dfrac{1}{m} \to m = 2$

46. **Los puntos $A(2, 1)$ y $B(6, 4)$ son vértices de un triángulo. Sabiendo que $M(0{,}5; -1)$ es el punto medio del lado AC, calcula las coordenadas de $\overrightarrow{AC}$ y el perímetro del triángulo.**

$A(2, 1)$, $B(6, 4)$ y $C(x, y)$ son los vértices del triángulo $\widehat{ABC}$.

- $M\left(\frac{1}{2}, -1\right)$ punto medio del lado AC $\to \left(\frac{1}{2}, -1\right) = \left(\frac{2+x}{2}, \frac{1+y}{2}\right) \to$

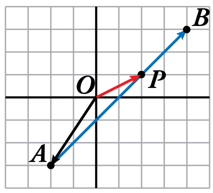
$$\to \begin{cases} \frac{1}{2} = \frac{2+x}{2} \to x = -1 \\ -1 = \frac{1+y}{2} \to y = -3 \end{cases} \to C(-1, -3)$$

- $\left.\begin{array}{l} A(2, 1) \\ C(-1, -3) \end{array}\right\} \to \overrightarrow{AC}(-1-2, -3-1) \to \overrightarrow{AC}(-3, -4)$

- $\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AB}(4, 3) \to |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5 \\ \overrightarrow{AC}(-3, -4) \to |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2} = 5 \\ \overrightarrow{BC}(-7, -7) \to |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{(-7)^2 + (-7)^2} = \sqrt{98} = 7\sqrt{2} \end{array}\right\}$

Perímetro de $\widehat{ABC} = (10 + 7\sqrt{2})$ unidades

47. **En el segmento de extremos $A(-2, -3)$ y $B(4, 3)$, halla las coordenadas del punto P tal que $\overrightarrow{AP} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$.**



$A(-2, -3) \quad B(4, 3) \quad P(x, y)$

$\overrightarrow{AP} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} \to (x+2, y+3) = \frac{2}{3}(6, 6) \to (x+2, y+3) = (4, 4) \to$

$$\to \begin{cases} x + 2 = 4 \\ y + 3 = 4 \end{cases} \to \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases} \to P(2, 1)$$

48. **Escribe la ecuación de una recta perpendicular a r y que pase por $(4, -3)$ en los siguientes casos:**

a) r: $2x + 7 = 0$ **b)** r: $-y + 4 = 0$

a) $2x + 7 = 0 \to x = -\frac{7}{2}$ es paralela al eje Y.

Por tanto, la recta perpendicular a r es paralela al eje $X \to y = k$

Como pasa por $(4, -3)$, su ecuación es $y = -3 \to y + 3 = 0$

b) $-y + 4 = 0 \to y = 4$ es paralela al eje X.

Por tanto, la recta perpendicular a r es paralela al eje $Y \to x = k$

Como pasa por $(4, -3)$, su ecuación es $x = 4 \to x - 4 = 0$

49. **Estudia si las rectas r y s son paralelas o perpendiculares:**

r: $3x - 5y + 15 = 0$ s: pasa por $(-2, -3)$ y $(8, 3)$.

$\left.\begin{array}{l} r: 3x - 5y + 15 = 0 \to m = \frac{3}{5} \\ s: \vec{v} = (-2-8, -3-3) = (-10, -6) \to m = \frac{3}{5} \end{array}\right\} \to$ Son paralelas

Página 184

50. **Estudia la posición relativa de los siguientes pares de rectas:**

a) $\begin{cases} r: 2x - 5y + 3 = 0 \\ s: P(3, 1),\ Q(-2, 3) \end{cases}$ b) $\begin{cases} r: 5x - 4y + 8 = 0 \\ s: A(4, 7),\ B(0, 2) \end{cases}$

a) • s: $P(3, 1)$, $Q(-2, 3)$. Un vector dirección es $(-5, 2) \rightarrow m = -\dfrac{2}{5}$

$$y = 1 - \frac{2}{5}(x - 3) \rightarrow 5y = 5 - 2x + 6 \rightarrow 2x + 5y - 11 = 0$$

• r: $2x - 5y + 3 = 0$

s: $2x + 5y - 11 = 0$

$$\left.\begin{array}{l} 4x \quad - 8 = 0 \rightarrow x = 2 \\ 2 \cdot 2 - 5y + 3 = 0 \rightarrow 5y = 7 \rightarrow y = \dfrac{7}{5} \end{array}\right\} r \text{ y } s \text{ se cortan en el punto } \left(2, \frac{7}{5}\right).$$

b) s: $A(4, 7)$, $B(0, 2)$. Un vector dirección es $(-4, -5) \rightarrow m = \dfrac{5}{4}$

$$y = 2 + \frac{5}{4}(x - 0) \rightarrow y = 2 + \frac{5}{4}x \rightarrow 4y = 8 + 5x \rightarrow 5x - 4y + 8 = 0$$

r y s son la misma recta.

51. **Halla la ecuación de la recta perpendicular a AB en su punto medio, siendo $A(-5, 3)$ y $B(2, 7)$.**

$A(-5, 3)$, $B(2, 7)$. Vector dirección $(7, 4) \rightarrow m = \dfrac{4}{7}$; $m' = -\dfrac{7}{4}$

$$M_{AB} = \left(\frac{-5 + 2}{2}, \frac{3 + 7}{2}\right) = \left(-\frac{3}{2}, 5\right)$$

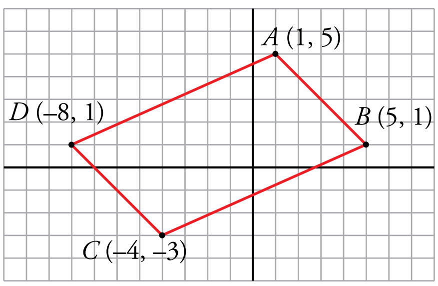
$$y = 5 - \frac{7}{4}\left(x + \frac{3}{2}\right) \rightarrow y = 5 - \frac{7}{4}x - \frac{21}{8} \rightarrow 8y = 40 - 14x - 21 \rightarrow 14x + 8y - 19 = 0$$

52. **Comprueba que el cuadrilátero de vértices $A(1, 5)$, $B(5, 1)$, $C(-4, -3)$ y $D(-8, 1)$ es un paralelogramo. Para ello, prueba que los puntos medios de sus diagonales coinciden.**

• Punto medio de AC: $M_{AC} = \left(\dfrac{1 - 4}{2}, \dfrac{5 - 3}{2}\right) = \left(-\dfrac{3}{2}, 1\right)$

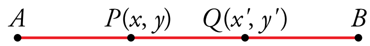
• Punto medio de BD: $M_{BD} = \left(\dfrac{5 - 8}{2}, \dfrac{1 + 1}{2}\right) = \left(-\dfrac{3}{2}, 1\right)$

Los puntos medios de las diagonales coinciden.



53. **Halla, en cada caso, los puntos que dividen al segmento AB en tres partes iguales:**

a) $A(-3, 4)$, $B(6, 1)$ **b)** $A(0, -2)$, $B(9, 1)$



a) $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} \to (x + 3,\ y - 4) = \frac{1}{3}(9, -3) \to (x + 3,\ y - 4) = (3, -1) \to$

$\to \begin{cases} x + 3 = 3 \\ y - 4 = -1 \end{cases} \to \begin{cases} x = 0 \\ y = 3 \end{cases} \to P(0, 3)$

$\overrightarrow{AQ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} \to (x' + 3,\ y' - 4) = \frac{2}{3}(9, -3) \to (x' + 3,\ y' - 4) = (6, -2) \to$

$\to \begin{cases} x' + 3 = 6 \\ y' - 4 = -2 \end{cases} \to \begin{cases} x' = 3 \\ y' = 2 \end{cases} \to Q(3, 2)$

b) $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} \to (x,\ y + 2) = \frac{1}{3}(9, 3) \to (x,\ y + 2) = (3, 1) \to$

$\to \begin{cases} x = 3 \\ y + 2 = 1 \end{cases} \to \begin{cases} x = 3 \\ y = -1 \end{cases} \to P(3, -1)$

$\overrightarrow{AQ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} \to (x,\ y + 2) = \frac{2}{3}(9, 3) \to (x,\ y + 2) = (6, 2) \to$

$\to \begin{cases} x = 6 \\ y + 2 = 2 \end{cases} \to \begin{cases} x = 6 \\ y = 0 \end{cases} \to Q(6, 0)$

54. **Halla la ecuación de estas circunferencias:**

a) **Centro $C(0, 0)$ y pasa por $(-3, 4)$.** **b)** **Centro $C(1, 2)$ y pasa por $(5, 4)$.**

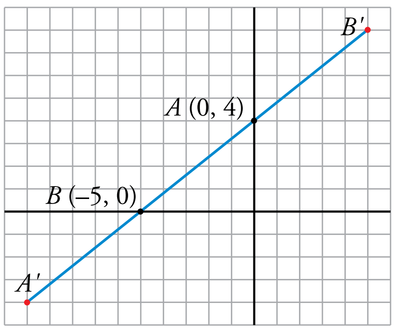
a) radio: $\sqrt{(0 + 3)^2 + (0 - 4)^2} = \sqrt{9 + 16} = 5$

$x^2 + y^2 = 25$

b) $r = \sqrt{(1 - 5)^2 + (2 - 4)^2} = \sqrt{16 + 4} = \sqrt{20}$

$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 20$

55. **Dados los puntos $A(0, 4)$ y $B(-5, 0)$, halla el punto simétrico de B respecto de A y el simétrico de A respecto de B.**



Simétrico de A respecto de B:

$A' = \left(\frac{0 + x}{2}, \frac{4 + y}{2}\right) = (-5, 0) \left\langle \begin{array}{l} \frac{x}{2} = -5 \to x = -10 \\ 4 + y = 0 \to y = -4 \end{array} \right\} A'(-10, -4)$

Simétrico de B respecto de A:

$B' = \left(\frac{-5 + x}{2}, \frac{0 + y}{2}\right) = (0, 4) \left\langle \begin{array}{l} -5 + x = 0 \to x = 5 \\ y = 8 \end{array} \right\} B'(5, 8)$

56. **La recta r es paralela a $5x - 4y + 3 = 0$, y la recta s es perpendicular a ellas. Ambas pasan por el punto $(1, 3)$.**

Escribe las ecuaciones de r y s.

$5x - 4y + 3 = 0 \rightarrow m = \frac{5}{4}$

r es la recta de pendiente $\frac{5}{4}$ que pasa por $(1, 3)$:

r: $y = 3 + \frac{5}{4}(x - 1) \rightarrow 4y = 12 + 5x - 5 \rightarrow 5x - 4y + 7 = 0$

s es la recta de pendiente $-\frac{4}{5}$ que pasa por $(1, 3)$:

s: $y = 3 - \frac{4}{5}(x - 1) \rightarrow 5y = 15 - 4x + 4 \rightarrow 4x + 5y - 19 = 0$

Resuelve problemas

57. **Los puntos $A(4, 5)$ y $B(7, 0)$ son vértices de un trapecio rectángulo que tiene dos lados sobre los ejes de coordenadas y otro lado paralelo al eje X.**

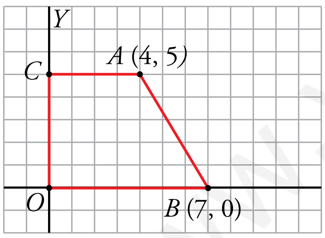
Dibuja el trapecio y halla:

a) Las ecuaciones de sus lados.

b) Su perímetro.

c) Su área.

a)



OC: $x = 0$

OB: $y = 0$

AC: $y = 5$

AB: Vector dirección $(3, -5) \rightarrow m = -\frac{5}{3} \rightarrow y = -\frac{5}{3}(x - 7) \rightarrow 5x + 3y - 35 = 0$

b) $\overline{AC} = 4$; $\overline{OC} = 5$; $\overline{OB} = 7$

$\overline{AB} = \sqrt{(7-4)^2 + (0-5)^2} = \sqrt{9 + 25} = \sqrt{34}$

$p = 4 + 5 + 7 + \sqrt{34} = 16 + \sqrt{34}$ u

c) $A = \frac{7 + 4}{2} \cdot 5 = \frac{11}{2} \cdot 5 = \frac{55}{2}$ u^2

58. **Estudia analíticamente si las rectas r: $3x + y = 14$; s: $2x - y = 11$; t: $4x + 17y = 3$ se cortan en un mismo punto. En caso afirmativo, calcula sus coordenadas.**

- En primer lugar, hallamos el punto de corte de r y s, P (para ello resolvemos el sistema formado por las ecuaciones de ambas rectas).

$$\left.\begin{array}{l} 3x + y = 14 \\ 2x - y = 11 \end{array}\right\} \text{ Sumando las ecuaciones: } 5x = 25 \rightarrow x = 5$$

Sustituyendo en la ecuación de r el valor de x obtenido:

$3 \cdot 5 + y = 14 \rightarrow y = -1$

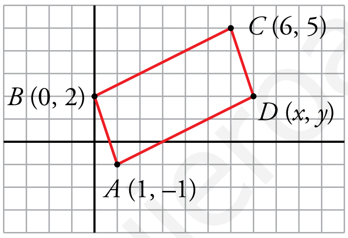
Por tanto, $P(5, -1)$.

- Ahora debemos estudiar si $P \in t$:

$$\left.\begin{array}{l} P(5, -1) \\ t\colon 4x + 17y = 3 \end{array}\right\} \; 4 \cdot 5 + 17 \cdot (-1) = 3 \rightarrow P \in t$$

Por tanto, las rectas r, s y t se cortan en el punto $P(5, -1)$.

59. **Halla las coordenadas del punto D, de modo que $ABCD$ sea un paralelogramo, siendo $A(1, -1)$, $B(0, 2)$ y $C(6, 5)$.**



- Punto medio de AC:

$$M_{AC} = \left(\frac{6+1}{2}, \frac{5-1}{2}\right) = \left(\frac{7}{2}, 2\right)$$

- Punto medio de BD:

$$M_{BD} = \left(\frac{x+0}{2}, \frac{y+2}{2}\right)$$

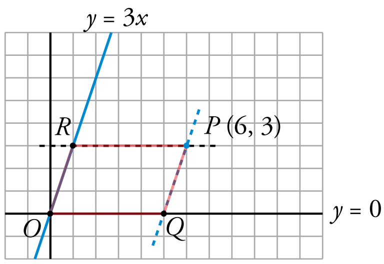
Los puntos medios de las diagonales deben coincidir.

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{x}{2} = \dfrac{7}{2} \rightarrow x = 7 \\ \dfrac{y+2}{2} = 2 \rightarrow y = 4 - 2 = 2 \end{array}\right\} \text{ El punto } D \text{ tiene coordenadas } D(7, 2).$$

60. **Dibuja un paralelogramo que tenga dos de sus lados sobre las rectas $y = 3x$ e $y = 0$ y un vértice en el punto $P(6, 3)$.**

a) Halla las ecuaciones de los otros dos lados.

b) Di cuáles son las coordenadas de los otros vértices.



a) OR: $y = 3x$

OQ: $y = 0$

PR: $y = 3$

PQ: $y = 3 + 3(x - 6) \rightarrow y = 3 + 3x - 18 \rightarrow 3x - y - 15 = 0$

b) $O(0, 0)$, $Q(5, 0)$, $R(1, 3)$, $P(6, 3)$

61. **Desde una estación marítima se observan en un radar dos barcos navegando. Uno está en el punto $P(4, 3)$ y sigue la dirección del vector $\vec{u}(5, 2)$, y el otro sigue la trayectoria de la recta $4x - 10y = 17$. ¿Es posible que choquen?**

Los barcos siguen las trayectorias de las siguientes rectas:

$s: 4x - 10y = 17 \rightarrow s: 10y = 4x - 17 \rightarrow s: y = \dfrac{2}{5}x - \dfrac{17}{10}$

$$r: \begin{cases} P(4, 3) \in r \\ \vec{u}(5, 2) \text{ vector dirección} \rightarrow m = \dfrac{2}{5} \end{cases} \rightarrow r: y = 3 + \dfrac{2}{5}(x - 4) \rightarrow r: y = \dfrac{2}{5}x + \dfrac{7}{5}$$

Las rectas r y s son paralelas ya que tienen la misma pendiente y sus ordenadas en el origen son distintas, por tanto, no es posible que los barcos choquen.

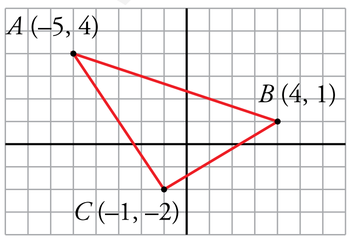
62. **Dado el triángulo de vértices $A(-5, 4)$, $B(4, 1)$ y $C(-1, -2)$, halla:**

a) Las ecuaciones de los tres lados.

b) El punto medio del lado AC.

c) La ecuación de la mediana del vértice B.

a)



- Lado AB:

Vector dirección $(9, -3)//(3, -1) \rightarrow m = -\dfrac{1}{3}$

$y = 1 - \dfrac{1}{3}(x - 4) \rightarrow 3y = 3 - x + 4 \rightarrow x + 3y - 7 = 0$

- Lado AC:

Vector dirección $(4, -6)//(2, -3) \rightarrow m = -\dfrac{3}{2}$

$y = -2 - \dfrac{3}{2}(x + 1) \rightarrow 2y = -4 - 3x - 3 \rightarrow 3x + 2y + 7 = 0$

- Lado BC:

  Vector dirección $(-5, -3) \to m = \frac{3}{5}$

  $y = 1 + \frac{3}{5}(x-4) \to 5y = 5 + 3x - 12 \to 3x - 5y - 7 = 0$

b) $M_{AC} = \left(\frac{-5-1}{2}, \frac{4-2}{2}\right) = (-3, 1)$

c) La mediana que corresponde a B pasa, también, por el punto medio de AC, M_{AC}. Su vector dirección es $(7, 0) \to m = 0$

$y = 1 + 0(x+3) \to y = 1$

63. **Dada la recta $r: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 - t \end{cases}$, calcula la longitud del segmento AB siendo A y B los puntos donde r corta a los ejes de coordenadas.**

- $r: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 - t \end{cases} \to \begin{cases} P(2, 1) \in r \\ \vec{v}(1, -1) \text{ vector dirección } \to m = -1 \end{cases} \to$

  $\to r: y = 1 - 1(x-2) \to r: y = -x + 3$

- Hallamos las coordenadas de los puntos en los que r corta los ejes de coordenadas:

  $A = \begin{cases} y = -x + 3 \\ y = 0 \end{cases} \to 0 = -x + 3 \to x = 3 \to A(3, 0)$

  $B = \begin{cases} y = -x + 3 \\ x = 0 \end{cases} \to y = 0 + 3 \to y = 3 \to B(0, 3)$

- $\overline{AB} = |\overrightarrow{AB}| = |(-3, 3)| = \sqrt{(-3)^2 + 3^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

64. **Comprueba que el triángulo de vértices $A(1, 3)$, $B(4, 1)$ y $C(3, 11/4)$ es isósceles y calcula la medida de la altura relativa al lado desigual.**

- Para comprobar que el triángulo es isósceles, hallamos las longitudes de sus lados teniendo en cuenta que:

  $\overrightarrow{AB} = (3, -2)$, $\overrightarrow{AC} = \left(2, -\frac{1}{4}\right)$ y $\overrightarrow{BC} = \left(-1, \frac{7}{4}\right)$

  Por tanto:

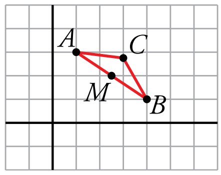
  $\overline{AB} = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{3^2 + (-2)^2} = \sqrt{13}$

  $\overline{AC} = |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{2^2 + \left(-\frac{1}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{65}{16}} = \frac{\sqrt{65}}{4}$

  $\overline{BC} = |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{(-1)^2 + \left(\frac{7}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{65}{16}} = \frac{\sqrt{65}}{4}$

  Por tanto, el triángulo $\widehat{ABC}$ es isósceles y el lado desigual es AB.

• Sea h la altura relativa al lado desigual AB. Como el triángulo es isósceles, h corta el lado AB en su punto medio M. Por tanto, la medida de la altura relativa al lado desigual es $|\overrightarrow{CM}|$.



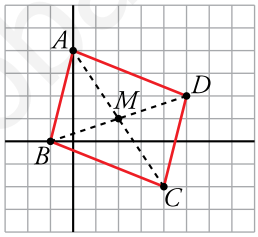
$$\left.\begin{array}{l} A(1,3) \\ B(4,1) \end{array}\right\} \to M\left(\frac{1+4}{2}, \frac{3+1}{2}\right) = M\left(\frac{5}{2}, 2\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} C\left(3, \frac{11}{4}\right) \\ M\left(\frac{5}{2}, 2\right) \end{array}\right\} \to \overrightarrow{CM}\left(\frac{5}{2} - 3, 2 - \frac{11}{4}\right) = \overrightarrow{CM}\left(-\frac{1}{2}, -\frac{3}{4}\right)$$

$$|\overrightarrow{CM}| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{3}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{13}{16}} = \frac{\sqrt{13}}{4}$$

Por tanto, la altura relativa al lado desigual mide $\frac{\sqrt{13}}{4}$.

65. **Los puntos $A(0, 4)$ y $B(-1, 0)$ son vértices consecutivos de un paralelogramo, del que sabemos que las diagonales se cortan en $M(2, 1)$. Halla las coordenadas de los vértices C y D.**



Las diagonales de un paralelogramo se cortan en su punto medio, por tanto, M es el punto medio de AC y BD.

• $M(2, 1)$ es el punto medio de $A(0, 4)$ y $C(x, y)$:

$$(2, 1) = \left(\frac{0+x}{2}, \frac{4+y}{2}\right) \to \begin{cases} 2 = \frac{x}{2} \\ 1 = \frac{4+y}{2} \end{cases} \to \begin{cases} x = 4 \\ y = -2 \end{cases} \to C(4, -2)$$

• $M(2, 1)$ es el punto medio de $B(-1, 0)$ y $D(x, y)$:

$$(2, 1) = \left(\frac{-1+x}{2}, \frac{0+y}{2}\right) \to \begin{cases} 2 = \frac{-1+x}{2} \\ 1 = \frac{y}{2} \end{cases} \to \begin{cases} x = 5 \\ y = 2 \end{cases} \to D(5, 2)$$

66. **En el triángulo de vértices $A(1, 5)$, $B(4, 0)$ y $C(-2, -2)$, halla:**

a) La ecuación de la altura que parte de A.

b) La ecuación de la altura que parte de B.

c) El punto de corte de las alturas (ortocentro).

a) La altura que parte de A es la recta, r, perpendicular a BC que pasa por A:

$$\begin{cases} \overrightarrow{BC}(-6, -2) \perp r \to \vec{v}(2, -6) \text{ vector dirección de } r \to m_r = -3 \\ A(1, 5) \in r \end{cases}$$

$$r: y = 5 - 3(x - 1) \to r: y = -3x + 8$$

b) La altura que parte de B es la recta, s, perpendicular a AC que pasa por B:

$$\begin{cases} \overrightarrow{AC}(-3, -7) \perp s \to \vec{v}(7, -3) \text{ vector dirección de } s \to m_s = -\frac{3}{7} \\ B(4, 0) \in s \end{cases}$$

$$s: y = 0 - \frac{3}{7}(x - 4) \to s: y = -\frac{3}{7}x + \frac{12}{7}$$

c) $\left.\begin{array}{l} y = -3x + 8 \\ y = -\dfrac{3}{7}x + \dfrac{12}{7} \end{array}\right\} \to -3x + 8 = -\dfrac{3}{7}x + \dfrac{12}{7} \to -21x + 56 = -3x + 12 \to$

$\to -18x = -44 \to x = \dfrac{22}{9}$

Sustituimos x en la ecuación de r:

$y = -3 \cdot \dfrac{22}{9} + 8 \to y = \dfrac{2}{3}$

El ortocentro es $\left(\dfrac{22}{9}, \dfrac{2}{3}\right)$.

67. **Calcula las coordenadas de un punto P que tiene la abscisa igual a la ordenada y que equidista de los puntos $A(2, 0)$ y $B(0, 4)$.**

- P tiene igual la abscisa y la ordenada $\to P(a, a)$
- P equidista de $A(2, 0)$ y $B(0, 4)$ $\to$ *dist* (A, P) = *dist* (B, P) $\to |\overrightarrow{AP}| = |\overrightarrow{BP}|$

$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AP}(a - 2, a) \\ \overrightarrow{BP}(a, a - 4) \end{array}\right\} |\overrightarrow{AP}| = |\overrightarrow{BP}| \to \sqrt{(a-2)^2 + a^2} = \sqrt{a^2 + (a-4)^2} \to$

$\to (a-2)^2 + a^2 = a^2 + (a-4)^2 \to$

$\to a^2 - 4a + 4 = a^2 - 8a + 16 \to$

$\to 4a = 12 \to a = 3$

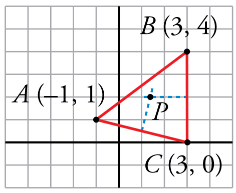
El punto que buscamos es $P(3, 3)$.

68. **En el triángulo de vértices $A(-1, 1)$, $B(3, 4)$ y $C(3, 0)$, halla:**

a) La ecuación de la mediatriz de BC.

b) La ecuación de la mediatriz de AC.

c) El punto de intersección de las mediatrices (el circuncentro del triángulo).



a) La mediatriz de BC es la perpendicular a BC por su punto medio, M_{BC}.

$M_{BC} = \left(\dfrac{3+3}{2}, \dfrac{4+0}{2}\right) = (3, 2)$

La recta que contiene a BC es $x = 3$. Su perpendicular por (3, 2) es $y = 2$, mediatriz de BC.

b) $M_{AC} = \left(\dfrac{-1+3}{2}, \dfrac{1+0}{2}\right) = \left(1, \dfrac{1}{2}\right)$

La recta que contiene a AC tiene vector dirección $(4, -1) \to m = -\dfrac{1}{4}$

Pendiente de la perpendicular a AC, $m' = 4$.

Mediatriz de AC: $y = \dfrac{1}{2} + 4(x - 1) \to 2y = 1 + 8x - 8 \to 2y - 8x + 7 = 0$

c) Circuncentro, P:

$\left.\begin{array}{l} y = 2 \\ 2y - 8x + 7 = 0 \end{array}\right\} 4 - 8x + 7 = 0 \to 8x = 11 \to x = \dfrac{11}{8}$

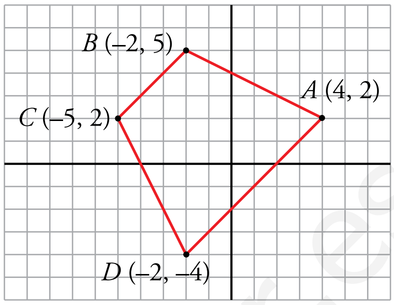
Las coordenadas de P son $\left(\dfrac{11}{8}, 2\right)$.

Página 185

69. **Prueba que el cuadrilátero de vértices**

$$A(4, 2),\ B(-2, 5),\ C(-5, 2)\ \text{ y }\ D(-2, -4)$$

es un trapecio isósceles y calcula su perímetro.



- Probamos que BC es paralelo a AD hallando las pendientes de las rectas que los contienen:

  m_{BC}: vector dirección $(-3, -3) \rightarrow m_{BC} = 1$

  m_{AD}: vector dirección $(-6, -6) \rightarrow m_{AD} = 1$

- Probamos que $\overline{AB} = \overline{CD}$:

  $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-2-4)^2 + (5-2)^2} = \sqrt{36+9} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$

  $|\overrightarrow{CD}| = \sqrt{(-5+2)^2 + (2+4)^2} = \sqrt{9+36} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$

  Por tanto, el trapecio $ABCD$ es isósceles.

- Perímetro:

  $|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{(-2+5)^2 + (5-2)^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

  $|\overrightarrow{AD}| = \sqrt{(4+2)^2 + (2+4)^2} = \sqrt{36+36} = \sqrt{36 \cdot 2} = 6\sqrt{2}$

  $P = 3\sqrt{5} + 3\sqrt{5} + 3\sqrt{2} + 6\sqrt{2} = 6\sqrt{5} + 9\sqrt{2}$ u

70. **Halla, en cada caso, la ecuación de la circunferencia concéntrica con la dada y cuyo radio mida la mitad:**

a) $x^2 + (y-5)^2 = 36$ **b)** $(x-4)^2 + (y+3)^2 = 12$

a) Centro, (0, 5); radio, 6.

La circunferencia con centro en (0, 5) y radio 3 es: $x^2 + (y-5)^2 = 9$

b) Centro (4, –3); radio, $\sqrt{12}$.

La circunferencia de centro (4, –3) y radio $\dfrac{\sqrt{12}}{2}$ es:

$$(x-4)^2 + (y+3)^2 = \left(\frac{\sqrt{12}}{2}\right)^2 \rightarrow (x-4)^2 + (y+3)^2 = 3$$

71. **Halla la ecuación de la circunferencia de diámetro PQ, siendo $P(-5, 2)$ y $Q(3, -6)$.**

El centro de la circunferencia es el punto medio de PQ, $M = \left(\dfrac{-5+3}{2}, \dfrac{2-6}{2}\right) = (-1, -2)$.

El radio es la mitad de $|\overrightarrow{PQ}|$:

$|\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{(3+5)^2 + (-6-2)^2} = \sqrt{64+64} = \sqrt{2 \cdot 64} = 8\sqrt{2}$

Radio $= 4\sqrt{2}$

Ecuación: $(x+1)^2 + (y+2)^2 = (4\sqrt{2})^2$

$(x+1)^2 + (y+2)^2 = 32$

72. **Determina el centro y el radio de las circunferencias siguientes:**

a) $\boldsymbol{x^2 + y^2 + 6x + 2y + 6 = 0}$ **b)** $\boldsymbol{x^2 + y^2 + 8x - 2y + 12 = 0}$

a) $x^2 + y^2 + 6x + 2y + 6 = 0 \ \rightarrow\ x^2 + 6x + \mathbf{9} + y^2 + 2y + \mathbf{1} = -6 + \mathbf{9} + \mathbf{1} \ \rightarrow$

$\rightarrow\ (x+3)^2 + (y+1)^2 = 4$

Circunferencia de centro $C(-3, -1)$ y radio $r = \sqrt{4} = 2$.

b) $x^2 + y^2 + 8x - 2y + 12 = 0 \ \rightarrow\ x^2 + 8x + \mathbf{16} + y^2 - 2y + \mathbf{1} = -12 + \mathbf{16} + \mathbf{1} \ \rightarrow$

$\rightarrow\ (x+4)^2 + (y-1)^2 = 5$

Circunferencia de centro $C(-4, 1)$ y radio $\sqrt{5}$.

73. **Halla los puntos de corte de la circunferencia** $\boldsymbol{(x-3)^2 + y^2 = 29}$ **con la bisectriz del primer cuadrante.**

Tenemos que hallar los puntos de corte de la circunferencia $(x-3)^2 + y^2 = 29$ con la bisectriz del primer cuadrante que es la recta de ecuación $y = x$.

$$\left.\begin{array}{r}(x-3)^2 + y^2 = 29\\ y = x\end{array}\right\} \rightarrow\ (x-3)^2 + x^2 = 29 \ \rightarrow\ x^2 - 6x + 9 + x^2 = 29 \ \rightarrow$$

$$\rightarrow\ 2x^2 - 6x - 20 = 0 \ \rightarrow\ x^2 - 3x - 10 = 0 \ \rightarrow$$

$$\rightarrow\ x = \frac{3 \pm \sqrt{9+40}}{2} = \frac{3 \pm 7}{2} \begin{array}{l} x = 5 \ \rightarrow\ y = 5 \\ x = -2 \ \rightarrow\ y = -2 \end{array}$$

Los puntos buscados son $A(5, 5)$ y $B(-2, -2)$.

74. **Calcula** $\boldsymbol{k}$ **para que el punto** $\boldsymbol{(-3, k)}$ **pertenezca a la circunferencia:**

$$\boldsymbol{(x-1)^2 + (y+2)^2 = 25}$$

$(x-1)^2 + (y+2)^2 = 25$

$(-3-1)^2 + (k+2)^2 = 25 \ \rightarrow\ 16 + k^2 + 4k + 4 - 25 = 0 \ \rightarrow\ k^2 + 4k - 5 = 0$

$$k = \frac{-4 \pm 6}{2} \begin{array}{l} k = -5 \\ k = 1 \end{array}$$

Hay dos soluciones, $k = -5$, $k = 1$.

75. **Las rectas** $\boldsymbol{r: x - y + 1 = 0}$; $\boldsymbol{s: x + y + 9 = 0}$ **y** $\boldsymbol{t: 4x - y - 14 = 0}$ **forman un triángulo** ***ABC*****. Halla las coordenadas de los vértices.**

Los vértices del triángulo son los puntos donde se intersecan las rectas.

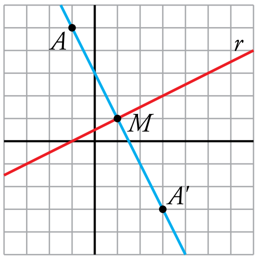
$$r \cap s \left\{\begin{array}{l} x - y + 1 = 0 \\ x + y + 9 = 0 \\ \hline 2x + 10 = 0 \ \rightarrow\ x = -5, \ y = -4 \end{array}\right\} \ r \cap s: A(-5, -4)$$

$$r \cap t \left\{\begin{array}{l} x - y + 1 = 0 \\ 4x - y - 14 = 0 \end{array}\right. \begin{array}{l} -x + y - 1 = 0 \\ 4x - y - 14 = 0 \\ \hline 3x - 15 = 0 \ \rightarrow\ x = 5, \ y = 6 \end{array} \ r \cap t: B(5, 6)$$

$$s \cap t \left\{\begin{array}{l} x + y + 9 = 0 \\ 4x - y - 14 = 0 \\ \hline 5x - 5 = 0 \ \rightarrow\ x = 1, \ y = -10 \end{array}\right\} \ s \cap t: C(1, -10)$$

76. **Dados la recta $r: x - 2y + 1 = 0$ y el punto $A(-1, 5)$, halla el punto simétrico de A respecto de r.**

El punto simétrico de A respecto a r, A', es el punto simétrico de A respecto de un punto M, que es el punto de corte de r con la recta perpendicular a r que pasa por A.



- Determinamos, en primer lugar, la ecuación de la recta s, perpendicular a r que pasa por A:

$$r: x - 2y + 1 = 0 \;\to\; r: y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \;\to\; m_r = \frac{1}{2} \;\to\; m_s = -2$$

$$\left.\begin{array}{l} A(-1, 5) \in s \\ m_s = -2 \end{array}\right\} \to\; s: y = 5 - 2(x + 1) \;\to\; s: y = -2x + 3 \;\to\; s: 2x + y - 3 = 0$$

- Hallamos el punto de corte de r y s:

$$\left.\begin{array}{r} x - 2y + 1 = 0 \\ 2x + \;\; y - 3 = 0 \end{array}\right\} \xrightarrow{\times 2} \begin{array}{r} x - 2y + 1 = 0 \\ 4x + 2y - 6 = 0 \\ \hline 5x \qquad - 5 = 0 \end{array} \to\; x = 1 \;\to\; 1 - 2y + 1 = 0 \;\to\; y = 1$$

Luego, $M(1, 1)$.

- El punto $M(1, 1)$ es el punto medio entre $A(-1, 5)$ y $A'(x, y)$ siendo A' el punto simétrico de A respecto a r:

$$\left.\begin{array}{l} A(-1, 5) \\ A'(x, y) \\ M(1, 1) \end{array}\right\} \to \left(\frac{-1 + x}{2}, \frac{5 + y}{2}\right) = (1, 1) \;\to\; \left\{\begin{array}{l} \dfrac{-1 + x}{2} = 1 \\ \dfrac{5 + y}{2} = 1 \end{array}\right. \to\; \left\{\begin{array}{l} x = 3 \\ y = -3 \end{array}\right. \to\; A'(3, -3)$$

Por tanto, el punto simétrico de A respecto a r es $A'(3, -3)$.

77. **Demuestra analíticamente que el punto $B(6, 4)$ es el punto simétrico de $A(-2, 2)$ respecto de la recta $4x + y - 11 = 0$.**

Veremos que la recta que pasa por A y B, s, es perpendicular a $r: 4x + y - 11 = 0$ y que el punto medio del segmento AB pertenece a r.

- $$\left.\begin{array}{l} r: 4x + y - 11 = 0 \;\to\; r: y = -4x + 11 \;\to\; m_r = -4 \\ \left.\begin{array}{l} A(-2, 2) \\ B(6, 4) \end{array}\right\} \to\; \overrightarrow{AB}(8, 2) \;\to\; m_s = \dfrac{1}{4} \end{array}\right\} m_r \cdot m_s = -1 \;\to\; r \perp s$$

- $$\left.\begin{array}{l} A(-2, 2) \\ B(6, 4) \end{array}\right\} M\left(\frac{-2 + 6}{2}, \frac{2 + 4}{2}\right) \;\to\; M(2, 3)$$

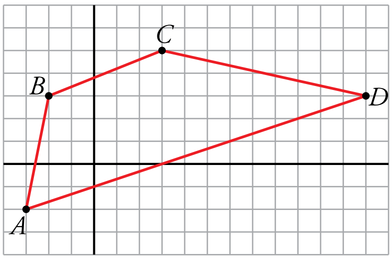
$$\left.\begin{array}{l} M(2, 3) \\ r: 4x + y - 11 = 0 \end{array}\right\} 4 \cdot 2 + 3 - 11 = 0 \;\to\; M \in r$$

Por tanto, B es el simétrico de A respecto a r.

Problemas "+"

78. **Dibuja el cuadrilátero de vértices $A(-3, -2)$, $B(-2, 3)$, $C(3, 5)$ y $D(12, 3)$. Comprueba si es un trapecio.**

Si no lo es, rectifica las coordenadas del punto D para que lo sea.



El cuadrilátero $ABCD$ es un trapecio si tiene un par de lados paralelos. Gráficamente se ve que AB no es paralelo a DC. Estudiemos qué ocurre con AD y BC:

$$\left.\begin{array}{l} A(-3, -2) \\ D(12, 3) \end{array}\right\} \to \overrightarrow{AD}(15, 5)$$

$$\left.\begin{array}{l} B(-2, 3) \\ C(3, 5) \end{array}\right\} \to \overrightarrow{BC}(5, 2)$$

$$\frac{15}{5} \neq \frac{5}{2} \to \overrightarrow{AD} \text{ no es paralelo a } \overrightarrow{BC} \to \text{no es un trapecio}$$

Si tomamos $D(12, 4)$, entonces:

$$\left.\begin{array}{l} A(-3, -2) \\ D(12, 4) \end{array}\right\} \to \overrightarrow{AD}(15, 6) = 3 \cdot \overrightarrow{BC} \to AD \,//\, BC \to ABCD \text{ es un trapecio.}$$

79. **Determina el punto de la recta r: $4x - 8y + 7 = 0$ que equidiste de los puntos $A(2, 1)$ y $B(1, -3)$.**

- $r: 4x - 8y + 7 = 0 \to r: y = \frac{1}{2}x + \frac{7}{8} \to$ Las coordenadas de un punto $P \in r$ son de la forma $P\left(x, \frac{1}{2}x + \frac{7}{8}\right)$.

- P equidista de $A(2, 1)$ y $B(1, -3)$:

  $dist\,(A, P) = dist\,(B, P) \to |\overrightarrow{AP}| = |\overrightarrow{BP}|$

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AP} = \left(x - 2, \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}\right) \\ \overrightarrow{BP} = \left(x - 1, \frac{1}{2}x + \frac{31}{8}\right) \end{array}\right\} |\overrightarrow{AP}| = |\overrightarrow{BP}| \to$$

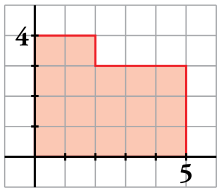
$$\to \sqrt{(x-2)^2 + \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{8}\right)^2} = \sqrt{(x-1)^2 + \left(\frac{1}{2}x + \frac{31}{8}\right)^2} \to$$

$$\to x^2 - 4x + 4 + \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{8}x + \frac{1}{64} = x^2 - 2x + 1 + \frac{1}{4}x^2 + \frac{31}{8}x + \frac{961}{64} \to$$

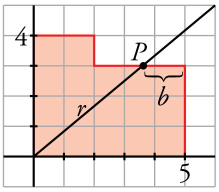
$$\to -6x = 12 \to x = -2 \to P\left(-2, \frac{1}{2} \cdot (-2) + \frac{7}{8}\right) = P\left(-2, -\frac{1}{8}\right)$$

El punto buscado es $P\left(-2, -\frac{1}{8}\right)$.

80. **Tenemos una parcela irregular representada en unos ejes de coordenadas como indica la siguiente figura:**



Queremos dividirla en dos partes de igual área mediante una recta que pase por el origen de coordenadas. ¿Cuál será la ecuación de esa recta?



Área parcela = 17 u^2

Área trapecio = $\dfrac{5+b}{2}\cdot 3 = \dfrac{17}{2} \;\rightarrow\; b = \dfrac{2}{3}$

Coordenadas del punto P: $\left(5-\dfrac{2}{3}, 3\right) = \left(\dfrac{13}{3}, 3\right)$

Ecuación de r: $m = \dfrac{3}{\dfrac{13}{3}} = \dfrac{9}{13}$; $y = mx \;\rightarrow\; y = \dfrac{9}{13}x$

Reflexiona sobre la teoría

81. **¿Verdadero o falso? Justifica tus respuestas.**

a) Dos vectores con la misma dirección no se pueden sumar.

b) Dos vectores opuestos tienen igual dirección.

c) Si $\vec{u} = k\vec{v}$, y $k < 0$, entonces $\vec{u}$ y $\vec{v}$ tienen distinta dirección.

d) Si $\vec{u} = -\vec{v}$, entonces $\vec{u}$ y $\vec{v}$ tienen igual módulo.

e) La ecuación $x^2 + y^2 + 25 = 0$ representa una circunferencia.

f) La recta $3x + y = 0$ es perpendicular a $y = \dfrac{1}{3}x + 1$.

g) Las coordenadas del punto medio de un segmento de extremos $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$ son:

$$M\left(\frac{x_1 + y_1}{2}, \frac{x_2 + y_2}{2}\right)$$

a) Falso: se pueden sumar vectores de la misma o de distinta dirección.

b) Verdadero: $-\vec{u} = (-1)\cdot\vec{u}$

c) Falso: tienen la misma dirección y sentidos contrarios.

d) Verdadero.

e) Falso. La ecuación de una circunferencia de centro $C(a, b)$ y radio r es:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

y $x^2 + y^2 + 25 = 0$ no se puede expresar de esa forma.

f) Verdadero:

$$\left.\begin{array}{l} 3x + y = 0 \;\rightarrow\; y = -3x \;\rightarrow\; m = -3 \\ y = \dfrac{1}{3}x + 1 \;\rightarrow\; m' = \dfrac{1}{3} \end{array}\right\} \; m\cdot m' = -1 \;\rightarrow\; \text{son perpendiculares.}$$

g) Falso, es $M\left(\dfrac{x_1 + x_2}{2}, \dfrac{y_1 + y_2}{2}\right)$.

82. **Sabes que la expresión $ax + by + c = 0$ es la ecuación de una recta. Di cómo es la recta en los siguientes casos:**

a) $a = 0$

b) $b = 0$

c) $c = 0$

d) $a = 0,\ c = 0$

a) $by + c = 0$ es paralela al eje X.

b) $ax + c = 0$ es paralela al eje Y.

c) $ax + by = 0$ es una recta que pasa por el origen de coordenadas, (0, 0).

d) $by = 0 \rightarrow y = 0$. Es el eje X.

83. **Si dos rectas r_1 y r_2 son perpendiculares, ¿cuál de estas condiciones cumplirán sus pendientes?**

a) $m_1 = \dfrac{1}{m_2}$

b) $m_1 = -m_2$

c) $m_1 \cdot m_2 = -1$

d) $m_1 + m_2 = -1$

La condición c): $m_1 \cdot m_2 = -1$.

84. **¿Cuál de estas expresiones nos da la distancia entre $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$?**

a) $(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1)$

b) $\sqrt{(x_2 + x_1)^2 - (y_2 + y_1)^2}$

c) $\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$

d) $|x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|$

La c), $\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$.

Página 186

Infórmate

Espacios de muchas dimensiones

- **Calcula la distancia entre los puntos del espacio $A(6, -3, 7)$ y $B(5, -5, 5)$.**

$\overrightarrow{AB} = (5-6, -5+3, 5-7) \rightarrow \overrightarrow{AB} = (-1, -2, -2)$

$dist\,(A, B) = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{9} = 3$

- **Calcula, también, el punto medio del segmento AB.**

Punto medio de AB:

$$M\left(\frac{6+5}{2}, \frac{-3+(-5)}{2}, \frac{7+5}{2}\right) \rightarrow M\left(\frac{11}{2}, -4, 6\right)$$

Observa, reflexiona y decide

Zonas de pasto

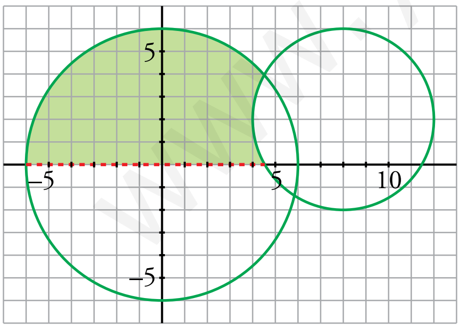
- **Tomando como centro de coordenadas la argolla y como eje de abscisas la valla, ¿qué zona del prado delimita cada sistema de inecuaciones?**

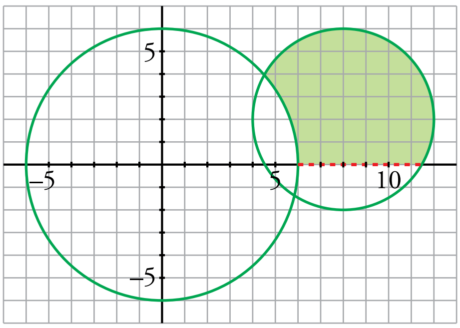
a) $x^2 + y^2 \le 6^2$
$y > 0$
$(x-8)^2 + (y-2)^2 \ge 4^2$

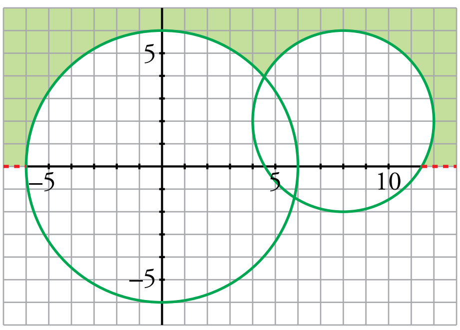
b) $x^2 + y^2 \ge 6^2$
$y > 0$
$(x-8)^2 + (y-2)^2 \le 4^2$

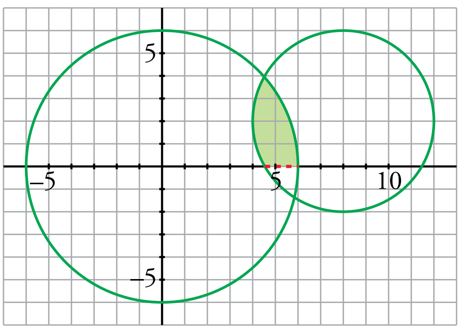
c) $x^2 + y^2 \ge 6^2$
$y > 0$
$(x-8)^2 + (y-2)^2 \ge 4^2$

d) $x^2 + y^2 \le 6^2$
$y > 0$
$(x-8)^2 + (y-2)^2 \le 4^2$

a)


b)


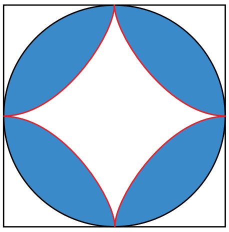
c)


d)


Página 187

Entrénate resolviendo problemas

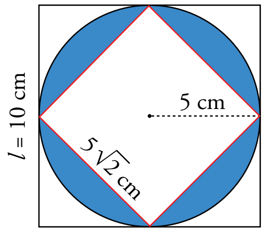
- **Halla el área de la parte coloreada.**

l = 10 cm 

El área que buscamos es el doble de la que está coloreada en esta figura:

Calculamos primero el lado del cuadrado interior:

Lado = $\sqrt{5^2 + 5^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$ cm

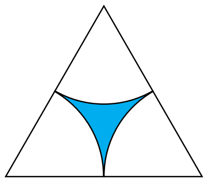


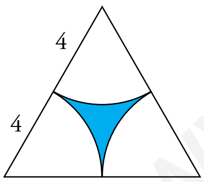
$$\left.\begin{array}{l} A_{\text{CÍRCULO}} = \pi \cdot 5^2 = 25\pi \\ A_{\text{CUADRADO INTERIOR}} = (5\sqrt{2})^2 = 25 \cdot 2 \end{array}\right\} \text{ La diferencia es } 25(\pi - 2).$$

El área pedida es $A = 2 \cdot 25(\pi - 2) = 57{,}08 \text{ cm}^2$

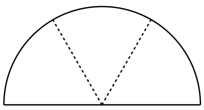
- **Tomando como centro cada uno de los vértices de un triángulo equilátero, se han trazado tres arcos de radio 4 cm, como indica la figura.**

  Halla el área de la zona coloreada.



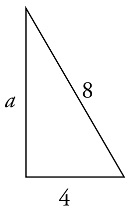


La parte no coloreada es medio círculo de radio 4 cm.



Calcularemos el área del triángulo, el área del semicírculo y, finalmente, el área de la zona coloreada.

La altura del triángulo es $a = \sqrt{8^2 - 4^2} = 4\sqrt{3} = 6{,}93$ cm

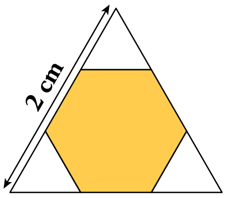


$$A_{\text{TRIÁNGULO}} = \frac{8a}{2} = \frac{8 \cdot 4\sqrt{3}}{2} = 16\sqrt{3} = 27{,}71 \text{ cm}^2$$

$$A_{\text{SEMICÍRCULO}} = \frac{\pi \cdot 4^2}{2} = 8\pi = 25{,}13 \text{ cm}^2$$

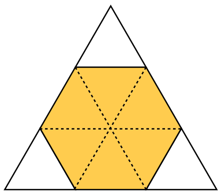
$$A_{\text{PARTE COLOREADA}} = 16\sqrt{3} - 8\pi = 2{,}58 \text{ cm}^2$$

- **Halla la superficie del hexágono.**



Altura del triángulo $= \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$ cm

$A_{\text{TRIÁNGULO}} = \dfrac{2 \cdot \sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}\ \text{cm}^2$

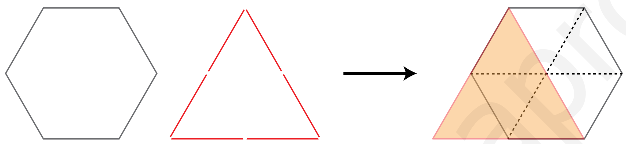


El área del hexágono es $\dfrac{2}{3}$ de la del triángulo.

$A_{\text{HEXÁGONO}} = \dfrac{2 \cdot \sqrt{3}}{3} = 1{,}15\ \text{cm}^2$

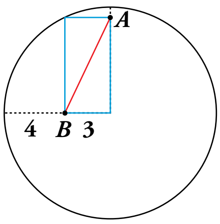
- **Calcula el área de un hexágono regular sabiendo que tiene el mismo perímetro que un triángulo equilátero cuya superficie mide 12 cm².**

Para que el perímetro de un triángulo equilátero sea igual que el de un hexágono regular, el lado del primero debe ser el doble que el del segundo.



El área del triángulo es $\dfrac{4}{6}$ de la del hexágono. Por tanto: $A_{\text{HEXÁGONO}} = \dfrac{6}{4} \cdot 12 = 18\ \text{cm}^2$

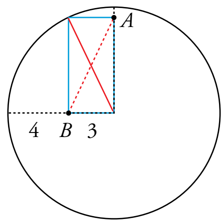
- **Calcula la longitud del segmento *AB*.**



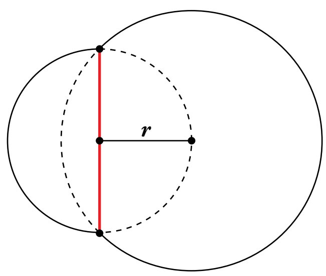
Las dos diagonales del rectángulo son iguales.

Por tanto:

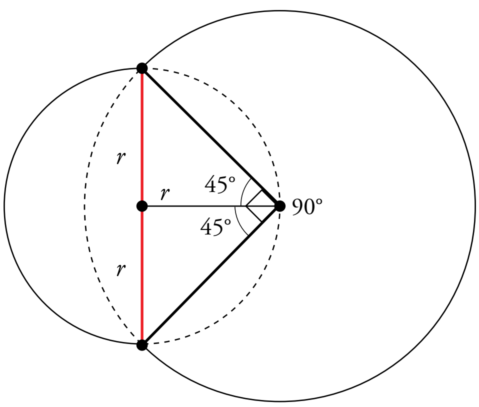
$\overline{AB}$ = radio de la circunferencia = 3 + 4 = 7 unidades.



- **Halla el perímetro externo de toda la figura, sabiendo que el radio de la circunferencia menor es r = 1 cm.**



El radio de la circunferencia grande es: $\sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ cm



El perímetro está formado por media circunferencia pequeña y tres cuartos de circunferencia grande. Por tanto, su longitud es:

$$\frac{1}{2} \cdot (2 \cdot \pi \cdot 1) + \frac{3}{4} \cdot (2 \cdot \pi \cdot \sqrt{2}) = \pi \cdot \left(1 + \frac{3\sqrt{2}}{2}\right) = 9{,}81\ \text{cm}$$

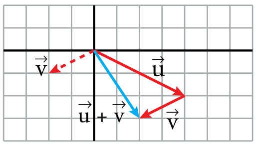
Autoevaluación

1. **Dados los vectores $\vec{u}(4, -2)$ y $\vec{v}(-2, -1)$:**

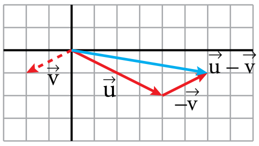
a) Representa los vectores $\vec{u} + \vec{v}$; $\vec{u} - \vec{v}$; $\frac{1}{2}\vec{u}$ y $-3\vec{v}$ y halla sus coordenadas.

b) Calcula las coordenadas del vector $\vec{w} = 2\vec{u} + 3\vec{v}$.

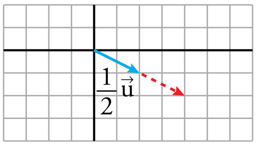
a)



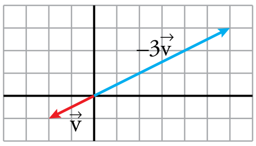
$\vec{u} + \vec{v} = (4, -2) + (-2, -1) = (2, -3)$



$\vec{u} - \vec{v} = (4, -2) - (-2, -1) = (6, -1)$



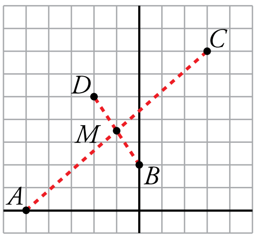
$\frac{1}{2}\vec{u} = \frac{1}{2}(4, -2) = (2, -1)$



$-3\vec{v} = -3(-2, -1) = (6, 3)$

b) $\vec{w} = 2\vec{u} + 3\vec{v} \rightarrow \vec{w} = 2(4, -2) + 3(-2, -1) \rightarrow \vec{w} = (8, -4) + (-6, -3) \rightarrow \vec{w} = (2, -7)$

2. **Representa los puntos $A(-5, 0)$, $B(0, 2)$, $C(3, 7)$ y $D(-2, 5)$ y comprueba analíticamente que el punto medio de AC coincide con el punto medio de BD.**



Punto medio de AC: $M\left(\frac{-5+3}{2}, \frac{0+7}{2}\right) \rightarrow M\left(-1, \frac{7}{2}\right)$

Punto medio de BD: $M\left(\frac{0+(-2)}{2}, \frac{2+5}{2}\right) \rightarrow M\left(-1, \frac{7}{2}\right)$

3. **Halla el simétrico de $P(-7, -15)$ respecto de $M(2, 0)$.**

Sea $Q(a, b)$ el simétrico de P respecto de M. M es el punto medio de PQ.

$$M_{PQ} = \left(\frac{-7+a}{2}, \frac{-15+b}{2}\right) = (2, 0) \begin{cases} -7 + a = 4 \rightarrow a = 11 \\ -15 + b = 0 \rightarrow b = 15 \end{cases}$$

4. Halla el valor de k para que los puntos $A(1, -5)$, $B(3, 0)$ y $C(6, k)$ estén alineados.

Para que A, B y C estén alineados, debe ser $\overrightarrow{AB} // \overrightarrow{BC}$ y, por tanto, sus coordenadas proporcionales.

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AB} = (3, 0) - (1, -5) = (2, 5) \\ \overrightarrow{BC} = (6, k) - (3, 0) = (3, k)\end{array}\right\} \ \frac{2}{3} = \frac{5}{k} \ \to \ k = \frac{15}{2}$$

5. Escribe las ecuaciones vectorial, paramétricas, en forma continua y explícita de la recta que pasa por el punto $P(3, -2)$ y tiene por vector dirección $\vec{d}(-1, 5)$.

ECUACIÓN VECTORIAL: $\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + t\vec{d}$

$(x, y) = (3, -2) + t \cdot (-1, 5)$

ECUACIONES PARAMÉTRICAS: $\begin{cases} x = 3 - t \\ y = -2 + 5t \end{cases}$

ECUACIÓN CONTINUA: $\dfrac{x-3}{-1} = \dfrac{y+2}{5}$

ECUACIÓN EXPLÍCITA: Despejando y en la ecuación anterior:

$$5x - 15 = -y - 2 \ \to \ y = -5x + 13$$

6. Obtén las ecuaciones de las rectas r y s y su punto de intersección:

r pasa por $(-3, 2)$ y es perpendicular a $8x - 3y + 6 = 0$.

s pasa por $(9, -5/2)$ y es paralela a $2x + y - 7 = 0$

- La pendiente de $8x - 3y + 6 = 0$ es $m = \dfrac{8}{3}$.

  La pendiente de r es $m' = -\dfrac{3}{8}$.

  $r: y = 2 - \dfrac{3}{8}(x + 3) \ \to \ 8y = 16 - 3x - 9 \ \to \ 3x + 8y - 7 = 0$

- La pendiente de s es $m = -2$.

  $s: y = -\dfrac{5}{2} - 2(x - 9) \ \to \ 2y = -5 - 4x + 36 \ \to \ 4x + 2y - 31 = 0$

- Punto de corte:

  $\begin{cases} 3x + 8y - 7 = 0 \\ 4x + 2y - 31 = 0 \end{cases} \ \to \ x = 9, \ y = -\dfrac{5}{2}$

  Las rectas se cortan en el punto $\left(9, -\dfrac{5}{2}\right)$.

7. En el triángulo de vértices $A(-2, 2)$, $B(0, 7)$ y $C(6, 4)$, halla la ecuación de la mediana que parte de B.

La mediana que parte de B pasa por B y el punto medio del segmento AC.

$$M_{AC} = \left(\frac{-2+6}{2}, \frac{2+4}{2}\right) = (2, 3)$$

Ecuación de la mediana: $\dfrac{x-0}{2-0} = \dfrac{y-7}{3-7} \ \to \ -4x = 2y - 14 \ \to \ 2x + y - 7 = 0$

8. Calcula la longitud de los lados del triángulo de vértices $A(-4, 1)$, $B(6, 3)$ y $C(-2, -3)$.

$\overrightarrow{AB} = (10, 2)$; $\overrightarrow{AC} = (2, -4)$; $\overrightarrow{BC} = (-8, -6)$, por tanto:

$\overline{AB} = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{10^2 + 2^2} = \sqrt{104} = 2\sqrt{26}$

$\overline{AC} = |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{2^2 + (-4)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

$\overline{BC} = |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{(-8)^2 + (-6)^2} = \sqrt{100} = 10$

9. Estudia la posición relativa de estas rectas:

$$r: 2x + y - 2 = 0 \qquad s: x + \frac{1}{2}y = 1$$

$$\left.\begin{array}{l} r: 2x + y - 2 = 0 \overset{(*)}{\rightarrow} x + \frac{1}{2}y - 1 = 0 \rightarrow x + \frac{1}{2}y = 1 \\ s: x + \frac{1}{2}y = 1 \end{array}\right\} \text{Son la misma recta.}$$

(*) Dividimos por 2.

10. Halla la ecuación de la circunferencia que tiene su centro en el punto $C(0, -3)$ y pasa por el punto $A(3, 0)$.

- Radio de la circunferencia = $dist\,(A, C) = |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{(0-3)^2 + (-3-0)^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18}$

- $$\left.\begin{array}{l} \text{Centro} \rightarrow C(0, -3) \\ \text{Radio} \rightarrow r = \sqrt{18} \end{array}\right\} \rightarrow c: (x-0)^2 + (y+3)^2 = 18 \rightarrow c: x^2 + y^2 + 6y - 9 = 0$$

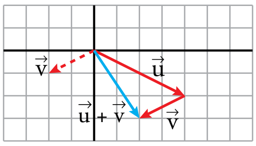
Autoevaluación

1. Dados los vectores $\vec{u}(4, -2)$ y $\vec{v}(-2, -1)$:

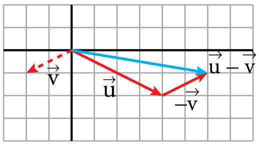
a) Representa los vectores $\vec{u}+\vec{v}$; $\vec{u}-\vec{v}$; $\frac{1}{2}\vec{u}$ y $-3\vec{v}$ y halla sus coordenadas.

b) Calcula las coordenadas del vector $\vec{w} = 2\vec{u} + 3\vec{v}$.

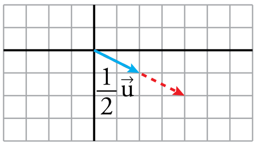
a)



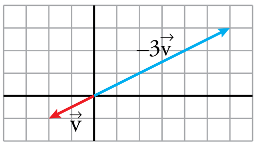
$\vec{u} + \vec{v} = (4, -2) + (-2, -1) = (2, -3)$



$\vec{u} - \vec{v} = (4, -2) - (-2, -1) = (6, -1)$



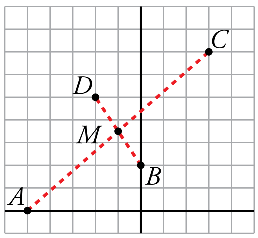
$\frac{1}{2}\vec{u} = \frac{1}{2}(4, -2) = (2, -1)$



$-3\vec{v} = -3(-2, -1) = (6, 3)$

b) $\vec{w} = 2\vec{u} + 3\vec{v} \rightarrow \vec{w} = 2(4, -2) + 3(-2, -1) \rightarrow \vec{w} = (8, -4) + (-6, -3) \rightarrow \vec{w} = (2, -7)$

2. Representa los puntos $A(-5, 0)$, $B(0, 2)$, $C(3, 7)$ y $D(-2, 5)$ y comprueba analíticamente que el punto medio de AC coincide con el punto medio de BD.



Punto medio de AC: $M\left(\frac{-5+3}{2}, \frac{0+7}{2}\right) \rightarrow M\left(-1, \frac{7}{2}\right)$

Punto medio de BD: $M\left(\frac{0+(-2)}{2}, \frac{2+5}{2}\right) \rightarrow M\left(-1, \frac{7}{2}\right)$

3. Halla el simétrico de $P(-7, -15)$ respecto de $M(2, 0)$.

Sea $Q(a, b)$ el simétrico de P respecto de M. M es el punto medio de PQ.

$$M_{PQ} = \left(\frac{-7+a}{2}, \frac{-15+b}{2}\right) = (2, 0) \begin{cases} -7 + a = 4 \rightarrow a = 11 \\ -15 + b = 0 \rightarrow b = 15 \end{cases}$$

4. Halla el valor de k para que los puntos $A(1, -5)$, $B(3, 0)$ y $C(6, k)$ estén alineados.

Para que A, B y C estén alineados, debe ser $\overrightarrow{AB} // \overrightarrow{BC}$ y, por tanto, sus coordenadas proporcionales.

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AB} = (3, 0) - (1, -5) = (2, 5) \\ \overrightarrow{BC} = (6, k) - (3, 0) = (3, k)\end{array}\right\} \frac{2}{3} = \frac{5}{k} \to k = \frac{15}{2}$$

5. Escribe las ecuaciones vectorial, paramétricas, en forma continua y explícita de la recta que pasa por el punto $P(3, -2)$ y tiene por vector dirección $\vec{d}(-1, 5)$.

ECUACIÓN VECTORIAL: $\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + t\vec{d}$

$(x, y) = (3, -2) + t \cdot (-1, 5)$

ECUACIONES PARAMÉTRICAS: $\begin{cases} x = 3 - t \\ y = -2 + 5t \end{cases}$

ECUACIÓN CONTINUA: $\dfrac{x-3}{-1} = \dfrac{y+2}{5}$

ECUACIÓN EXPLÍCITA: Despejando y en la ecuación anterior:

$$5x - 15 = -y - 2 \to y = -5x + 13$$

6. Obtén las ecuaciones de las rectas r y s y su punto de intersección:

r pasa por $(-3, 2)$ y es perpendicular a $8x - 3y + 6 = 0$.

s pasa por $(9, -5/2)$ y es paralela a $2x + y - 7 = 0$

- La pendiente de $8x - 3y + 6 = 0$ es $m = \dfrac{8}{3}$.

  La pendiente de r es $m' = -\dfrac{3}{8}$.

  $r: y = 2 - \dfrac{3}{8}(x + 3) \to 8y = 16 - 3x - 9 \to 3x + 8y - 7 = 0$

- La pendiente de s es $m = -2$.

  $s: y = -\dfrac{5}{2} - 2(x - 9) \to 2y = -5 - 4x + 36 \to 4x + 2y - 31 = 0$

- Punto de corte:

  $\begin{cases} 3x + 8y - 7 = 0 \\ 4x + 2y - 31 = 0 \end{cases} \to x = 9,\ y = -\dfrac{5}{2}$

  Las rectas se cortan en el punto $\left(9, -\dfrac{5}{2}\right)$.

7. En el triángulo de vértices $A(-2, 2)$, $B(0, 7)$ y $C(6, 4)$, halla la ecuación de la mediana que parte de B.

La mediana que parte de B pasa por B y el punto medio del segmento AC.

$$M_{AC} = \left(\frac{-2+6}{2}, \frac{2+4}{2}\right) = (2, 3)$$

Ecuación de la mediana: $\dfrac{x-0}{2-0} = \dfrac{y-7}{3-7} \to -4x = 2y - 14 \to 2x + y - 7 = 0$

8. Calcula la longitud de los lados del triángulo de vértices $A(-4, 1)$, $B(6, 3)$ y $C(-2, -3)$.

$\overrightarrow{AB} = (10, 2)$; $\overrightarrow{AC} = (2, -4)$; $\overrightarrow{BC} = (-8, -6)$, por tanto:

$\overline{AB} = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{10^2 + 2^2} = \sqrt{104} = 2\sqrt{26}$

$\overline{AC} = |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{2^2 + (-4)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

$\overline{BC} = |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{(-8)^2 + (-6)^2} = \sqrt{100} = 10$

9. Estudia la posición relativa de estas rectas:

$$r: 2x + y - 2 = 0 \qquad s: x + \frac{1}{2}y = 1$$

$$\left.\begin{array}{l} r: 2x + y - 2 = 0 \xrightarrow{(*)} x + \frac{1}{2}y - 1 = 0 \to x + \frac{1}{2}y = 1 \\ s: x + \frac{1}{2}y = 1 \end{array}\right\} \text{Son la misma recta.}$$

(*) Dividimos por 2.

10. Halla la ecuación de la circunferencia que tiene su centro en el punto $C(0, -3)$ y pasa por el punto $A(3, 0)$.

- Radio de la circunferencia = *dist* $(A, C) = |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{(0-3)^2 + (-3-0)^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18}$

- $$\left.\begin{array}{l} \text{Centro} \to C(0, -3) \\ \text{Radio} \to r = \sqrt{18} \end{array}\right\} \to c: (x-0)^2 + (y+3)^2 = 18 \to c: x^2 + y^2 + 6y - 9 = 0$$

1 Funciones lineales

Página 133

1. Copia y completa, en tu cuaderno, las igualdades siguientes:

a) –50 °C = … °F **b) 95 °F = … °C**

La expresión que liga la temperatura en grados centígrados y en grados Fahrenheit es: $y = 32 + 1{,}8x$ siendo x = temperatura en °C, y = temperatura en °F.

a) $x = -50 \to y = 32 + 1{,}8(-50) = 32 - 90 = -58$ °F $\to$ –50 °C = –58 °F

b) $y = 95 \to 95 = 32 + 1{,}8x \to x = \dfrac{95-32}{1{,}8} = 35 \to$ 95 °F = 35 °C

2. Un termómetro clínico abarca temperaturas desde 35 °C a 41 °C. ¿Cuál es la gama en °F?

Si $x = 35 \to y = 32 + 1{,}8 \cdot 35 = 32 + 63 = 95$

Si $x = 41 \to y = 32 + 1{,}8 \cdot 41 = 32 + 73{,}8 = 105{,}8$

La gama, en °F, es de 95 °F a 105,8 °F.

3. La temperatura normal de una persona sana es de 36,5 °C. ¿Cuál es en °F?

Si $x = 36{,}5 \to y = 32 + 1{,}8 \cdot 36{,}5 = 32 + 65{,}7 = 97{,}7$

La temperatura de una persona sana, en °F, es de 97,7 °F.

4. a) ¿Qué longitud alcanzará el muelle del ejemplo anterior si le colgamos una pesa de 4,6 kg?

b) ¿Qué peso hay que colgar del muelle para que alcance una longitud de 1 m?

a) $x = 4{,}6 \to y = 30 + 15 \cdot 4{,}6 = 30 + 69 = 99$

El muelle alcanzará una longitud de 99 cm.

b) 1 m = 100 cm

Si $y = 100 \to 100 = 30 + 15x \to x = \dfrac{100-30}{15} \approx 4{,}667$

Hay que colgar un peso de 4,667 kg, aproximadamente.

Página 134

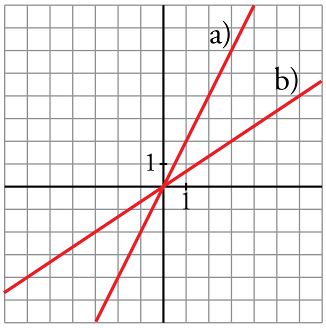
5. Representa:

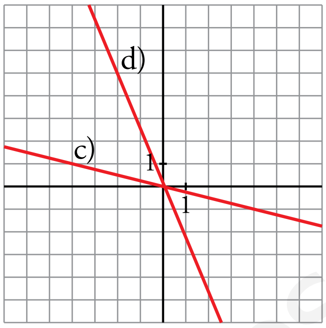
a) $y = 2x$

b) $y = \frac{2}{3}x$

c) $y = -\frac{1}{4}x$

d) $y = -\frac{7}{3}x$





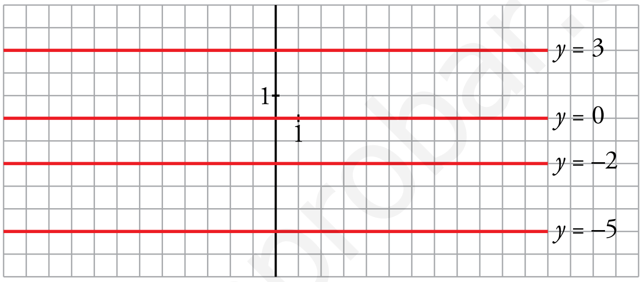
6. Representa:

a) $y = 3$

b) $y = -2$

c) $y = 0$

d) $y = -5$



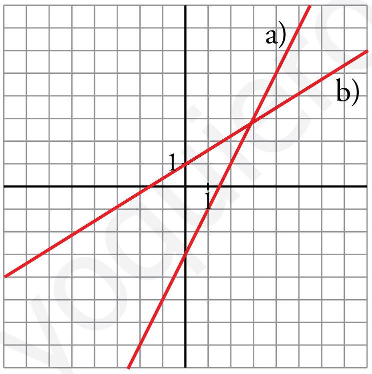
7. Representa:

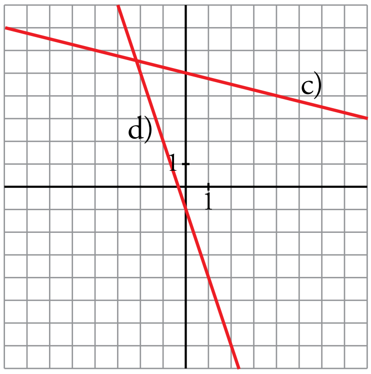
a) $y = 2x - 3$

b) $y = \frac{2}{3}x + 2$

c) $y = -\frac{1}{4}x + 5$

d) $y = -3x - 1$

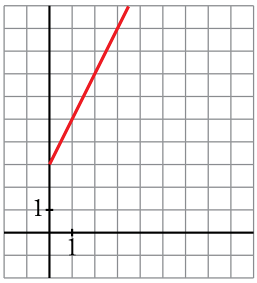




8. Un móvil, en el instante inicial, se encuentra situado a 3 m del origen y se aleja progresivamente de este con una velocidad de 2 m/s.

Halla la ecuación de su posición en función del tiempo y represéntala.

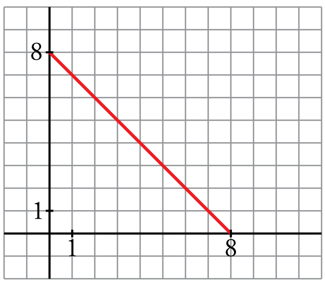
$y = 3 + 2x$, donde y es la distancia al origen en metros y x es el tiempo en segundos.



9. Un móvil, que en el instante inicial llevaba una velocidad de 8 m/s, frena de repente con una aceleración de –1 m/s².

Escribe la ecuación de la velocidad en función del tiempo y represéntala.

$y = 8 - x$, donde y es la velocidad en m/s y x es el tiempo en segundos.



Página 135

10. **Halla la ecuación de cada una de las siguientes rectas:**

a) Pasa por (–3, –5) y tiene una pendiente de $\frac{4}{9}$.

b) Pasa por (0, –3) y tiene una pendiente de 4.

c) Pasa por (3, –5) y por (–4, 7).

a) $y + 5 = \frac{4}{9}(x + 3) \rightarrow y = \frac{4}{9}x - \frac{11}{3}$

b) $y + 3 = 4x \rightarrow y = 4x - 3$

c) $m = \frac{7 - (-5)}{-4 - 3} = \frac{12}{-7} = -\frac{12}{7}$

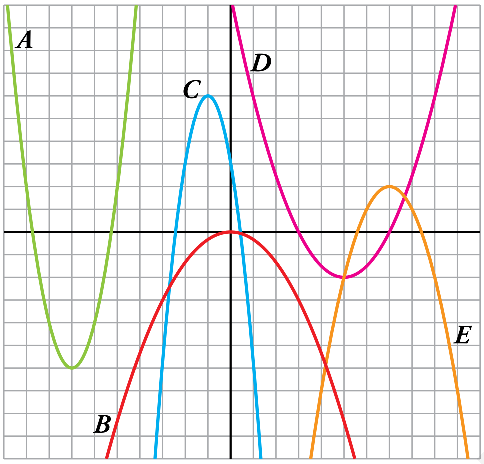
$y + 5 = -\frac{12}{7}(x - 3) \rightarrow y = -\frac{12}{7}x + \frac{1}{7}$

2 Funciones cuadráticas. Parábolas

Página 137

1. Asocia cada uno de los coeficientes de la x^2 con su correspondiente parábola:

- $a = -1$
- $a = 2$
- $a = -\frac{1}{3}$
- $a = \frac{1}{2}$
- $a = -3$



$a = -1 \rightarrow E$ $\quad$ $a = 2 \rightarrow A$ $\quad$ $a = -\frac{1}{3} \rightarrow B$

$a = \frac{1}{2} \rightarrow D$ $\quad$ $a = -3 \rightarrow C$

2. Representa las siguientes parábolas:

a) $y = x^2 - 2x + 2$ $\quad$ **b)** $y = -2x^2 - 2x - 3$ $\quad$ **c)** $y = \frac{1}{3}x^2 + x - 2$

d) $y = -x^2 + 4$ $\quad$ **e)** $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2$ $\quad$ **f)** $y = 3x^2 + 6x + 4$

a) $y = x^2 - 2x + 2$

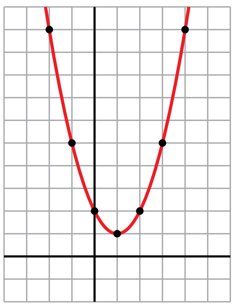
Vértice:

Abscisa: $p = \frac{2}{2} = 1 \rightarrow$ Ordenada: $f(1) = 1 \rightarrow V(1, 1)$

Tabla de valores:

x	–2	–1	0	1	2	3	4
y	10	5	2	1	2	5	10

Vemos que a medida que las abscisas se alejan del vértice, las ordenadas correspondientes crecen, por lo tanto, la parábola no cortará al eje *X*.



$y = x^2 - 2x + 2$

b) $y = -2x^2 - 2x - 3$

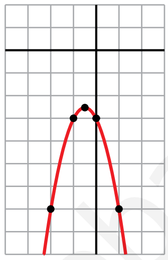
Vértice:

Abscisa: $p = \dfrac{2}{-4} = -\dfrac{1}{2} \to$ Ordenada: $f\left(-\dfrac{1}{2}\right) = -\dfrac{5}{2} \to V\left(-\dfrac{1}{2}, -\dfrac{5}{2}\right)$

Tabla de valores:

x	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	1
y	-7	-3	$-\frac{5}{2}$	-3	-7

A medida que las abscisas se alejan del vértice, las ordenadas correspondientes decrecen, por tanto, la gráfica no corta al eje X.



$y = -2x^2 - 2x - 3$

c) $y = \dfrac{1}{3}x^2 + x - 2$

Vértice:

Abscisa: $p = \dfrac{-1}{2/3} = -\dfrac{3}{2} \to$ Ordenada: $f\left(-\dfrac{3}{2}\right) = -\dfrac{11}{4} \to V\left(-\dfrac{3}{2}, -\dfrac{11}{4}\right)$

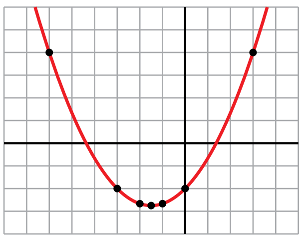
Tabla de valores:

x	-6	-3	-2	$-\frac{3}{2}$	-1	0	3
y	4	-2	$-\frac{8}{3}$	$-\frac{11}{4}$	$-\frac{8}{3}$	-2	4

$$y = 0 \to \frac{1}{3}x^2 + x - 2 = 0 \to x^2 + 3x - 6 = 0 \to$$

$$\to x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 24}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{33}}{2} = \begin{cases} x = \dfrac{-3 + \sqrt{33}}{2} \\[2ex] x = \dfrac{-3 - \sqrt{33}}{2} \end{cases}$$

La parábola corta al eje de abscisas en $\left(\dfrac{-3 + \sqrt{33}}{2}, 0\right)$ y $\left(\dfrac{-3 - \sqrt{33}}{2}, 0\right)$.



$y = \dfrac{1}{3}x^2 + x - 2$

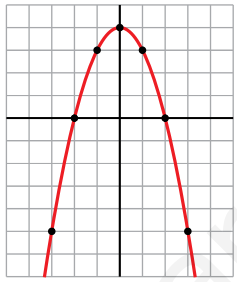
d) $y = -x^2 + 4$

Vértice: Abscisa: $p = \dfrac{0}{-2} = 0 \rightarrow$ Ordenada: $f(0) = 4 \rightarrow V(0, 4)$

Tabla de valores:

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
y	–5	0	3	4	3	0	–5

Observamos que obtenemos en la tabla todos los cortes con los ejes:



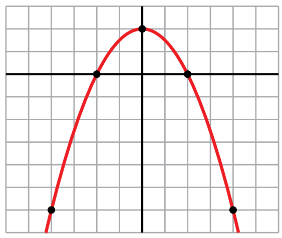
e) $y = -\dfrac{1}{2}x^2 + 2$

Vértice: Abscisa: $p = \dfrac{0}{-1} = 0 \rightarrow$ Ordenada: $f(0) = 2 \rightarrow V(0, 2)$

Tabla de valores:

x	–4	–2	0	2	4
y	–6	0	2	0	–6

Obtenemos en la tabla todos los puntos de corte con los ejes:



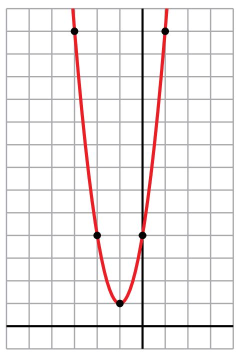
f) $y = 3x^2 + 6x + 4$

Vértice: Abscisa: $p = \dfrac{-6}{6} = -1 \rightarrow$ Ordenada: $f(-1) = 1 \rightarrow V(-1, 1)$

Tabla de valores:

x	–3	–2	–1	0	1
y	–13	4	1	4	13

Los valores de las ordenadas crecen a medida que las abscisas se alejan del vértice, por tanto, la parábola no corta al eje X.



3. Dibuja en tu cuaderno la representación gráfica de estas funciones cuadráticas:

a) $y = (x - 1) \cdot (x - 3)$ **b)** $y = 2(x - 2)^2$

c) $y = \frac{1}{2}(x + 2) \cdot (x - 2)$ **d)** $y = (x - 1)^2 + 5$

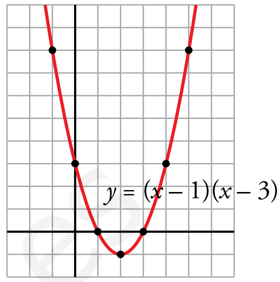
a) $y = (x - 1) \cdot (x - 3) \ \rightarrow \ y = x^2 - 4x + 3$

Vértice:

Abscisa: $p = \frac{4}{2} = 2 \ \rightarrow$ Ordenada: $f(2) = -1 \ \rightarrow \ V(2, -1)$

Tabla de valores:

x	–1	0	1	2	3	4	5
y	8	3	0	–1	0	3	8



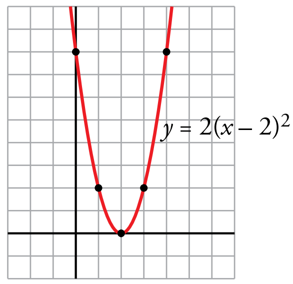
b) $y = 2(x - 2)^2 \ \rightarrow \ y = 2x^2 - 8x + 8$

Vértice:

Abscisa: $p = \frac{8}{4} = 2 \ \rightarrow$ Ordenada: $f(2) = 0 \ \rightarrow V(2, 0)$

Tabla de valores:

x	0	1	2	3	4
y	8	2	0	2	8



Solo hemos obtenido un único punto de corte con el eje de abscisas, veamos si hay más:

$y = 0 \ \rightarrow \ 2(x - 2)^2 = 0 \ \rightarrow \ x = 2$

La parábola corta al eje de abscisas solamente en el punto (2, 0).

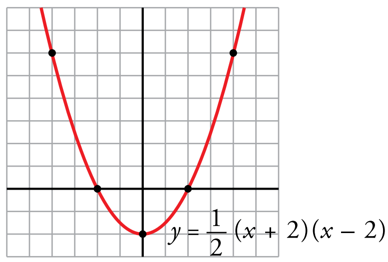
c) $y = \frac{1}{2}(x + 2) \cdot (x - 2) \ \rightarrow \ y = \frac{1}{2}x^2 - 2$

Vértice:

Abscisa: $p = \frac{0}{1} = 0 \ \rightarrow$ Ordenada: $f(0) = -2 \ \rightarrow \ V(0, -2)$

Tabla de valores:

x	–4	–2	0	2	4
y	6	0	–2	0	6



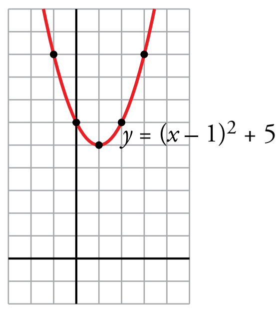
d) $y = (x - 1)^2 + 5 \ \rightarrow \ y = x^2 - 2x + 6$

Vértice:

Abscisa: $p = \frac{2}{2} = 1 \ \rightarrow$ Ordenada: $f(1) = 5 \ \rightarrow V(1, 5)$

Tabla de valores:

x	–1	0	1	2	3
y	9	6	5	6	9



Las ordenadas aumentan a medida que las abscisas se alejan del vértice, por tanto, la parábola no corta al eje X.

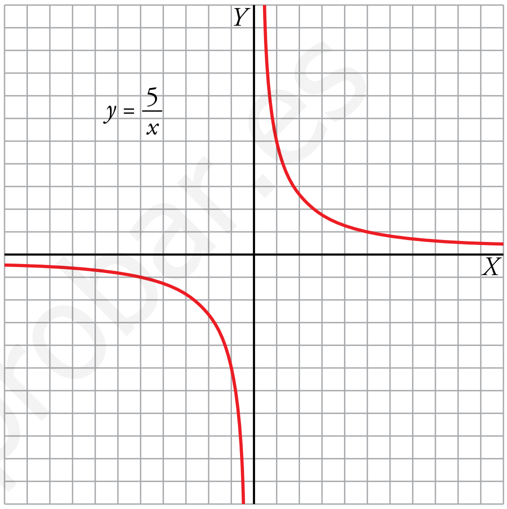
3 Funciones de proporcionalidad inversa

Página 138

1. Representa las siguientes funciones:

a) $y = \dfrac{5}{x}$ **b)** $y = -\dfrac{2}{x}$ **c)** $y = \dfrac{4}{x}$

a) $f(x) = \dfrac{5}{x}$

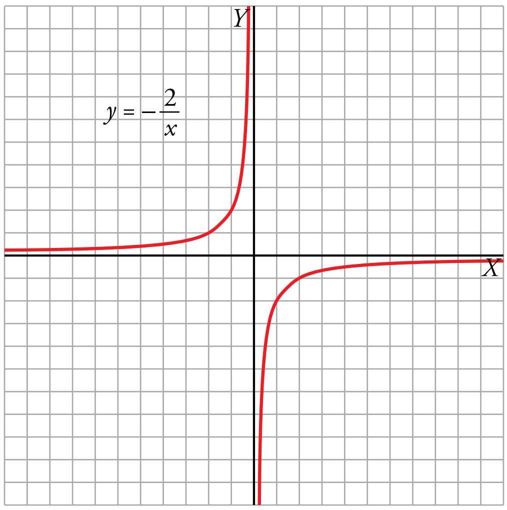


- *Dom f* = $\mathbb{R} - \{0\}$
- No corta a los ejes de coordenadas.
- $x = 0$ es asíntota vertical.

  $y = 0$ es asíntota horizontal.
- Tabla de valores:

x	–10	–5	–1	–0,5	0,5	1	5	10
y	–1/2	–1	–5	–10	10	5	1	1/2

b) $f(x) = -\dfrac{2}{x}$

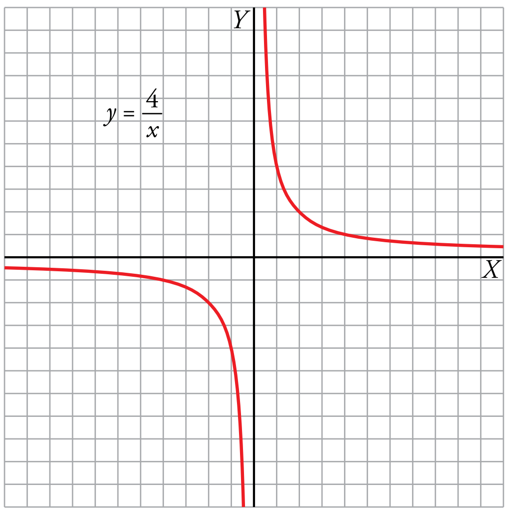


- *Dom f* = $\mathbb{R} - \{0\}$
- No corta a los ejes de coordenadas.
- $x = 0$ es asíntota vertical.

  $y = 0$ es asíntota horizontal.
- Tabla de valores:

x	–4	–2	–1	–0,5	0,5	1	2	4
y	1/2	1	2	4	–4	–2	–1	–1/2

c) $f(x) = \dfrac{4}{x}$



- *Dom f* = $\mathbb{R} - \{0\}$
- No corta a los ejes de coordenadas.
- $x = 0$ es asíntota vertical.

  $y = 0$ es asíntota horizontal.
- Tabla de valores:

x	–8	–4	–2	–1	–0,5	0,5	1	2	4	8
y	–1/2	–1	–2	–4	–8	8	4	2	1	1/2

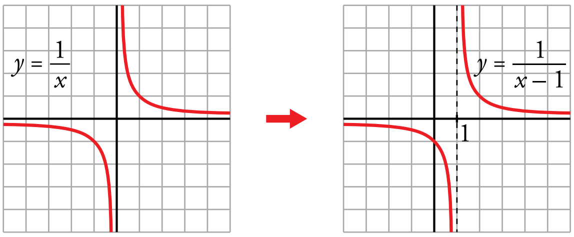
2. Representa estas funciones y halla su dominio:

a) $y = \frac{1}{x-1}$ **b)** $y = \frac{1}{x+1}$ **c)** $y = -\frac{1}{x+2}$

a) $y = \frac{1}{x-1} \to y = \frac{1}{x}$ trasladada horizontalmente 1 unidad a la derecha.

- Dominio = $\mathbb{R} - \{1\}$
- $x = 1$ es asíntota vertical

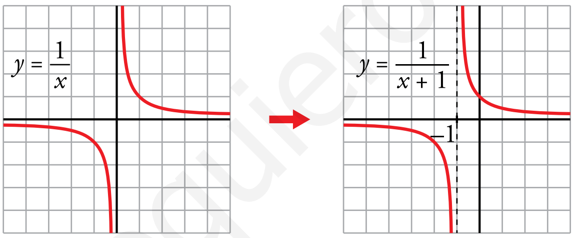
  $y = 0$ es asíntota horizontal



b) $y = \frac{1}{x+1} \to y = \frac{1}{x}$ trasladada horizontalmente 1 unidad a la izquierda.

- Dominio = $\mathbb{R} - \{-1\}$
- $x = -1$ es asíntota vertical

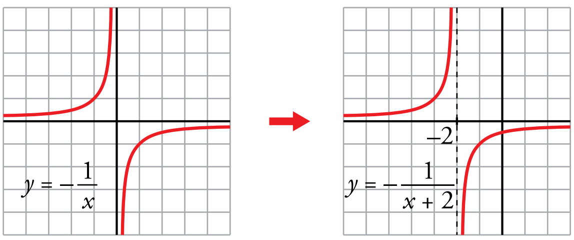
  $y = 0$ es asíntota horizontal



c) $y = -\frac{1}{x+2} \to y = -\frac{1}{x}$ trasladada horizontalmente 2 unidades a la izquierda.

- Dominio = $\mathbb{R} - \{-2\}$
- $x = -2$ es asíntota vertical

  $y = 0$ es asíntota horizontal



4 Funciones radicales

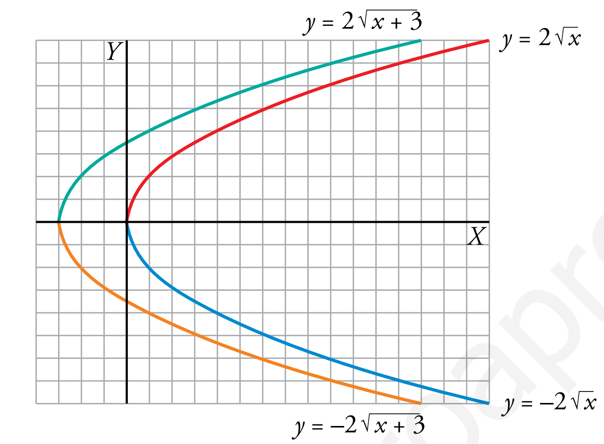
Página 139

1. Representa las siguientes funciones y halla el dominio de definición de cada una:

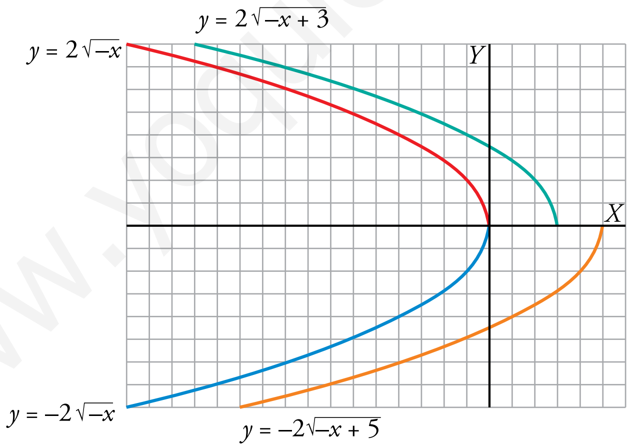
a) $y = 2\sqrt{x}$ **b)** $y = -2\sqrt{x}$ **c)** $y = 2\sqrt{x+3}$ **d)** $y = -2\sqrt{x+3}$

e) $y = 2\sqrt{-x}$ **f)** $y = -2\sqrt{-x}$ **g)** $y = 2\sqrt{-x+3}$ **h)** $y = -2\sqrt{-x+5}$

a) b) c) d)



e) f) g) h)



Los dominios de definición son:

a) $[0, +\infty)$ b) $[0, +\infty)$ c) $[-3, +\infty)$ d) $[-3, +\infty)$

e) $(-\infty, 0]$ f) $(-\infty, 0]$ g) $(-\infty, 3]$ h) $(-\infty, 5]$

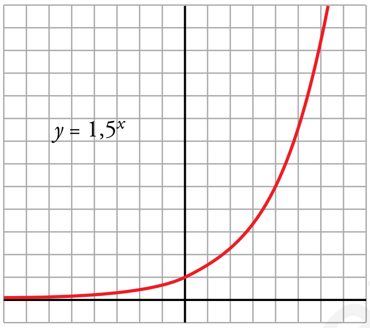
5 Funciones exponenciales

Página 140

1. Calcula los valores de la función $y = 1{,}5^x$ para los valores enteros de x comprendidos entre –6 y 6. Representa la función.

Hacemos la tabla de valores con ayuda de la calculadora.

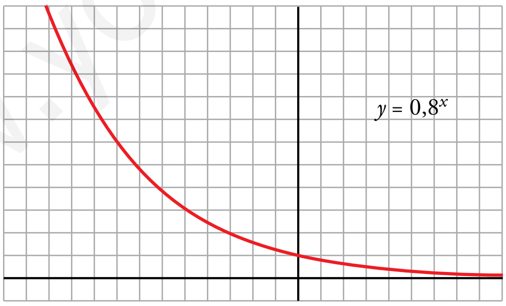
x	–6	–5	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4	5	6
y	0,09	0,13	0,20	0,30	0,44	0,67	1	1,5	2,25	3,38	5,06	7,59	11,39



2. Calcula los valores de la función $y = 0{,}8^x$ para los valores enteros de x comprendidos entre –8 y 8. Representa la función.

Hacemos la tabla de valores con ayuda de la calculadora.

x	–8	–7	–6	–5	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
y	5,96	4,77	3,81	3,05	2,44	1,95	1,56	1,25	1	0,8	0,64	0,51	0,41	0,33	0,26	0,21	0,17



3. La función $y = 5^{0,2x}$ puede ponerse de forma exponencial $y = a^x$ teniendo en cuenta que $5^{0,2x} = (5^{0,2})^x$.

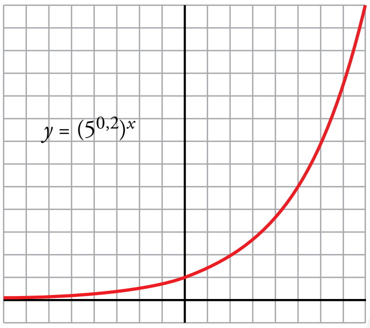
a) Calcula $5^{0,2}$ y guarda el resultado en la memoria: 5 [xʸ] 0,2 [=] [Min].

b) Representa la función dando valores a x. Por ejemplo, para $x = 4$: [MR] [xʸ] 4 [=] [3.62].

a) $y = 5^{0,2x} \rightarrow y = (5^{0,2})^x$ con $5^{0,2} = 1,379729\ldots$

b) Hacemos la tabla de valores con ayuda de la calculadora.

x	–8	–7	–6	–5	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
y	0,08	0,11	0,14	0,2	0,28	0,38	0,53	0,72	1	1,38	1,90	2,63	3,62	5	6,90	9,52	13,13



Ejercicios y problemas

Página 141

Practica

Funciones lineales

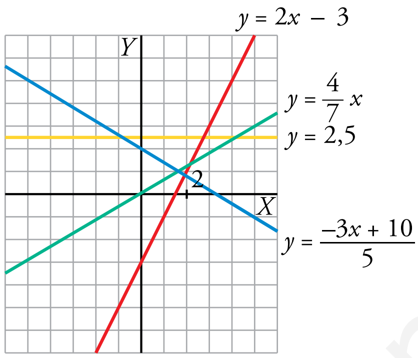
1. Representa las siguientes funciones lineales:

a) $y = 2x - 3$

b) $y = \frac{4}{7}x$

c) $y = \frac{-3x + 10}{5}$

d) $y = 2,5$



2. Dados la pendiente y un punto, calcula en cada caso la ecuación de la recta:

a) $P(0, 0)$, $m = 1$ **b)** $P(2, -1)$, $m = -2$

c) $A(-2, 1)$, $m = \frac{1}{2}$ **d)** $A(1, 3)$, $m = -\frac{5}{3}$

En todos los apartados buscamos la ecuación de una recta $\rightarrow$ $y = mx + n$

a) $m = 1 \rightarrow y = x + n$

Pasa por $P(0, 0) \rightarrow 0 = 0 + n \rightarrow n = 0$

Por tanto, $y = x$.

b) $m = -2 \rightarrow y = -2x + n$

Pasa por $P(2, -1) \rightarrow -1 = -2 \cdot 2 + n \rightarrow n = 3$

Por tanto, $y = -2x + 3$.

c) $m = \frac{1}{2} \rightarrow y = \frac{1}{2}x + n$

Pasa por $A(-2, 1) \rightarrow 1 = \frac{1}{2} \cdot (-2) + n \rightarrow n = 2$

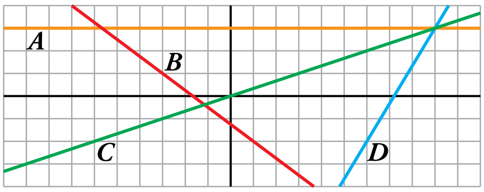
Por tanto, $y = \frac{1}{2}x + 2$.

d) $m = -\frac{5}{3} \rightarrow y = -\frac{5}{3}x + n$

Pasa por $A(1, 3) \rightarrow 3 = -\frac{5}{3} \cdot 1 + n \rightarrow n = 3 + \frac{5}{3} \rightarrow n = \frac{14}{3}$

Por tanto, $y = -\frac{5}{3}x + \frac{14}{3}$.

3. **Calcula la ecuación de estas funciones lineales:**



A Función constante $\rightarrow$ $y = n$; Pasa por (0, 3) $\rightarrow$ $n = 3$ $\rightarrow$ $y = 3$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Función constante} \rightarrow y = n\\ \text{Pasa por } (0, 3) \rightarrow n = 3\end{array}\right\} \rightarrow y = 3$$

B Función lineal $\rightarrow$ $y = mx + n$

$$\left.\begin{array}{l}(-3, 1) \in B\\ (1, -2) \in B\end{array}\right\} \rightarrow m = \frac{-2-1}{1-(-3)} = -\frac{3}{4} \rightarrow y = -\frac{3}{4}x + n$$

$$(1, -2) \in B \rightarrow -2 = -\frac{3}{4} \cdot 1 + n \rightarrow n = -2 + \frac{3}{4} \rightarrow n = -\frac{5}{4}$$

Por tanto, $y = -\frac{3}{4}x - \frac{5}{4}$.

C Función de proporcionalidad directa $\rightarrow$ $y = mx$

$$\left.\begin{array}{l}(0, 0) \in C\\ (3, 1) \in C\end{array}\right\} \rightarrow m = \frac{1-0}{3-0} = \frac{1}{3}$$

Por tanto, $y = \frac{1}{3}x$.

D Función lineal $\rightarrow$ $y = mx + n$

$$\left.\begin{array}{l}(6, -2) \in D\\ (9, 3) \in D\end{array}\right\} \rightarrow m = \frac{3-(-2)}{9-6} = \frac{5}{3} \rightarrow y = \frac{5}{3}x + n$$

$$(6, -2) \in D \rightarrow -2 = \frac{5}{3} \cdot 6 + n \rightarrow n = -2 - 10 \rightarrow n = -12$$

Por tanto, $y = \frac{5}{3}x - 12$.

4. **Halla, en cada caso, la ecuación de la recta que pasa por los puntos *A* y *B*:**

a) $A(3, 0)$, $B(5, 0)$ **b)** $A(-2, -4)$, $B(2, -3)$

c) $A(0, -3)$, $B(3, 0)$ **d)** $A(0, -5)$, $B(-3, 1)$

a) $y = 0$

b) $m = \frac{-3+4}{2+2} = \frac{1}{4}$; $y + 4 = \frac{1}{4}(x + 2) \rightarrow y = \frac{1}{4}x - \frac{7}{2}$

c) $m = \frac{3}{3} = 1$; $y + 3 = x \rightarrow y = x - 3$

d) $m = \frac{1+5}{-3} = -2$; $y + 5 = -2x \rightarrow y = -2x - 5$

5. **Halla la ecuación, en cada caso, y represéntala:**

a) Recta que pasa por (2, –3) y es paralela a la recta que pasa por (1, –2) y (–4, 3).

b) Función de proporcionalidad que pasa por (–4, 2).

c) Función constante que pasa por (18; –1,5).

a) • La pendiente de la recta que pasa por los puntos (1, –2) y (–4, 3) es:

$$m = \frac{3-(-2)}{-4-1} = \frac{5}{-5} = -1$$

• Si dos rectas son paralelas tienen la misma pendiente, por tanto, la recta buscada tiene pendiente $m = -1 \;\rightarrow\; y = -x + n$

• La recta pasa por (2, –3) $\rightarrow\; -3 = -2 + n \;\rightarrow\; n = -1$

Por tanto, la recta que buscamos es $y = -x - 1$.

b) • Función de proporcionalidad $\rightarrow\; y = mx$

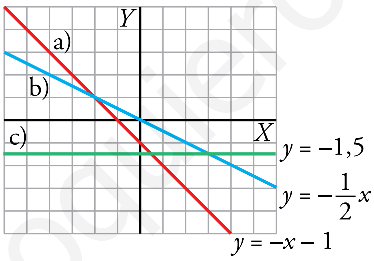
• Pasa por (–4, 2) $\rightarrow\; 2 = m \cdot (-4) \;\rightarrow\; m = -\frac{1}{2}$

Por tanto, la recta buscada es $y = -\frac{1}{2}x$.

c) • Función constante $\rightarrow\; y = n$

• Pasa por (18; –1,5) $\rightarrow\; -1{,}5 = n$

Por tanto, la recta que buscamos es $y = -1{,}5$.



6. **Halla el valor de los parámetros *a*, *b*, *c*, *d* y *e* para que las rectas y los puntos cumplan las condiciones pedidas:**

a) Que la recta que pasa por los puntos (4, 0) y (–2, *a*) tenga pendiente –1.

b) Que la recta $y = bx + 2$ pase por el punto (–3, 4).

c) Que las rectas de ecuaciones $y = 3x + c$ e $y = cx + 3$ se corten en el punto de ordenada 2. ¿Cuál es la abscisa correspondiente?

d) Que los puntos (*d*, –2) y (4, *e*) pertenezcan a la recta de ecuación $y = \frac{1}{2}x - 3$.

a) $\left.\begin{aligned} 4m + n &= 0 \\ -2m + n &= a \end{aligned}\right\} \rightarrow\; m = -\frac{a}{6},\; n = \frac{2a}{3}$

Si $m = -1 \;\rightarrow\; -1 = -\frac{a}{6} \;\rightarrow\; a = 6$

b) La recta $y = bx + 2$ pasa por (–3, 4) $\rightarrow\; 4 = b \cdot (-3) + 2 \;\rightarrow\; 3b = -2 \;\rightarrow\; b = -\frac{2}{3}$

c) $y = 3x + c$ e $y = cx + 3$ se cortan en el punto de ordenada 2: $\left.\begin{array}{l} 3x + c = 2 \\ cx + 3 = 2 \end{array}\right\} \rightarrow c = 2 - 3x$

$(2 - 3x) \cdot x + 3 = 2 \rightarrow -3x^2 + 2x + 1 = 0 \begin{cases} x = -1/3 \\ x = 1 \end{cases}$

• $x = -\dfrac{1}{3} \rightarrow c = 2 - 3 \cdot \left(-\dfrac{1}{3}\right) \rightarrow c = 3$

En este caso son la misma recta: $y = 3x + 3$

• $x = 1 \rightarrow c = 2 - 3 \cdot 1 \rightarrow c = -1$

Las rectas son $y = 3x - 1$ e $y = -x + 3$ y se cortan en el punto $(1, 2)$.

d) $(d, -2)$ pertenece a la recta $y = \dfrac{1}{2}x - 3 \rightarrow -2 = \dfrac{1}{2} \cdot d - 3 \rightarrow d = 2$

$(4, e)$ pertenece a la recta $y = \dfrac{1}{2}x - 3 \rightarrow e = \dfrac{1}{2} \cdot 4 - 3 \rightarrow e = -1$

Funciones cuadráticas

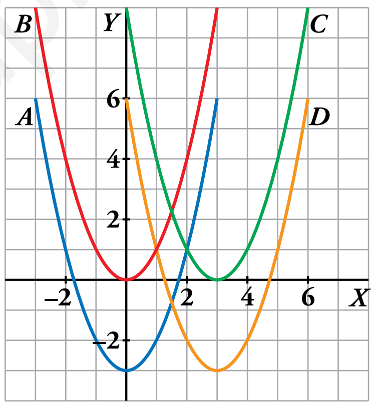
7. **Asocia a cada una de las gráficas una de las expresiones siguientes:**

a) $y = x^2$

b) $y = (x - 3)^2$

c) $y = x^2 - 3$

d) $y = x^2 - 6x + 6$



a) $y = x^2 \leftrightarrow B$

b) $y = (x - 3)^2 \leftrightarrow C$

c) $y = x^2 - 3 \leftrightarrow A$

d) $y = x^2 - 6x + 6 \leftrightarrow D$

8. **Representa las siguientes funciones haciendo, en cada caso, una tabla de valores como esta:**

x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
y	…	…	…	…	…	…	…	…	…

a) $y = x^2 + 1$

b) $y = -x^2 + 4$

c) $y = -3x^2$

d) $y = 0{,}4x^2$

a) $y = x^2 + 1$

x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
y	17	10	5	2	1	2	5	10	17

b) $y = -x^2 + 4$

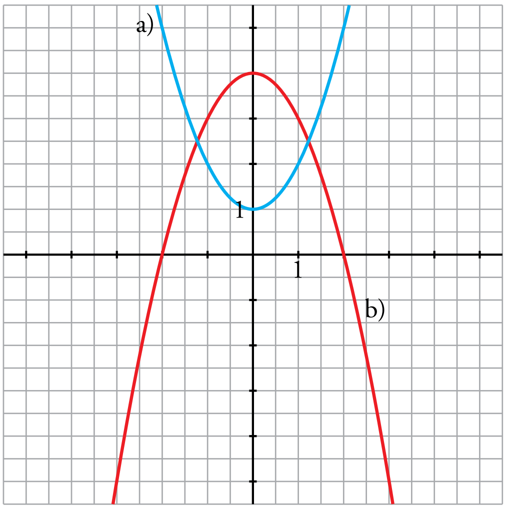
x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
y	–12	–5	0	3	4	3	0	–5	–12

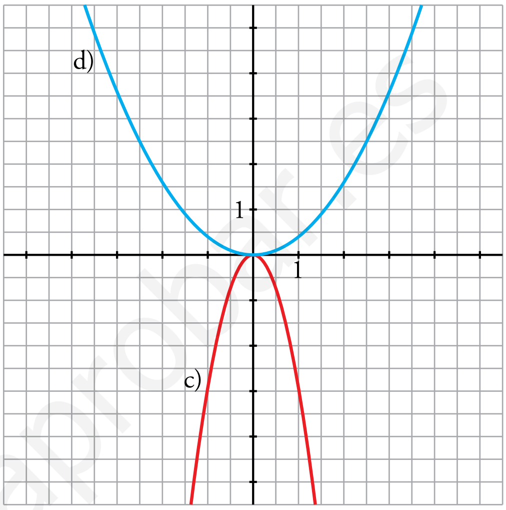
c) $y = -3x^2$

x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
y	–48	–27	–12	–3	0	–3	–12	–27	–48

d) $y = 0{,}4x^2$

x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
y	6,4	3,6	1,6	0,4	0	0,4	1,6	3,6	6,4





9. **Representa las siguientes parábolas, hallando el vértice, algunos puntos próximos a él y los puntos de corte con los ejes:**

a) $y = (x+2)^2$ **b)** $y = x^2 - 4x$ **c)** $y = \frac{1}{2}x^2 + 2x + 1$ **d)** $y = x^2 - 9$

a) Vértice: (–2, 0)

Cortes con los ejes:

(–2, 0), (0, 4)

Otros puntos: (–1, 1), (–3, 1)

b) Vértice: (2, –4)

Cortes con los ejes:

(0, 0), (4, 0)

Otros puntos: (5, 5), (–1, 5)

c) Vértice: (–2, –1)

Cortes con los ejes:

$\left(-\sqrt{2}-2, 0\right), \left(\sqrt{2}-2, 0\right)$, (0, 1)

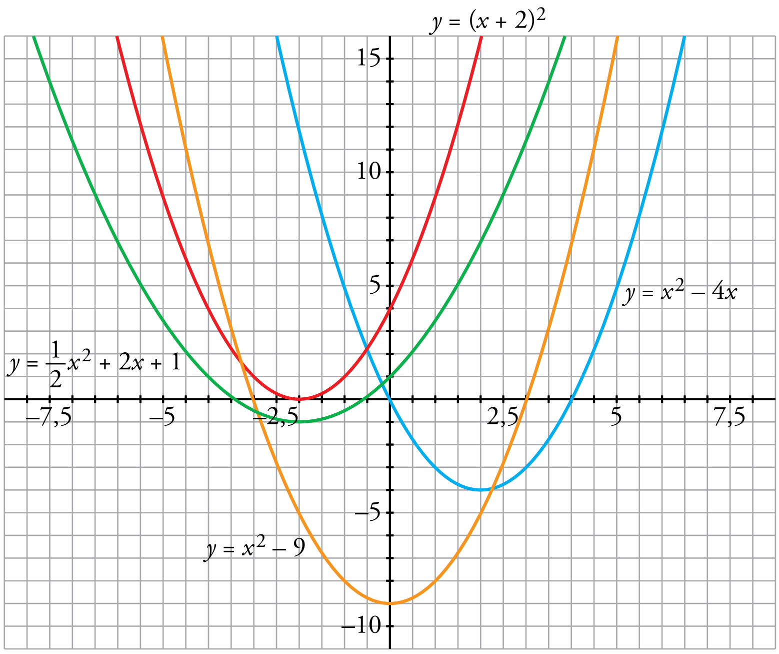
Otros puntos: $\left(1, \frac{7}{2}\right), \left(-5, \frac{7}{2}\right)$

d) Vértice: (0, –9)

Cortes con los ejes:

(–3, 0), (3, 0), (0, –9)

Otros puntos: (–2, –5), (2, –5)



10. **Di cuál es el punto (abscisa y ordenada) donde se encuentra el vértice de las siguientes parábolas, señalando, en cada caso, si se trata de un máximo o de un mínimo. Después, represéntalas.**

a) $y = 8 - x^2$

b) $y = 4 + (3 - x)^2$

c) $y = -x^2 - 2x + 4$

d) $y = 3x - \frac{1}{2}x^2 + 1$

e) $y = \frac{15}{4} - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x$

f) $y = \frac{1}{3}x^2 + 2x + 3$

a) Vértice: (0, 8), máximo

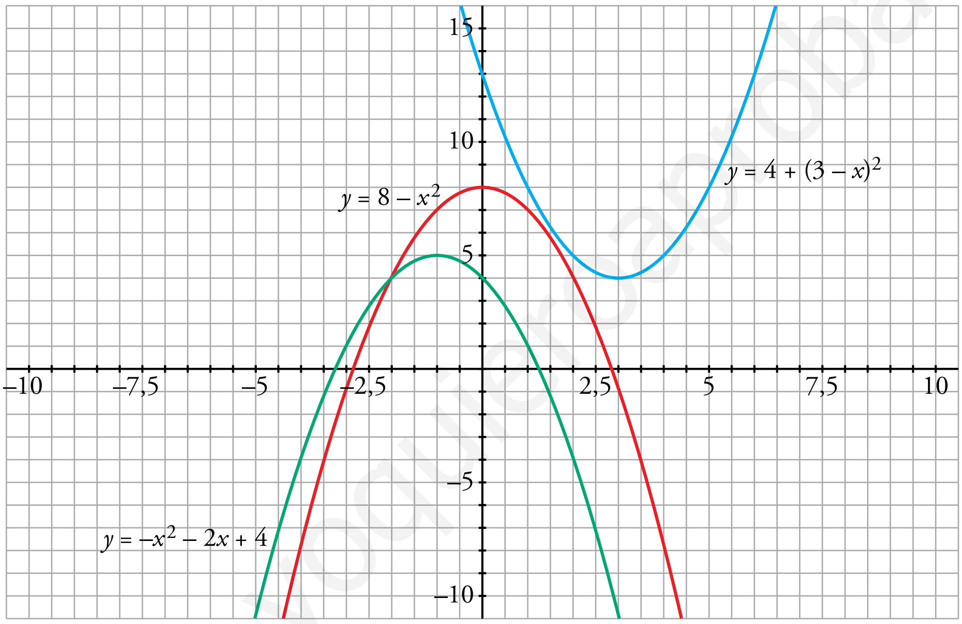
b) Vértice: (3, 4), mínimo

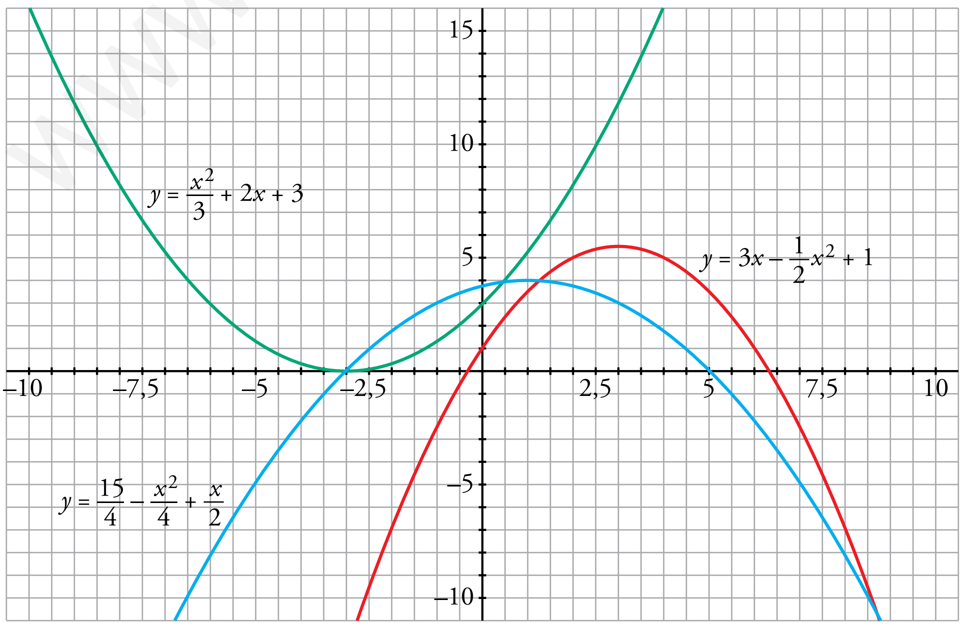
c) Vértice: (–1, 5), máximo

d) Vértice: $\left(3, \frac{11}{2}\right)$, máximo

e) Vértice: (1, 4), máximo

f) Vértice: (–3, 0), mínimo





11. **Representa estas funciones cuadráticas:**

a) $y = (x - 5)^2$ **b)** $y = x \cdot (x - 5)$

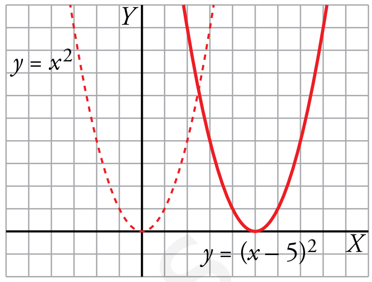
c) $y = (x - 3) \cdot (x + 3)$ **d)** $y = 4 - (x - 2)^2$

a) $y = (x - 5)^2 \rightarrow$ Es la traslación 5 unidades a la derecha de $y = x^2$.

Vértice: (5, 0)

Tabla de valores:

x	2	3	4	5	6	7	8
y	9	4	1	0	1	4	9



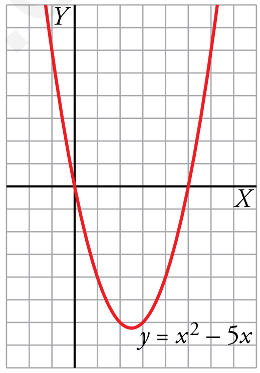
b) $y = x \cdot (x - 5) \rightarrow y = x^2 - 5x$

Vértice:

Abscisa: $p = \frac{5}{2} \rightarrow$ Ordenada: $f\left(\frac{5}{2}\right) = -\frac{25}{4} \rightarrow V\left(\frac{5}{2}, \frac{-25}{4}\right)$

Tabla de valores:

x	–1	0	1	2	$\frac{5}{2}$	3	4	5	6
y	6	0	–4	–6	$-\frac{25}{4}$	–6	–4	0	6

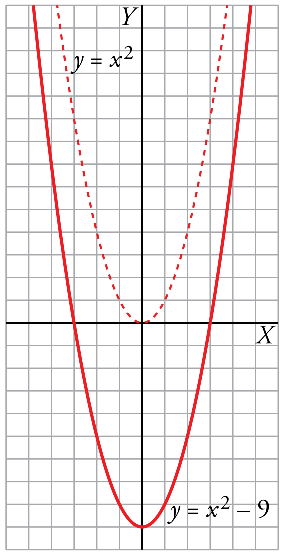


c) $y = (x - 3) \cdot (x + 3) \rightarrow y = x^2 - 9 \rightarrow$ Es la traslación 9 unidades hacia abajo de $y = x^2$.

Vértice: (0, –9)

Tabla de valores:

x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
y	7	0	–5	–8	–9	–8	–5	0	7

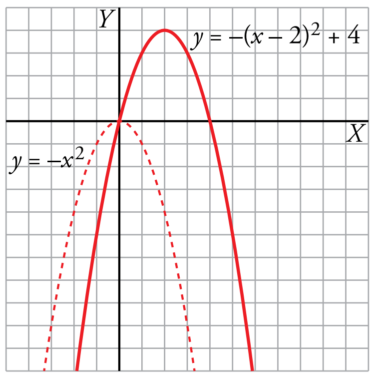


d) $y = 4 - (x - 2)^2 \rightarrow$ Es la traslación 4 unidades hacia arriba y 2 a la derecha de $y = -x^2$.

Vértice: (2, 4)

Tabla de valores:

x	–1	0	1	2	3	4	5
y	–5	0	3	4	3	0	–5



12. **Utiliza una escala adecuada y representa.**

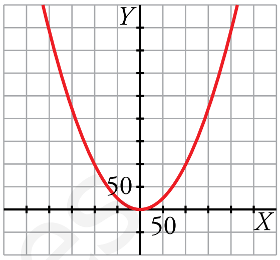
a) $y = \dfrac{x^2}{100}$ **b)** $y = -75x^2 + 675$

c) $y = 0{,}002x^2 - 0{,}04x$ **d)** $y = -10x^2 - 100x$

a) $y = \dfrac{x^2}{100}$ → Vértice: (0, 0)

Tabla de valores:

x	–200	–150	–100	–50	0	50	100	150	200
y	400	225	100	25	0	25	100	225	400



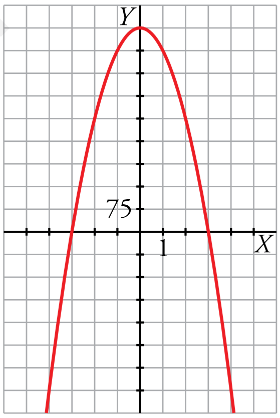
b) $y = -75x^2 + 675$

Vértice:

Abscisa: $p = \dfrac{0}{-150} = 0$ → Ordenada: $f(0) = 675$ → $V(0, 675)$

Tabla de valores:

x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
y	–525	0	375	600	675	600	375	0	–525



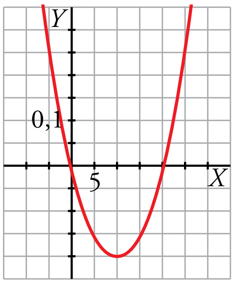
c) $y = 0{,}002x^2 - 0{,}04x$

Vértice:

Abscisa: $p = \dfrac{0{,}04}{0{,}004} = 10$ → Ordenada: $f(10) = -0{,}2$ → $V(10; -0{,}2)$

Tabla de valores:

x	–5	0	5	10	15	20	25
y	0,25	0	–0,15	–0,2	–0,15	0	0,25



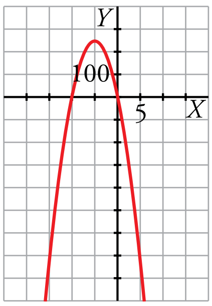
d) $y = -10x^2 - 100x$

Vértice:

Abscisa: $p = \dfrac{100}{-20} = -5$ → Ordenada: $f(-5) = 250$ → $V(-5, 250)$

Tabla de valores:

x	–15	–10	–5	0	5
y	–750	0	250	0	–750



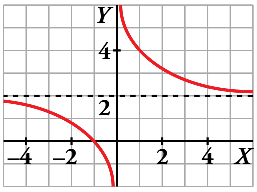
Página 142

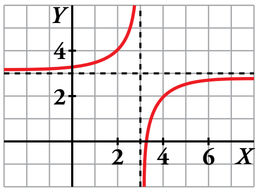
Otras funciones

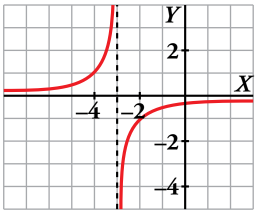
13. **Asocia a cada gráfica una de estas fórmulas e indica el dominio de definición de cada una:**

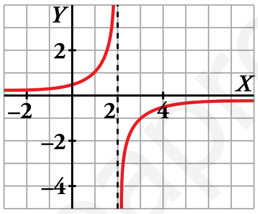
I) $y = \dfrac{1}{2-x}$ II) $y = 3 - \dfrac{1}{x-3}$

III) $y = 2 + \dfrac{2}{x}$ IV) $y = -\dfrac{1}{x+3}$

a) 

b) 

c) 

d) 

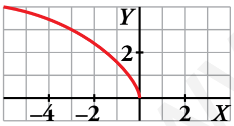
I $\rightarrow$ d) *Dom* = $\mathbb{R} - \{2\}$ II $\rightarrow$ b) *Dom* = $\mathbb{R} - \{3\}$

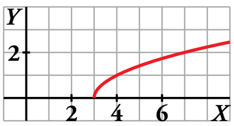
III $\rightarrow$ a) *Dom* = $\mathbb{R} - \{0\}$ IV $\rightarrow$ c) *Dom* = $\mathbb{R} - \{-3\}$

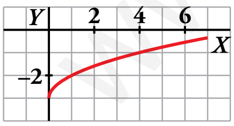
14. **Asocia a cada gráfica la fórmula que le corresponde e indica su dominio de definición:**

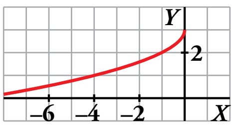
I) $y = \sqrt{x-3}$ II) $y = \sqrt{x} - 3$

III) $y = 3 - \sqrt{-x}$ IV) $y = \sqrt{-3x}$

a) 

b) 

c) 

d) 

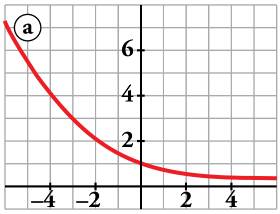
I $\rightarrow$ b) *Dom* = $[3, +\infty)$ II $\rightarrow$ c) *Dom* = $[0, +\infty)$

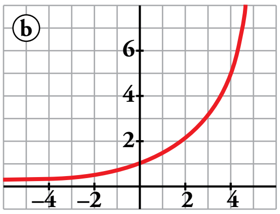
III $\rightarrow$ d) *Dom* = $(-\infty, 0]$ IV $\rightarrow$ a) *Dom* = $(-\infty, 0]$

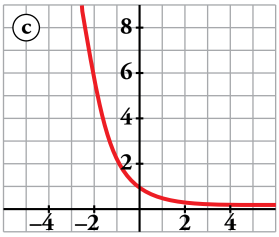
15. **Asocia a cada gráfica una de estas fórmulas:**

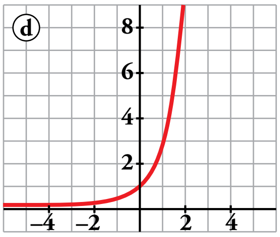
I) $y = 3^x$ **II)** $y = 1{,}5^x$

III) $y = 0{,}4^x$ **IV)** $y = 0{,}7^x$









Di, en cada una de ellas, si es creciente o decreciente.

I → d) Creciente II → b) Creciente

III → c) Decreciente IV → a) Decreciente

16. **Dibuja la gráfica de estas funciones, dando a x los valores que se indican en cada caso:**

a) $y = \dfrac{3}{x}$; $x = -3; -1; -\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{2}; 1; 3$ **b)** $y = -\dfrac{3}{x}$; $x = -3; -1; -\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{2}; 1; 3$

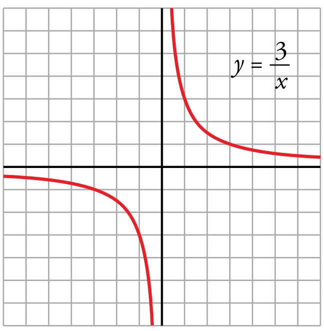
c) $y = \dfrac{5}{x}$; $x = -5; -1; -\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{2}; 1; 5$ **d)** $y = -\dfrac{2}{x}$; $x = -2; -1; -\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{2}; 1; 2$

Todas las funciones son tales que:

- $Dom\ f = \mathbb{R} - \{0\}$
- No cortan los ejes de coordenadas.
- $x = 0$ es asíntota vertical.
- $y = 0$ es asíntota horizontal.

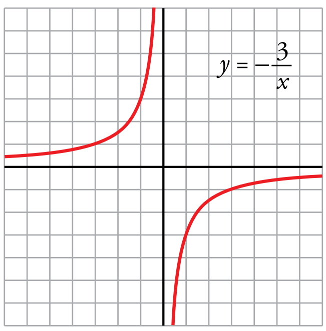
a) $f(x) = \dfrac{3}{x}$

x	–3	–1	–1/2	1/2	1	3
y	–1	–3	–6	6	3	1



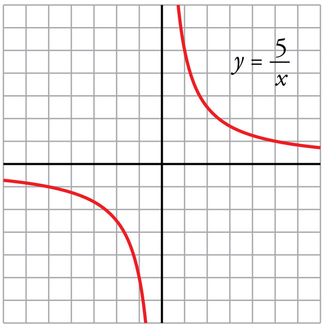
b) $f(x) = -\dfrac{3}{x}$

x	–3	–1	–1/2	1/2	1	3
y	1	3	6	–6	–3	–1



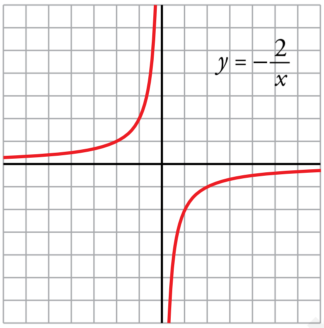
c) $f(x) = \dfrac{5}{x}$

x	–5	–1	–1/2	1/2	1	5
y	–1	–5	–10	10	5	1



d) $f(x) = -\dfrac{2}{x}$

x	–2	–1	–1/2	1/2	1	2
y	1	2	4	–4	–2	–1



17. **Indica cuáles son las asíntotas de las siguientes funciones y represéntalas gráficamente ayudándote de una tabla de valores:**

a) $y = \dfrac{1}{x+3}$

b) $y = -\dfrac{3}{x+1}$

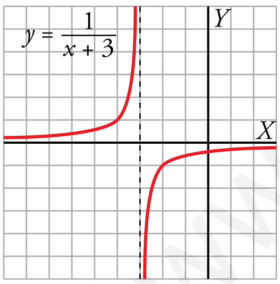
c) $y = \dfrac{1}{1-x} + 2$

d) $y = \dfrac{1}{x-1} + 2$

a) Dominio = $\mathbb{R} - \{-3\}$

Asíntotas: $x = -3$, $y = 0$

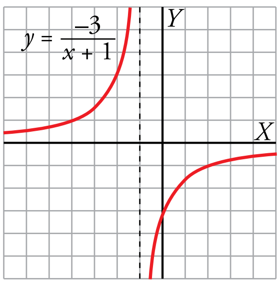
x	–6	–5	–4	–2	–1	0
y	–1/3	–1/2	–1	1	1/2	1/3



b) Dominio = $\mathbb{R} - \{-1\}$

Asíntotas: $x = -1$, $y = 0$

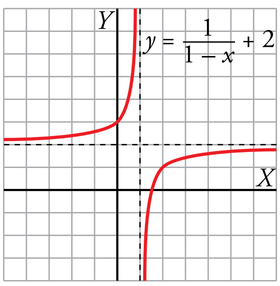
x	–4	–3	–2	0	1	2
y	1	3/2	3	–3	–3/2	–1



c) Dominio = $\mathbb{R} - \{1\}$

Asíntotas: $x = 1$, $y = 2$

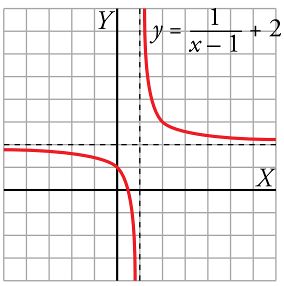
x	–2	–1	0	2	3	4
y	7/3	5/3	3	1	3/2	5/3



d) Dominio = $\mathbb{R} - \{1\}$

Asíntotas: $x = 1$, $y = 2$

x	–2	–1	0	2	3	4
y	5/3	3/2	1	3	5/2	7/3



18. **Ayúdate de una tabla de valores para representar gráficamente las siguientes funciones e indica el dominio de definición de cada una:**

a) $y = \sqrt{x} + 2$ **b)** $y = 2 - \sqrt{x}$

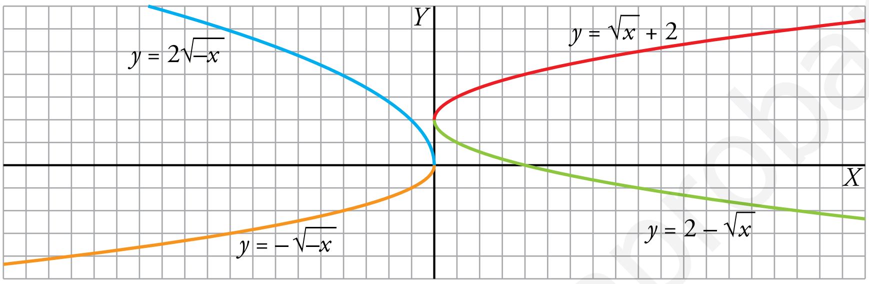
c) $y = 2\sqrt{-x}$ **d)** $y = -\sqrt{-x}$

A partir de la tabla de valores de $y = \sqrt{x}$ podemos representar las funciones:

x	0	1	4	9	16
$\sqrt{x}$	0	1	2	3	4

a) $y = \sqrt{x} + 2 \to$ Dominio $= [0, +\infty)$ b) $y = 2 - \sqrt{x} \to$ Dominio $= [0, +\infty)$

c) $y = 2\sqrt{-x} \to$ Dominio $= (-\infty, 0]$ d) $y = -\sqrt{-x} \to$ Dominio $= (-\infty, 0]$



19. **Representa gráficamente estas funciones dando los valores que se indican en cada caso.**

a) $y = \sqrt{2 - x}$; $x = 2; -2; -7$ **b)** $y = 7 - \sqrt{2x + 4}$; $x = -2; 0; 6$

c) $y = \sqrt{-x}$; $x = 0; -4; -9$ **d)** $y = 2 + \sqrt{x + 3}$; $x = -3; 1; 6$

a) $y = \sqrt{2 - x}$

x	2	–2	–7
y	0	2	3

b) $y = 7 - \sqrt{2x + 4}$

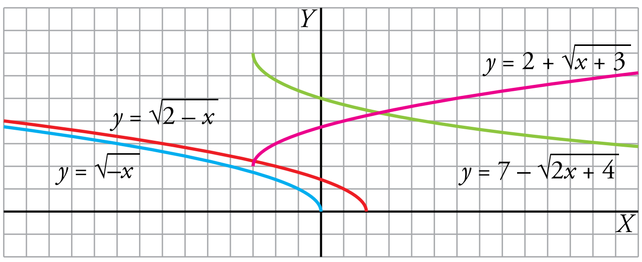
x	–2	0	6
y	7	5	3

c) $y = \sqrt{-x}$

x	0	–4	–9
y	0	2	3

d) $y = 2 + \sqrt{x + 3}$

x	–3	1	6
y	2	4	5



20. **Representa las siguientes funciones haciendo, en cada caso, una tabla de valores (ayúdate de la calculadora):**

a) $y = 2^x$

b) $y = 3^x + 1$

c) $y = \left(\frac{2}{3}\right)^x + 1$

d) $y = 2^{0,5x}$

e) $y = 1{,}2^{4x}$

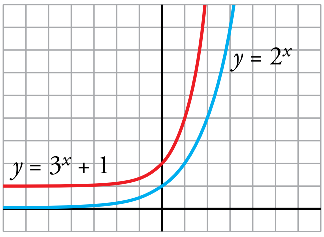
f) $y = \left(\frac{1}{4}\right)^{0,5x}$

a) $y = 2^x$

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
y	1/8	1/4	1/2	1	2	4	8

b) $y = 3^x + 1$

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
y	1,037	$1,\overset{\frown}{1}$	$1,\overset{\frown}{3}$	2	4	10	28

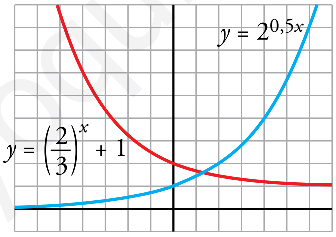


c) $y = \left(\frac{2}{3}\right)^x + 1$

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
y	4,375	3,25	2,5	2	$1,\overset{\frown}{6}$	$1,\overset{\frown}{4}$	1,296

d) $y = 2^{0,5x}$

x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
y	0,25	0,35	0,5	0,71	1	1,41	2	2,83	4

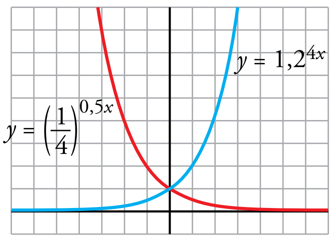


e) $y = 1{,}2^{4x}$

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
y	0,11	0,23	0,48	1	2,07	4,3	8,92

f) $y = \left(\frac{1}{4}\right)^{0,5x} \rightarrow \left[\left(\frac{1}{4}\right)^{0,5}\right]^x \rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^x$

x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
y	16	8	4	2	1	0,5	0,25	0,125	0,06



21. **Representa cada par de funciones sobre los mismos ejes coordenados. ¿Qué relación hay entre ellos?**

a) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$; $y = 3^x$ **b)** $y = 0{,}25^x$; $y = 4^x$

a) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
$y = (1/3)^x$	27	9	3	1	1/3	1/9	1/27

$y = 3^x$

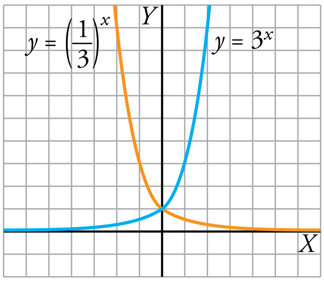
x	–3	–2	–1	0	1	2	3
$y = 3^x$	1/27	1/9	1/3	1	3	9	27

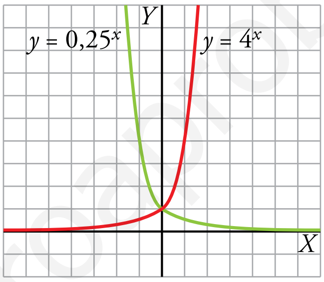
b) $y = 0{,}25^x \rightarrow y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$

x	–2	–1	0	1	2
$y = 0{,}25^x$	16	4	1	1/4	1/16

$y = 4^x$

x	–2	–1	0	1	2
$y = 4^x$	1/16	1/4	1	4	16





Sus gráficas son simétricas respecto al eje de ordenadas.

Página 143

Resuelve problemas

22. **a) Calcula b y c para que el vértice de la parábola $y = x^2 + bx + c$ esté en el punto (3, 1).**

b) ¿Cuál es su eje de simetría?

c) ¿Cuáles son sus puntos de corte con los ejes?

a) Vértice en $x = 3 \to -\frac{b}{2a} = 3 \to -b = 6a = 6 \to b = -6$

Pasa por $(3, 1) \to 1 = 9 - 18 + c \to c = 10$

$y = x^2 - 6x + 10$

b) Su eje de simetría es $x = 3$.

c) Cortes con los ejes:

$x = 0 \to y = 10 \to$ Punto $(0, 10)$

$x^2 - 6x + 10 = 0 \to x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 40}}{2} \to$ No tiene solución, por tanto, no corta al eje X.

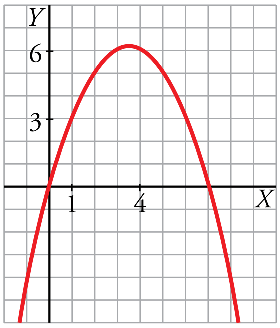
23. **La parábola $y = ax^2 + bx + c$ pasa por el origen de coordenadas. ¿Cuánto valdrá c?**

Si, además, sabemos que pasa por los puntos (1, 3) y (4, 6), halla a y b y representa la parábola.

$c = 0 \qquad y = ax^2 + bx$

$$\left.\begin{array}{l}(1, 3) \to 3 = a + b \\ (4, 6) \to 6 = 16a + 4b\end{array}\right\} \begin{array}{l}a = 3 - b \to a = -1/2 \\ 6 = 16(3 - b) + 4b \to b = 7/2\end{array}$$

$y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{7}{2}x$



24. **Calcula a y b para que la función $y = \frac{a}{x - b}$ pase por los puntos (2, 2) y (–1, –1).**

$$\left.\begin{array}{l}2 = \dfrac{a}{2 - b} \\ -1 = \dfrac{a}{-1 - b}\end{array}\right\} \left.\begin{array}{l}a = 4 - 2b \\ a = 1 + b\end{array}\right\} \left.\begin{array}{l}1 + b = 4 - 2b \to b = 1 \\ a = 2\end{array}\right\} y = \frac{2}{x - 1}$$

25. **La gráfica de una función exponencial del tipo $y = ka^x$ pasa por los puntos (0, 3) y (1; 3,6).**

a) Calcula k y a.

b) ¿Es creciente o decreciente?

c) Representa la función.

a) Si pasa por el punto (0, 3) $\rightarrow$ $3 = ka^0 \rightarrow k = 3$

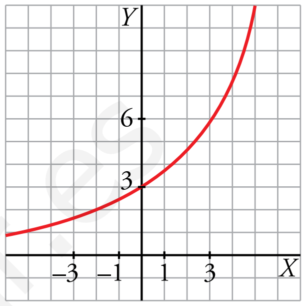
Si pasa por el punto (1; 3,6) $\rightarrow$ $3{,}6 = ka^1 \rightarrow 3{,}6 = 3a \rightarrow a = 1{,}2$

Tenemos la función: $y = 3 \cdot 1{,}2^x$

b) Es una función creciente.

c) Hacemos una tabla de valores:

x	–2	–1	0	1	2	3
y	2,08	2,5	3	3,6	4,32	5,18



26. **Con un listón de madera de 3 metros de largo, queremos fabricar un marco para un cuadro.**

a) Si la base midiera 0,5 m, ¿cuánto mediría la altura? ¿Y la superficie del cuadro?

b) ¿Cuál es el valor de la superficie para una base cualquiera x?

c) ¿Para qué valor de la base se obtiene la superficie máxima? ¿Cuánto vale dicha superficie?

a) Perímetro = 3 m $\rightarrow$ base + altura = 1,5 m

base = 0,5 m $\rightarrow$ 0,5 + altura = 1,5 $\rightarrow$ altura = 1 m

Área = base · altura $\rightarrow$ Área = $0{,}5 \cdot 1 = 0{,}5$ m^2

b) Perímetro = 3 m $\rightarrow$ base + altura = 1,5 m

base = x $\rightarrow$ x + altura = 1,5 $\rightarrow$ altura = $1{,}5 - x$

Área = base · altura $\rightarrow$ $A(x) = x \cdot (1{,}5 - x) \rightarrow A(x) = -x^2 + 1{,}5x$

c) $\left.\begin{array}{l} A(x) = -x^2 + 1{,}5x \text{ función cuadrática} \\ a = -1 < 0 \rightarrow \text{ tiene las ramas hacia abajo} \end{array}\right\} \rightarrow A(x)$ alcanza el máximo en su vértice

Vértice:

$$\left.\begin{array}{l} x = \dfrac{-b}{2a} \;\; 8 \;\; x = \dfrac{-1{,}5}{-2} = 0{,}75 \\ y = -(0{,}75)^2 + 1{,}5 \cdot 0{,}75 = 0{,}5625 \end{array}\right\} \rightarrow \text{Vértice: } (0{,}75; 0{,}5625)$$

La superficie es máxima cuando la base mide 0,75 m, siendo dicha superficie máxima 0,5625 m^2.

27. **El sueldo inicial de Ana es de 24 000 € anuales. En su contrato de trabajo figura que subirá un 8 % anual.**

¿Cuánto ganará dentro de 10 años? Escribe la función que relaciona el sueldo con el tiempo.

El sueldo inicial es 24 000 €.

Al cabo de un año será $24\,000 \cdot 1{,}08$ y al cabo de dos años será $24\,000 \cdot 1{,}08^2$.

Es decir, al cabo de 10 años será $24\,000 \cdot 1{,}08^{10} = 51\,814{,}20$ €.

La función que relaciona el sueldo con el tiempo es:

$$s(t) = 24\,000 \cdot 1{,}08^t$$

28. **El coste por unidad de fabricación de un tipo de cajas disminuye según el número de unidades fabricadas y viene dado por la función:**

$$y = \frac{0{,}3x + 1\,000}{x}$$

a) ¿Qué valores toma la variable independiente, x?

b) Calcula el coste por unidad y el coste total para fabricar 10 cajas. Haz lo mismo para 100 000 cajas.

c) ¿A cuánto crees que se acerca el coste por unidad cuando el número de cajas se hace muy grande?

a) x toma valores naturales.

b) • Para 10 cajas:

$$\text{Coste por unidad} = \frac{3 + 1\,000}{10} = 100{,}3$$

Coste total de 10 unidades = 1 003

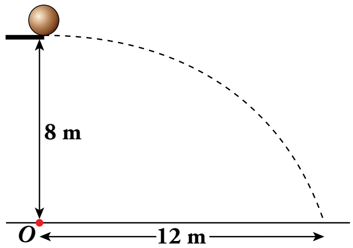
• Para 100 000 cajas:

$$\text{Coste por unidad} = \frac{30\,000 + 1\,000}{100\,000} = 0{,}31$$

Coste total de 100 000 unidades = 31 000

c) El coste por unidad se acerca a 0,3.

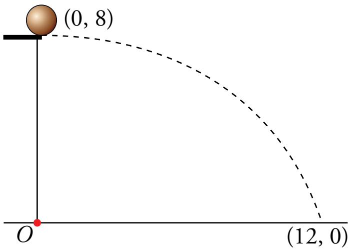
29. **En una piscina hay un trampolín a 8 m del agua. Esther lanza una pelota rodando y cae al agua a 12 m de la vertical del trampolín.**



Escribe la ecuación de la trayectoria descrita por la pelota desde que sale del trampolín hasta que toca el agua. Da su dominio de definición.

La trayectoria es una parábola $y = ax^2 + bx + c$ con su vértice en el punto de caída. Toma O como centro de coordenadas y ten en cuenta que el vértice es (0, 8).

RESOLUCIÓN 1



Tomando el centro de coordenadas en el punto O, el vértice de la parábola es (0, 8). La ecuación de la parábola queda así:

$$\left.\begin{array}{l} y = ax^2 + b \\ \text{Para } x = 0,\ y = 8 \ \rightarrow\ 8 = b \end{array}\right\} y = ax^2 + 8$$

Calculamos el valor de a sabiendo que pasa por (12, 0):

$$0 = a \cdot 12^2 + 8 \ \rightarrow\ a = -\frac{8}{144} = -\frac{1}{18}$$

La ecuación de la trayectoria es $y = -\frac{1}{18}x^2 + 8$, definida en [0, 12].

RESOLUCIÓN 2

En la resolución anterior se ha tenido en cuenta que la trayectoria es una parábola con su vértice en el punto de caída. Resolvámoslo, ahora, como lo haría un físico, teniendo en cuenta, solamente, las leyes del movimiento:

Tiempo que tarda en caer 8 m: (movimiento uniformemente acelerado. Aceleración, g):

$\frac{1}{2}gt^2 = 8$. Tomamos $g = 10 \text{ m/s}^2 \ \rightarrow\ 5t^2 = 8 \ \rightarrow\ t = \sqrt{\frac{8}{5}}$

¿A qué velocidad rueda la pelota por el trampolín? Tengamos en cuenta que, a esa velocidad, recorre 12 m en $\sqrt{\frac{8}{5}}$ s (componente horizontal).

Movimiento uniforme $e = v \cdot t \ \rightarrow\ 12 = v \cdot \sqrt{\frac{8}{5}} \ \rightarrow\ v = \frac{12}{\sqrt{8/5}}$

Obtengamos la ecuación de la trayectoria tomando O como origen de coordenadas:

$$\left.\begin{array}{l} \text{Comp. horizontal: } x = \dfrac{12}{\sqrt{8/5}}t \\ \text{Comp. vertical: } y = 8 - 5t^2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} t = \dfrac{\sqrt{8/5}\,x}{12} \ \rightarrow\ t^2 = \dfrac{8/5}{144}x^2 = \dfrac{1}{90}x^2 \\ y = 8 - 5 \cdot \dfrac{1}{90}x^2 = 8 - \dfrac{1}{18}x^2 \end{array}$$

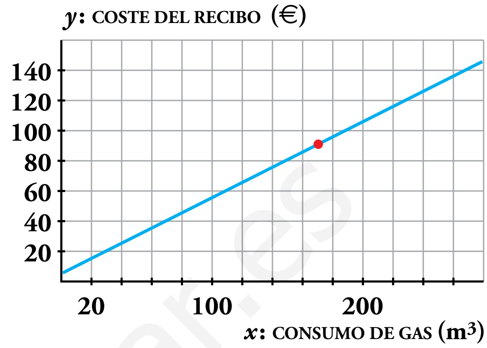
Hemos obtenido la trayectoria $y = 8 - \frac{1}{18}x^2$, la misma que antes como es natural.

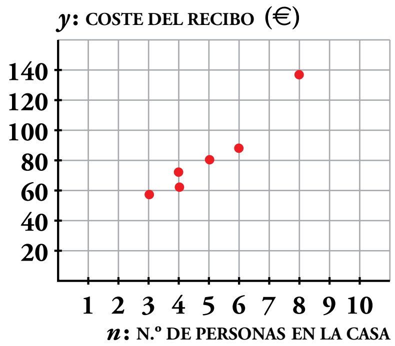
Página 217

Resuelve

1. **a) Observa en la gráfica de la derecha que el punto correspondiente a la primera vivienda está sobre la recta. Comprueba que también lo están los otros siete.**

b) De una vivienda nos dicen que se han consumido 135 m^3. ¿Sabrías calcular, exactamente, a cuánto asciende el recibo del gas?



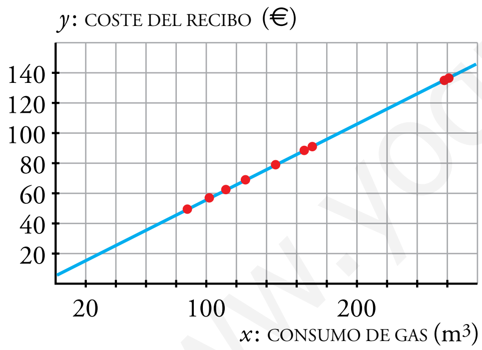


c) Comprueba que los puntos señalados en la gráfica de la izquierda son los seis primeros de la distribución que relaciona *n* con *y*.

Representa los dos restantes, (3; 49,5) y (9; 135).

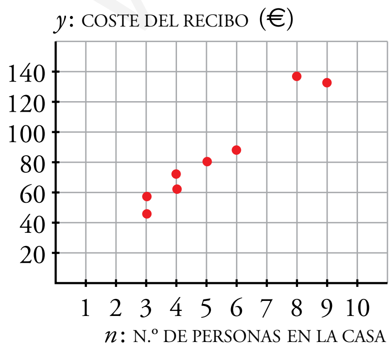
d) Observa cómo, a la vista de estos puntos, podríamos aventurarnos a decir algo sobre el gasto de gas en una vivienda con 7 personas. Sin embargo, lo que dijéramos sería muy impreciso y con gran riesgo de equivocarnos.

a)



b) Sí, ascendería a $y = 0,5 \cdot 135 + 6 = 73,50$ €

c)



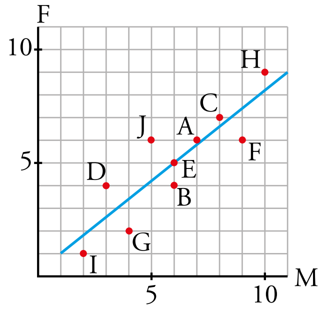
d) Podríamos decir que el gasto es de unos 100 € pero sería impreciso.

1 Distribuciones bidimensionales

Página 218

1. Identifica los restantes puntos del diagrama de dispersión del ejemplo de las notas en matemáticas y en física.

A cada estudiante *a*, *b*, …, le corresponderá el punto A, B, … en el diagrama de dispersión.



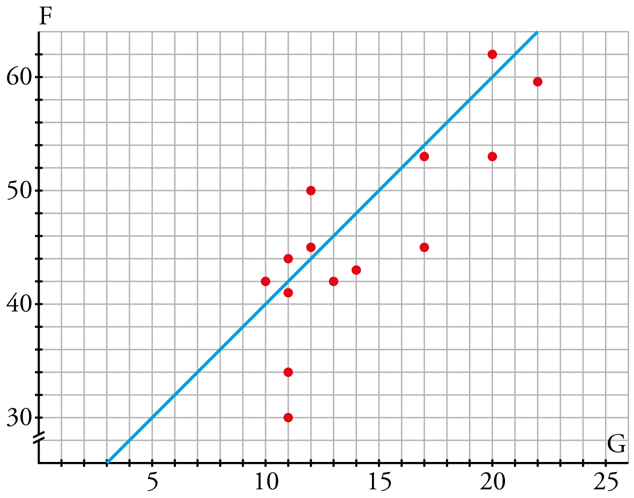
Página 220

2. En cada una de las siguientes distribuciones bidimensionales, intenta, sin representarla, estimar si la correlación va a ser positiva o negativa, fuerte o débil. Luego, represéntala mediante la nube de puntos, trazando la recta de regresión, y corrobora o modifica tus estimaciones.

a) G - F **b) Pos - F**

c) F - C **d) Pos - Ptos**

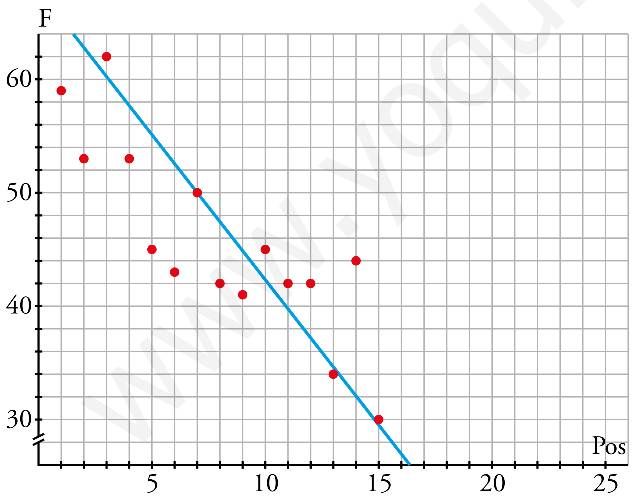
a)



Parece que sí debería haber correlación entre el número de partidos ganados y el número de goles a favor.

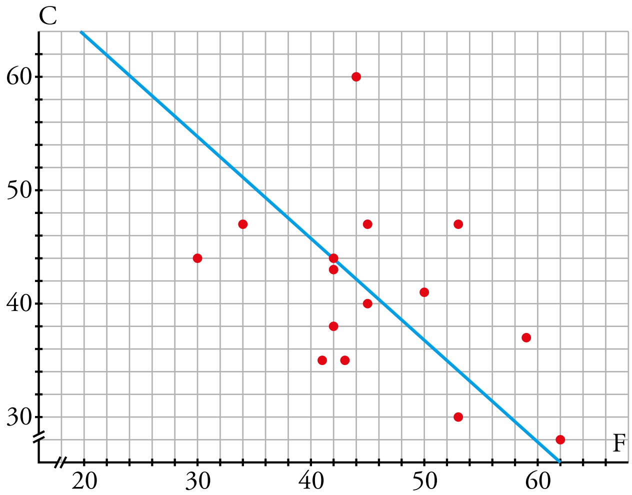
Al representarlo apreciamos en la nube de puntos una correlación positiva y fuerte.

b)



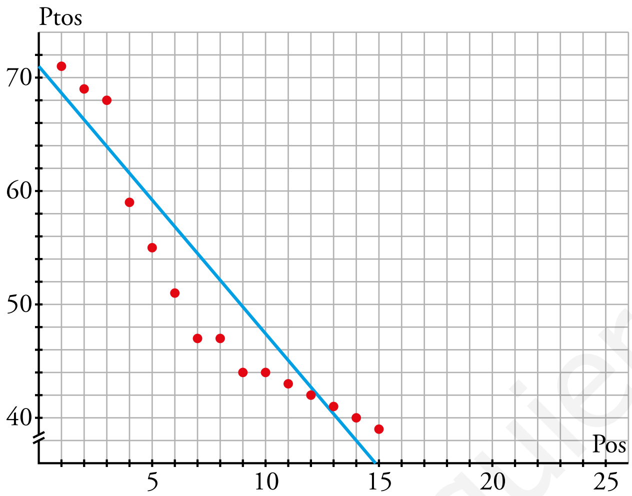
Al relacionar la posición con los goles a favor es lógico pensar que habrá una correlación. Al representarla, apreciamos en la nube de puntos una correlación negativa y fuerte.

c)



Al relacionar los goles a favor y los goles en contra, se aprecia correlación negativa y débil.

d)



Es lógico pensar que habrá una correlación entre los puntos y la posición y efectivamente al representarla apreciamos en la nube de puntos una correlación negativa y fuerte.

3. Busca, en un periódico o en Internet, una tabla como la anterior, de actualidad, y estudia distribuciones como las que hemos visto en esta página.

Actividad personal.

Página 221

4. En las siguientes distribuciones bidimensionales referentes a tus compañeros y compañeras de clase, estima si la correlación será positiva o negativa, muy fuerte, fuerte, débil o casi nula:

a) Medida de un palmo - Medida del pie.

b) Número de horas semanales de estudio - Número de horas semanales viendo la televisión.

c) Número de horas semanales de estudio - Número de suspensos en la última evaluación.

d) Estatura - Peso.

e) Nota en matemáticas en el último examen - Número de asignaturas suspensas en la última evaluación.

f) Peso - Nota en matemáticas.

g) Estatura media de los padres - Estatura del alumno.

h) Distancia de su casa al centro de estudios - Tiempo medio que tarda en llegar.

i) Número de libros leídos al año - Número de asignaturas suspensas en la última evaluación.

a) Positiva y fuerte.

b) Habrá una correlación negativa y muy fuerte.

c) Habrá una correlación negativa (a más horas semanales de estudio, menos número de suspensos) fuerte.

d) Correlación positiva débil.

e) Negativa y débil.

f) No habrá correlación.

g) Correlación positiva y fuerte.

h) Correlación positiva y muy fuerte.

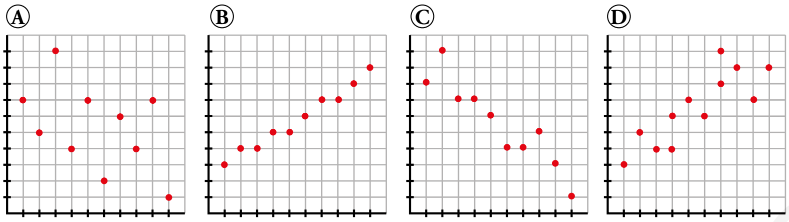
i) Correlación negativa débil.

2 El valor de la correlación

Página 222

1. Los siguientes números son los valores absolutos de los coeficientes de correlación, *r*, de las distribuciones bidimensionales representadas a continuación:

0,75 0,47 0,92 0,97



Asigna cada cual a la suya, cambiando el signo cuando convenga.

Ⓐ → –0,47

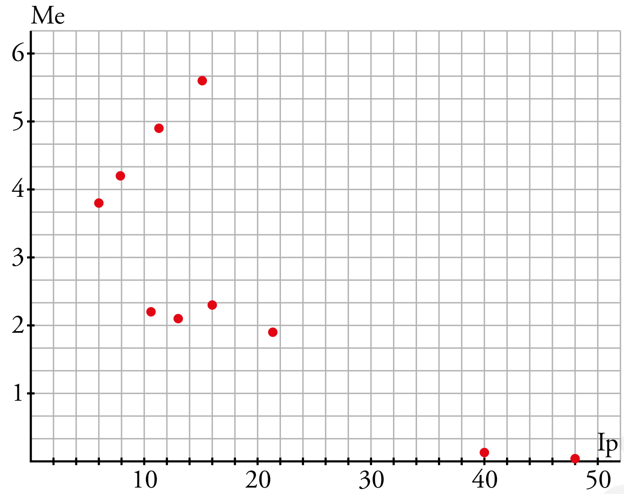
Ⓑ → 0,97

Ⓒ → –0,92

Ⓓ → 0,75

Página 223

2. **Representa la nube de puntos y la recta de regresión de la distribución bidimensional IP - Me del ejercicio resuelto anterior.**



3. **Indica cuál de estos valores se ajusta mejor al valor de la correlación de la distribución del ejercicio 2.**

0,5 –0,99 0,82 –0,77 0,99

$r = -0{,}77$

3 La recta de regresión para hacer estimaciones

Página 224

1. Estima, con los datos del ejemplo 1, el alargamiento correspondiente a una temperatura de 45 ºC. ¿Consideras fiable la estimación?

$y = 0{,}12x \rightarrow \hat{y}(45) = 5{,}4$ mm

La estimación es muy fiable.

2. Estima, con los datos del ejemplo 2, el peso de un nuevo jugador cuya estatura sea de 180 cm. ¿Consideras fiable la estimación?

Hallamos gráficamente el peso que corresponde a 180 cm: $\hat{y}(180) = 77$ kg.

La estimación no será muy fiable puesto que, aunque la correlación es relativamente alta, 180 no está en el intervalo de datos considerados.

Página 225

3. Estima, mediante la recta de regresión, la presión correspondiente a 1 000 m. ¿Es fiable la estimación?

Efectuamos la estimación con la ecuación de la recta de regresión:

$\hat{y}(1\,000) = 760 - 0{,}0824 \cdot 1\,000 = 677{,}6$ mm

Es muy fiable la estimación, ya que la correlación es muy buena y 1 000 está dentro del intervalo de valores considerados.

4. Estima la presión correspondiente a una altura de 6 000 m. Comenta cómo de fiable es esa estimación.

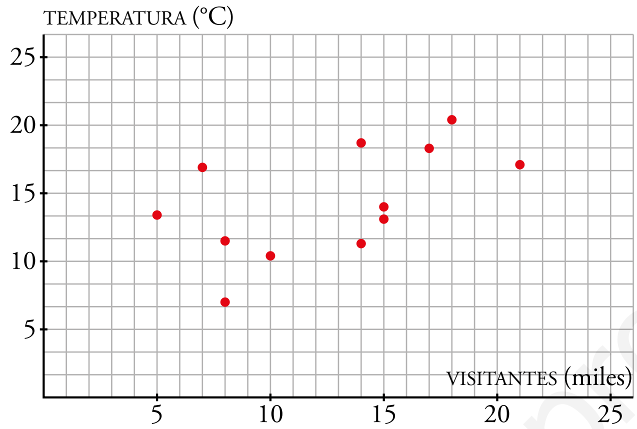
En este caso $\hat{y}(6\,000) = 760 - 0{,}0824 \cdot 6\,000 = 265{,}6$ mm y la estimación no es muy fiable porque aunque la correlación es muy buena, 6 000 está fuera del intervalo de datos disponibles.

Página 226

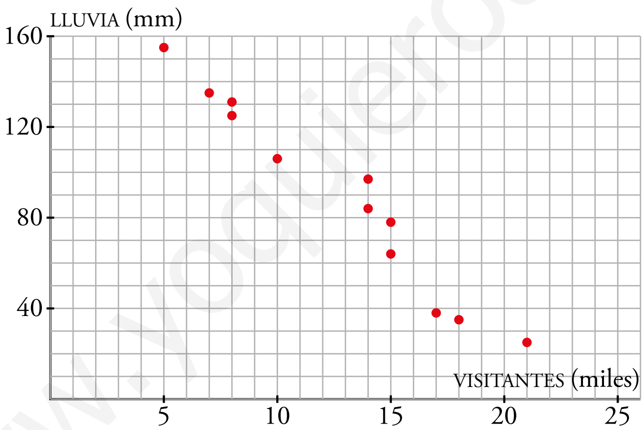
Hazlo tú. **Miles de visitantes, *V*, a las Islas Cíes (Vigo) en ese año:**

	E	F	M	A	MY	JN	JL	AG	S	O	N	D
V	8	10	14	15	15	21	18	17	14	7	5	8

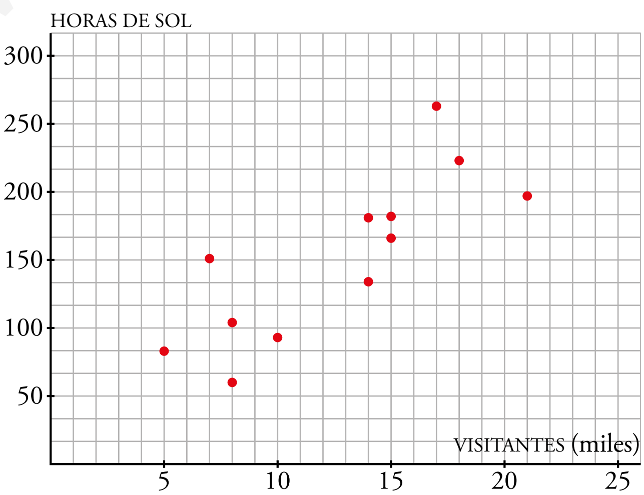
Relaciona esta variable con cada una de las anteriores mediante nubes de puntos. Indica si la correlación es más o menos fuerte en cada una.



La correlación entre los visitantes y la temperatura es positiva pero muy débil.



Entre el número de visitantes y la lluvia, la correlación es negativa y muy fuerte.



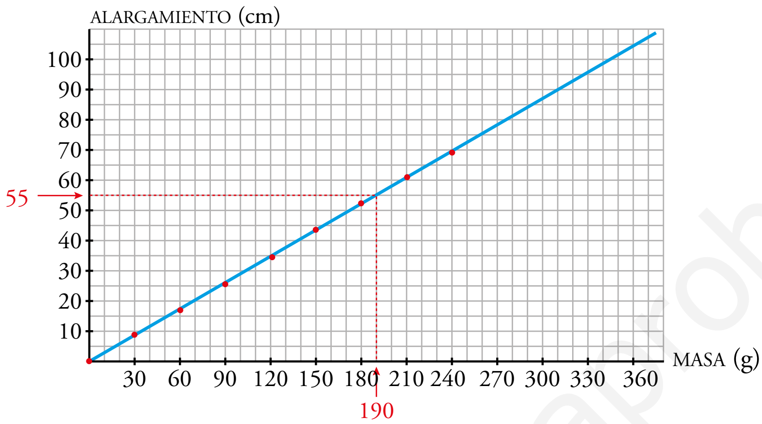
Entre la cantidad de visitantes y las horas de sol, la correlación es positiva, aunque débil.

Hazlo tú. Estima el alargamiento para masas de 190 g y 5 kg e indica la fiabilidad de ambas estimaciones.

La estimación para 190 g es un alargamiento de 55 cm.

La ecuación de la recta es $y = \frac{7}{24}x$, por tanto a una masa de 5 kg = 5 000 g le corresponde un alargamiento de $\frac{7}{24} \cdot 5\,000 = 1\,458{,}3$ cm.

La estimación será muy fiable para la masa de 190 g pero muy poco fiable para la de 5 kg puesto que este valor está muy alejado del tramo que controlamos.



Ejercicios y problemas

Página 227

Practica

1. **Para cada uno de los siguientes casos:**

— Di si se trata de una distribución bidimensional.

— Indica cuáles son las variables que se relacionan.

— Indica si se trata de una relación funcional o de una relación estadística.

a) Tamaño de la vivienda - Gasto en calefacción.

b) Número de personas que viven en una casa - Litros de agua consumidos en un mes.

c) Metros cúbicos de gas consumidos en una casa - Coste del recibo del gas.

d) Longitud de un palmo en un alumno - Número de calzado que usa.

e) Número de médicos por cada mil habitantes - Índice de mortalidad infantil.

f) Velocidad con que se lanza una pelota hacia arriba - Altura que alcanza.

a) — Es una distribución bidimensional.

— Variables que se relacionan: $\begin{cases}\text{Tamaño de la vivienda.}\\ \text{Gasto de calefacción.}\end{cases}$

— Relación estadística.

b) — Sí es una distribución bidimensional.

— Variables: $\begin{cases}\text{Número de personas que viven en una casa.}\\ \text{Litros de agua consumidos en un mes.}\end{cases}$

— Relación estadística.

c) — No es una distribución bidimensional.

— Variables: $\begin{cases}\text{Consumo de gas.}\\ \text{Coste recibo.}\end{cases}$

— Relación funcional.

d) — Sí es una distribución bidimensional.

— Variables: $\begin{cases}\text{Longitud palmo de un alumno.}\\ \text{Número de calzado que usa.}\end{cases}$

— Relación estadística.

e) — Sí es una distribución bidimensional.

— Variables: $\begin{cases}\text{Número de médicos cada 1 000 habitantes.}\\ \text{Índice mortalidad infantil.}\end{cases}$

— Relación estadística.

f) — No es una distribución bidimensional.

— Variables: $\begin{cases}\text{Velocidad.}\\ \text{Altura.}\end{cases}$

— Relación funcional.

2. **En cada uno de los apartados del ejercicio anterior, estima si la correlación será positiva o negativa, fuerte o débil.**

a) Correlación positiva fuerte.

b) Correlación positiva fuerte.

c) Correlación positiva funcional.

d) Correlación positiva fuerte.

e) Correlación negativa fuerte.

f) Correlación positiva funcional.

3. **Estos son los resultados que hemos obtenido al tallar y pesar a varias personas:**

ESTATURA (cm)	156	163	171	177	184
PESO (kg)	48	75	65	73	81

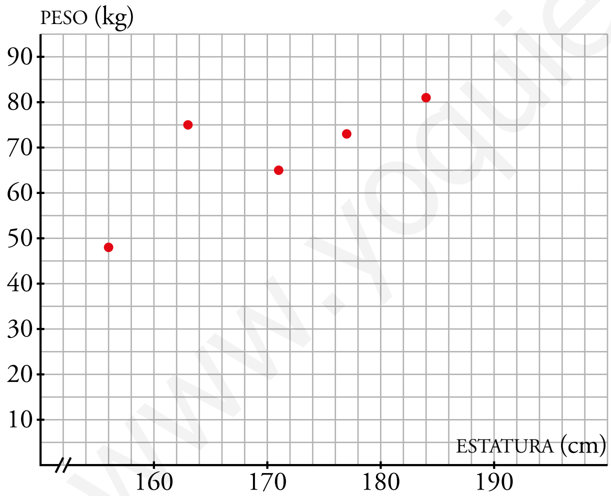
a) ¿Es una distribución bidimensional? ¿Cuáles son las variables que se relacionan? ¿Cuáles son los individuos?

b) Representa la nube de puntos.

c) ¿Es una relación estadística o funcional?

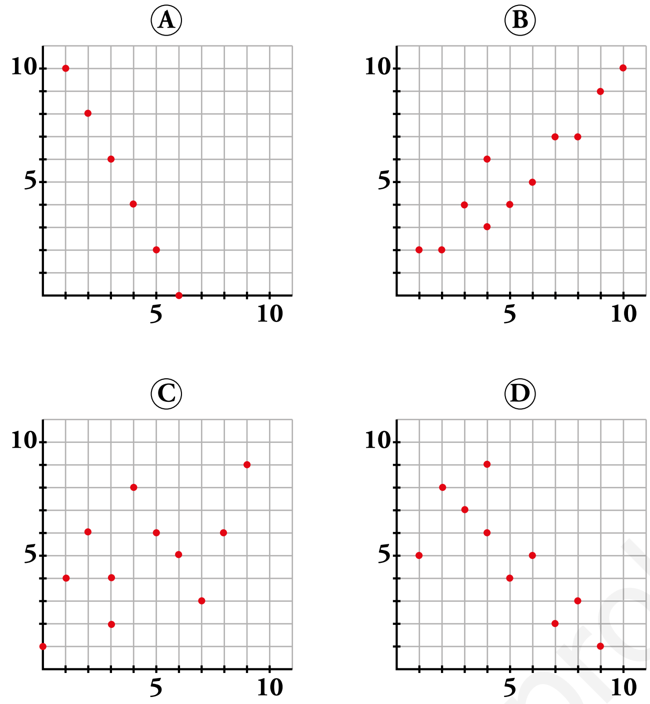
a) Sí es una distribución bidimensional ya que a cada individuo (personas que pesamos y tallamos) tiene dos valores asociados correspondientes a las dos variables que se relacionan: estatura (cm) y peso (kg).

b)



c) Es una relación estadística.

4. **a) Traza, a ojo, la recta de regresión en cada una de estas cuatro distribuciones bidimensionales:**

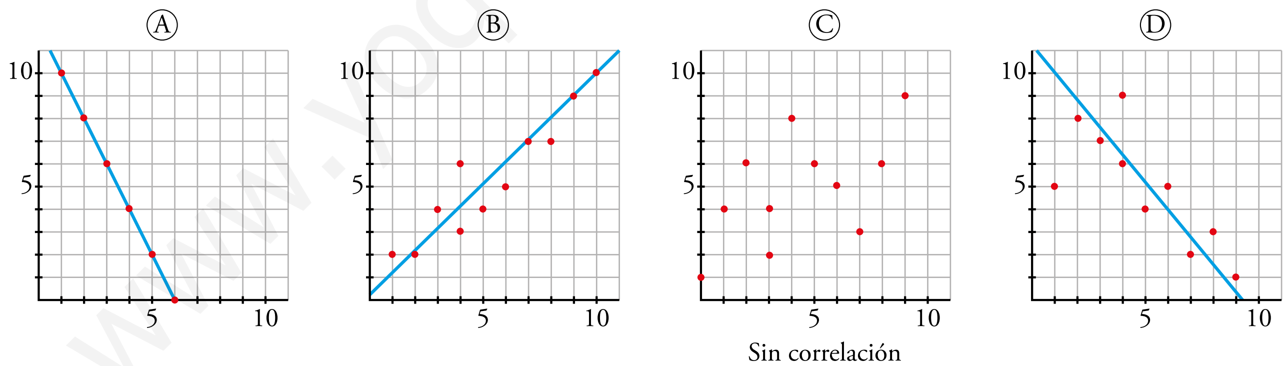


b) ¿Cuáles de ellas tienen correlación positiva y cuáles tienen correlación negativa?

c) Una de ellas presenta relación funcional. ¿Cuál es? ¿Cuál es la expresión analítica de la función que relaciona las dos variables?

d) Ordena de menor a mayor las correlaciones de las cuatro (en valor absoluto): en primer lugar, la que presenta correlación más débil, y, en último lugar, aquella cuya correlación es más fuerte.

a)



b) Ⓐ y Ⓓ tienen correlación negativa y Ⓑ correlación positiva. En el caso de Ⓒ no se aprecia correlación.

c) La Ⓐ presenta una relación funcional:

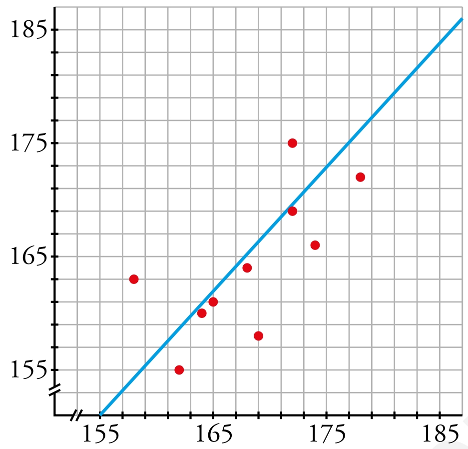
(6, 0) y (5, 2) pertenecen a la recta $\rightarrow\ m = \dfrac{2-0}{5-6} = -2 \ \rightarrow\ y = -2(x-6)$

d) Ⓒ < Ⓓ < Ⓑ < Ⓐ

5. **Las estaturas de 10 chicas (x_i) y las de sus respectivas madres (y_i) son:**

x_i	158	162	164	165	168	169	172	172	174	178
y_i	163	155	160	161	164	158	175	169	166	172

Representa los valores sobre papel cuadriculado mediante una nube de puntos, traza a ojo la recta de regresión y di si la correlación es positiva o negativa y más o menos fuerte de lo que esperabas.

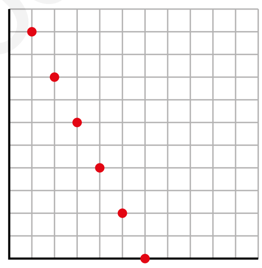


Se trata de una correlación positiva y fuerte.

6. **Representa el diagrama de dispersión correspondiente a la siguiente distribución y di cuál de estos tres valores puede ser su coeficiente de correlación:**

$r = 1$ $\qquad r = -0{,}98$ $\qquad r = -1$

x	1	2	3	4	5	6
y	10	8	6	4	2	0

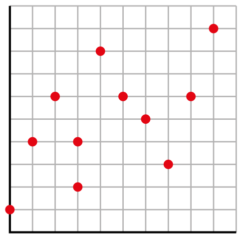


$r = -1$, la dependencia es funcional.

Página 228

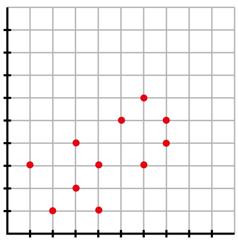
7. **Representa la nube de puntos de la siguiente distribución y estima cuál de estos tres puede ser su coeficiente de correlación: r = 0,98; r = –0,51; r = 0,57.**

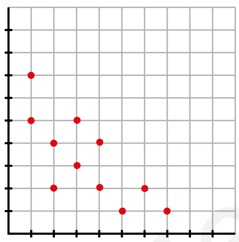
x	0	1	2	3	3	4	5	6	7	8	9
y	1	4	6	2	4	8	6	5	3	6	9

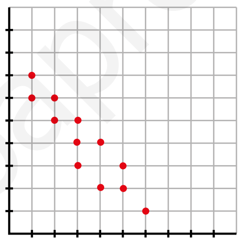


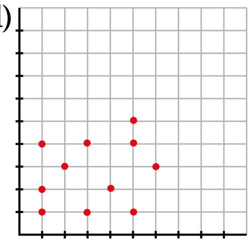
r = 0,57

8. **Los números 0,2; –0,9; –0,7 y 0,6 corresponden a los coeficientes de correlación de las siguientes distribuciones bidimensionales. Asigna a cada gráfica el suyo:**

a)


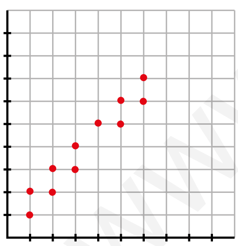
b)


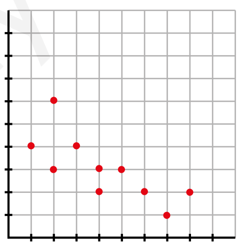
c)


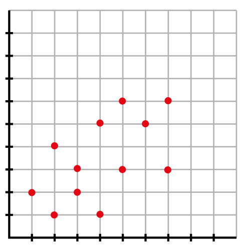
d)


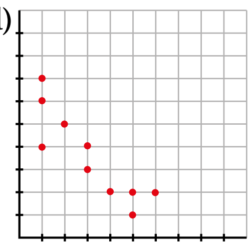
a) r = 0,6 b) r = –0,7 c) r = –0,9 d) r = 0,2

9. **Los coeficientes de correlación de estas distribuciones bidimensionales son, en valor absoluto: 0,55; 0,75; 0,87 y 0,96. Asigna a cada una el suyo, cambiando el signo cuando proceda:**

a)


b)


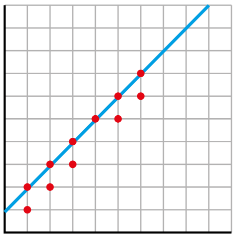
c)


d)


a) r = 0,96 b) r = –0,75 c) r = 0,55 d) r = –0,87

10. **Traza la recta de regresión de las distribuciones a) y c) del ejercicio anterior y estima, en cada una de ellas, los valores que corresponden a $x = 0$ y a $x = 10$. ¿En cuál son más fiables las estimaciones?**

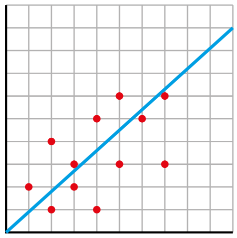
a)



$x = 0 \rightarrow 0{,}9$

$x = 10 \rightarrow 11$

c)



$x = 0 \rightarrow 0$

$x = 10 \rightarrow 9$

Serán más fiables las estimaciones de la distribución a).

Resuelve problemas

11. **Se ha hecho un estudio con ratones para ver los aumentos de peso (en g) mensuales que producen ciertas sustancias A, B y C (en mg diarios). Los datos obtenidos vienen dados en esta tabla:**

SUSTANCIA	AUMENTO DE PESO SI LA SUSTANCIA ES A	AUMENTO DE PESO SI LA SUSTANCIA ES B	AUMENTO DE PESO SI LA SUSTANCIA ES C
1	3	2	3
2	1	2	3
3	3	1	2
4	5	3	0
5	6	0	1
6	4	3	–1
7	6	4	1
8	5	1	–2
9	7	3	–4
10	7	1	–2

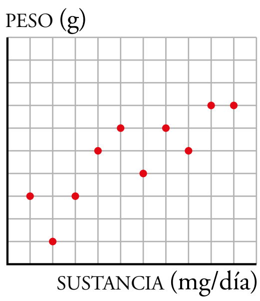
Los resultados negativos quieren decir que en lugar de aumentar, el peso disminuye.

a) Representa la nube de puntos de cada distribución.

b) Indica si la correlación es positiva o negativa en cada una de ellas.

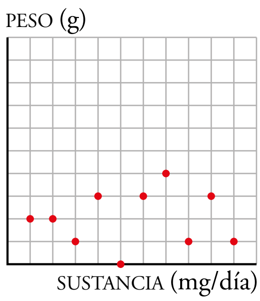
c) Ordena las correlaciones de menos a más fuerte.

a) y b) Sustancia A



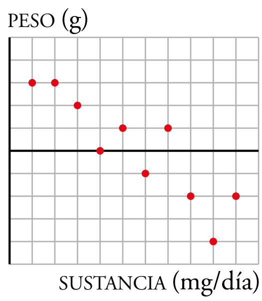
Correlación positiva.

Sustancia B



Correlación positiva.

Sustancia C



Correlación negativa.

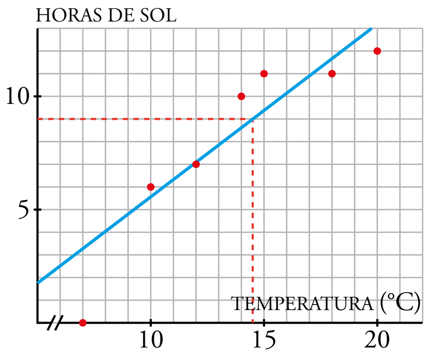
c) Sustancia B < Sustancia A < Sustancia C.

12. **Para realizar unos estudios sobre energía solar, se ha medido cada uno de los días de una semana la temperatura máxima y el número de horas de sol, obteniéndose los siguientes resultados:**

S: N.° DE HORAS DE SOL	T: TEMPERATURA (°C)
7	12
10	14
0	7
6	10
11	15
12	20
11	18

a) Traza a ojo la recta de regresión T-S.

b) Si el lunes siguiente a la medición hubo 9 horas de sol, ¿qué temperatura máxima cabe esperar que hiciera? ¿Qué fiabilidad tiene tu predicción?

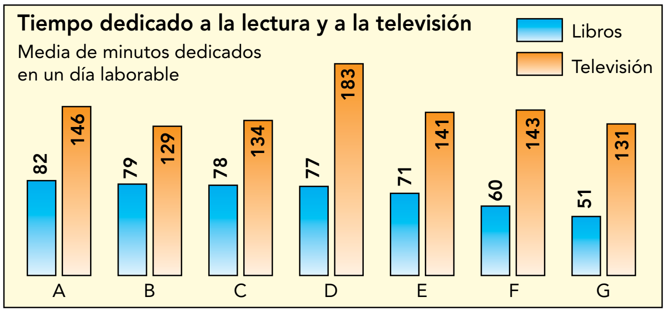
a) 

b) Cabe esperar que hiciera una temperatura máxima de 14,5 °C.

La fiabilidad es muy precisa porque la correlación es fuerte y la medición que nos piden está próxima a los valores que conocemos.

Página 229

13. **En una encuesta realizada en 7 países europeos, se obtuvieron los datos de este gráfico:**

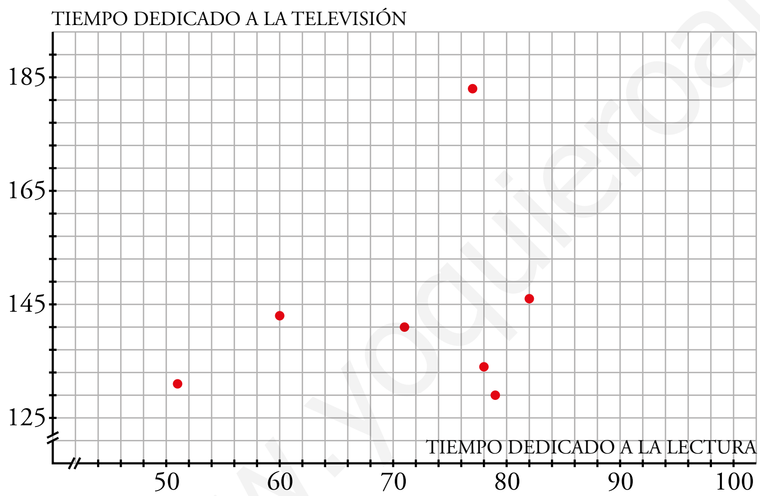


a) ¿Cómo crees que será la correlación entre los tiempos dedicados a la lectura y a la televisión?

b) Haz la nube de puntos correspondiente a estas dos variables y contrasta lo que observas en ella con tu respuesta del apartado a).

a) Esta respuesta depende de los alumnos y alumnas, que después comprobarán en el apartado b) lo acertado de su intuición.

b)



Se trata de una correlación positiva muy débil.

14. **La correlación entre las temperaturas medias mensuales de una ciudad española y el tiempo que sus habitantes dedican a ver la televisión, es de –0,89. ¿Te parece razonable este valor? Explica su significado.**

¿Será positiva o negativa la correlación entre la lluvia caída mensualmente y el consumo televisivo de sus habitantes?

Parece razonable que si las temperaturas aumentan, disminuye el tiempo que los habitantes dedican a ver la televisión, ya que parece lógico pensar que la gente pasa más tiempo en la calle.

La correlación entre la lluvia caída mensualmente y el consumo televisivo de sus habitantes será positiva porque si llueve, es lógico pensar que la gente pasará más tiempo en casa.

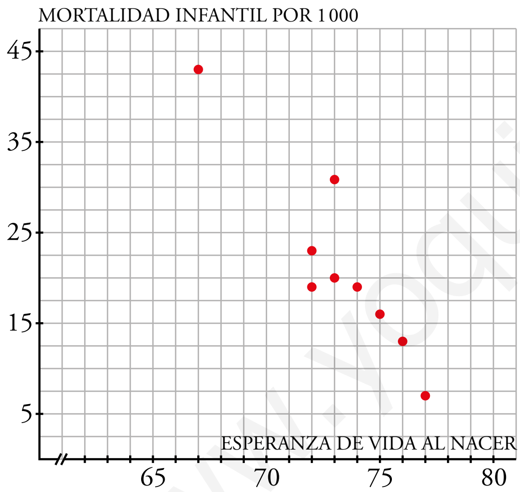
15. **Observa la siguiente tabla sobre los países sudamericanos (2015):**

	ESPERANZA DE VIDA AL NACER (en años)	MORTALIDAD INFANTIL POR 1000
ARGENTINA	76	13
BOLIVIA	67	43
BRASIL	72	23
COLOMBIA	74	19
CHILE	77	7
ECUADOR	73	20
PARAGUAY	73	31
PERÚ	72	19
URUGUAY	76	13
VENEZUELA	75	16

a) Representa la nube de puntos y di si la correlación que observas es positiva o negativa, fuerte o débil.

b) ¿Cuál de los siguientes valores será el coeficiente de correlación? –0,99; 0,5; 0,94; –0,92; 0,8

a)



La correlación es negativa y fuerte.

b) –0,92

Problemas "+"

16. **Las distancias medias de los planetas al Sol y los tiempos que tardan en dar una vuelta completa alrededor del mismo son:**

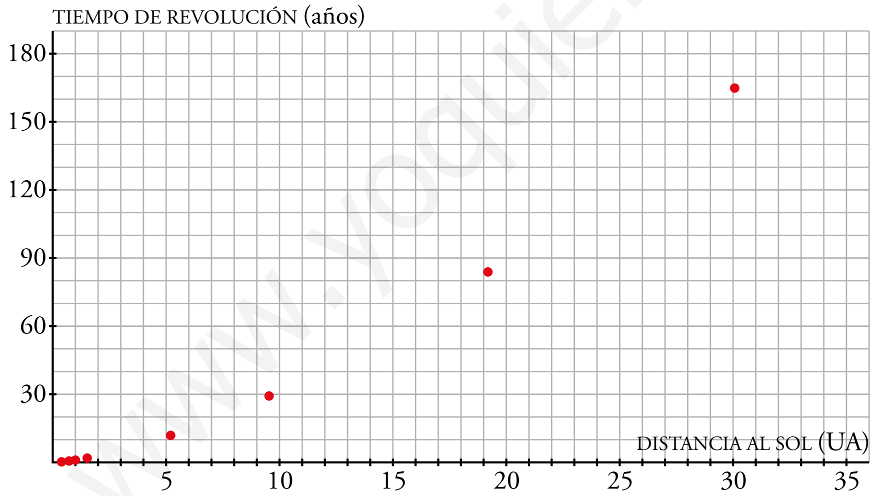
	DISTANCIA AL SOL	TIEMPO DE REVOLUCIÓN
MERCURIO	0,39	0,24
VENUS	0,72	0,61
TIERRA	1	1
MARTE	1,52	1,88
JÚPITER	5,2	11,88
SATURNO	9,54	29,48
URANO	19,19	84,1
NEPTUNO	30,07	164,93

Se han tomado como unidades:

- **La distancia entre la Tierra y el Sol: 1 UA = 150 millones de kilómetros**
- **Un año terrestre.**

a) Representa la nube de puntos y estima el coeficiente de correlación.

b) Si existiera un planeta cuya distancia al Sol fuera 3,5 UA, ¿cuál sería su tiempo de revolución? ¿Podríamos estar seguros de esta estimación?

a) 

Se trata de una correlación positiva fuerte: $r \approx 0{,}98$

b) Estaría entre 1,88 y 11,88, aproximadamente sería de unos 6,8 años. Esta estimación sería relativamente fiable.

17. **Investiga. Elabora una tabla con los cubos de las distancias (d^3) de los planetas al Sol y los cuadrados de los tiempos (t^2) y estudia la correlación entre ambos valores. ¿Es una relación funcional? (Busca en el libro de Física la tercera ley de Kepler).**

Halla el periodo de Plutón, un objeto transneptuniano (con la categoría de planeta enano) que hasta 2006 se consideraba el noveno planeta del sistema solar. Su distancia al Sol es de unas 40 UA.

	DISTANCIA AL SOL AL CUBO (d^3)	CUADRADO DEL TIEMPO DE REVOLUCIÓN (t^2)
MERCURIO	0,059	0,06
VENUS	0,37	0,37
TIERRA	1	1
MARTE	3,51	3,53
JÚPITER	140,6	141,13
SATURNO	868,25	869,07
URANO	7 066,83	7 072,81
NEPTUNO	27 189,44	27 201,9

La tercera ley de Kepler dice que "Para cualquier planeta, el cuadrado de su período orbital es directamente proporcional al cubo de la longitud del semieje mayor de su órbita elíptica".

$$\frac{t^2}{r^3} = c = \text{constante}$$

Por tanto, sí es una relación funcional. En la tabla observamos que, en efecto, el cociente es constante y prácticamente igual a 1.

$1 = \dfrac{t^2}{r^3} = \dfrac{t^2}{64\,000} \to$ El periodo de Plutón será de $t = \sqrt{64\,000} = 252{,}98$ años terrestres.

Página 230

Piensa y deduce

Encuentra explicaciones razonables a estos hechos

1. Suele decirse que la mayoría de los accidentes de automóvil se producen cerca de la casa del conductor. ¿Es más peligroso circular por nuestro barrio que a muchos kilómetros de nuestra residencia?

2. Es fácil demostrar que los niños con pies grandes leen mejor que los que tienen pies pequeños. ¿Influye el tamaño del pie en la capacidad para la lectura?

3. Se ha constatado que, en los pueblos de una cierta comarca, cuantos más nidos de cigüeña hay en sus tejados, más nacimientos de niños se producen. ¿Tienen que ver, pues, las cigüeñas con los nacimientos?

4. Un estudio demostró que en aquellos años en los que más rogativas o procesiones había para pedir lluvias, menos llovía. ¿Será que a los santos les irritan las rogativas?

Piensa en alguna más de estas relaciones absurdas. Por ejemplo, en tu centro de estudios, por lo general, los estudiantes de 1.º ESO son más bajos que los de 2.º ESO; y estos, a su vez, más bajos que los de 3.º; y estos, más bajos que los de 4.º ESO. Según ese razonamiento, ¿deberían ser más altos los que han pasado a primer curso de universidad que los que quedan en el centro? ¿Y los que acaban la universidad deberían ser más altos que los que la empiezan?

Las preguntas son de respuesta abierta. Una posible solución podría ser:

1. Los conductores se sienten más seguros en un entorno cercano y eso puede causar que bajen la guardia y tengan accidentes.
2. Los niños de los cursos superiores leen mejor que los que empiezan el colegio. Estos niños son mayores y tienen los pies más grandes.
3. Si hay más nidos, lo más probable es que haya más tejados y, por tanto, que el pueblo de la comarca sea más grande. Por tanto, habrá más nacimientos.
4. Las rogativas y procesiones para pedir lluvias tienen lugar si el año ha sido seco.

Cuanto mayor es la edad, menos diferencias hay entre el desarrollo físico de los estudiantes. Los que entran en la universidad serán más altos que los de ESO, pero los que salen de la universidad no serán más altos que los que entran.

Página 231

Entrénate resolviendo problemas

- **Durante un largo viaje en tren, dos viajeros pasan el tiempo proponiéndose acertijos. Este es uno de ellos:**

  A: Tengo tres hijos. El producto de sus edades es 36 y su suma coincide con el número del asiento que usted ocupa.

  B: (Tras cavilar un rato…). Hay dos posibles soluciones, pero, dígame, ¿los gemelos son los dos mayores?

  A: No, son los dos pequeños.

  B: Entonces ya sé la solución. (Y acertó).

  Explica cómo lo ha conseguido y el porqué de su pregunta.

Las posibilidades de un producto de tres números naturales igual a 36 son:

Números		Suma
1, 1, 36	$\longrightarrow$	38
1, 2, 18	$\longrightarrow$	21
1, 3, 12	$\longrightarrow$	16
1, 4, 9	$\longrightarrow$	14
1, 6, 6	$\longrightarrow$	13
2, 2, 9	$\longrightarrow$	13
2, 3, 6	$\longrightarrow$	11
3, 3, 4	$\longrightarrow$	10

Como el viajero B dice que tiene dos posibilidades, será porque el número de su asiento es el 13. Por eso le pregunta por los gemelos, como son los dos pequeños la solución 2, 2 y 9 años.

- **El Sr. Pardo, el Sr. Verde y el Sr. Negro estaban almorzando juntos.**

  Uno de ellos llevaba una corbata parda; otro, una corbata verde, y otro, una corbata negra.

  —¿Se han dado cuenta —dijo el hombre de la corbata verde— de que aunque nuestras corbatas son de colores iguales a nuestros nombres, ninguno de nosotros lleva una corbata que corresponda a su nombre?

  —¡Tiene razón! —exclamó el Sr. Pardo.

  ¿De qué color era la corbata de cada uno?

El Sr. Pardo no tiene la corbata verde puesto que contesta al que la tiene. Por tanto:

APELLIDO / COLOR CORBATA	PARDO	VERDE	NEGRO
VERDE	NO	NO	×
PARDA	NO	×	NO
NEGRA	×	NO	NO

Por tanto, la única posibilidad es que la corbata del Sr. Pardo sea negra, la del Sr. Verde sea parda y la del Sr. Negro sea verde.

Autoevaluación

1. **De las siguientes distribuciones bidimensionales, di en qué casos la correlación es positiva, en cuáles es negativa y en cuáles no ves correlación:**

a) Altura de una persona - Tamaño de su perro.

b) Distancia de un viaje de avión - Precio del billete.

c) Latitud de un lugar del hemisferio norte - Temperaturas medias anuales.

d) Altura - Presión atmosférica.

e) Profundidad del mar - Presión del agua.

a) No hay correlación.

b) Correlación positiva.

c) Correlación negativa.

d) Correlación negativa.

e) Correlación positiva.

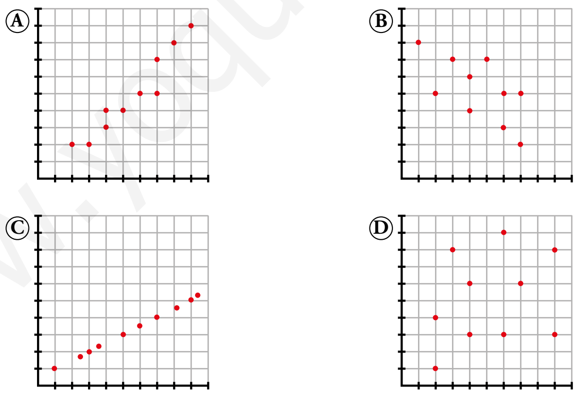
2. **Asocia a cada una de las distribuciones bidimensionales del ejercicio anterior una de estas correlaciones:**

$r = -1 \qquad r = 0{,}83 \qquad r = -0{,}92 \qquad r = 0{,}23 \qquad r = 1$

a) 0,23 b) 0,83 c) –0,92 d) –1 e) 1

3. **Asocia cada nube de puntos con una de las siguientes correlaciones:**

$r = 1 \qquad r = -0{,}83 \qquad r = 0{,}97 \qquad r = 0{,}18$



a) 0,97 b) –0,83 c) 1 d) 0,18

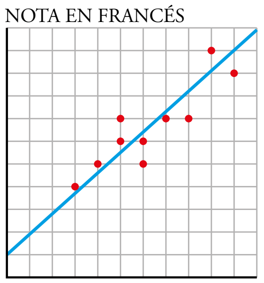
4. **Se han anotado a final de curso las notas de inglés y de francés de 10 estudiantes de ESO. Estos son los resultados:**

NOTA EN INGLÉS	NOTA EN FRANCÉS
6	6
3	4
5	6
6	5
5	7
8	7
10	9
4	5
9	10
7	7

a) Representa los datos en una nube de puntos. Traza a ojo su correspondiente recta de regresión.

b) Indica cuál de estos coeficientes de correlación le corresponde:

$r = 0{,}99$ $\quad r = -0{,}86$ $\quad r = 0{,}88$ $\quad r = 0{,}63$

a)


b) $r = 0{,}88$

5. **Sabiendo que la recta de regresión correspondiente a las notas en inglés y francés de la actividad anterior tiene como ecuación $y = 1 + 0{,}85x$:**

a) Estima qué nota obtendrán en francés 3 nuevos estudiantes cuyas notas en inglés fueron 1; 6,5 y 9,5.

b) ¿Consideras fiables estas estimaciones? Explica por qué.

a) $\hat{y}(1) = 1 + 0{,}85 \cdot 1 = 1{,}85$

$\hat{y}(6{,}5) = 1 + 0{,}85 \cdot 6{,}5 = 6{,}525$

$\hat{y}(9{,}5) = 1 + 0{,}85 \cdot 9{,}5 = 9{,}075$

b) Podemos considerar más fiables las estimaciones de las notas 6,5 y 9,5 puesto que los datos que tenemos están cerca de estos dos, sin embargo, están muy alejados del 1 y por tanto sería la estimación menos fiable.

Por otro lado como la correlación es alta, en general, serán resultados muy fiables.

Autoevaluación

1. De las siguientes distribuciones bidimensionales, di en qué casos la correlación es positiva, en cuáles es negativa y en cuáles no ves correlación:

a) Altura de una persona - Tamaño de su perro.

b) Distancia de un viaje de avión - Precio del billete.

c) Latitud de un lugar del hemisferio norte - Temperaturas medias anuales.

d) Altura - Presión atmosférica.

e) Profundidad del mar - Presión del agua.

a) No hay correlación.

b) Correlación positiva.

c) Correlación negativa.

d) Correlación negativa.

e) Correlación positiva.

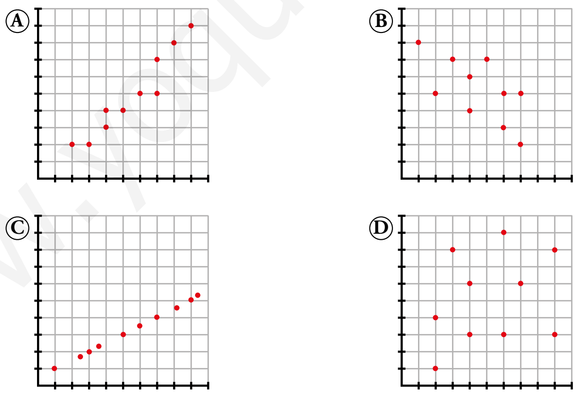
2. Asocia a cada una de las distribuciones bidimensionales del ejercicio anterior una de estas correlaciones:

$r = -1$ $\quad r = 0{,}83$ $\quad r = -0{,}92$ $\quad r = 0{,}23$ $\quad r = 1$

a) 0,23 b) 0,83 c) –0,92 d) –1 e) 1

3. Asocia cada nube de puntos con una de las siguientes correlaciones:

$r = 1$ $\quad r = -0{,}83$ $\quad r = 0{,}97$ $\quad r = 0{,}18$



a) 0,97 b) –0,83 c) 1 d) 0,18

4. **Se han anotado a final de curso las notas de inglés y de francés de 10 estudiantes de ESO. Estos son los resultados:**

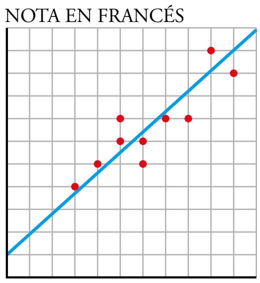
NOTA EN INGLÉS	NOTA EN FRANCÉS
6	6
3	4
5	6
6	5
5	7
8	7
10	9
4	5
9	10
7	7

a) Representa los datos en una nube de puntos. Traza a ojo su correspondiente recta de regresión.

b) Indica cuál de estos coeficientes de correlación le corresponde:

$r = 0{,}99$ $\quad r = –0{,}86$ $\quad r = 0{,}88$ $\quad r = 0{,}63$

a)



b) $r = 0{,}88$

5. **Sabiendo que la recta de regresión correspondiente a las notas en inglés y francés de la actividad anterior tiene como ecuación $y = 1 + 0{,}85x$:**

a) Estima qué nota obtendrán en francés 3 nuevos estudiantes cuyas notas en inglés fueron 1; 6,5 y 9,5.

b) ¿Consideras fiables estas estimaciones? Explica por qué.

a) $\hat{y}\,(1) = 1 + 0{,}85 \cdot 1 = 1{,}85$

$\hat{y}\,(6{,}5) = 1 + 0{,}85 \cdot 6{,}5 = 6{,}525$

$\hat{y}\,(9{,}5) = 1 + 0{,}85 \cdot 9{,}5 = 9{,}075$

b) Podemos considerar más fiables las estimaciones de las notas 6,5 y 9,5 puesto que los datos que tenemos están cerca de estos dos, sin embargo, están muy alejados del 1 y por tanto sería la estimación menos fiable.

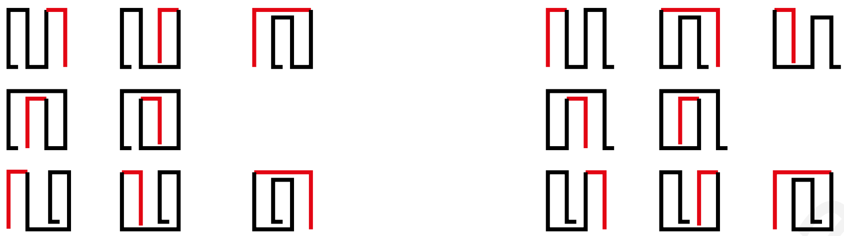
Por otro lado como la correlación es alta, en general, serán resultados muy fiables.

Página 233

Resuelve

1. Construye el árbol completo para llegar a todos los posibles plegados de cuatro sellos.

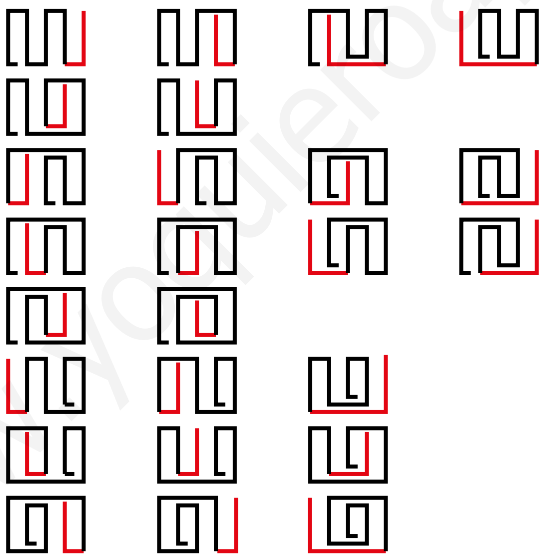
Partiendo de tres sellos, hacemos los dobleces para cuatro sellos:



Hay 16 formas de plegar cuatro sellos sin doblar ninguno.

2. Prolonga el árbol anterior para ver los posibles plegados de cinco sellos.

Para plegar cinco sellos partimos de cada una de las posibilidades de plegar cuatro sellos del grupo de la izquierda del ejercicio anterior:



Con las otras ocho posibilidades salen los mismos casos, es decir, otros 25 casos.

Hay 25 + 25 = 50 formas de plegar cinco sellos sin doblar ninguno.

1 Estrategias basadas en el producto

Página 234

1. Resuelve, razonadamente, los enunciados 2, 3, 4 y 5 anteriores.

2. ***Hay conversaciones bilaterales entre la UE y Japón. Los europeos acuden con 8 representantes, y los japoneses, con 11. Al encontrarse, cada miembro de una delegación saluda, estrechando la mano, a cada miembro de la otra. ¿Cuántos apretones de manos se dan?***

3. ***Vamos a merendar a un bar. Nos ofrecen 5 tipos de bocadillos y 8 tipos de bebidas. ¿Cuántos menús podemos confeccionar?***

4. ***¿Cuántos resultados distintos podemos obtener al lanzar un dado de color rojo y otro de color verde?***

5. ***Lanzamos un dado y extraemos una carta de una baraja de 40 cartas. ¿Cuántos resultados distintos podemos obtener?***

2. Cada representante europeo da la mano a cada uno de los once japoneses. Como hay 8 representantes europeos, en total hay $8 \cdot 11 = 88$ apretones de mano.

3. Con cada bocadillo podemos tomar 8 bebidas. Como hay 5 tipos de bocadillos, en total hay $8 \cdot 5 = 40$ menús distintos.

4. Con cada resultado del dado rojo hay 6 resultados del dado verde. Como hay 6 resultados del dado rojo, en total hay $6 \cdot 6 = 36$ resultados distintos.

5. Con cada resultado del dado hay 40 cartas de la baraja. Como hay 6 resultados del dado, en total existen $6 \cdot 40 = 240$ posibles resultados.

Página 235

2. Resuelve, razonadamente, los enunciados 2b, 3b, 4b y 5b.

2b. ***Los japoneses y los europeos se saludan, estrechándose la mano, no solamente al conocerse, sino cada día al juntarse y al separarse (¡qué pesados!). Las conversaciones duran 3 días. ¿Cuántos apretones de manos se darán?***

3b. ***En el bar donde fuimos a merendar, además de bocadillos y bebidas, decidimos pedir postre. Los hay de 4 tipos distintos. ¿Cuántos menús distintos salen ahora?***

4b. ***¿Cuántos resultados distintos podemos obtener al lanzar un dado rojo, uno verde y uno azul?***

5b. ***¿Cuántos resultados distintos podemos obtener al lanzar un dado, extraer una carta de una baraja de 40 cartas y lanzar una moneda?***

2b. Cada día se dan 2 apretones de manos durante los tres días. Por lo tanto, cada pareja se saluda $2 \cdot 3 = 6$ veces. En total se dan $88 \cdot 6 = 528$ apretones de manos.

3b. Hay cuatro postres para cada menú. Entonces hay $40 \cdot 4 = 160$ menús distintos ahora.

4b. Lanzando dos dados obtenemos $6 \cdot 6 = 36$ resultados.

Lanzando tres dados obtenemos $36 \cdot 6 = 216$ resultados distintos.

5b. Extrayendo una carta y lanzando un dado, conseguimos 240 resultados distintos. Para cada resultado hay dos posibilidades al lanzar una moneda, luego hay $240 \cdot 2 = 480$ resultados distintos.

Página 237

3. Alberto, Beatriz y Claudia van a ver a su abuelo. Al irse, este les dice: "Escoged cada uno el libro que queráis de estos", y les muestra 10 libros distintos. ¿De cuántas formas pueden hacer su elección?

El primer nieto: elegirá 1 libro de entre 10 libros distintos.

El segundo nieto: por cada una de las 10 posibilidades que ha tenido el primer nieto tiene 9 posibilidades: $10 \cdot 9 = 90$ posibilidades.

El tercer nieto: por cada una de las 90 posibilidades que hay al haber elegido ya el segundo nieto tiene 8 posibilidades.

En total tienen $90 \cdot 8 = 720$ formas de hacer la elección.

Página 238

4. **Luis, Carlos, Gonzalo, Paco y Jorge han quedado en encontrarse en la puerta del cine con sus amigas, Carmen, Elena, Marta y Cristina. Al encontrarse, se saludan como es habitual: dos besos en la mejilla entre un chico y una chica.**

¿Cuántos besos se dan entre todos?

Cada chico da dos besos a cada chica. Cada chico da $2 \cdot 4 = 8$ besos.

Como hay 5 chicos, en total dan $5 \cdot 8 = 40$ besos.

5. **¿Cuántos partidos de Primera División se juegan en una temporada de la Liga española de fútbol? (Son 20 equipos que juegan todos contra todos dos veces).**

Cada equipo juega 19 partidos de ida y 19 partidos de vuelta. En total juegan 38 partidos.

Como hay 20 equipos, se jugarán $20 \cdot 38$ partidos. Pero estamos contando dos veces cada partido, por lo tanto se jugarán $10 \cdot 38 = 380$ partidos de fútbol.

6. **¿Cuántos resultados posibles se pueden obtener al lanzar un dado y dos monedas distintas?**

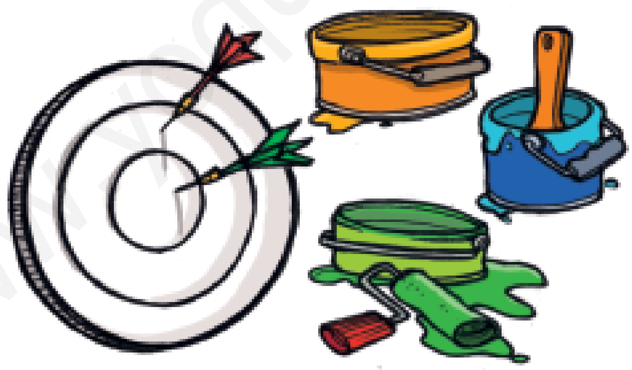
Al lanzar dos monedas tenemos 4 posibles resultados:

CC CX XC XX

Por cada una de estas 4 posibilidades, hay 6 resultados al lanzar un dado.

En total hay $6 \cdot 4 = 24$ posibles resultados.

7. **Quiero pintar una diana como la de la figura, con tres colores distintos, para jugar a los dardos.**



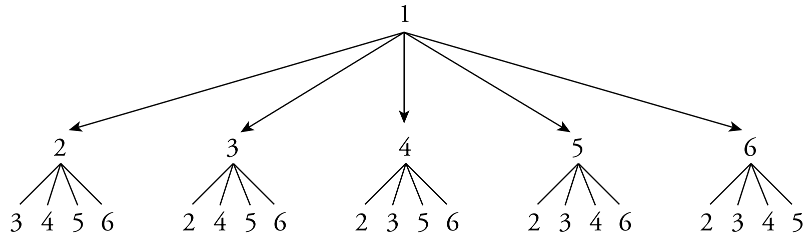
¿De cuántas formas la puedo pintar si tengo pintura de colores azul, verde y naranja?

¿Y si tuviera 6 colores?

COLOR EXTERNO	COLOR INTERMEDIO	COLOR INTERNO
A	V	N
	N	V
V	A	N
	N	A
N	A	V
	V	A

Hay 6 posibilidades con tres colores.

Si hay 6 colores (enumeramos los colores del 1 al 6):



$5 \cdot 4 = 20$ posibilidades con el color 1 en primer lugar. Si hacemos este árbol para los otros cinco colores, obtendremos: $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$ posibilidades.

Hay 120 formas de pintar la diana.

8. **En el pub "El Sabrosón" son especialistas en combinados de zumos y en café. Tienen 5 tipos de zumos de frutas y 3 tipos de cafés.**

¿Cuántas combinaciones distintas se pueden hacer eligiendo un zumo y una taza de café?

Si, además, se añade a cada combinación un bombón de chocolate blanco o negro, ¿cuántas se podrán preparar de esta forma?

Por cada zumo se pueden hacer tres combinaciones con café.

En total habrá $5 \cdot 3 = 15$ combinaciones de zumo y café.

A cada una de estas 15 combinaciones se le puede añadir un bombón a elegir entre dos tipos. Luego ahora habrá $15 \cdot 2 = 30$ combinaciones distintas.

9. **La Asociación de Libreros va a entregar los premios "Pluma de Oro" y "Pluma de Plata". Para ello, ha seleccionado 10 libros entre los publicados este año. ¿De cuántas formas pueden repartirse los dos premios entre esos libros?**

Por cada libro que reciba "Pluma de Oro" hay 9 posibilidades de otorgar a otro libro distinto de este la "Pluma de Plata".

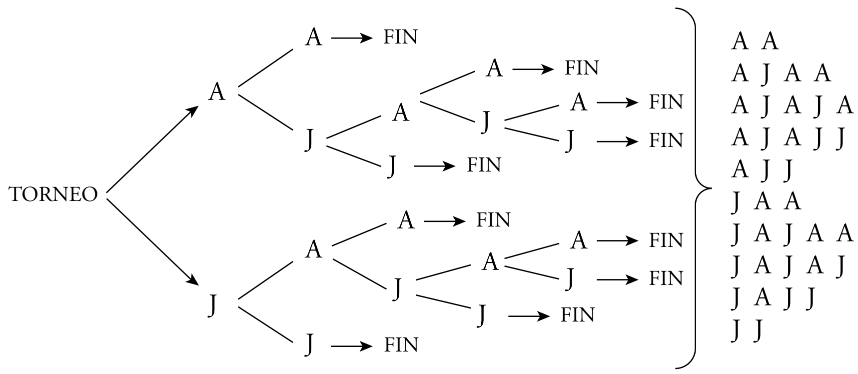
Como hay 10 posibilidades para otorgar la "Pluma de Oro", en total habrá:

$10 \cdot 9 = 90$ formas distintas de repartirse los dos premios entre los 10 libros.

10. **Álvaro y Javier juegan un torneo de billar que ganará el que consiga dos partidas seguidas o tres alternas.**

¿Cuáles son los posibles desarrollos del torneo?

Hacemos el diagrama en árbol. En cada ramificación indicamos quién gana una partida [Álvaro (A) o Javier (J)]:



Hay 10 posibles desarrollos del torneo.

2 Variaciones y permutaciones (importa el orden)

Página 239

Resuelve cada enunciado de dos formas:

a) Realizando un diagrama en árbol o razonando como si lo realizaras.

b) Reconociendo el modelo de variaciones con repetición y aplicando la fórmula.

1. ¿Cuántos números de 4 cifras se pueden formar con las cifras impares?

a) Para cada cifra del número hay 5 posibilidades, las cinco cifras impares. Fijada la primera cifra, hay 5 posibles resultados para la segunda; fijadas las dos primeras, hay 5 resultados para la tercera, y así sucesivamente.

En total habrá $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 625$ posibles números de cuatro cifras.

b) Disponemos de 5 cifras impares (1, 3, 5, 7, 9). Podemos repetirlos y el orden influye.

Son $VR_{5,\,4} = 5^4 = 625$ números de cuatro cifras.

2. Lanzamos un dado 4 veces. Importa el orden en que salen los números.

¿Cuántos resultados distintos pueden darse?

a) Hay 6 posibilidades en cada tirada, lo que significa que, fijado el primer lanzamiento, hay 6 posibilidades para el segundo, y así sucesivamente.

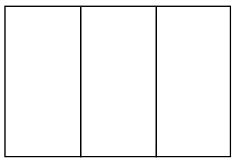
En total habrá $6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 1\,296$ resultados.

b) Hay 6 posibilidades en cada tirada. Puede repetirse el resultado e influye el orden. Hemos de hacer grupos de 4.

Son $VR_{6,\,4} = 6^4 = 1\,296$ resultados.

3. Disponemos de 7 colores con los que hemos de pintar las tres franjas adjuntas.

¿Cuántas banderas salen?



NOTAS:

1. Cada franja de la bandera hay que llenarla con un solo color.

2. Dos o las tres franjas se pueden pintar del mismo color.

3. Dos banderas con los mismos colores colocados en distinto orden son distintas.

a) Para cada franja disponemos de 7 colores, es decir, fijado el color de la primera franja, hay 7 colores para la segunda y otros 7 para la tercera.

En total habrá $7 \cdot 7 \cdot 7 = 343$ banderas.

b) Tenemos 7 elementos (los 7 colores) y hacemos grupos de tres elementos.

Influye el orden y podemos repetirlos, luego son $VR_{7,\,3}$.

Salen: $VR_{7,\,3} = 7^3 = 343$ banderas.

Página 240

4. Enuncia un problema similar al de las banderas de la página anterior que se resuelva mediante variaciones ordinarias y resuélvelo razonadamente (diagrama en árbol) y aplicando la fórmula.

Disponemos de 7 colores y hemos de hacer banderas con tres franjas. ¿Cuántas banderas salen si no podemos repetir colores?

Enumerando los colores del 1 al 7:

$$1 \begin{cases} 2 \longrightarrow 5 \text{ colores distintos} \\ 3 \longrightarrow 5 \text{ colores distintos} \\ 4 \longrightarrow 5 \text{ colores distintos} \\ 5 \longrightarrow 5 \text{ colores distintos} \\ 6 \longrightarrow 5 \text{ colores distintos} \\ 7 \longrightarrow 5 \text{ colores distintos} \end{cases}$$

Empezando por el 1 han salido $6 \cdot 5 = 30$ posibilidades distintas.

Como hay seis más, tendremos $7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$ posibles banderas.

Otra forma de resolverlo es por variaciones ordinarias:

Disponemos de 7 colores y tres franjas para pintar, pero no podemos repetir colores.

Con la fórmula: $V_{7,\,3} = 7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$ banderas distintas.

5. En los ejercicios 4 al 10 del apartado anterior, identifica cuáles responden al modelo de variaciones con repetición, de variaciones ordinarias o de permutaciones, y resuélvelos mediante las fórmulas.

4. No responde a ningún modelo.

5. Son 20 equipos y juegan de dos en dos, importando el orden. No pueden repetirse los equipos en cada partido: $V_{20,\,2} = 20 \cdot 19 = 380$ partidos.

6. No responde a ningún modelo.

7. Hay 3 colores y hacemos elecciones de 3 colores distintos: $P_3 = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ formas distintas.

   Si tuviera 6 colores, haría elecciones de 3 colores distintos: $V_{6,\,3} = 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$ formas de pintar la diana.

8. No responde a ningún modelo.

9. Hay 10 libros y se eligen de dos en dos para dar los premios: $V_{10,\,2} = 10 \cdot 9 = 90$ formas distintas.

10. No responde a ningún modelo.

3 Cuando no influye el orden. Combinaciones

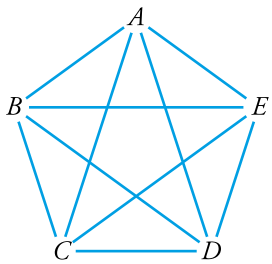
Página 241

1. En un monte hay 5 puestos de vigilancia contra incendios y cada uno de ellos está unido a los demás por un camino. ¿Cuántos caminos habrá en total?

Si hay 5 puestos, de cada uno de ellos saldrán 4 caminos.

Luego habría 5 · 4 = 20 caminos, pero están contados dos veces (el camino A $\rightarrow$ B es el mismo que el camino B $\rightarrow$ A). Por tanto, el total de caminos será:

$$\frac{5 \cdot 4}{2} = \frac{20}{2} = 10 \text{ caminos}$$



2. Vicente quiere regalar a su amigo Carlos 3 discos, y los quiere elegir entre los 10 que más le gustan. ¿De cuántas formas puede hacerlo?

Si influyera el orden en que él regala los tres discos, sería $V_{10,\ 3} = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$ formas. Como no influye el orden y hay $3 \cdot 2 = 6$ formas distintas de ordenar tres discos, tiene $\frac{720}{3 \cdot 2} = 120$ formas de regalarle los tres discos.

Página 242

3. **Tenemos 6 puntos en el espacio de tal modo que no hay tres alineados ni cuatro sobre el mismo plano. ¿Cuántas rectas podemos trazar uniendo dos de estos puntos? ¿Cuántos planos que se apoyen en tres de ellos?**

Para trazar una recta se necesitan dos puntos:

NÚMERO DE RECTAS: $C_{6,\,2} = \dfrac{6 \cdot 5}{2 \cdot 1} = 15$ rectas.

Para definir un plano se necesitan tres puntos no alineados:

NÚMERO DE PLANOS: $C_{6,\,3} = \dfrac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 20$ planos.

4. **¿Cuántas posibles mezclas de dos colores, en idénticas cantidades, se pueden hacer con 8 tarros de pintura de distintos colores?**

¿Cuántas mezclas de tres colores? ¿Y de cuatro colores?

No importa el orden en que se mezclen los colores:

DOS COLORES: $C_{8,\,2} = \dfrac{8 \cdot 7}{2} = 28$ mezclas.

TRES COLORES: $C_{8,\,3} = \dfrac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 56$ mezclas.

CUATRO COLORES: $C_{8,\,4} = \dfrac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 70$ mezclas.

Página 243

5. Construye tú las filas 6.ª y 7.ª del triángulo de Tartaglia.

Fila 6 $\rightarrow$ $\binom{6}{0}\ \binom{6}{1}\ \binom{6}{2}\ \binom{6}{3}\ \binom{6}{4}\ \binom{6}{5}\ \binom{6}{6}$

1 6 15 20 15 6 1

Fila 7 $\rightarrow$ $\binom{7}{0}\ \binom{7}{1}\ \binom{7}{2}\ \binom{7}{3}\ \binom{7}{4}\ \binom{7}{5}\ \binom{7}{6}\ \binom{7}{7}$

1 7 21 35 35 21 7 1

6. Construye la fila 10.ª del triángulo de Tartaglia sin basarte en la anterior.

La fila 10.ª estará formada por los siguientes números combinatorios:

$$\binom{10}{0}\ \binom{10}{1}\ \binom{10}{2}\ \binom{10}{3}\ \binom{10}{4}\ \binom{10}{5}\ \binom{10}{6}\ \binom{10}{7}\ \binom{10}{8}\ \binom{10}{9}\ \binom{10}{10}$$

Sabemos, por las propiedades de los números combinatorios, que:

$\binom{10}{0} = \binom{10}{10} = 1$ $\qquad$ $\binom{10}{1} = \binom{10}{9} = 10$

$\binom{10}{2} = \binom{10}{8}$ $\qquad$ $\binom{10}{3} = \binom{10}{7}$ $\qquad$ $\binom{10}{4} = \binom{10}{6}$

Así, calculamos únicamente:

$$\binom{10}{2} = \frac{10!}{2!\cdot(10-2)!} = \frac{10!}{2\cdot 8!} = \frac{10\cdot 9}{2} = 45$$

$$\binom{10}{3} = \frac{10!}{3!\cdot(10-3)!} = \frac{10!}{3\cdot 2\cdot 7!} = \frac{10\cdot 9\cdot 8}{3\cdot 2} = 120$$

$$\binom{10}{4} = \frac{10!}{4!\cdot(10-4)!} = \frac{10!}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 6!} = \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{4\cdot 3\cdot 2} = 210$$

$$\binom{10}{5} = \frac{10!}{5!\cdot(10-5)!} = \frac{10!}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 5!} = \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2} = 252$$

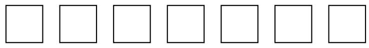
La décima fila será:

1, 10, 45, 120, 210, 252, 210, 120, 45, 10, 1

Página 244

Hazlo tú 1. ¿Cuántos números de 7 cifras se pueden formar con 5555333? ¿Cuánto suman todos ellos?

Para formar un número de 7 cifras, disponemos de 7 lugares:



Decidimos dónde colocamos, por ejemplo, los "cincos".

El número de formas diferentes de colocar los "cincos" será:

$$C_{7,\,4} = \frac{7!}{4!\cdot(7-4)!} = \frac{7!}{4!\cdot 3!} = \frac{7\cdot 6\cdot 5}{3\cdot 2} = 35$$

Luego tendremos 35 números diferentes formados por cuatro "cincos" y tres "treses".

5	5	5	5	3	3	3
5	5	5	3	5	3	3
5	5	5	3	3	5	3
…	…	…	…	…	…	…
3	3	3	5	5	5	5

En cada una de las 7 columnas hay 35 dígitos, "cincos" y "treses".

Cuatro séptimas partes serán "cincos" y tres séptimas partes serán "treses". Por tanto, la suma de cada columna será:

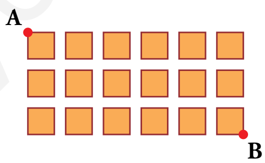
$$\frac{4}{7} \text{ de } 35\cdot 5 + \frac{3}{7} \text{ de } 35\cdot 3 = 100 + 45 = 145$$

Hacemos la suma total teniendo en cuenta el valor posicional de los dígitos de cada columna:

$$145\cdot 1\,000\,000 + 145\cdot 100\,000 + 145\cdot 10\,000 + 145\cdot 1\,000 + 145\cdot 100 + 145\cdot 10 + 145\cdot 1 =$$

$$= 145\cdot 1\,111\,111 = 161\,111\,095$$

Hazlo tú 2. Haz lo mismo que en el ejercicio anterior.



Hazlo paso a paso (número de caminos que nos llevan a cada esquina) y por combinatoria.

De manera análoga al ejercicio resuelto obtendremos:

$$C_{9,\,3} = \frac{9\cdot 8\cdot 7}{3\cdot 2\cdot 1} = 84 = C_{9,\,6}$$

Solución: Tendremos 84 caminos diferentes.

Ejercicios y problemas

Página 245

Practica

Formar agrupaciones

1. **a) En una urna hay una bola blanca, una roja y una negra. Las extraemos de una en una y anotamos ordenadamente los resultados. Escribe todos los posibles resultados que podemos obtener.**

b) Haz lo mismo para cuatro bolas distintas.

c) Lo mismo para ROJA, ROJA, BLANCA, NEGRA.

d) Lo mismo para ROJA, ROJA, NEGRA, NEGRA.

a)

1.ª EXTRAC.	2.ª EXTRAC.	3.ª EXTRAC.	RESULTADO
B	R	N	BRN
	N	R	BNR
R	B	N	RBN
	N	B	RNB
N	B	R	NBR
	R	B	NRB

Tenemos 6 posibles resultados.

b) Añadimos, por ejemplo, una bola azul (A).

B	R	N	A	BRNA
		A	N	BRAN
	N	R	A	BNRA
		A	R	BNAR
	A	R	N	BARN
		N	R	BANR

Hacemos lo mismo empezando con R, con N y con A.

Al final tenemos 6 · 4 = 24 resultados posibles.

c)

R	R	B	N	RRBN
		N	B	RRNB
	B	R	N	RBRN
		N	R	RBNR
	N	R	B	RNRB
		B	R	RNBR

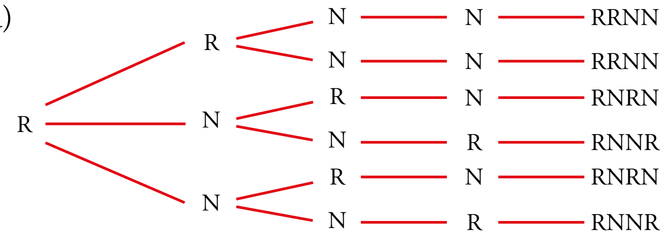
R	R	B	N	RRBN
		N	B	RRNB
	B	R	N	RBRN
		N	R	RBNR
	N	R	B	RNRB
		B	R	RNBR

B	R	R	N	BRRN
		N	R	BRNR
	R	R	N	BRRN
		N	R	BRNR
	N	R	R	BNRR
		R	R	BNRR

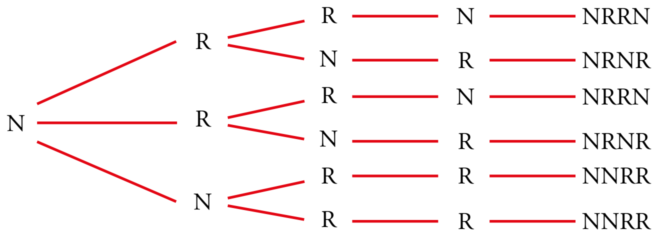
N	R	B	B	NRRB
		B	R	NRBR
	R	R	B	NRRB
		B	R	NRBR
	B	R	R	NBRR
		R	R	NBRR

Como hay dos bolas del mismo color, ahora tenemos menos resultados que en el apartado b). En concreto: 6 + 3 + 3 = 12 resultados.

d)



Para la segunda roja, igual.

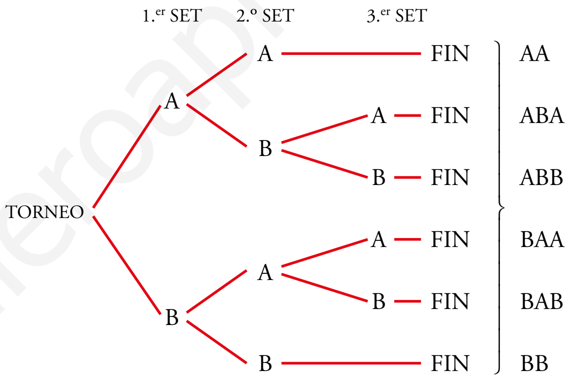


Ahora solo tenemos 3 + 3 = 6 resultados.

2. **Dos amigas juegan al tenis y acuerdan que será vencedora la primera que logre ganar dos sets. Escribe todas las formas en que puede desarrollarse el partido, set a set.**

Hacemos un diagrama en árbol. En cada ramificación indicamos quién gana un set, la jugadora A o la jugadora B.

Hay 6 posibles desarrollos del torneo.

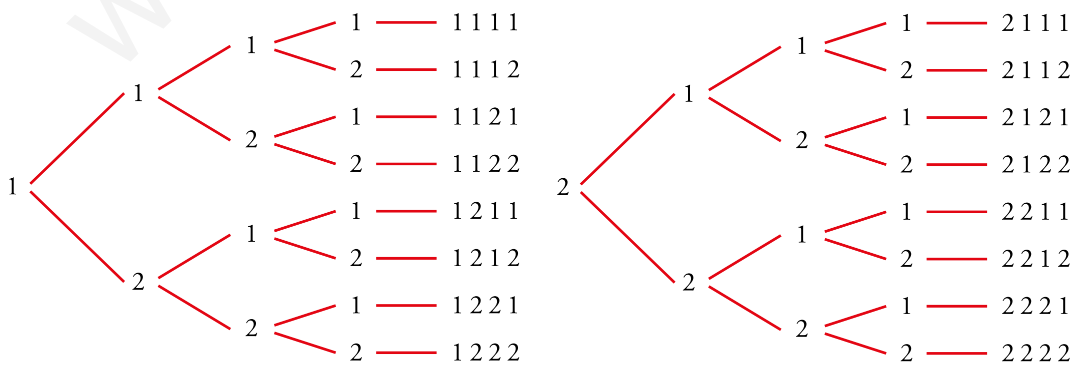


3. **a) Forma todos los números de cuatro cifras que se puedan hacer con los dígitos 1 y 2. ¿Cuántos son?**

b) ¿Cuántos números de 5 cifras se pueden hacer con los dígitos 0 y 1?

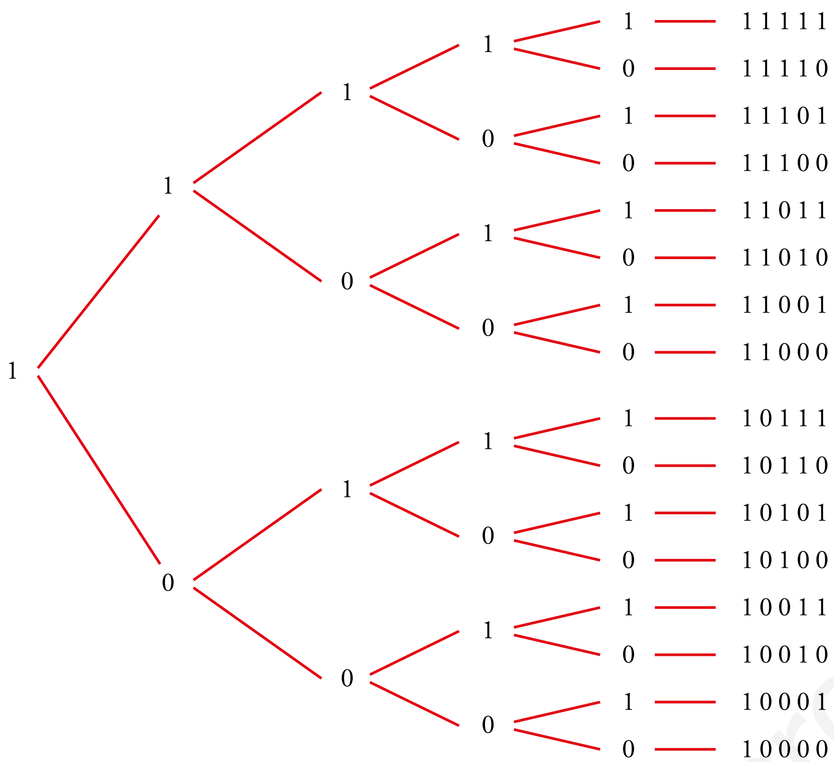
Ten en cuenta que 01101 = 1 101 no es un número de cinco cifras.

a) Hacemos un diagrama de árbol:



En total hay 16 números de cuatro cifras con los dígitos 1 y 2.

b)



Hay 16 números de 5 cifras compuestos solo por 0 y 1.

4. **Si queremos hacer lápices bicolores de doble punta y disponemos de los colores rojo, azul, negro, verde y amarillo, ¿cuántos modelos se pueden formar? Escríbelos todos.**

Llamamos: R - ROJO; A - AZUL; N - NEGRO; V - VERDE; M - AMARILLO

El lápiz bicolor de punta RA, por ejemplo, es el mismo que el de punta AR.

Los modelos de lápices bicolor son:

RA	AN	NV	VM	En total hay 10 modelos.
RN	AV	NM		
RV	AM			
RM				

5. **¿Qué números de dos cifras diferentes se pueden formar con los dígitos 1, 2, 3, 4, 5?**

Los números son:

12	21	31	41	51
13	23	32	42	52
14	24	34	43	53
15	25	35	45	54

6. **Queremos construir un dominó con los números 1, 2, 3, 4 y 5. Describe sus fichas.**

Cada ficha tiene dos números que podemos repetir, pero el orden no influye:

11	22	33	44	55
12	23	34	45	
13	24	35		
14	25			
15				

$5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15$ fichas

7. **Describe todos los partidos que han de jugarse en una liguilla con cinco equipos, *A*, *B*, *C*, *D* y *E*.**

Suponemos que juegan a una sola vuelta.

Los partidos serán:

A-B	A-C	A-D	A-E
B-C	B-D	B-E	
C-D	C-E		
D-E			

10 partidos.

Si la liguilla fuera a ida y vuelta, el número de partidos sería 20.

8. **Si tienes tres pantalones (AZUL, NEGRO, BLANCO) y cuatro camisetas (AZUL, ROJA, VERDE, BLANCA), describe todas las indumentarias que puedes vestir sin que coincidan el color de las dos prendas.**

Llamamos A, N y B a los pantalones, y A, R, V y B a las camisetas. Las posibles combinaciones son:

~~AA~~	AR	AV	AB
NA	NR	NV	NB
BA	BR	BV	~~BB~~

Te puedes vestir de 10 formas diferentes.

Utilizar las fórmulas

9. **Calcula.**

a) $VR_{4,3}$ **b)** $VR_{3,4}$ **c)** $V_{7,3}$ **d)** P_7

e) $C_{6,4}$ **f)** $V_{9,5}$ **g)** $\dfrac{P_{10}}{P_8}$ **h)** $C_{10,8}$

a) $VR_{4,3} = 4^3 = 64$

b) $VR_{3,4} = 3^4 = 81$

c) $V_{7,3} = 7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$

d) $P_7 = 7! = 5\,040$

e) $C_{6,4} = \dfrac{V_{6,4}}{P_4} = \dfrac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 15$

f) $V_{9,5} = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 15\,120$

g) $\dfrac{P_{10}}{P_8} = \dfrac{10!}{8!} = \dfrac{10 \cdot 9 \cdot 8!}{8!} = 90$

h) $C_{10,8} = \dfrac{V_{10,8}}{P_8} = \dfrac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \dfrac{90}{2} = 45$

10. **Calcula.**

a) $V_{5,\,2} - C_{5,\,3}$

b) $\dfrac{VR_{6,\,2}}{C_{4,\,2}}$

c) $\dfrac{P_4}{V_{4,\,3}}$

d) $\dfrac{P_5}{P_3}$

e) $\dfrac{P_{10}}{P_9}$

f) $\dfrac{P_{12}}{P_9}$

a) $V_{5,\,2} - C_{5,\,3} = 5 \cdot 4 - \dfrac{V_{5,\,3}}{P_3} = 20 - \dfrac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 20 - 10 = 10$

b) $\dfrac{VR_{6,\,2}}{C_{4,\,2}} = \dfrac{6^2}{\dfrac{V_{4,\,2}}{P_2}} = \dfrac{36}{\dfrac{12}{2}} = \dfrac{36}{6} = 6$

c) $\dfrac{P_4}{V_{4,\,3}} = \dfrac{4!}{4 \cdot 3 \cdot 2} = 1$

d) $\dfrac{P_5}{P_3} = \dfrac{5!}{3!} = \dfrac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{3!} = 20$

e) $\dfrac{P_{10}}{P_9} = \dfrac{10!}{9!} = 10$

f) $\dfrac{P_{12}}{P_9} = \dfrac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9!}{9!} = 1\,320$

11. **Las expresiones $VR_{8,\,2}$; P_8; $V_{8,\,2}$; $C_{8,\,2}$ son las soluciones de los siguientes apartados a), b), c), d), pero no en ese orden. Asigna a cada apartado su solución:**

a) Palabras de ocho letras, con o sin sentido, que se pueden hacer con las letras de PELÍCANO.

b) Posibles parejas que se pueden formar para jugar un torneo de ajedrez entre 8 personas.

c) Números de dos cifras que se pueden formar con los dígitos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 y 8.

d) Posibles formas de dar el primer y segundo premios de un concurso literario con 8 participantes.

a) P_8

b) $C_{8,\,2}$

c) $VR_{8,\,2}$

d) $V_{8,\,2}$

12. **Ocho problemas muy parecidos. En cada uno de los siguientes problemas la pregunta es:** ***¿De cuántas formas se puede hacer?***

a) 3 chicos van a comprarse un polo cada uno a una heladería en la que hay 6 clases de polos.

b) 6 chicos van a comprarse un polo cada uno a una heladería en la que hay 3 clases de polos.

c) Repartir 3 polos distintos entre 6 chicos.

d) Repartir 3 polos iguales entre 6 chicos.

e) Un chico escoge 3 polos entre 6 distintos.

f) Un chico escoge 3 polos entre 6 iguales.

g) Repartir 6 polos distintos entre 6 chicos.

h) Repartir 3 polos de fresa y 3 de vainilla entre 6 chicos.

Sus soluciones son: C_6^3, P_6, VR_6^3, 1, VR_3^6, V_6^3. Están dadas en otro orden y se pueden repetir.

a) $VR_6^3 = 6^3 = 216$ formas

b) $VR_3^6 = 3^6 = 729$ formas

c) $V_6^3 = 120$ formas

d) $C_6^3 = 20$ formas

e) $V_6^3 = 120$ formas

f) 1 forma

g) $P_6 = 720$ formas

h) $C_6^3 = 20$ formas

Página 246

13. **¿De cuántas formas pueden repartirse 3 entradas para un concierto de rock entre 6 amigos y amigas sin que ninguno pueda llevarse más de una?**

a) Si las entradas no son numeradas.

b) Si las entradas son numeradas y hay una de la primera fila, otra de la fila 10 y otra de la última fila.

a) $C_{6,\,3} = \dfrac{6!}{3! \cdot (6-3)!} = \dfrac{6!}{3! \cdot 3!} = 20$ formas

Como las entradas no son numeradas, no influye el orden en el reparto.

b) $V_{6,\,3} = 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$ formas

Al ser numeradas las entradas, sí influye el orden.

14. **Para formar un equipo de baloncesto, hacen falta 5 jugadores y el entrenador dispone de 10.**

a) ¿Cuántos equipos distintos puede formar?

b) Si dos jugadores son indiscutibles, ¿de cuántas formas se puede completar el equipo con los ocho restantes?

a) Con 10 jugadores se quieren formar equipos de 5. El orden no influye y no se pueden repetir.

$C_{10,\,5} = \dfrac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 252$ equipos distintos

b) Si el entrenador decide mantener dos jugadores fijos, habrá:

$C_{8,\,3} = \dfrac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 56$ equipos distintos

15. **Se van a celebrar elecciones en una comunidad de vecinos y hay que elegir al presidente, al secretario y al tesorero.**

¿De cuántas maneras se pueden elegir estos tres cargos, si se presentan ocho candidatos?

No se pueden repetir y, además, influye el orden porque no es lo mismo ser presidente, que secretario, que tesorero.

Son variaciones ordinarias: $V_{8,\,3} = 8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$ formas distintas.

16. **Se van a repartir tres regalos entre seis personas. Calcula de cuántas formas se pueden repartir en cada uno de los siguientes casos:**

a) Los regalos son distintos (una bicicleta, unos patines y un chándal) y no puede tocarle más de un regalo a la misma persona.

b) Los regalos son iguales y no puede tocarle más de un regalo a la misma persona.

c) Los regalos son distintos y puede tocarle más de uno a la misma persona.

a) No se pueden repetir los regalos y sí influye el orden porque no es lo mismo que toque una bicicleta, que unos patines, que un chándal.

Son variaciones ordinarias $V_{6,\,3} = 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$ formas

b) Ahora el orden no influye: $C_{6,\,3} = \dfrac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 20$ formas

c) Pueden repetirse e influye el orden: $VR_{6,\,3} = 6^3 = 216$ formas

17. **Un participante de un concurso tiene que ordenar a ciegas seis tarjetas en las que están escritas las letras de la palabra PREMIO. Si sale la palabra correcta, gana.**

a) ¿Cuántas ordenaciones distintas pueden salir?

b) Le ofrecen fijar la P en el lugar que le corresponde y reducir el premio a la mitad. ¿Cuántas ordenaciones posibles se pueden obtener con las demás?

a) Disponemos de las 6 letras de la palabra PREMIO para agruparlas; ninguna letra está repetida y el orden influye.

$P_6 = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$ ordenaciones distintas

b) Como P está fija, ahora se dispone de 5 letras:

$P_5 = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ ordenaciones distintas.

18. **¿De cuántas formas pueden sentarse tres personas en un banco de 5 asientos?**

¿Y si el banco es de 3 asientos?

No se pueden repetir y el orden influye:

Si el banco es de 5 asientos: $V_{5,\,3} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ formas.

Si el banco es de 3 asientos: $P_3 = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ formas.

19. **Estás haciendo la maleta para irte de vacaciones y quieres llevarte cuatro de las ocho camisetas que tienes. ¿De cuántas formas las puedes seleccionar?**

No puedes repetirlas y no influye el orden:

$C_{8,\,4} = \dfrac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 70$ formas distintas.

Aplica lo aprendido

20. **El lenguaje de un ordenador se traduce a secuencias de dígitos formados por ceros y unos. Un *byte* es una de estas secuencias y está formado por 8 dígitos.**

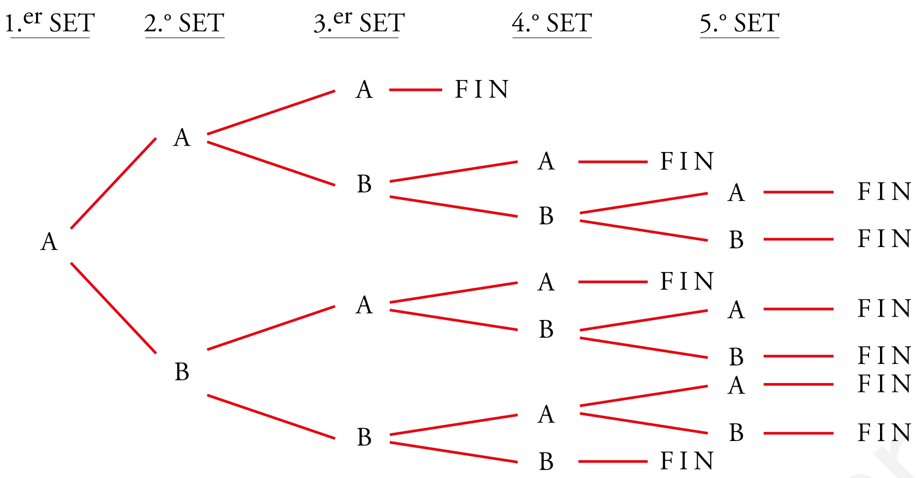
Por ejemplo: $\boxed{0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1}$

¿Cuántos *bytes* diferentes se pueden formar?

Disponemos de dos elementos y los agrupamos de 8 en 8:

Se pueden formar $VR_{2,\,8} = 2^8 = 256$ *bytes* diferentes.

21. **Dos amigos se enfrentan en un torneo de tenis, en el que será vencedor el primero que logre ganar tres sets. ¿De cuántas formas posibles puede desarrollarse el encuentro?**

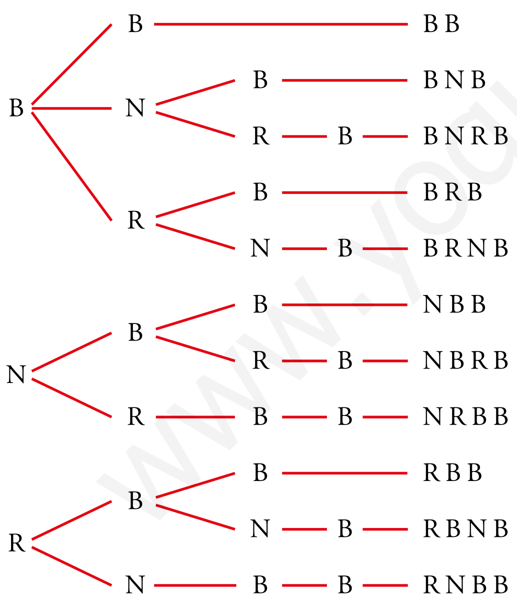


Si el primer set lo gana el jugador B, tenemos un esquema análogo. Por tanto, hay 20 maneras distintas de acabar un partido.

22. **En una urna hay dos bolas blancas, una negra y una roja. Extraemos sucesivamente una bola cada vez y paramos cuando tengamos las dos blancas.**

¿Cuáles son los posibles resultados?

Anotamos en un diagrama en árbol la bola que se saca en cada extracción: blanca (B), negra (N), roja (R).



En total hay 11 posibles resultados.

23. **El número 75775 está formado por dos cincos y tres sietes.**

¿Cuáles son los números que podemos formar con dos cincos y tres sietes? ¿Cuánto vale la suma de todos ellos?

$C_{5,\,3} = \dfrac{5!}{3! \cdot (5-3)!} = \dfrac{5!}{3! \cdot 2!} = 10$ números diferentes

7	7	7	5	5
7	7	5	7	5
7	7	5	5	7
…	…	…	…	…
5	5	7	7	7

En cada columna, las $\frac{3}{5}$ partes son "sietes" y las $\frac{2}{5}$ partes son "cincos".

Por tanto, la suma de cada columna es:

$\frac{3}{5}$ de $10 \cdot 7 + \frac{2}{5}$ de $10 \cdot 5 = 42 + 20 = 62$

La suma total será (teniendo en cuenta el valor posicional de cada columna):

$62 \cdot 10\,000 + 62 \cdot 1\,000 + 62 \cdot 100 + 62 \cdot 10 + 62 \cdot 1 = 62 \cdot 11\,111 = 688\,882$

24. **Como sabes, una quiniela consta de 14 partidos, en cada uno de los cuales se puede poner 1, X o 2.**

¿Cuántas quinielas distintas se pueden rellenar?

Al hacer una quiniela es importante el orden y podemos repetir resultados. Por tanto:

$VR_{3,\,14} = 3^{14} = 478\,969$ quinielas distintas.

25. **En unos almacenes emplean el siguiente código para marcar los artículos:**

- **La primera cifra indica la sección correspondiente y es un número entre el 1 y el 9.**
- **Después, hay tres cifras, cada una de ellas del 0 al 9, que corresponden al número del proveedor.**

¿Cuántas marcas distintas se pueden hacer?

Por cada cifra correspondiente al proveedor habrá $VR_{10,\,3} = 1\,000$ marcas distintas.

Como hay 9 cifras correspondientes a la sección, en total se podrán hacer $9 \cdot 1\,000 = 9\,000$ marcas distintas.

26. **Las matrículas de los automóviles de cierto país llevan cuatro números y tres letras. Para ello, se utilizan los dígitos del 0 al 9 y 26 letras de nuestro alfabeto.**

¿Cuántas matrículas pueden hacerse de esta forma?

- Con 10 dígitos, agrupados de 4 en 4, y teniendo en cuenta que se pueden repetir y que el orden influye, se pueden formar $VR_{10,\,4} = 10^4 = 10\,000$ agrupaciones distintas.
- Con 26 letras, formando grupos de 3 y considerando que el orden influye y que las letras se pueden repetir, habrá:

  $VR_{26,\,3} = 26^3 = 17\,576$ grupos distintos

Por cada grupo de 4 dígitos habrá 17 576 formas de agrupar las letras.

En total habrá: $VR_{10,\,4} \cdot VR_{26,\,3} = 175\,760\,000$ matrículas.

Página 247

27. **a) Para matricularte en un curso, tienes que elegir dos asignaturas entre las siguientes:**

Música	**Tecnología**	**Teatro**
Dibujo	**Informática**	**Periodismo**

¿De cuántas formas puedes hacer la elección?

b) Si en secretaría te advierten de que las seis asignaturas las escribas por orden de preferencia, ¿de cuántas formas las puedes escribir?

a) No influye el orden y no podemos repetirlas: $C_{6,\,2} = \dfrac{6 \cdot 5}{2 \cdot 1} = 15$ formas distintas

b) $P_6 = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$ formas diferentes

28. **El profesor de Matemáticas nos ha propuesto diez problemas de los que tenemos que resolver cinco.**

a) ¿Cuántas formas hay de seleccionarlos?

b) De los 10 problemas propuestos hay 2 de los que no tienes "ni idea". Si los descartas, ¿cuántas opciones tienes?

c) Al contrario, dos de los problemas los sabes hacer estupendamente, seguro. Naturalmente los seleccionas. ¿De cuántas formas puedes elegir los demás?

a) No podemos repetirlos y no influye el orden: $C_{10,\,5} = \dfrac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 252$ formas

b) En lugar de elegir entre 10, ahora elegimos entre 8: $C_{8,\,5} = \dfrac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 56$ formas

c) En lugar de elegir 5 entre 10, ahora elegimos 3 entre 8.

$$C_{8,\,3} = \frac{8!}{3! \cdot (8-3)!} = \frac{8!}{3! \cdot 5!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 56 \text{ formas}$$

Resuelve problemas

29. **Las 28 fichas de un dominó se reparten entre cuatro jugadores. ¿Cuántos juegos distintos podrá tener cada jugador?**

Se reparten 7 fichas a cada uno. No se pueden repetir y no influye el orden:

$$C_{28,\,7} = \frac{28 \cdot 27 \cdot 26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22}{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 1\,184\,040$$

30. **a) ¿De cuántas formas se pueden ordenar las letras de la palabra PALOTE?**

b) ¿Cuántas empiezan por P?

c) ¿En cuántas de ellas ocupan las consonantes los lugares impares y las vocales los pares? (Por ejemplo: PATELO).

d) ¿En cuántas están alternadas vocales y consonantes?

Las letras son distintas y el orden influye:

a) $P_6 = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$ formas.

b) Si empiezan por P, ahora disponemos de 5 letras y 5 lugares:

$P_5 = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ formas

c) Si las consonantes están en los lugares impares: $P_3 = 3 \cdot 2 = 6$ formas.

Las vocales están en los lugares pares: $P_3 = 3 \cdot 2 = 6$ formas.

Por cada forma de las consonantes hay 6 formas de las vocales.

En total hay: $6 \cdot 6 = 36$ formas.

d) Hay 72 formas, porque puede ser C V C V C V (apartado c).

V C V C V C $\rightarrow$ otras 36 formas.

31. **Seis amigos, 3 chicos y 3 chicas, van al cine. ¿De cuántas formas pueden sentarse si quieren estar alternados?**

Este problema es idéntico al apartado d) del ejercicio 30. Por tanto, tienen 72 formas distintas de sentarse.

32. **Señala 8 puntos en una circunferencia. Traza las cuerdas que unen cada punto con todos los demás.**

a) ¿Cuántas cuerdas tendrás que dibujar?

b) ¿Cuántas diagonales tiene un octógono?

a) Tomamos los puntos de dos en dos.

No se pueden repetir y no influye el orden: $C_{8,\,2} = \dfrac{8 \cdot 7}{2 \cdot 1} = 28$ cuerdas

b) El número de diagonales del octógono será el número de cuerdas del apartado a) menos 8 unidades que corresponden a las cuerdas que son los lados del octógono. Por tanto, tendrá $28 - 8 = 20$ diagonales.

33. **Me van a regalar 3 libros y 2 discos por mi cumpleaños. He hecho una lista con los que me gustaría tener, y en ella anoté 5 libros y 8 discos. ¿De cuántas formas distintas pueden elegir mi regalo?**

El número de formas que hay de elegir los tres libros de entre 5 es: $C_{5,\,3} = \dfrac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 10$

El número de formas que hay de elegir los dos discos de entre 8 es: $C_{8,\,2} = \dfrac{8 \cdot 7}{2} = 28$

Para cada una de las formas que hay de elegir los tres libros tenemos 28 formas de elegir los discos, luego en total hay $28 \cdot 10 = 280$ formas de elegir los tres libros y los dos discos.

34. **Tenemos 5 pesas: de 1 g, 2 g, 4 g, 8 g y 16 g. ¿Cuántas pesadas diferentes se pueden hacer tomando dos de ellas? ¿Y con tres?**

Calcula cuántas pesadas se pueden hacer, en total, tomando 1, 2, 3, 4 o las 5 pesas.

No influye el orden y no se pueden repetir:

$C_{5,\,2} = \dfrac{5 \cdot 4}{2} = 10$ pesadas. $\qquad C_{5,\,3} = \dfrac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 10$ pesadas también.

Tomando 1 pesa, 5 pesadas.

Tomando 2 pesas: $C_{5,\,2} = 10$ pesadas

Tomando 3 pesas: $C_{5,\,3} = 10$ pesadas

Tomando 4 pesas: $C_{5,\,4} = \dfrac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 5$ pesadas

Tomando 5 pesas, 1 pesada.

En total se podrán hacer:

$5 + 10 + 10 + 5 + 1 = 31$ pesadas

35. **En una pizzería preparan pizzas con, al menos, 4 ingredientes. Si disponen de 6 tipos de ingredientes, ¿cuántos tipos de pizza pueden hacer?**

(Pueden hacerlas de 4, 5 o 6 ingredientes).

Con 4 ingredientes: $C_{6,\,4} = \dfrac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 15$ tipos

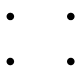
Con 5 ingredientes: $C_{6,\,5} = \dfrac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 6$ tipos

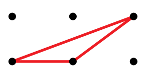
Con 6 ingredientes: $C_{6,\,6} = \dfrac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 1$ tipo

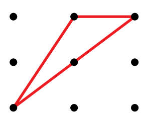
En total se pueden hacer $15 + 6 + 1 = 22$ tipos de pizzas.

Problemas "+"

36. **¿Cuántos triángulos se pueden hacer de modo que tengan los vértices en los puntos de estas redes?**

a) 

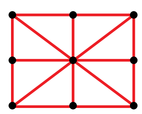
b) 

c) 

a) $C_{4,\,3} = \dfrac{4 \cdot 3 \cdot 2}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 4$ triángulos

b) $C_{6,\,3} = \dfrac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 20$. Necesitamos tres puntos no alineados para construir un triángulo. En dos de los 20 casos los puntos están alineados, es decir, se pueden construir $20 - 2 = 18$ triángulos.

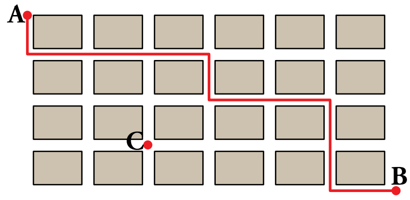
c) $C_{9,\,3} = \dfrac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 84$



En este caso nos encontramos con 8 casos en los que no es posible construir un triángulo (3 puntos alineados).

En total podemos construir $84 - 8 = 76$ triángulos.

37. **Observa esta cuadrícula:**



a) ¿Cuántos caminos de longitud mínima hay para ir de A a B?

b) ¿Cuántos hay para ir de A a B, pasando por C?

a) Hay que ir seis veces a la derecha (D) y cuatro veces hacia abajo (I).

Los caminos serán de la forma DDDIIDIDID, es decir, se trata de colocar cuatro I en diez lugares.

Para ir de A a B hay: $C_{10,\,4} = \dfrac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 210$ caminos

b) Para ir de A a C solo puede irse dos veces a la derecha (D) y tres veces hacia abajo (I). Los caminos serán de la forma DDIID, por ejemplo. Se trata de colocar dos I en cinco lugares.

Es decir: $C_{5,\,2} = \dfrac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} = 10$ caminos

Análogamente, hay: $C_{5,\,1} = \dfrac{5}{1} = 5$ caminos para ir de C a B.

Para ir de A a B, pasando por C, hay $10 \cdot 5 = 50$ caminos.

38. **Un secretario escribe cinco cartas distintas a cinco personas. También escribe los cinco sobres correspondientes pero mete al azar cada carta en un sobre.**

a) ¿De cuántas formas posibles se pueden meter las cartas en los sobres?

b) ¿En cuántos casos la carta del señor Pérez estará dentro de su sobre?

a) No puede repetirlas y sí influye el orden: $P_5 = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ formas posibles.

b) Si fijamos la carta del señor Pérez en el sobre del señor Pérez, nos quedan libres cuatro cartas y cuatro sobres: $P_4 = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ casos.

39. **Calcula cuántos productos distintos se pueden obtener tomando tres factores entre las cifras 1, 2, 3, 4, 5, 6 y 7, si:**

a) No se pueden repetir cifras.

b) Sí se pueden repetir cifras.

a) $C_7^3 = \dfrac{7 \cdot 6 \cdot 5}{6} = 35$ posibles expresiones con tres factores distintos.

Pero como en el enunciado nos piden "productos", es decir, los resultados de las multiplicaciones, y $3 \cdot 2 = 6 \cdot 1$, hemos de suprimir algunas posibilidades:

$$3 \cdot 2 \cdot x \begin{cases} x = 4 \\ x = 5 \\ x = 7 \end{cases} \text{ coinciden, respectivamente, con } 6 \cdot 1 \cdot x \begin{cases} x = 4 \\ x = 5 \\ x = 7 \end{cases}$$

Por tanto, el número de posibles productos es $35 - 3 = 32$.

b) Cuando los factores pueden repetirse, la contabilidad de "expresiones con tres factores" es mucho más complicada:

Estas son las posibilidades en las que interviene algún 1:

EXPRESIÓN	$1 \cdot 1 \cdot a$	$1 \cdot 2 \cdot a$	$1 \cdot 3 \cdot a$	$1 \cdot 4 \cdot a$	$1 \cdot 5 \cdot a$	$1 \cdot 6 \cdot a$	$1 \cdot 7 \cdot a$	
a PUEDE VALER	De 1 a 7	De 2 a 7	De 3 a 7	De 4 a 7	De 5 a 7	6 o 7	7	
POSIBILIDADES	7	6	5	4	3	2	1	TOTAL: 28

Posibilidades en las que interviene algún 2:

EXPRESIÓN	$2 \cdot 2 \cdot a$	$2 \cdot 3 \cdot a$	$2 \cdot 4 \cdot a$	$2 \cdot 5 \cdot a$	$2 \cdot 6 \cdot a$	$2 \cdot 7 \cdot a$	
a PUEDE VALER	De 2 a 7	De 3 a 7	De 4 a 7	De 5 a 7	6 o 7	7	
POSIBILIDADES	6	5	4	3	2	1	TOTAL: 21

Posibilidades en las que interviene algún 3:

EXPRESIÓN	$3 \cdot 3 \cdot a$	$3 \cdot 4 \cdot a$	$3 \cdot 5 \cdot a$	$3 \cdot 6 \cdot a$	$3 \cdot 7 \cdot a$	
a PUEDE VALER	De 3 a 7	De 4 a 7	De 5 a 7	6 o 7	7	
POSIBILIDADES	5	4	3	2	1	TOTAL: 15

Continuamos contando, de la misma forma, para el resto de cifras:

ALGÚN 4	$4 \cdot 4 \cdot a$	$4 \cdot 5 \cdot a$	$4 \cdot 6 \cdot a$	$4 \cdot 7 \cdot a$	
a PUEDE VALER	De 4 a 7	De 5 a 7	6 o 7	7	
POSIBILIDADES	4	3	2	1	TOTAL: 10

ALGÚN 5	$5 \cdot 5 \cdot a$	$5 \cdot 6 \cdot a$	$5 \cdot 7 \cdot a$	
a PUEDE VALER	De 5 a 7	6 o 7	7	
POSIBILIDADES	3	2	1	TOTAL: 6

ALGÚN 6	$6 \cdot 6 \cdot a$	$6 \cdot 7 \cdot a$	
a PUEDE VALER	6 o 7	7	
POSIBILIDADES	2	1	TOTAL: 3

ALGÚN 7	$7 \cdot 7 \cdot a$	
a PUEDE VALER	7	
POSIBILIDADES	1	TOTAL: 1

Hay $28 + 21 + 15 + 10 + 6 + 3 + 1 = 84$ posibles expresiones de 3 factores, iguales o distintos.

¿Cuáles se repiten en el momento de efectuar la multiplicación?

Son iguales los siguientes productos: $2 \cdot 2 = 1 \cdot 4$ y $2 \cdot 3 = 1 \cdot 6$

$2 \cdot 2 \cdot a = 1 \cdot 4 \cdot a$, donde $a = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$. Hay 7 casos.

$2 \cdot 3 \cdot a = 1 \cdot 6 \cdot a$, donde $a = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$. Hay 7 casos.

Por tanto, el número de posibles productos (resultados de las multiplicaciones) es $84 - 7 - 7 = 70$.

40. **Construye, usando las fórmulas, la 9.ª fila del triángulo de Tartaglia y, a partir de ella, la 10.ª.**

$$\binom{9}{0} = 1$$

$$\binom{9}{1} = 9$$

$$\binom{9}{2} = \frac{9!}{2! \cdot 7!} = \frac{9 \cdot 8}{2 \cdot 1} = 36$$

$$\binom{9}{3} = \frac{9!}{3! \cdot 6!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 84$$

$$\binom{9}{4} = \frac{9!}{4! \cdot 5!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 126$$

Aplicamos ahora las propiedades de los números combinatorios:

$$\binom{9}{5} = \binom{9}{4} = 126$$

$$\binom{9}{6} = \binom{9}{3} = 84$$

$$\binom{9}{7} = \binom{9}{2} = 36$$

$$\binom{9}{8} = \binom{9}{1} = 9$$

$$\binom{9}{9} = \binom{9}{0} = 1$$

Por tanto, la décima línea es:

$$\binom{10}{0} = 1$$

$$\binom{10}{1} = \binom{9}{0} + \binom{9}{1} = 1 + 9 = 10$$

$$\binom{10}{2} = \binom{9}{1} + \binom{9}{2} = 9 + 36 = 45$$

$$\binom{10}{3} = \binom{9}{2} + \binom{9}{3} = 36 + 84 = 120$$

$$\binom{10}{4} = \binom{9}{3} + \binom{9}{4} = 84 + 126 = 210$$

$$\binom{10}{5} = \binom{9}{4} + \binom{9}{5} = 126 + 126 = 252$$

$$\binom{10}{6} = \binom{10}{4} = 210$$

$$\binom{10}{7} = \binom{10}{3} = 120$$

$$\binom{10}{8} = \binom{10}{2} = 45$$

$$\binom{10}{9} = \binom{10}{1} = 10$$

$$\binom{10}{10} = \binom{10}{0} = 1$$

Página 248

Lee e investiga

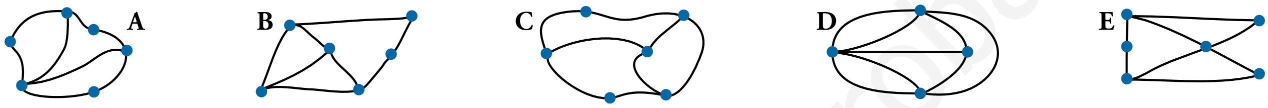
I Ching

- **¿Cuántos mensajes distintos tiene el *I Ching*? Es decir, ¿cuántos mensajes distintos se pueden escribir si cada símbolo es un *Yang* o un *Yin*?**

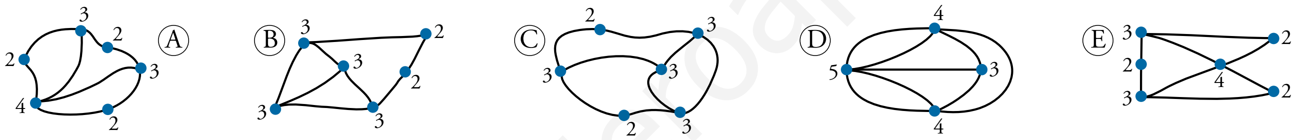
  El número de mensajes coincide con todas las formas de tomar los dos símbolos *Yang* y *Yin* en lotes de 6. Es decir, $VR_{2,\,6} = 2^6 = 64$ mensajes distintos.

Los puentes de Königsberg

- **¿Cuáles de estos gráficos se pueden dibujar sin levantar el lápiz del papel y sin repetir ningún tramo?**



  Se pueden dibujar así el A, el D y el E.



- **Supón que los tramos se pueden deformar, alargar y acortar. ¿Qué dos se pueden transformar, uno en otro?**

  Se pueden transformar, uno en el otro, el A y el E.

Página 249

Entrénate resolviendo problemas

- **¿Cuántos partidos hay que jugar para completar un campeonato de tenis, por eliminatorias, con 16 jugadores? ¿Y con 32? ¿Y con 64?**

  ¿Y con 90 jugadores? (En la primera ronda tendríamos que eliminar a 26 jugadores para que queden 64. Esto se consigue seleccionando a 52 jugadores para que jueguen 26 partidos y clasificando a los restantes directamente a la siguiente ronda).

  ¿Y con 133?

  Mirando las soluciones de los ejercicios anteriores, ingéniatelas para decir cuántos partidos se necesitan para llevar a cabo un torneo por eliminatorias con n jugadores.

  Si echamos bien las cuentas, observamos que:

  16 jugadores → 15 partidos

  32 jugadores → 31 partidos

  64 jugadores → 63 partidos

  90 jugadores → 89 partidos

  133 jugadores → 132 partidos

  Es decir, en cada opción, se juega un partido menos que jugadores participan. ¿Por qué?

  En cada partido de elimina un jugador, y solo uno. Como hay que eliminarlos a todos, excepto al campeón, es necesario jugar tantos partidos como eliminados haya, es decir, un partido menos que competidores haya.

  Si hubiese n jugadores, serían necesarios $n - 1$ partidos.

- **Imagina que tienes en un bolsillo estas cuatro monedas (2 €, 1 €, 0,50 € y 0,20 €):**

  ¿Cuántas cantidades diferentes de dinero puedes formar con ellas?

  Con una moneda se pueden formar 4 cantidades diferentes:

2 €	1 €	0,50 €	0,20 €

  Con dos monedas, 6 cantidades diferentes:

3 €	2,50 €	2,20 €	1,50 €	1,20 €	0,70 €

  Con tres monedas, el mismo número de cantidades que con una, 4. Solo tenemos que pensar en qué moneda no cogemos:

3,50 €	3,20 €	2,70 €	1,70 €

  Con cuatro monedas solo hay 1 forma:

3,70 €

  En total son 4 + 6 + 4 + 1 = 15 formas.

- **Queremos juntar 6 € utilizando solo monedas de 2 €, 1 € y 0,50 €.**
  ¿De cuántas maneras podemos hacerlo?

2 €	1 €	0,50 €	
3	0	0	1 forma
2	2	2	3 formas
2	1	2	
2	0	4	
1	4	0	5 formas
1	3	2	
1	2	4	
1	1	6	
1	0	8	
0	6	0	7 formas
0	5	2	
0	4	4	
0	3	6	
0	2	8	
0	1	10	
0	0	12	

Podemos hacerlo de 16 formas distintas.

- **Supón que dispones, exclusivamente, de sellos cuyos valores son 0,10 € y 0,20 €.**
  Con esos sellos tienes tres formas distintas de franquear una carta de 0,40 €:

  0,10 + 0,10 + 0,10 + 0,10 = 0,40

  0,10 + 0,10 + 0,20 = 0,40

  0,20 + 0,20 = 0,40

  ¿De cuántas formas distintas podrás franquear una carta de 2 €?

  ¿Y una carta de n €?

- Una carta de 2 € se puede franquear con 20 sellos de 0,10 €.

  Podríamos sustituir dos sellos de 0,10 € por uno de 0,20 €, y esto podemos hacerlo con una, dos, tres, …, hasta 10 parejas de sellos de 0,10 €.

  Por tanto, hay 11 formas de franquear la mencionada carta.

- Una carta de n € se puede franquear con $10n$ sellos de 0,10 €.

  Podríamos sustituir dos sellos de 0,10 € por uno de 0,20 €, y esto podemos hacerlo con una, dos, tres, …, hasta $\frac{n}{2}$ parejas de sellos de 0,10 €.

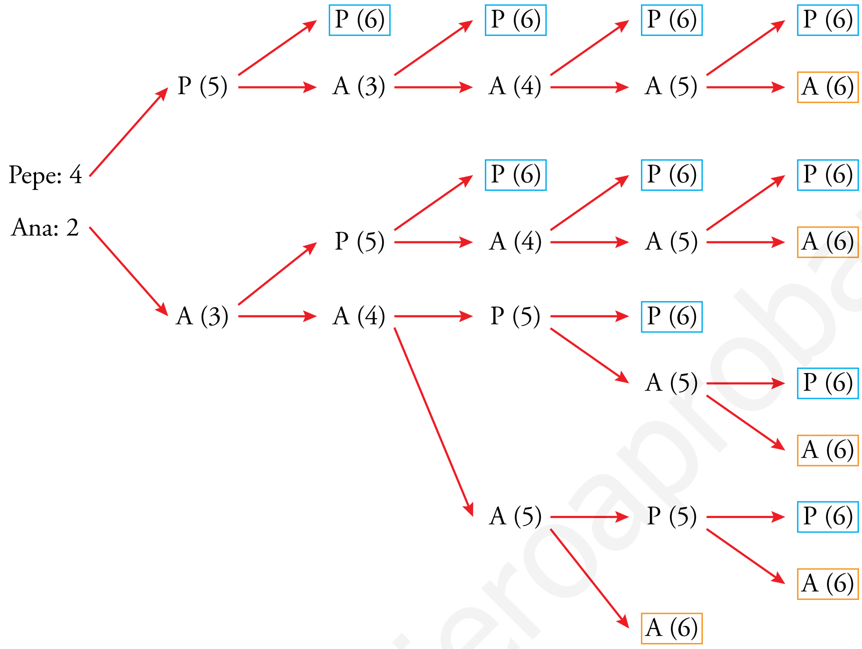
  Por tanto, hay $10\frac{n}{2} + 1 = 5n + 1$ formas de hacerlo.

Autoevaluación

1. **Ana y Pepe están jugando un torneo de ajedrez que ganará el primero que venza en 6 partidas. Las tablas (empates) no cuentan.**

Pepe va ganando 4 a 2. Haz un diagrama en árbol que describa todas las posibles continuaciones.

Marcamos en cada caso el ganador del torneo con un recuadro:



2. **En un examen, el profesor ha puesto 7 problemas, de los que hay que elegir 5.**

a) ¿Cuántas elecciones se puede plantear un alumno?

b) Si Carlos tiene claro que elegirá tres de ellos, ¿cuántas posibilidades le quedan para los otros dos?

a) $C_{7,\,5} = \dfrac{V_{7,\,5}}{P_5} = 21$

b) La elección de Carlos se reduce a seleccionar 2 de los 4 problemas restantes.

$C_{4,\,2} = \dfrac{4 \cdot 3}{2} = 6$ posibles elecciones

3. **¿Cuántos números de cuatro cifras se pueden hacer con los dígitos 1, 2 y 3? ¿Cuál es la suma de todos ellos?**

$VR_{3,\,4} = 3^4 = 81$ números

En cada columna de la siguiente serie de 81 números habrá $\frac{1}{3}$ de "1", $\frac{1}{3}$ de "2" y $\frac{1}{3}$ de "3":

1	1	1	1
1	1	1	2
1	1	2	1
…	…	…	…
3	3	3	3

Por tanto, la suma de cada columa será:

$$\frac{1}{3} \text{ de } 81 \cdot 1 + \frac{1}{3} \text{ de } 81 \cdot 2 + \frac{1}{3} \text{ de } 81 \cdot 3 = 27 + 54 + 81 = 162$$

Sumando todas las columnas, teniendo en cuenta el valor posicional de cada una de ellas, obtenemos:

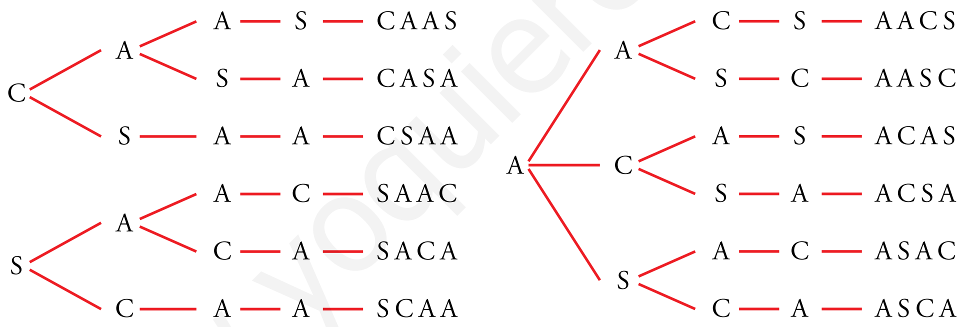
$162 \cdot 1\,000 + 162 \cdot 100 + 162 \cdot 10 + 162 = 162 \cdot 1\,111 = 179\,982$

4. **¿De cuántas formas podemos elegir al delegado y al subdelegado de un curso en el que hay siete candidatos?**

$V_{7,\,2} = 7 \cdot 6 = 42$ formas de elección.

5. **Con las letras de la palabra CASA, ¿cuántas ordenaciones, con o sin sentido, podemos formar? Escríbelas todas.**

Anotamos en un diagrama de árbol las posibilidades de cada letra de la palabra:



En total, podemos formar 12 ordenaciones.

6. **¿Cuántos números capicúas de 5 cifras hay?**

Hay diez formas distintas de elegir la cifra central (3.ª).

Hay diez formas distintas de elegir las cifras 2.ª y 4.ª.

Hay nueve formas distintas de elegir las cifras 1.ª y 5.ª.

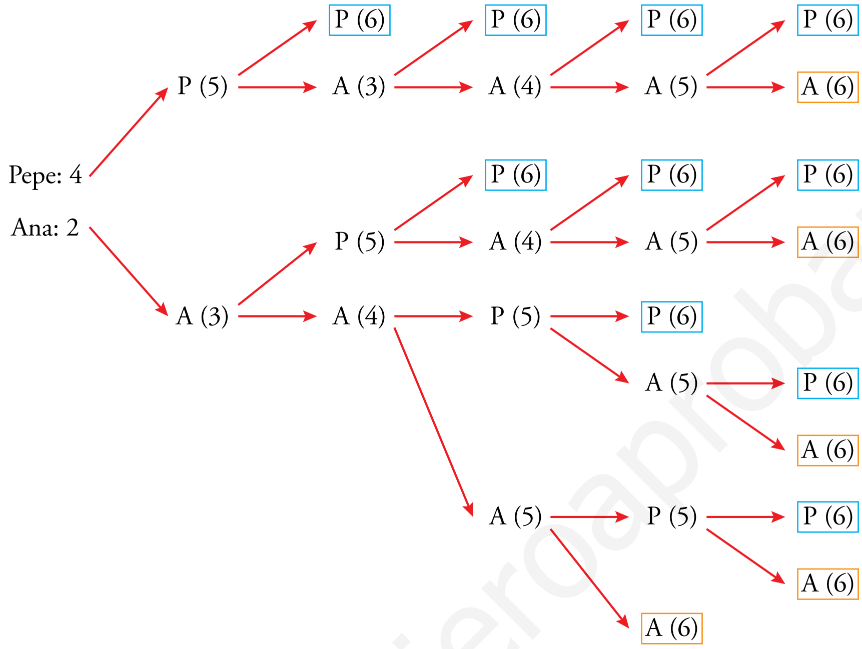
Hay, en total, 900 capicúas de 5 cifras.

Autoevaluación

1. Ana y Pepe están jugando un torneo de ajedrez que ganará el primero que venza en 6 partidas. Las tablas (empates) no cuentan.

Pepe va ganando 4 a 2. Haz un diagrama en árbol que describa todas las posibles continuaciones.

Marcamos en cada caso el ganador del torneo con un recuadro:



2. En un examen, el profesor ha puesto 7 problemas, de los que hay que elegir 5.

a) ¿Cuántas elecciones se puede plantear un alumno?

b) Si Carlos tiene claro que elegirá tres de ellos, ¿cuántas posibilidades le quedan para los otros dos?

a) $C_{7,\,5} = \dfrac{V_{7,\,5}}{P_5} = 21$

b) La elección de Carlos se reduce a seleccionar 2 de los 4 problemas restantes.

$C_{4,\,2} = \dfrac{4 \cdot 3}{2} = 6$ posibles elecciones

3. ¿Cuántos números de cuatro cifras se pueden hacer con los dígitos 1, 2 y 3? ¿Cuál es la suma de todos ellos?

$VR_{3,\,4} = 3^4 = 81$ números

En cada columna de la siguiente serie de 81 números habrá $\frac{1}{3}$ de "1", $\frac{1}{3}$ de "2" y $\frac{1}{3}$ de "3":

$$\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 3 & 3 & 3 & 3 \end{array}$$

Por tanto, la suma de cada columa será:

$$\frac{1}{3} \text{ de } 81 \cdot 1 + \frac{1}{3} \text{ de } 81 \cdot 2 + \frac{1}{3} \text{ de } 81 \cdot 3 = 27 + 54 + 81 = 162$$

Sumando todas las columnas, teniendo en cuenta el valor posicional de cada una de ellas, obtenemos:

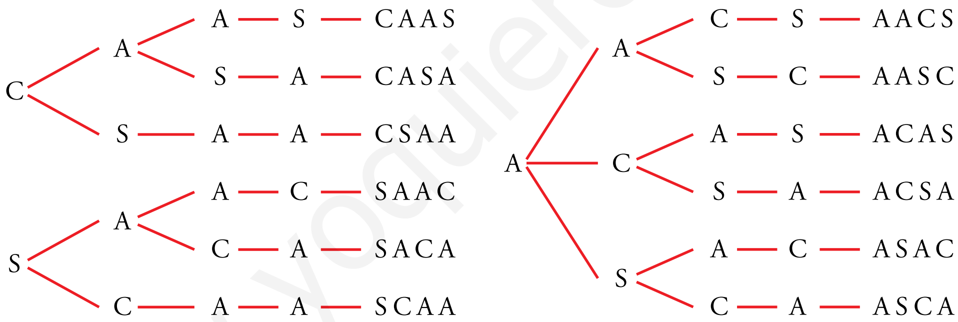
$162 \cdot 1\,000 + 162 \cdot 100 + 162 \cdot 10 + 162 = 162 \cdot 1\,111 = 179\,982$

4. ¿De cuántas formas podemos elegir al delegado y al subdelegado de un curso en el que hay siete candidatos?

$V_{7,\,2} = 7 \cdot 6 = 42$ formas de elección.

5. Con las letras de la palabra CASA, ¿cuántas ordenaciones, con o sin sentido, podemos formar? Escríbelas todas.

Anotamos en un diagrama de árbol las posibilidades de cada letra de la palabra:



En total, podemos formar 12 ordenaciones.

6. ¿Cuántos números capicúas de 5 cifras hay?

Hay diez formas distintas de elegir la cifra central (3.ª).

Hay diez formas distintas de elegir las cifras 2.ª y 4.ª.

Hay nueve formas distintas de elegir las cifras 1.ª y 5.ª.

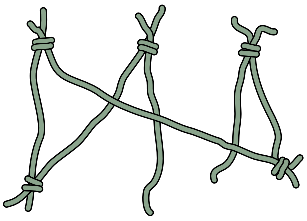
Hay, en total, 900 capicúas de 5 cifras.

Página 251

Resuelve

1. Completa el razonamiento y averigua qué proporción de personas tendrá "éxito". Es decir, cuál es la probabilidad de que se consiga un único aro con las seis cuerdas.

… Por tanto, la proporción de "nudos buenos" en este segundo paso es $\frac{2}{3}$.



Si hemos llegado hasta aquí, el tercer nudo es necesariamente bueno. Es decir, todos lo son.

Conclusión: La proporción de éxito es $\frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{8}{15}$. ¡Más de la mitad de las veces!

1 Sucesos aleatorios

Página 253

1. Una bolsa tiene 10 bolas numeradas del 1 al 10. La experiencia consiste en sacar una bola y anotar su número.

a) ¿Cuál es el espacio muestral?

b) Considera estos sucesos:

A = "número primo" **B = "múltiplo de 3"**

Describe los sucesos siguientes:

A	A'	$A \cup B$	$A \cup A'$
B	B'	$A \cap B$	$A \cap A'$

a) $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

b) $A = \{2, 3, 5, 7\}$ $A' = \{1, 4, 6, 8, 9, 10\}$

$B = \{3, 6, 9\}$ $B' = \{1, 2, 4, 5, 7, 8, 10\}$

$A \cup B = \{2, 3, 5, 6, 7, 9\}$ $A \cap B = \{3\}$

$A \cup A' = E$ $A \cap A' = \varnothing$

2. Lanzamos tres veces una moneda.

a) Completa en tu cuaderno el espacio muestral:

$E = \{(C, C, C), (C, C, +), (C, +, C), \ldots\}$

b) Describe los siguientes sucesos:

A = "la primera vez salió cara"

B = "hay al menos dos caras"

c) Describe los sucesos $A \cup B$, $A \cap B$, A' y B'.

d) Describe un suceso que sea incompatible con A y con B. ¿Será incompatible con $A \cup B$?

a) $E = \{(C, C, C), (C, C, +), (C, +, C), (+, C, C), (C, +, +), (+, C, +), (+, +, C), (+, +, +)\}$.

b) $A = \{(C, C, C), (C, C, +), (C, +, C), (C, +, +)\}$

$B = \{(C, C, C), (C, C, +), (C, +, C), (+, C, C)\}$

c) $A \cup B = \{(C, C, C), (C, C, +), (C, +, C), (C, +, +), (+, C, C)\}$

$A \cap B = \{(C, C, C), (C, C, +), (C, +, C)\}$

$A' = \{(+, C, C), (+, C, +), (+, +, C), (+, +, +)\}$

$B' = \{(C, +, +), (+, C, +), (+, +, C), (+, +, +)\}$

d) $S = \{(+, +, +)\}$ es incompatible con A y B ya que $A \cap S = B \cap S = \varnothing$. También es incompatible con $A \cup B$.

2 Probabilidades de los sucesos. Propiedades

Página 255

1. **Halla la probabilidad de los sucesos $A = \{2, 3, 4, 8, 9, 10\}$ y A', tanto en el caso de las bolas iguales como en el que tienen distintos pesos y tamaños.**

- CASO 1: las bolas tienen igual tamaño y peso.

  $P[A] = P[\{2, 3, 4, 8, 9, 10\}] = P[\{2\}] + P[\{3\}] + P[\{4\}] + P[\{8\}] + P[\{9\}] + P[\{10\}] =$

  $= 6 \cdot \frac{1}{10} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5} = 0{,}6 \;\rightarrow\; 60\,\%$

  puesto que todos los sucesos elementales son equiprobables.

  $P[A'] = 1 - P[A] = 1 - 0{,}6 = 0{,}4 \;\rightarrow\; 40\,\%$

- CASO 2: las bolas tienen pesos y tamaños diferentes.

  $P[A] = P[\{2\}] + P[\{3\}] + P[\{4\}] + P[\{8\}] + P[\{9\}] + P[\{10\}] =$

  $= 0{,}08 + 0{,}08 + 0{,}15 + 0{,}05 + 0{,}15 + 0{,}06 = 0{,}57 \;\rightarrow\; 57\,\%$

  $P[A'] = 1 - P[A] = 1 - 0{,}57 = 0{,}43 \;\rightarrow\; 43\,\%$

3 Probabilidades en experiencias simples

Página 257

1. Lanzamos un dado con forma de octaedro, con sus caras numeradas del 1 al 8. Evalúa estas probabilidades:

a) P[múltiplo de 3] **b) P[menor que 5]**

c) P[número primo] **d) P[no múltiplo de 3]**

a) $P[\dot{3}] = P[\{3, 6\}] = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$

b) $P[< 5] = P[\{1, 2, 3, 4\}] = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

c) $P[\text{primo}] = P[\{2, 3, 5, 7\}] = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

d) $P[\text{no } \dot{3}] = 1 - P[\dot{3}] = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$

2. Lanzamos dos dados y anotamos *la menor de las puntuaciones.*

a) Escribe el espacio muestral e indica la probabilidad de cada uno.

b) Calcula:

$P[< 4]$ $P[\text{no} < 4]$

DADO 1 / DADO 2	1	2	3	4	5	6
1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	2	2	2	2
3	1	2	3	3	3	3
4	1	2	3	4	4	4
5	1	2	3	4	5	5
6	1	2	3	4	5	6

a) $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$P[1] = \frac{11}{36}$ $P[2] = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$ $P[3] = \frac{7}{36}$

$P[4] = \frac{5}{36}$ $P[5] = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$ $P[6] = \frac{1}{36}$

b) $P[< 4] = P[1] + P[2] + P[3] = \frac{27}{36} = \frac{3}{4}$

$P[\text{no} < 4] = 1 - P[< 4] = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$

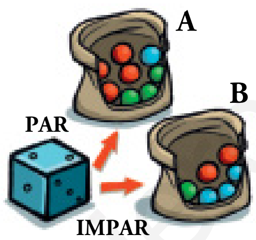
4 Probabilidades en experiencias compuestas

Página 258

1. Lanzamos un dado y, después, sacamos una bola de la bolsa. Estas dos experiencias, ¿son dependientes o independientes?

Son independientes, porque el resultado de sacar una bola de la bolsa no depende de qué haya salido en el dado.

2. Lanzamos un dado. Si sale par, extraemos una bola de la bolsa A. Si sale impar, de la B. Las experiencias, ¿son dependientes o independientes?



Son dependientes, porque al ser los contenidos de las bolsas distintos, el resultado depende de qué bolsa se saque, que depende del valor obtenido al lanzar el dado.

5 Composición de experiencias independientes

Página 259

1. Se extraen 3 cartas con reemplazamiento. Halla:

a) P[AS en 1.ª y FIGURA en 2.ª y 3.ª] **b)** P[3 ASES]

c) P[un AS y dos FIGURAS] **d)** P[ningún AS]

a) P[AS en 1.ª y FIGURA en 2.ª y 3.ª] = P[AS] · P[FIGURA] · P[FIGURA] =

$$= \frac{4}{40} \cdot \frac{12}{40} \cdot \frac{12}{40} = \frac{1}{10} \cdot \frac{3}{10} \cdot \frac{3}{10} = \frac{9}{1000}$$

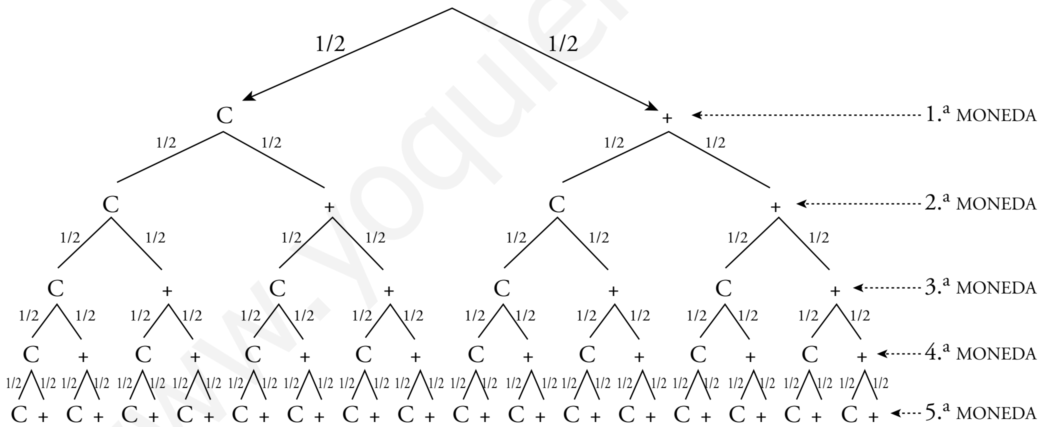
b) P[3 ASES] = P[AS] · P[AS] · P[AS] $= \frac{4}{40} \cdot \frac{4}{40} \cdot \frac{4}{40} = \left(\frac{1}{10}\right)^3 = \frac{1}{1000}$

c) P[un AS y dos FIGURAS] = 3 · P[AS en 1.ª y FIGURA en 2.ª y 3.ª] $= 3 \cdot \frac{9}{1000} = \frac{27}{1000}$

d) P[ningún AS] $= \frac{36}{40} \cdot \frac{36}{40} \cdot \frac{36}{40} = \left(\frac{9}{10}\right)^3 = \frac{729}{1000}$

2. Se lanzan 5 monedas. Halla la probabilidad de:

a) 5 caras **b)** alguna cruz



a) P[5 CARAS] $= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{32}$

b) P[alguna CRUZ] = P[0 C y 5 +] + P[1 C y 4 +] + P[2 C y 3 +] + P[3 C y 2 +] +

$$+ P[4 \text{ C y } 1 +] = 1 - P[5 \text{ C}] = 1 - \frac{1}{32} = \frac{31}{32}$$

3. Lanzamos 3 monedas. Calcula:

a) ***P*****[tres caras]** **b)** ***P*****[ninguna cara]** **c)** ***P*****[alguna cara]**

a) $P[3 \text{ caras}] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$

b) $P[\text{ninguna cara}] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$

c) Hay 3 formas de que salga una sola cara: {C, +, +}, {+, C, +}, {+, +, C}.

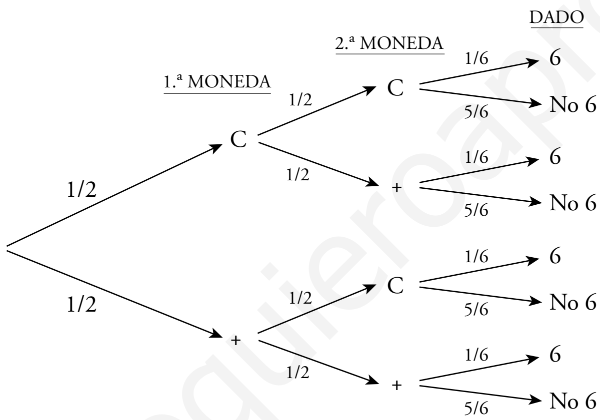
De la misma forma, hay 3 de que salgan dos caras.

$P[\text{alguna cara}] = 3 \cdot P[\text{una cara}] + 3 \cdot P[\text{dos caras}] + P[\text{tres caras}] =$

$= 3 \cdot \frac{1}{8} + 3 \cdot \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$

4. Se lanzan dos monedas y un dado. ¿Cuál es la probabilidad de obtener cara en ambas monedas y seis en el dado? ¿Cuál, la de obtener cruz en las monedas y par en el dado?

Hacemos el diagrama en árbol:



$P[C, C, 6] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{24}$

$P[+, +, (2, 4, 6)] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$

6 Composición de experiencias dependientes

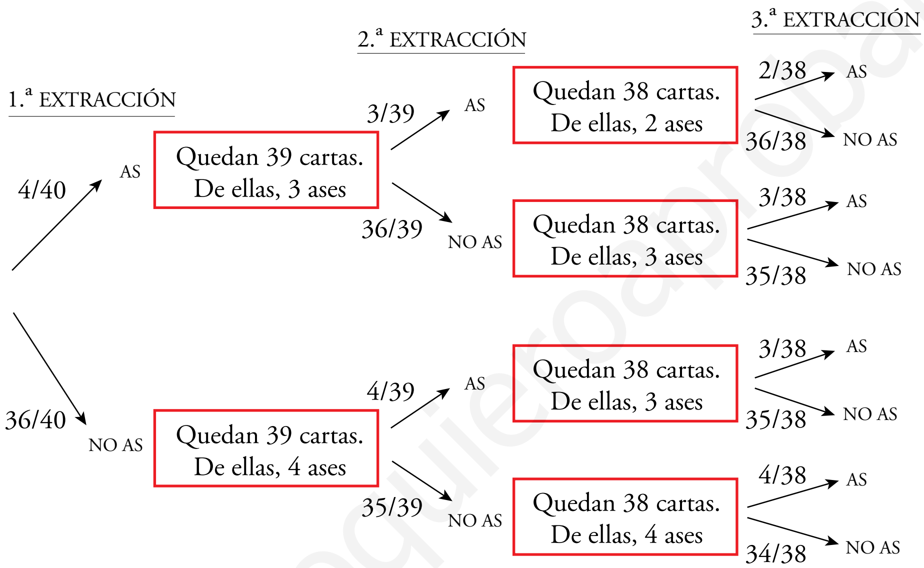
Página 261

1. **Extraemos dos cartas de una baraja española. ¿Cuál es la probabilidad de que la primera sea un REY y la segunda un AS?**

En la baraja española hay 40 cartas de las cuales 4 son reyes y 4 son ases.

$P[\text{REY y AS}] = P[\text{REY}] \cdot P[\text{AS supuesto que la 1.ª fue REY}] = \frac{4}{40} \cdot \frac{4}{39} = \frac{4}{390} = \frac{2}{195}$

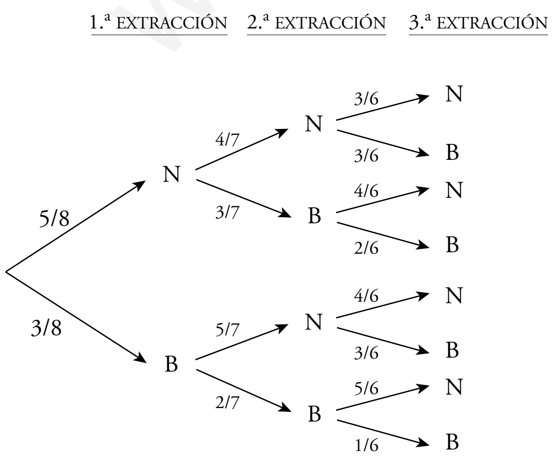
2. **Completa el diagrama en árbol del ejercicio resuelto de esta página y sobre él halla** P **[NINGÚN AS].**



$P[\text{ningún AS}] = \frac{36}{40} \cdot \frac{35}{39} \cdot \frac{34}{38} = \frac{357}{494}$

3. **Una urna contiene 5 bolas negras y 3 blancas. Extraemos tres bolas. ¿Cuál es la probabilidad de que las tres sean blancas? ¿Y negras?**

N $\rightarrow$ bola negra; B $\rightarrow$ bola blanca



$P[3 \text{ BLANCAS}] = \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{56}$

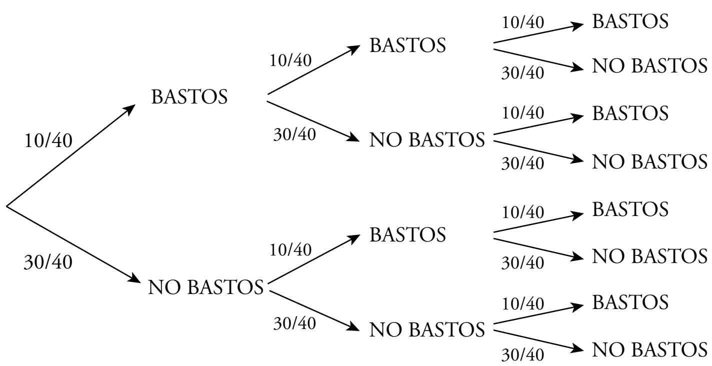
$P[3 \text{ NEGRAS}] = \frac{5}{8} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} = \frac{5}{28}$

4. **Se extraen, una tras otra, 3 cartas de una baraja. ¿Cuál es la probabilidad de obtener BASTOS las tres veces?**

a) Supón que se extraen con reemplazamiento.

b) Supón que se extraen sin reemplazamiento.

a) 1.ª EXTRACCIÓN — 2.ª EXTRACCIÓN — 3.ª EXTRACCIÓN

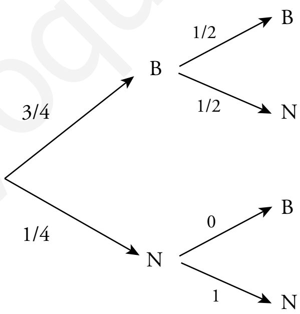


$$P[\text{tres BASTOS}] = P[\text{BASTOS}] \cdot P[\text{BASTOS}] \cdot P[\text{BASTOS}] = \frac{10}{40} \cdot \frac{10}{40} \cdot \frac{10}{40} = \frac{1}{64}$$

b) $P[\text{tres BASTOS}] = P[\text{BASTOS}] \cdot P[\text{BASTOS}] \cdot P[\text{BASTOS}] = \frac{10}{40} \cdot \frac{9}{39} \cdot \frac{8}{38} = \frac{3}{247}$

5. **Una urna A tiene tres bolas blancas y una negra. Otra B tiene una bola negra. Sacamos una bola de A y la echamos en B. Removemos y sacamos una bola de B. ¿Cuál es la probabilidad de que esta sea blanca?**

Hacemos un diagrama en árbol:



$$P[\text{BLANCA}] = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cdot 0 = \frac{3}{8}$$

7 Tablas de contingencia

Página 262

Interpretar una tabla

TIPO DE ACTIVIDAD EXTRAESCOLAR

CURSO	CULTURAL	DEPORTIVA	NINGUNA	TOTAL
1.°	12	36	72	120
2.°	15	40	45	100
3.°	21	44	35	100
4.°	24	40	16	80
TOTAL	72	160	168	400

Observa la tabla que tienes arriba y responde:

a) ¿Cuántos estudiantes del centro participan en actividades culturales? ¿Cuántos de ellos son de 2.°?

b) ¿Cuántos estudiantes del centro no participan en ninguna actividad extraescolar? De ellos, ¿cuántos son de 4.°?

c) ¿Cuántos estudiantes de 3.° participan en actividades deportivas?

d) ¿Cuántos estudiantes que participan en actividades deportivas son de 3.°?

a) $\frac{72}{400} \cdot 100 = 18 \rightarrow$ El 18 % de estudiantes del centro participan en actividades culturales.

$\frac{15}{72} \cdot 100 = 20{,}83 \rightarrow$ El 20,83 % son de 2.°.

b) $\frac{168}{400} \cdot 100 = 42 \rightarrow$ El 42 % de los estudiantes del centro no participan en ninguna actividad extraescolar.

$\frac{16}{168} \cdot 100 = 9{,}5 \rightarrow$ El 9,5 % son de 4.°.

c) El 44 % de alumnos de 3.° participan en actividades deportivas.

d) $\frac{44}{160} \cdot 100 = 27{,}5 \rightarrow$ El 27,5 % de los que participan en actividades deportivas son de 3.°.

Página 263

1. Explica el significado de los números 120, 168, 12, 45 y 40 de la tabla del ejercicio resuelto anterior.

120 → Número de alumnos de 1.º.

168 → Número de alumnos con NINGUNA actividad extraescolar.

12 → Número de alumnos de 1.º con actividad extraescolar CULTURAL.

45 → Número de alumnos de 2.º con NINGUNA actividad extraescolar.

40 → Número de alumnos de 4.º con actividad extraescolar DEPORTIVA.

2. Explica lo que significa, para la tabla del ejercicio resuelto anterior, estas expresiones y da su valor:

a) P **[1.º]** **b)** P **[CULTURAL]**

c) P **[4.º / CULTURAL]** **d)** P **[CULTURAL / 4.º]**

a) $P[1.º]$ → Probabilidad de que, elegido al azar, un alumno sea de 1.º.

$$P[1.º] = \frac{120}{400} = 0{,}3$$

b) $P[\text{CULTURAL}]$ → Probabilidad de elegir a un alumno con actividad extraescolar CULTURAL.

$$P[\text{CULTURAL}] = \frac{72}{400} = 0{,}18$$

c) $P[4.º\ /\ \text{CULTURAL}]$ → Probabilidad de que habiendo elegido un alumno con actividad CULTURAL, este resulte ser de 4.º.

$$P[4.º\ /\ \text{CULTURAL}] = \frac{24}{72} = 0{,}375$$

d) $P[\text{CULTURAL}\ /\ 4.º]$ → Probabilidad de elegir a un alumno con actividad CULTURAL entre todos los de 4.º.

$$P[\text{CULTURAL}\ /\ 4.º] = \frac{24}{80} = 0{,}3$$

3. Queremos analizar, partiendo de los datos de la tabla del ejercicio resuelto anterior, la evolución del absentismo (falta de participación) en actividades extraescolares cualesquiera, al aumentar la edad. Calcula las proporciones que convenga y compáralas.

Debemos observar la probabilidad de los que no hacen ninguna actividad en cada uno de los cursos, es decir:

$$P[\text{NINGUNA}\ /\ 1.º] = \frac{72}{120} = 0{,}6 \qquad P[\text{NINGUNA}\ /\ 2.º] = \frac{45}{100} = 0{,}45$$

$$P[\text{NINGUNA}\ /\ 3.º] = \frac{35}{100} = 0{,}35 \qquad P[\text{NINGUNA}\ /\ 4.º] = \frac{16}{80} = 0{,}2$$

Por tanto, según pasan los cursos, cada vez hay menos alumnos que no hacen ninguna actividad extraescolar.

4. En una bolsa hay 40 bolas huecas, y dentro de cada una hay un papel en el que pone SÍ o NO, según esta tabla:

	🔴	🟢	🔵	TOTAL
SÍ	15	4	1	20
NO	5	4	11	20
TOTAL	20	8	12	40

a) Describe los sucesos SÍ, NO, 🔴, 🔴 / SÍ, SÍ / 🔴 y calcula sus probabilidades.

b) Hemos sacado una bola roja. ¿Qué probabilidad hay de que haya SÍ en su interior? ¿Y si la bola es azul?

c) Se ha sacado una bola y dentro pone SÍ. ¿Cuál es la probabilidad de que sea 🔴? ¿Y 🟢? ¿Y 🔵?

a) SÍ $\rightarrow$ sacar una bola al azar y que sea SÍ.

NO $\rightarrow$ sacar una bola al azar y que sea NO.

🔴 $\rightarrow$ sacar una bola al azar y que sea roja.

🔴 / SÍ $\rightarrow$ de entre las bolas que dicen SÍ, sacar una roja.

SÍ / 🔴 $\rightarrow$ de entre las bolas rojas, sacar una que dice SÍ.

$P[\text{SÍ}] = \frac{20}{40} = \frac{1}{2}$ $\quad$ $P[\text{NO}] = 1 - P[\text{SÍ}] = \frac{1}{2}$

$P[$🔴$] = \frac{20}{40} = \frac{1}{2}$ $\quad$ $P[$🔴 / SÍ$] = \frac{15}{20} = \frac{3}{4}$ $\quad$ $P[$SÍ / 🔴$] = \frac{15}{20} = \frac{3}{4}$

b) $P[$SÍ / 🔴$] = \frac{15}{20} = \frac{3}{4}$ $\quad$ $P[$SÍ / 🔵$] = \frac{1}{12}$

c) $P[$🔴 / SÍ$] = \frac{15}{20} = \frac{3}{4}$ $\quad$ $P[$🟢 / SÍ$] = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$ $\quad$ $P[$🔵 / SÍ$] = \frac{1}{20}$

Página 264

Hazlo tú 1. Extraemos tres cartas de una baraja de 40. Calcula la probabilidad de que sean oros.

- SIN COMBINATORIA:

  Se trata de 3 experiencias dependientes.

  En la baraja hay 10 cartas de oros.

  $P[3 \text{ OROS}] = P[1.^{\text{a}} \text{ ORO}] \cdot P[2.^{\text{a}} \text{ ORO} \,/\, 1.^{\text{a}} \text{ ORO}] \cdot P[3.^{\text{a}} \text{ ORO} \,/\, 1.^{\text{a}} \text{ ORO y } 2.^{\text{a}} \text{ ORO}] =$

  $$= \frac{10}{40} \cdot \frac{9}{39} \cdot \frac{8}{38} = \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{13} \cdot \frac{4}{19} = \frac{3}{13 \cdot 19} = \frac{3}{247}$$

- CON COMBINATORIA:

  Casos favorables: extraer 3 oros de un total de 10.

  Casos posibles: extraer 3 cartas de un total de 40.

  $$P[3 \text{ OROS}] = \frac{C_{10,\,3}}{C_{40,\,3}} = \frac{\dfrac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 1}}{\dfrac{40 \cdot 39 \cdot 38}{3 \cdot 2 \cdot 1}} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{40 \cdot 39 \cdot 38} = \frac{3}{247}$$

Hazlo tú 2. a) Tiramos 3 dados. Calcula, paso a paso, la probabilidad de que el valor mediano sea "2".

b) Tiramos 3 dados. Calcula la probabilidad de que el mayor resultado sea "4".

a) Casos posibles al tirar 3 dados: $VR_{6,\,3} = 6^3 = 216$

Suceso "EL 2 ES EL VALOR MEDIANO".

Contemos los casos posibles (llamamos a a un valor menor que 2 y b a un valor mayor que 2):

- a ⚁ b $\left\{ \begin{array}{l} a = \text{⚀} \\ b = \text{⚂, ⚃, ⚄, ⚅} \end{array} \right\}$ $1 \cdot 4 = 4$ posibilidades

  Cada posibilidad admite $P_3 = 3! = 6$ ordenaciones distintas. Por tanto, habrá $4 \cdot 6 = 24$ casos diferentes.

- ⚁ ⚁ b $\rightarrow$ 4 posibilidades

  Cada una admite 3 ordenaciones distintas: b ⚁ ⚁, ⚁ b ⚁, ⚁ ⚁ b

  Por tanto, habrá $4 \cdot 3 = 12$ casos diferentes.

- a ⚁ ⚁ $\rightarrow$ 1 posibilidad

  Pero hay 3 ordenaciones diferentes.

  Luego $1 \cdot 3 = 3$ casos diferentes.

- ⚁ ⚁ ⚁ $\rightarrow$ 1 caso único

Así, el total de casos favorables será:

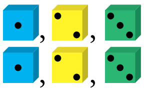
$24 + 12 + 3 + 1 = 40$ casos favorables

$$P[2] = \frac{40}{216} = \frac{5}{27}$$

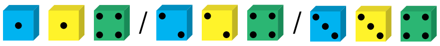
b) S = "EL MAYOR RESULTADO ES 4".

Casos posibles al lanzar 3 dados: $VR_{6,\,3} = 6^3 = 216$

Estudiemos los casos posibles (llamamos a a un valor 1, 2 o 3 y b a un valor 1, 2 o 3):

- $a\ b$  a = , , ; b = , ,  $3 \cdot 3 = 9$ posibilidades

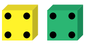
  De esas 9 posibilidades hay 3 en las que se repiten resultados:

  y las otras 6 posibilidades en las que no se repiten resultados.

  Hay $P_3 = 3! = 6$ ordenaciones distintas para 6 de esas posibilidades (sin repetir) y 3 para las restantes (repetidas).

  Luego: $6 \cdot 6 + 3 \cdot 3 = 45$ casos en esta opción.

- a  $\rightarrow$ 3 posibilidades

  Cada una admite 3 ordenaciones.

  Luego $3 \cdot 3 = 9$ casos en esta opción.

-  $\rightarrow$ 1 posibilidad $\rightarrow$ 1 caso

Total casos favorables = $45 + 9 + 1 = 55$

$P[S] = \dfrac{55}{216}$

Página 265

Hazlo tú 4. Tres personas se sitúan al azar en 6 asientos. ¿Cuál es la probabilidad de que dos en concreto estén juntas? ¿Y si solo se sentaran dos personas en los 6 asientos?

Tenemos 6 asientos y tres personas para sentar, A, B y C:

C	A		B		
1	2	3	4	5	6

El número de casos posibles será:

$V_{6,\,3} = 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$ formas distintas de sentarse A, B y C en 6 asientos.

Supongamos que queremos que A y B se sienten juntos (el razonamiento sería el mismo para cualquiera de las posibles parejas). Contemos los casos favorables.

Para que A y B estén juntos han de ocupar los asientos:

1 y 2 o 2 y 3 o 3 y 4 o 4 y 5 o 5 y 6

Para cada situación, existen 2 posibilidades: AB o BA.

Además, C podría estar en cada uno de los 4 asientos restantes. Luego:

Casos posibles $= 5 \cdot 2 \cdot 4 = 40$

$P[\text{A y B juntos}] = \dfrac{40}{120} = \dfrac{1}{3}$

Razonando de manera análoga calculamos la probabilidad si solo se sentaran dos personas en los 6 asientos:

Casos posibles $\rightarrow V_{6,\,2} = 6 \cdot 5 = 30$

Casos favorables $\rightarrow 5 \cdot 2 = 10$

$P[\text{A y B juntos}] = \dfrac{10}{30} = \dfrac{1}{3}$

Ejercicios y problemas

Página 266

Practica

Relaciones entre sucesos

1. **En un sorteo de lotería observamos la cifra en que termina el "gordo".**

a) ¿Cuál es el espacio muestral?

b) Escribe los sucesos: A = MENOR QUE 5; B = PAR.

c) Halla los sucesos $A \cup B$, $A \cap B$, A', B', $A' \cap B'$.

a) El espacio muestral es: $E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

b) A = "MENOR QUE 5" = $\{0, 1, 2, 3, 4\}$

B = "PAR" = $\{0, 2, 4, 6, 8\}$

c) $A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4, 6, 8\}$

$A \cap B = \{0, 2, 4\}$

$A' = \{5, 6, 7, 8, 9\}$

$B' = \{1, 3, 5, 7, 9\}$

$A' \cap B' = \{5, 7, 9\}$

2. **Lanzamos un dado rojo y otro verde. Anotamos el resultado. Por ejemplo, (3, 4) significa 3 en el rojo y 4 en el verde.**

a) ¿Cuántos elementos (casos) tiene el espacio muestral?

b) Describe los siguientes sucesos:

A: La suma de puntos es 6; $A = \{(5, 1), (4, 2), \ldots\}$

B: En uno de los dados ha salido 4; $B = \{(4, 1), \ldots\}$

C: En los dados salió el mismo resultado.

c) Describe los sucesos $A \cup B$, $A \cap B$, $A \cap C$.

d) ¿Cuántos casos tienen los sucesos A', $(A \cup B)'$, $(A \cap B)'$?

a) Como tenemos dos dados, cada uno con 6 caras, tenemos 6 resultados en uno para cada uno de los 6 resultados del otro. Es decir, en total, 36 elementos en el espacio muestral.

b) $A = \{(5, 1), (4, 2), (3, 3), (2, 4), (1, 5)\}$

$B = \{(4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6), (1, 4), (2, 4), (3, 4), (5, 4), (6, 4)\}$

$C = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)\}$

c) $A \cup B \rightarrow$ En uno de los dados ha salido un 4 o la suma de los dos es 6.

$A \cap B \rightarrow$ Habiendo salido un 4, la suma de los dos es 6, es decir, $\{(4, 2), (2, 4)\}$.

$A \cap C \rightarrow$ Habiendo salido dos números iguales, la suma es 6, es decir, $\{(3, 3)\}$.

d) • A' = "La suma de puntos no es 6".

A tiene 5 casos $\to$ A' tiene $36 - 5 = 31$ casos.

• $(A \cup B)'$ = "No ha salido ningún 4 ni la suma de los dos es 6".

$$\left.\begin{array}{l} A \text{ tiene 5 casos} \\ B \text{ tiene 11 casos} \\ A \cap B \text{ tiene 2 casos} \end{array}\right\} \begin{array}{l} \to A \cup B \text{ tiene } 5 + 11 - 2 = 14 \text{ casos} \to \\ \to (A \cup B)' \text{ tiene } 36 - 14 = 22 \text{ casos} \end{array}$$

• $(A \cap B)'$ tiene $36 - 2 = 34$ casos

3. **El dominó consta de 28 fichas. Sacamos una al azar y anotamos la suma (x) de las puntuaciones.**

a) ¿Cuál es el espacio muestral?

b) Describe los sucesos:

A: x es un número primo.

B: x es mayor que 4.

$A \cup B$, $A \cap B$, A'.

a) $E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$

b) $A = \{2, 3, 5, 7, 11\}$ $\quad B = \{5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$

$A \cup B = \{2, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$ $\quad A \cap B = \{5, 7, 11\}$

$A' = \{1, 4, 6, 8, 9, 10, 12\}$

Cálculo de probabilidades en experiencias simples

4. **Halla las probabilidades de los sucesos A, B, $A \cup B$, $A \cap B$, A', B' y $A' \cap B'$ del ejercicio 1.**

$E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

• $A = \{0, 1, 2, 3, 4\} \to P[A] = \dfrac{5}{10} = \dfrac{1}{2}$

• $B = \{0, 2, 4, 6, 8\} \to P[B] = \dfrac{5}{10} = \dfrac{1}{2}$

• $A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4, 6, 8\} \to P[A \cup B] = \dfrac{7}{10}$

• $A \cap B = \{0, 2, 4\} \to P[A \cap B] = \dfrac{3}{10}$

• $P[A'] = 1 - P[A] = 1 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$

• $P[B'] = 1 - P[B] = 1 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$

• $A' \cap B' = \{5, 7, 9\}$, pues $A' = \{5, 6, 7, 8, 9\}$ y $B' = \{1, 3, 5, 7, 9\}$

$P[A' \cap B'] = \dfrac{3}{10}$

5. Halla las probabilidades de los sucesos A, B, C, $A \cup B$, $A \cap B$, $A \cap C$, A', $(A \cup B)'$ y $(A \cap B)'$ del ejercicio 2.

$E = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), \ldots, (6, 6)\}$. E tiene 36 casos.

- $A = \{(5, 1), (4, 2), (3, 3), (2, 4), (1, 5)\}$

  $P[A] = \frac{5}{36}$

- $B = \{(4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6), (1, 4), (2, 4), (3, 4), (5, 4), (6, 4)\}$

  $P[B] = \frac{11}{36}$

- $C = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)\}$

  $P[C] = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

- $A \cup B = \{(5, 1), (4, 2), (3, 3), (2, 4), (1, 5), (4, 1), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6), (1, 4), (3, 4), (5, 4), (6, 4)\}$

  $P[A \cup B] = \frac{14}{36} = \frac{7}{18}$

- $A \cap B = \{(4, 2), (2, 4)\}$

  $P[A \cap B] = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$

- $A \cap C = \{(3, 3)\}$

  $P[A \cap C] = \frac{1}{36}$

- $P[A'] = 1 - P[A] = 1 - \frac{5}{36} = \frac{31}{36}$

- $P[(A \cup B)'] = 1 - P[A \cup B] = 1 - \frac{7}{18} = \frac{11}{18}$

- $P[(A \cap B)'] = 1 - P[A \cap B] = 1 - \frac{1}{18} = \frac{17}{18}$

6. Halla las probabilidades de los sucesos A, B, $A \cup B$, $A \cap B$ y A' del ejercicio 3.

$E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$

Hay 28 fichas en el dominó. Así, tendremos que:

$P[0] = \frac{1}{28} = P[12] = P[1] = P[11]$

$P[2] = \frac{2}{28} = \frac{1}{14} = P[3] = P[9] = P[10]$

$P[4] = \frac{3}{28} = P[5] = P[7] = P[8]$

$P[6] = \frac{4}{28} = \frac{1}{7}$

	6	5	4	3	2	1	0
	7	6	5	4	3	2	
	8	7	6	5	4		
	9	8	7	6			
	10	9	8				
	11	10					
	12						

A = "la suma x es número primo" = {2, 3, 5, 7, 11}

$$P[A] = \frac{2}{28} + \frac{2}{28} + \frac{3}{28} + \frac{3}{28} + \frac{1}{28} = \frac{11}{28}$$

B = "la suma x es mayor que 4" = {5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12}

$$P[B] = \frac{3}{28} + \frac{4}{28} + \frac{3}{28} + \frac{3}{28} + \frac{2}{28} + \frac{2}{28} + \frac{1}{28} + \frac{1}{28} = \frac{19}{28}$$

$A \cup B$ = "la suma x es primo o mayor que 4" = {2, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12}

$$P[A \cup B] = \frac{2}{28} + \frac{2}{28} + \frac{3}{28} + \frac{4}{28} + \frac{3}{28} + \frac{3}{28} + \frac{2}{28} + \frac{2}{28} + \frac{1}{28} + \frac{1}{28} = \frac{23}{28}$$

$A \cap B$ = "la suma x es primo y mayor que 4" = {5, 7, 11}

$$P[A \cap B] = \frac{3}{28} + \frac{3}{28} + \frac{1}{28} = \frac{7}{28} = \frac{1}{4}$$

A' = "la suma x no es primo"

$$P[A'] = 1 - P[A] = 1 - \frac{3}{7} = \frac{4}{7}$$

7. **Se extrae una carta de una baraja española. Di cuál es la probabilidad de que sea:**

a) **REY O AS.** **b)** **FIGURA Y OROS.** **c)** **NO SEA ESPADAS.**

a) $P[\text{REY O AS}] = \frac{8}{40} = \frac{1}{5}$

b) $P[\text{FIGURA Y OROS}] = P[\text{FIGURA DE OROS}] = \frac{3}{40}$

c) $P[\text{NO SEA ESPADAS}] = \frac{30}{40} = \frac{3}{4}$

Cálculo de probabilidades en experiencias compuestas

8. **Lanzamos dos dados y anotamos la puntuación del mayor (si coinciden, la de uno de ellos).**

a) Completa la tabla y di las probabilidades de los seis sucesos elementales 1, 2, 3, 4, 5 y 6.

b) Halla la probabilidad de los sucesos:

A: n.° par, B: n.° menor que 4, $A \cap B$.

	⚀	⚁	⚂	⚃	⚄	⚅
⚀	1	2				
⚁	2				5	
⚂						
⚃				4		6
⚄						
⚅		6				

a)

	⚀	⚁	⚂	⚃	⚄	⚅
⚀	**1**	**2**	3	4	5	6
⚁	**2**	2	3	4	**5**	6
⚂	3	3	3	4	5	6
⚃	4	4	4	**4**	5	**6**
⚄	5	5	5	5	5	6
⚅	6	**6**	6	6	6	6

$$P[1] = \frac{1}{36};\ P[2] = \frac{3}{36} = \frac{1}{12};\ P[3] = \frac{5}{36}$$

$$P[4] = \frac{7}{36};\ P[5] = \frac{9}{36} = \frac{1}{4};\ P[6] = \frac{11}{36}$$

b) $P[A] = \frac{3}{36} + \frac{7}{36} + \frac{11}{36} = \frac{21}{36} = \frac{7}{12};\ P[B] = \frac{1}{36} + \frac{3}{36} + \frac{5}{36} = \frac{9}{36} = \frac{1}{4};$

$P[A \cap B] = P[2] = \frac{1}{12}$

9. **a) Tenemos dos barajas de 40 cartas. Sacamos una carta de cada una. ¿Cuál es la probabilidad de que ambas sean 7? ¿Cuál es la probabilidad de que ambas sean figuras (sota, caballo o rey)?**

b) Tenemos una baraja de 40 cartas. Sacamos dos cartas. ¿Cuál es la probabilidad de que ambas cartas sean un 7? ¿Cuál es la probabilidad de que ambas sean figura?

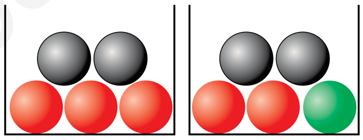
a) $P[7 \text{ y } 7] = \frac{4}{40} \cdot \frac{4}{40} = \frac{1}{100}$; $P[\text{FIGURA y FIGURA}] = \frac{12}{40} \cdot \frac{12}{40} = \frac{9}{100}$

b) $P[7 \text{ y } 7] = \frac{4}{40} \cdot \frac{3}{39} = \frac{12}{1560} = \frac{1}{130}$; $P[\text{FIGURA y FIGURA}] = \frac{12}{40} \cdot \frac{11}{39} = \frac{132}{1560} = \frac{11}{130}$

10. **Lanzamos tres dados. ¿Cuál es la probabilidad de que las tres puntuaciones sean menores que 5?**

$P[\text{las tres menores que } 5] = P[< 5] \cdot P[< 5] \cdot P[< 5] = \frac{4}{6} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{4}{6} = \frac{8}{27}$

11. **Sacamos una bola de cada urna. Calcula la probabilidad de que:**



a) Ambas sean rojas.

b) Ambas sean negras.

c) Alguna sea verde.

a) $P[\text{ROJA y ROJA}] = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{6}{25}$

b) $P[\text{NEGRA y NEGRA}] = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{4}{25}$

c) $P[\text{alguna VERDE}] = P[\text{VERDE}] + P[\text{VERDE}] = 0 + \frac{1}{5} = \frac{1}{5}$

12. **Una urna tiene 3 bolas rojas y 2 verdes. Extraemos dos. Calcula $P[2 \text{ rojas}]$ y $P[2 \text{ verdes}]$.**

$P[2 \text{ ROJAS}] = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{3}{10}$ $\qquad P[2 \text{ VERDES}] = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{10}$

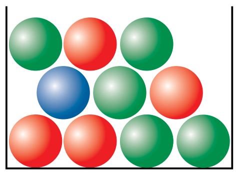
13. **En una bolsa hay 4 bolas rojas, 5 verdes y 1 azul. Extraemos 3 bolas. Calcula la probabilidad de que:**

a) Las tres sean rojas.

b) Las tres sean verdes.

c) Cada una de las tres sea roja o verde.

d) Una de las tres sea azul.



a) R_i = "la bola extraída en la posición i es roja".

$$P[R_1 \cap R_2 \cap R_3] = P[R_1] \cdot P[R_2/R_1] \cdot P[R_3/R_1 \cap R_2] = \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} \cdot \frac{2}{8} = \frac{1}{30}$$

b) V_i = "la bola extraída en la posición i es verde".

$$P[V_1 \cap V_2 \cap V_3] = P[V_1] \cdot P[V_2/V_1] \cdot P[V_3/V_1 \cap V_2] = \frac{5}{10} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{8} = \frac{1}{12}$$

c) S = "cada una de las tres bolas es roja o verde" = "salen 3 rojas" o "salen 2 rojas y 1 verde" o "salen 1 roja y 2 verdes" o "salen 3 verdes".

$P[3 \text{ ROJAS}] = \frac{1}{30}$ (apartado a)).

$P[3 \text{ VERDES}] = \frac{1}{12}$ (apartado b)).

Calculamos $P[2 \text{ ROJAS y } 1 \text{ VERDE}]$:

$P[R_1 \cap R_2 \cap V_3] = \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} \cdot \frac{5}{8} = \frac{1}{12}$

Como hay 3 posibles ordenaciones:

$R_1 \cap R_2 \cap V_3$ $\quad$ $R_1 \cap V_2 \cap R_3$ $\quad$ $V_1 \cap R_2 \cap R_3$

$P[2 \text{ ROJAS y } 1 \text{ VERDE}] = 3 \cdot \frac{1}{12} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$

Razonamos de manera análoga para calcular la probabilidad $P[1 \text{ ROJA Y } 2 \text{ VERDES}]$.

$P[R_1 \cap V_2 \cap V_3] = \frac{4}{10} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} = \frac{2}{5} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{9}$

Como hay 3 posibles ordenaciones:

$R_1 \cap V_2 \cap V_3$ $\quad$ $V_1 \cap R_2 \cap V_3$ $\quad$ $V_1 \cap V_2 \cap R_3$

$P[1 \text{ ROJA y } 2 \text{ VERDES}] = 3 \cdot \frac{1}{9} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$

Luego tendremos que:

$$P[\text{CADA UNA DE LAS TRES BOLAS ES ROJA O VERDE}] = \frac{1}{30} + \frac{1}{12} + \frac{1}{4} + \frac{1}{3} =$$

$$= \frac{2 + 5 + 15 + 20}{60} = \frac{42}{60} = \frac{7}{10}$$

d) S = "CADA UNA DE LAS TRES BOLAS ES ROJA O VERDE"

S' = "UNA DE LAS 3 BOLAS ES AZUL"

$P[S'] = 1 - P[S] = 1 - \frac{7}{10} = \frac{3}{10}$

14. **a) Lanzamos dos dados. ¿Cuál es la probabilidad de no conseguir "ningún 6"? ¿Y la de conseguir "algún 6"?**

b) Responde a las mismas preguntas si lanzamos tres dados.

a) $P[\text{NINGÚN } 6] = P[(\neq 6 \text{ en } 1.^{\circ}) \cap (\neq 6 \text{ en } 2.^{\circ})] = P[\neq 6 \text{ en } 1.^{\circ}] \cdot P[\neq 6 \text{ en } 2.^{\circ}] = \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{25}{36}$

$P[\text{ALGÚN } 6] = 1 - \frac{25}{36} = \frac{11}{36}$

b) Análogamente:

$P[\text{NINGÚN } 6] = \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{125}{216}$

$P[\text{ALGÚN } 6] = 1 - \frac{125}{216} = \frac{91}{216}$

Página 267

Tablas de contingencia

15. **En un centro escolar hay 1 000 alumnos y alumnas repartidos así:**

	CHICOS	CHICAS
USAN GAFAS	147	135
NO USAN GAFAS	368	350

Llamamos:

A ↔ chicas, O ↔ chicos

G ↔ tiene gafas, no G ↔ no tiene gafas

Calcula:

a) P **[A],** P **[O],** P **[G],** P **[no G]**

b) Describe los siguientes sucesos y calcula sus probabilidades:

A y G, O y no G, A / G, G / A, G / O

a) $P[\text{A}] = \frac{135 + 350}{1000} = \frac{485}{1000} = 0{,}485$ $\quad P[\text{O}] = 1 - P[\text{A}] = 1 - 0{,}485 = 0{,}515$

$P[\text{G}] = \frac{147 + 135}{1000} = \frac{282}{1000} = 0{,}282$ $\quad P[\text{no G}] = 1 - P[\text{G}] = 1 - 0{,}282 = 0{,}718$

b) A y G → Chica con gafas. $P[\text{A y G}] = \frac{135}{1000} = 0{,}135$

O y no G → Chico sin gafas. $P[\text{O y no G}] = \frac{368}{1000} = 0{,}368$

A / G → De los que llevan gafas, cuántas son chicas. $P[\text{A / G}] = \frac{135}{282} = 0{,}479$

G / A → De todas las chicas, cuántas llevan gafas. $P[\text{G / A}] = \frac{135}{485} = 0{,}278$

G / O → De todos los chicos, cuántos llevan gafas. $P[\text{G / O}] = \frac{147}{515} = 0{,}285$

16. **En una empresa de 200 empleados hay 100 hombres y 100 mujeres. Sabiendo que 40 hombres y 35 mujeres trabajan con el sistema MAC y los demás lo hacen con PC:**

a) Construye una tabla de contingencia con esos datos.

b) Si elegimos un empleado al azar, calcula la probabilidad de que sea hombre y trabaje con PC: P **[H y PC]**

c) Calcula también: P **[M y MAC],** P **[M / MAC],** P **[MAC / M]**

a)

	HOMBRES	MUJERES
MAC	40	35
PC	60	65

b) $P[\text{H y PC}] = \frac{60}{200} = 0{,}3$

c) $P[\text{M y MAC}] = \frac{35}{200} = 0{,}175$ $\quad P[\text{M / MAC}] = \frac{35}{75} = 0{,}467$

$P[\text{MAC / M}] = \frac{35}{100} = 0{,}35$

17. **Los 200 socios de un club de jubilados se distribuyen de la forma que se indica en la tabla.**

	HOMBRES	MUJERES
JUEGAN AL DOMINÓ	76	34
NO JUEGAN AL DOMINÓ	13	77

Si se elige una persona al azar, calcula la probabilidad de que:

a) Sea un hombre.

b) Sea una mujer.

c) Juegue al dominó.

d) Sea una mujer y practique el dominó.

e) Sea un hombre que no juegue al dominó.

f) Juegue al dominó, sabiendo que es hombre.

g) Sea mujer, sabiendo que no juega al dominó.

a) $P[\text{H}] = \dfrac{76+13}{200} = \dfrac{89}{200} = 0{,}445$

b) $P[\text{M}] = 1 - P[\text{H}] = 0{,}555$

c) $P[\text{D}] = \dfrac{76+34}{200} = \dfrac{110}{200} = 0{,}55$

d) $P[\text{M y D}] = \dfrac{34}{200} = 0{,}17$

e) $P[\text{H y no D}] = \dfrac{13}{200} = 0{,}065$

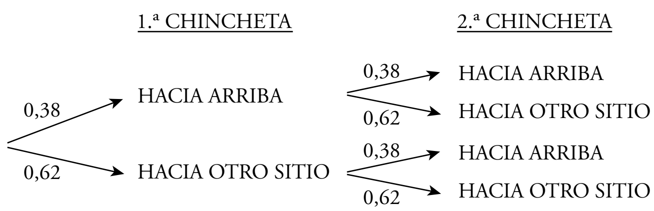
f) $P[\text{D / H}] = \dfrac{76}{89} = 0{,}854$

g) $P[\text{M / no D}] = \dfrac{77}{90} = 0{,}856$

Aplica lo aprendido

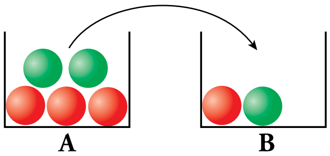
18. **Después de tirar muchas veces un modelo de chinchetas, sabemos que la probabilidad de que una cualquiera caiga con la punta hacia arriba es 0,38.**

Si tiramos dos chinchetas, ¿cuál será la probabilidad de que las dos caigan de distinta forma?



$P[\text{DISTINTA FORMA}] = 0{,}38 \cdot 0{,}62 + 0{,}62 \cdot 0{,}38 = 0{,}47$

19. **Sacamos una bola de A, la echamos en B, removemos y sacamos una de B.**



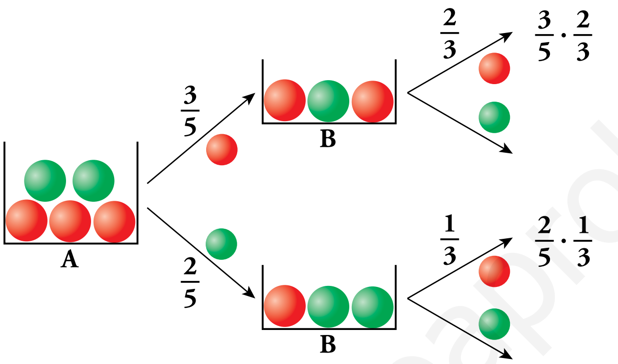
Calcula:

a) P **[1.ª roja y 2.ª roja]** **b)** P **[1.ª roja y 2.ª verde]**

c) P **[2.ª roja / 1.ª verde]** **d)** P **[2.ª roja / 1.ª roja]**

e) P **[2.ª roja]** **f)** P **[2.ª verde]**

e) Para calcular esta probabilidad, ten en cuenta el diagrama.



a) $P[1.^a \text{ roja y } 2.^a \text{ roja}] = \frac{3}{5}\cdot\frac{2}{3} = \frac{2}{5}$

b) $P[1.^a \text{ roja y } 2.^a \text{ verde}] = \frac{3}{5}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{5}$

c) $P[2.^a \text{ roja } / \ 1.^a \text{ verde}] = \frac{1}{3}$

d) $P[2.^a \text{ roja } / \ 1.^a \text{ roja}] = \frac{2}{3}$

e) $P[2.^a \text{ roja}] = \frac{3}{5}\cdot\frac{2}{3} + \frac{2}{5}\cdot\frac{1}{3} = \frac{8}{15}$

f) $P[2.^a \text{ verde}] = \frac{3}{5}\cdot\frac{1}{3} + \frac{2}{5}\cdot\frac{2}{3} = \frac{7}{15}$

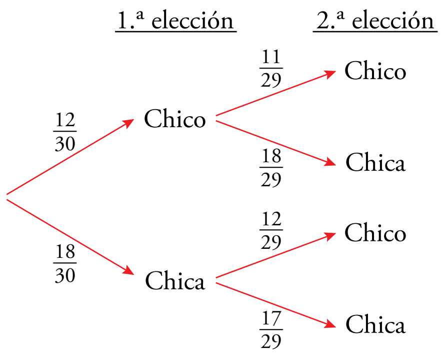
20. **En una clase hay 12 chicos y 18 chicas. Elegimos al azar dos estudiantes de esa clase.**

Calcula la probabilidad de que:

a) Los dos sean chicos.

b) Sean dos chicas.

c) Sean un chico y una chica.



a) $P[2 \text{ CHICOS}] = \frac{12}{30}\cdot\frac{11}{29} = \frac{22}{145}$

b) $P[2 \text{ CHICAS}] = \frac{18}{30}\cdot\frac{17}{29} = \frac{51}{145}$

c) $P[1 \text{ CHICO y } 1 \text{ CHICA}] = \frac{12}{30}\cdot\frac{18}{29} + \frac{18}{30}\cdot\frac{12}{29} = 2\cdot\frac{12}{30}\cdot\frac{18}{29} = \frac{72}{145}$

21. **Tiramos dos dados correctos (verde y rojo). Di cuál es la probabilidad de obtener:**

a) En los dos, la misma puntuación.

b) Un 6 en alguno de ellos.

c) En el rojo, mayor puntuación que en el verde.

a) P[LOS DOS IGUALES] $= \dfrac{1}{6}$

b) P[NINGÚN 6] $= \dfrac{5}{6} \cdot \dfrac{5}{6} = \dfrac{25}{36}$

P[ALGÚN 6] $= 1 - \dfrac{25}{36} = \dfrac{11}{36}$

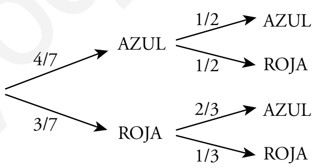
c) P[DISTINTA PUNTUACIÓN] $= 1 - P$[LOS DOS IGUALES] $= 1 - \dfrac{1}{6} = \dfrac{5}{6}$

La puntuación distinta puede ser porque el dado rojo tiene mayor puntuación o viceversa, pero con igual probabilidad.

Así:

P[MAYOR PUNTUACIÓN EN ROJO] $= \dfrac{5}{6} : 2 = \dfrac{5}{12}$

22. **Se extraen dos bolas de esta bolsa. Calcula la probabilidad de que ambas sean del mismo color.**



P[AZUL y AZUL] $= \dfrac{4}{7} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{2}{7}$

P[ROJA y ROJA] $= \dfrac{3}{7} \cdot \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{7}$

P[AMBAS DEL MISMO COLOR] $= \dfrac{2}{7} + \dfrac{1}{7} = \dfrac{3}{7}$

Página 268

Resuelve problemas

23. **En una bolsa hay bolas de colores, pero no sabemos cuántas ni qué colores tienen. En 1 000 extracciones (devolviendo la bola cada vez) hemos obtenido bola blanca en 411 ocasiones, bola negra en 190, bola verde en 179 y bola azul en 220.**

Al hacer una nueva extracción, di qué probabilidad asignarías a:

a) Sacar bola blanca.

b) No sacar bola blanca.

c) Sacar bola verde o azul.

d) No sacar bola negra ni azul.

e) Si en la bolsa hay 22 bolas, ¿cuántas estimas que habrá de cada uno de los colores?

Como se han hecho 1 000 extracciones:

$P[\text{BOLA BLANCA}] = \dfrac{411}{1000} = 0{,}411$ $\qquad$ $P[\text{BOLA VERDE}] = \dfrac{179}{1000} = 0{,}179$

$P[\text{BOLA NEGRA}] = \dfrac{190}{1000} = 0{,}19$ $\qquad$ $P[\text{BOLA AZUL}] = \dfrac{220}{1000} = 0{,}22$

a) $P[\text{BOLA BLANCA}] = 0{,}411$

b) $P[\text{NO BOLA BLANCA}] = 1 - 0{,}411 = 0{,}589$

c) $P[\text{BOLA VERDE O AZUL}] = 0{,}179 + 0{,}22 = 0{,}399$

d) $P[\text{NO BOLA NEGRA NI AZUL}] = 1 - (0{,}19 + 0{,}22) = 0{,}59$

e) Si hay 22 bolas:

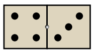
- El 41 % son blancas $\rightarrow$ $22 \cdot 0{,}41 = 9$ bolas blancas
- El 19 % son negras $\rightarrow$ $22 \cdot 0{,}19 = 4$ bolas negras
- El 18 % son verdes $\rightarrow$ $22 \cdot 0{,}18 = 4$ bolas verdes
- El 22 % son azules $\rightarrow$ $22 \cdot 0{,}22 = 5$ bolas azules

24. **Ana tira un dado y Eva lo tira después. ¿Cuál es la probabilidad de que la puntuación de Eva sea superior a la de Ana?**

EVA \ ANA	1	2	3	4	5	6
1	1 - 1	1 - 2	1 - 3	1 - 4	1 - 5	1 - 6
2	2 - 1	2 - 2	2 - 3	2 - 4	2 - 5	2 - 6
3	3 - 1	3 - 2	3 - 3	3 - 4	3 - 5	3 - 6
4	4 - 1	4 - 2	4 - 3	4 - 4	4 - 5	4 - 6
5	5 - 1	5 - 2	5 - 3	5 - 4	5 - 5	5 - 6
6	6 - 1	6 - 2	6 - 3	6 - 4	6 - 5	6 - 6

$P[\text{PUNTUACIÓN DE EVA SUPERIOR A LA DE ANA}] = \dfrac{15}{36} = \dfrac{5}{12}$

25. **Sacamos dos fichas de un dominó. ¿Cuál es la probabilidad de que en ambas la suma de sus puntuaciones sea un número primo (2, 3, 5, 7 u 11)?**


4 + 3 = 7 es primo

Tenemos: $A = \{(1, 1), (2, 0), (1, 2), (3, 0), (1, 4), (2, 3), (5, 0), (6, 1), (5, 2), (3, 4), (5, 6)\}$

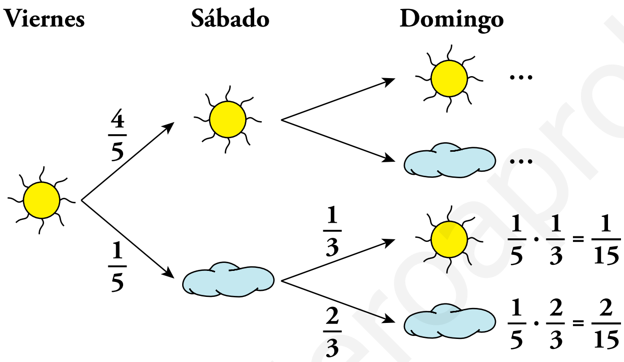
$P[A] = \frac{11}{28}$. Por tanto, $P[\text{en ambas la suma es un primo}] = \frac{11}{28} \cdot \frac{10}{27} = \frac{110}{756} = 0{,}146$.

26. **En cierto lugar se sabe que si hoy hace sol, la probabilidad de que mañana también lo haga es 4/5.**

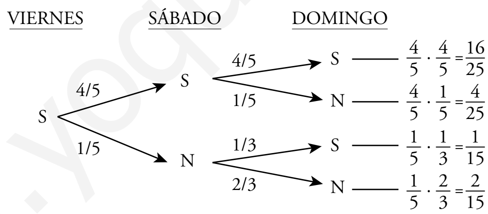
Pero si hoy está nublado, la probabilidad de que mañana lo siga estando es 2/3.

Si hoy es viernes y hace sol, ¿cuál es la probabilidad de que el domingo también haga sol?

Para resolverlo, completa el diagrama en tu cuaderno y razona sobre él:



Hacemos un diagrama en árbol:



$P[\text{DOMINGO SOL}] = P[\text{VIERNES S, SÁBADO N, DOMINGO S}] +$

$+ P[\text{VIERNES S, SÁBADO S, DOMINGO S}] =$

$= \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3} + \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5} = \frac{1}{15} + \frac{16}{25} = \frac{53}{75} = 0{,}7$

27. **Javier tiene 4 monedas de cinco céntimos, 3 de veinte y 2 de un euro. Si coge dos al azar, halla la probabilidad de estos sucesos:**

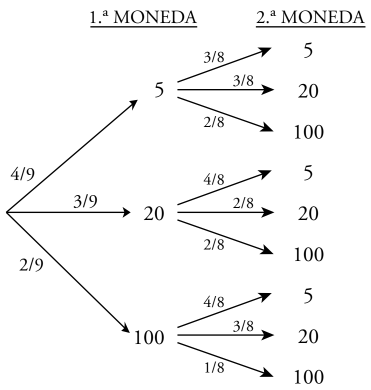
a) Que las dos sean de cinco céntimos.

b) Que ninguna sea de un euro.

c) Que saque 1,20 €.

d) Que saque más de 30 céntimos.

En el diagrama de árbol, las monedas aparecen en céntimos. 1 € = 100 cént.



a) $P[\text{DOS DE 5 CÉNT.}] = \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{8} = \frac{1}{6}$

b) $P[\text{NINGUNA DE 1 €}] = \frac{4}{9}\left(\frac{3}{8} + \frac{3}{8}\right) + \frac{3}{9}\left(\frac{4}{8} + \frac{2}{8}\right) =$

$= \frac{7}{9} \cdot \frac{6}{8} = \frac{7}{12}$

c) $P[\text{SACAR 1,20 €}] = P[\text{100,20 CÉNT.}] =$

$= \frac{3}{9} \cdot \frac{2}{8} + \frac{2}{9} \cdot \frac{3}{8} = \frac{1}{6}$

d) $P[> 30 \text{ CÉNT.}] = \frac{4}{9} \cdot \frac{2}{8} + \frac{3}{9} \cdot \left(\frac{2}{8} + \frac{2}{8}\right) + \frac{2}{9} =$

$= \frac{36}{72} = \frac{1}{2}$

NOTA. Elegir "al azar" no significa que todos los casos tengan la misma probabilidad. ¿Cómo se elige al azar una moneda de un conjunto de 9? Si la elección se hace "por insaculación" (es decir, metiéndolas en una bolsa y sacando la primera que se toque), entonces es posible que las monedas grandes tengan mayor probabilidad de ser extraídas que las pequeñas. En la resolución se ha supuesto que la probabilidad es la misma para todos los tipos de monedas.

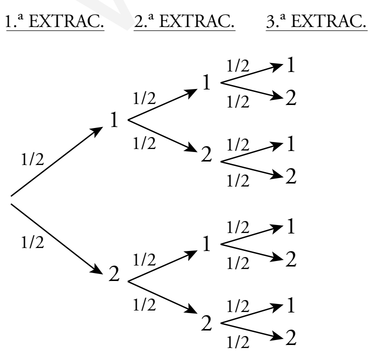
28. **En una bolsa hay 4 bolas, dos de ellas están marcadas con un 1 y las otras dos con un 2. Se hacen tres extracciones y se anotan los resultados en orden.**

Calcula la probabilidad de que el número formado sea el 121, suponiendo que la experiencia sea:

a) Con reemplazamiento.

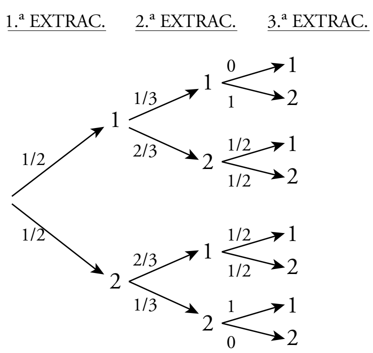
b) Sin reemplazamiento.

a)



$P[121] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$

b)



$P[121] = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$

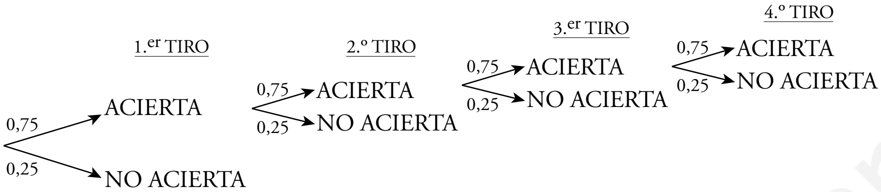
29. **Un juego consiste en tirar a canasta desde la línea de personal consecutivamente hasta que se comete un fallo. Se anotan tantos puntos como canastas encestadas. Por ejemplo: acierto-acierto-acierto-fallo son tres puntos.**

Para un jugador que habitualmente encesta el 75 % de las personales, calcula la probabilidad de que obtenga:

a) 0 puntos **b) 1 punto** **c) 2 puntos**

d) 3 puntos **e) menos de 5 puntos** **f) 6 o más puntos**

P[ACERTAR] = 0,75



a) P[0 PUNTOS] = 0,25

b) P[1 PUNTO] = 0,75 · 0,25 = 0,19

c) P[2 PUNTOS] = 0,75 · 0,75 · 0,25 = 0,14

d) P[3 PUNTOS] = 0,75 · 0,75 · 0,75 · 0,25 = 0,105

e) P[MENOS DE 5 PUNTOS] = P[0 PUNTOS] + P[1 PUNTO] + P[2 PUNTOS] + P[3 PUNTOS] +

+ P[4 PUNTOS] = 0,25 + 0,19 + 0,14 + 0,105 + 0,079 = 0,764

puesto que: P[4 PUNTOS] = 0,75 · 0,75 · 0,75 · 0,75 · 0,25 = 0,079

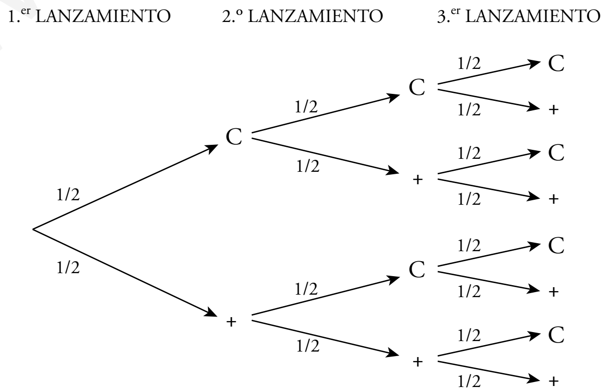
f) P[6 O MÁS PUNTOS] = 1 – P[MENOS DE 6 PUNTOS] = 1 – 0,823 = 0,177

puesto que: P[MENOS DE 6 PUNTOS] = P[MENOS DE 5 PUNTOS] + P[5 PUNTOS] =

= 0,764 + $0{,}75^5$ · 0,25 = 0,823

30. **Matías y Elena juegan con una moneda. La lanzan tres veces y si sale dos veces cara y una vez cruz o dos veces cruz y una vez cara, gana Matías. Si sale tres veces cara o tres veces cruz, gana Elena.**

Calcula la probabilidad que tiene cada uno de ganar.



P[GANE ELENA] = P[C, C, C] + P[+, +, +] = $\frac{2}{8} = \frac{1}{4}$

P[GANE MATÍAS] = P[C, C, +] + P[C, +, C] + P[+, C, C] + P[+, +, C] +

+ P[+, C, +] + P[C, +, +] = $\frac{6}{8} = \frac{3}{4}$

31. **Una familia tiene 4 hijos. Si la probabilidad de nacer niña es 0,51 y la de ser niño 0,49:**

a) ¿Cuál es la probabilidad de que sean todos varones?

b) Calcula la probabilidad de que todas sean mujeres.

c) ¿Qué probabilidad hay de que haya alguna mujer?

d) ¿Qué probabilidad hay de que haya dos chicos y dos chicas?

a) $P[\text{4 VARONES}] = 0{,}49^4 = 0{,}058$

b) $P[\text{4 MUJERES}] = 0{,}51^4 = 0{,}068$

c) $P[\text{ALGUNA MUJER}] = 1 - P[\text{NINGUNA MUJER}] = 1 - P[\text{4 VARONES}] = 2 - 0{,}058 = 0{,}942$

d) $P[\text{MMHH}] = 0{,}51 \cdot 0{,}51 \cdot 0{,}49 \cdot 0{,}49 = 0{,}0624$

Pero hay 6 formas posibles de conseguir 2 hombres y 2 mujeres:

MMHH MHMH MHHM HMMH HMHM HHMM

Por tanto, la probabilidad pedida es:

$P[\text{2 MUJERES y 2 HOMBRES}] = 6 \cdot 0{,}0624 = 0{,}374$

32. **¿Cuántas quinielas hay que hacer para asegurarse ocho resultados? Una persona que siga esa estrategia rellena los restantes al azar, ¿qué probabilidad tiene de acertar los 14?**

$VR_{3,\,8} = 3^8 = 6\,561$ quinielas hay que rellenar para acertar 8 resultados.

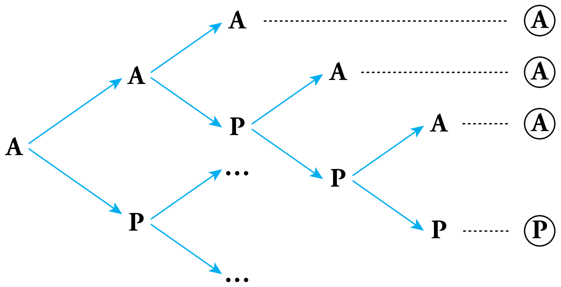
Para cada una de las 6561 quinielas rellenas tengo $VR_{3,\,6} = 3^6 = 729$ formas de completarlas para cubrir todas las posibilidades. Solo una de ellas será la correcta. Así:

$P[\text{ACERTAR 14 / RELLENO TODAS LAS DE 8 POSIBLES}] = \dfrac{1}{729}$

Página 269

33. **Andrés y Pablo están jugando al tenis. Ambos son igual de buenos. El partido es a cinco sets y el primero lo ha ganado Andrés.**

¿Cuál es la probabilidad de que acabe ganando Pablo?

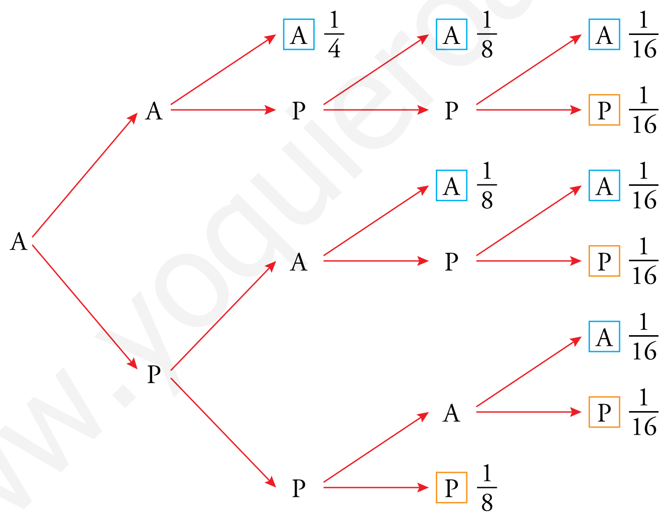


Completa en tu cuaderno el diagrama y utilízalo para resolver el problema.

$$P[\text{GANA ANDRÉS}] = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} =$$

$$= \frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16} = \frac{1}{4}+\frac{2}{8}+\frac{2}{16} = \frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8} =$$

$$= \frac{2}{4}+\frac{1}{8} = \frac{4}{8}+\frac{1}{8} = \frac{5}{8} = 0{,}625$$



$$P[\text{GANA PABLO}] = \frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{8} = \frac{5}{16}$$

34. **Repite el problema anterior suponiendo que en cada set, la probabilidad de que lo gane Pablo es 0,6.**

$P[\text{GANA PABLO}] = (0{,}4)\cdot(0{,}6)^3 + (0{,}4)\cdot(0{,}6)^3 + (0{,}4)\cdot(0{,}6)^3 + 0{,}6^3 = 0{,}4752$

35. **Cinco amigos y amigas van juntos al cine y se reparten los asientos (consecutivos) al azar.**

¿Cuál es la probabilidad de que Alberto quede junto a Julia?

1	2	3	4	5

Casos posibles $\to$ $P_5 = 5! = 120$ formas diferentes de sentarse los cinco en línea.

Casos favorables $\to$ aquellos en los que Alberto y Julia están juntos.

Podrán estar en:

1, 2 o 2, 3 o 3, 4 o 4, 5 $\to$ 4 posibilidades

Hay 2 formas diferentes por cada posibilidad anterior, pues puede ser A - J o J - A.

Hay, por tanto, $4 \cdot 2 = 8$ opciones diferentes.

Para cada una de esas opciones las otras 3 personas podrán ocupar los 3 asientos restantes de $P_3 = 3! = 6$ formas distintas.

Luego hay un total de $8 \cdot 6 = 48$ formas diferentes de sentarse los 5 amigos de manera que Alberto y Julia estén juntos.

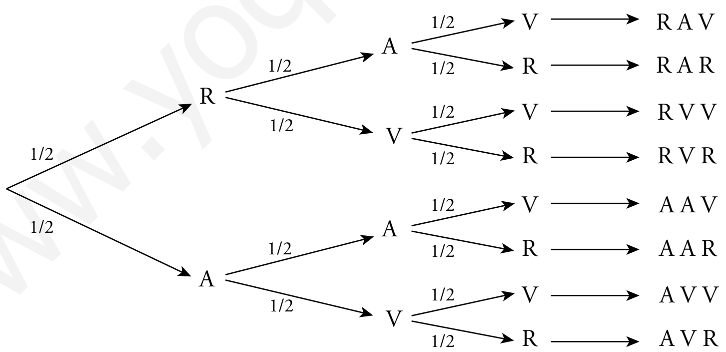
Así:

$P[\text{A y J juntos}] = \dfrac{48}{120} = 0{,}4$

36. **Tenemos tres cartulinas. La primera tiene una cara roja (R), y la otra, azul (A); la segunda A y verde (V), y la tercera, V y R.**

Las dejamos caer sobre una mesa. ¿Qué es más probable, que dos de ellas sean del mismo color o que las tres sean de colores diferentes?

Hacemos un diagrama en árbol:



$P[\text{2 IGUALES}] = \dfrac{6}{8} = \dfrac{3}{4}$

$P[\text{TODAS DISTINTAS}] = \dfrac{2}{8} = \dfrac{1}{4}$

Es más probable que salgan dos colores iguales.

37. **Si juegas un boleto de la Lotería Primitiva, ¿qué probabilidad tienes de ganar el primer premio? (En un boleto se marcan 6 números entre el 1 y el 49).**

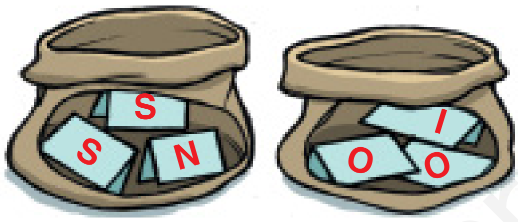
Casos posibles: $C_{49,\,6} = \dfrac{49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$

Casos favorables: 1

$$P[\text{GANAR EL PRIMER PREMIO}] = \dfrac{1}{\dfrac{49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}} = \dfrac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44} =$$

$$= \dfrac{1}{13\,983\,816}$$

38. **Extraemos una tarjeta de cada una de estas bolsas:**



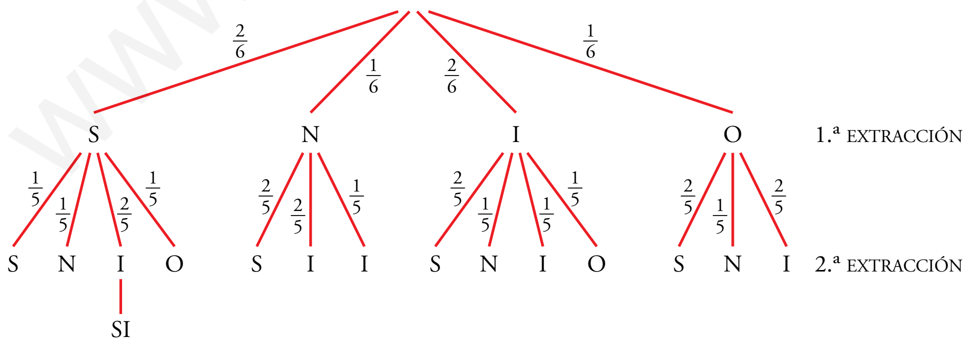
a) Calcula la probabilidad de obtener una S y una I, "SI".

b) ¿Cuál es la probabilidad de obtener "NO"?

	S	S	N
I	SI	SI	NI
O	SO	SO	NO
O	SO	SO	NO

a) $P[\text{SI}] = \dfrac{2}{9}$ b) $P[\text{NO}] = \dfrac{2}{9}$

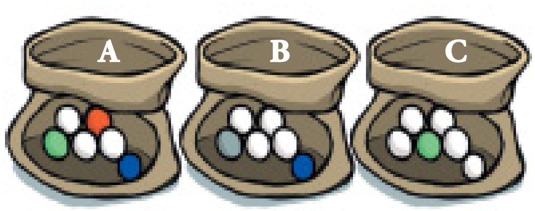
39. **En una bolsa tenemos las letras S, S, N, I, I, O. Sacamos dos letras. ¿Cuál es la probabilidad de que con ellas se pueda escribir SI?**

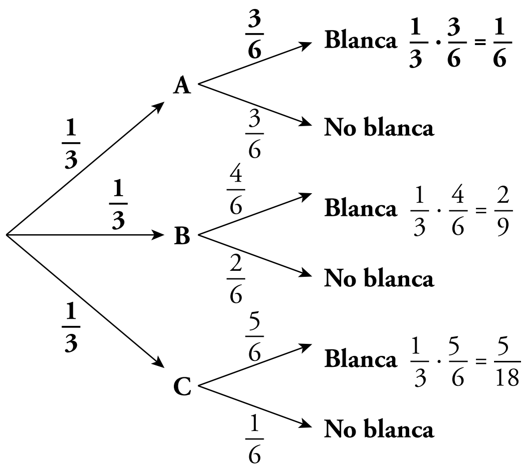


$P[\text{SI}] = \dfrac{2}{6} \cdot \dfrac{2}{5} = \dfrac{2}{15}$

Problemas "+"

40. **¿Cuál es la probabilidad de obtener bola blanca al elegir al azar con probabilidad 1/3 una de estas bolsas y extraer de ella una bola?**





$$P[\text{BLANCA}] = \frac{1}{6} + \frac{2}{9} + \frac{5}{18} = \frac{12}{18} = \frac{2}{3}$$

41. **Lanzamos tres dados y anotamos la mayor puntuación. Calcula la probabilidad de que sea 5.**

Al tirar 3 dados, el número de posibilidades (casos posibles) es $6^3 = 216$. Vamos a contar en cuántas de ellas la mayor puntuación es 5 (hay algún 5 pero ningún 6). He aquí los resultados:

PUNTUACIONES	1	1	1	1	1	2	2	2	2	3	3	3	4	4	5	
	1	2	3	4	5	2	3	4	5	3	4	5	4	5	5	
	5	5	5	5	5	2	5	5	5	5	5	5	5	5	5	
POSIBILIDADES	3	6	6	6	3	3	6	6	3	3	6	3	3	3	1	TOTAL: 61

El recuento lo hemos organizado ordenando las tres puntuaciones de menor a mayor. A cada combinación le hemos asignado el número de ordenaciones que se pueden dar con esos resultados. Por ejemplo:

1 1 5   1 5 1   5 1 1 $\rightarrow$ Son 3 posibilidades.

Esto ocurre siempre que haya dos puntuaciones iguales y otra distinta. Si las tres puntuaciones son distintas, hay 6 ordenaciones:

1 2 5   2 1 5   5 1 2

1 5 2   2 5 1   5 2 1

Si las tres puntuaciones coinciden, obviamente solo hay una posible ordenación.

El total de posibilidades es 61. Por tanto, la probabilidad de que al lanzar tres dados la mayor puntuación sea 5 es:

$$P[\text{LA MAYOR ES UN } 5] = \frac{61}{216}$$

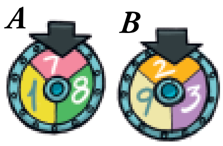
42. **Lanzamos tres dados y anotamos la puntuación mediana. Calcula la probabilidad de que sea 5.**

Procedemos de forma similar a como lo hemos hecho en el ejercicio anterior.

PUNTUACIÓN	1 5 5	2 5 5	3 5 5	4 5 5	5 5 5	1 5 6	2 5 6	3 5 6	4 5 6	5 5 6	
POSIBILIDADES	3	3	3	3	1	6	6	6	6	3	TOTAL: 40

$P[\text{EL MEDIANO ES } 5] = \dfrac{40}{216} = \dfrac{5}{27}$

43. **Se hace girar cada una de estas ruletas, y gana la que consiga la puntuación más alta.**



Calcula la probabilidad de que gane A y la de que gane B.

Modifica las puntuaciones de la ruleta A para que le gane a la B, de modo que:

— Sus puntuaciones sumen 15.

— Los números sean distintos de los de B.

		A		
		1	**7**	**8**
B	**2**	1-2	7-2	8-2
	3	1-3	7-3	8-3
	9	1-9	7-9	8-9

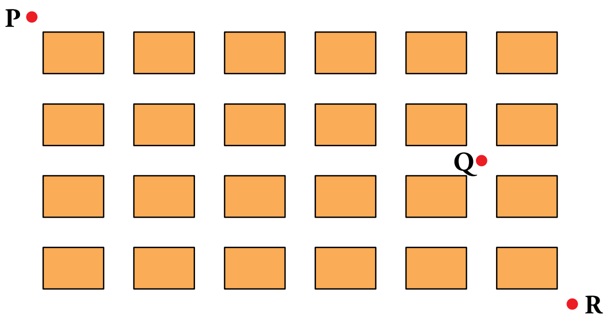
$P[\text{GANE } A] = \dfrac{4}{9}$

$P[\text{GANE } B] = \dfrac{5}{9}$

Si A tiene los números 4, 5 y 6 (suman 15 y son diferentes de los de B):

$P[\text{GANE } A] = \dfrac{6}{9} = \dfrac{2}{3}$

44. **Lupe va a ir de P a R. Sergio decide esperarla en Q. ¿Cuál es la probabilidad de que se encuentren?**



Casos posibles → caminos posibles de P a R

Casos favorables → caminos posibles de P a R que pasan por Q

Casos posibles $\rightarrow$ $C_{10,\,4} = \dfrac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 210$ caminos

Caminos de P a Q $\rightarrow$ $C_{7,\,2} = \dfrac{7 \cdot 6}{2 \cdot 1} = 21$ caminos

Caminos de Q a R $\rightarrow$ $C_{3,\,2} = \dfrac{3 \cdot 2}{2 \cdot 1} = 3$ caminos

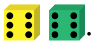
Caminos de P a R pasando por Q = 21 · 3 = 63 caminos

$P[\text{SE ENCUENTRAN}] = \dfrac{63}{210} = \dfrac{3}{10}$

45. **Tiramos tres dados. Calcula estas probabilidades:**

a) El valor mediano es 6. **b) La suma es 10.** **c) El menor es 2.**

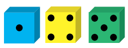
a) Casos favorables al suceso "6" = "EL MEDIANO ES 6". Los contamos:

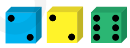
- a . Donde a puede ser 1, 2, 3, 4, 5. Son 5 casos.
  Cada uno admite 3 ordenaciones (a 6 6; 6 a 6 y 6 6 a). Hay, pues, 15 casos.
- . Solo 1 caso.

En total hay 16 casos favorables. $P[6] = \dfrac{16}{216} = 0{,}074$

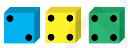
b) Para obtener suma 10 necesito:

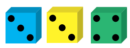
 6 colocaciones diferentes

 6 colocaciones diferentes

 3 colocaciones diferentes

 6 colocaciones diferentes

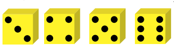
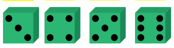
 3 colocaciones diferentes

 3 colocaciones diferentes

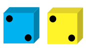
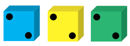
Luego: casos favorables = 6 · 3 + 3 · 3 = 27

Así: $P[\text{SUMA } 10] = \dfrac{27}{216} = \dfrac{1}{8}$

c) Para que el menor sea 2 puede ocurrir:

-  $a\,b$ { a = , b =  } 4 · 4 = 16 posibilidades

  De ellas { 4 (números repetidos) tienen 3 posibles ordenaciones. 12 (sin repeticiones) tienen 3! = 6 posibles ordenaciones. }

  Así, hay 4 · 3 + 12 · 6 = 12 + 72 = 84 casos.
-  a $\rightarrow$ 4 posibilidades · 3 ordenaciones = 12 casos
-  $\rightarrow$ 1 caso

Total casos favorables = 84 + 12 + 1 = 97

$P[\text{EL MENOR ES } 2] = \dfrac{97}{216}$

46. **Una oposición consta de 50 temas. Salen 3 de ellos al azar y se elige uno. Un opositor sabe 30. ¿Cuál es la probabilidad de que salga uno de los que sabe?**

Acaso te convenga calcular la probabilidad de que no salga ninguno que se sepa.

A = "al menos sale uno de los que sabe".

A' = "no sale ninguno de los que sabe".

$P[A'] = P[1.^{\text{o}}\ \text{NO SABE}] \cdot P[2.^{\text{o}}\ \text{NO SABE} / 1.^{\text{o}}\ \text{NO SABE}] \cdot P[3.^{\text{o}}\ \text{NO SABE} / 1.^{\text{o}}\ \text{Y}\ 2.^{\text{o}}\ \text{NO SABE}] =$

$$= \frac{20}{50} \cdot \frac{19}{49} \cdot \frac{18}{48} = 0{,}06$$

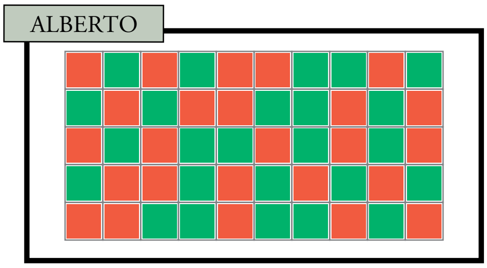
$P[A] = 1 - P[A'] = 1 - 0{,}06 = 0{,}94$

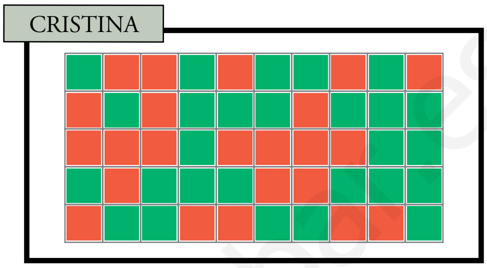
Página 270

Lee y comprende

Tarea con trampa

Alberto y Cristina rellenan, para un trabajo de clase, un tablero de 50 casillas del siguiente modo: avanzando de izquierda a derecha y de arriba abajo, se decide a cara o cruz si la casilla se colorea de rojo o de verde.



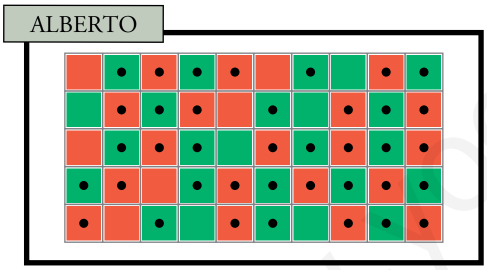


Pero el caso es que uno ha hecho el trabajo concienzudamente, tirando una moneda por cada casilla. Y el otro, con trampa, lo ha rellenado en un momento, caprichosamente.

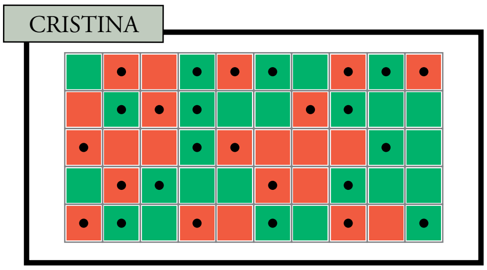
Sin embargo, el profesor ha puesto mala nota al que no ha trabajado. ¿Cómo lo ha descubierto?

- **¿Sabrías tú cómo descubrir al que ha hecho la trampa?**

  Señalamos con un punto las casillas que tienen un color diferente de la anterior:



Cambios de color: 38
Cambios posibles: 49
Frecuencia relativa: 38/49 → 78 %



Cambios de color: 26
Cambios posibles: 49
Frecuencia relativa: 26/49 → 53 %

Ha hecho trampas Alberto, porque su frecuencia relativa (78 %) se separa mucho del teórico 50 %.

Comprende y exprésate

Azar y esperanza

- **¿Cuál sería la esperanza del juego cambiando un poco el enunciado?**

  "Tiramos un dado. Si sale menos de tres, ganas 6 €; en caso contrario, pagas 3 € a la banca".

  De cada seis tiradas ganarás en dos y perderás en cuatro: 6 € · 2 – 3 € · 4 = 12 – 12 = 0

  Pero en este caso la esperanza es 0 y, por tanto, el juego es equitativo, pues, a la larga, ni ganarás ni perderás.

- **¿Qué dirías de un juego de lotería que por cada 1 000 euros vendidos entrega 800 euros en premios?**

  Este juego no es equitativo, pues de cada 1 000 € siempre hay 200 que no se entregan en premios.

  Su esperanza será negativa: siempre gana quien vende los números.

Página 271

Entrénate resolviendo problemas

- **Raquel es una chica de 30 años, bastante enérgica.**

  Estudió Matemáticas y acabó entre los primeros de su promoción.

  Cuando era estudiante militó en movimientos sociales, especialmente en grupos ecologistas y contra la discriminación.

  ¿Cuál de estas dos afirmaciones te parece más probable?

  a) Raquel trabaja en un banco.

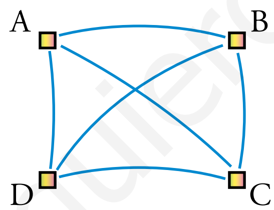
  b) Raquel trabaja en un banco y es una activa militante feminista.

  A primera vista, y por las condiciones iniciales, parece que b) es la opción más aceptable, pero hemos de observar que b) contiene la condición de a) y otra más. Por tanto, la probabilidad de que ocurra b) siempre será menor que la de a).

- **¿Cuántos tramos de carretera son necesarios para comunicar cuatro poblaciones de forma que desde cada una se pueda llegar a cualquier otra sin pasar por una tercera?**

  ¿Y para comunicar cinco poblaciones? ¿Y para comunicar n poblaciones?

  - Para cuatro poblaciones:

    Desde cada población hay que construir un tramo de carretera hacia las otras tres ($4 \cdot 3 = 12$).

    De esta forma contamos cada tramo dos veces, el que va de una población A a otra B y el que va de B a A. Hemos de dividir por 2.

    Para cuatro poblaciones se necesitan $\frac{4 \cdot 3}{2} = 6$ tramos de carretera.

  - Para cinco poblaciones $\rightarrow$ $\frac{5 \cdot 4}{2} = 10$ tramos de carretera.

  - Para n poblaciones $\rightarrow$ $\frac{n \cdot (n-1)}{2}$ tramos de carretera.

- **Estás junto a una fuente y dispones de un cántaro de 10 litros y otro de 6 litros.**

  a) ¿Cómo te las ingeniarías para medir, exactamente, 2 litros de agua?

  b) ¿Qué cantidades distintas puedes medir con los cántaros de que dispones?

a)

10 litros	6 litros	
10	0	Llenamos el de 10 litros y vaciamos su contenido en el de 6 *l*.
4	6	Quedan 4 y 6 litros. Vaciamos el envase de 6 *l*.
4	0	Quedan 4 y 0 litros. Ponemos los 4 *l* en el envase de 6 *l*.
0	4	Quedan 0 y 4 litros. Llenamos el de 10 litros.
10	4	Hay 10 y 4 litros. Con el de 10 *l* rellenamos el de 6 litros.
8	6	Quedan 8 y 6 litros. Vaciamos el de 6 litros.
8	0	Quedan 8 y 0 *l*. Llenamos el de 6 *l* con el contenido del de 10.
2	6	Quedan 2 y 6 litros. Ya hemos conseguido los 2 litros.

b) Se pueden conseguir 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14 y 16 litros.

Autoevaluación

1. Tenemos una bolsa con cuatro bolas numeradas: 0, 1, 2 y 3. Y disponemos de un dado normal. Extraemos una bola de la bolsa, lanzamos el dado y sumamos los dos resultados obtenidos. Llamamos x a la suma.

a) Describe el espacio muestral de esta experiencia y asígnale probabilidad a cada uno de los casos.

b) A es el suceso "$x < 7$" y B es el suceso "$4 < x < 9$". Halla, pormenorizando todos sus casos, $A \cup B$, $A \cap B$, A' y $(A \cup B)'$.

c) Halla las probabilidades de los sucesos A, B, $A \cup B$, $A \cap B$, A' y $(A \cup B)'$.

a)

SUMA	⚀	⚁	⚂	⚃	⚄	⚅
0	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9

$E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

$P[1] = P[9] = \dfrac{1}{24}$

$P[3] = P[7] = \dfrac{3}{24} = \dfrac{1}{8}$

$P[2] = P[8] = \dfrac{2}{24} = \dfrac{1}{12}$

$P[4] = P[5] = P[6] = \dfrac{4}{24} = \dfrac{1}{6}$

b) $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$B = \{5, 6, 7, 8\}$

$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

$A' = \{7, 8, 9\}$

$A \cap B = \{5, 6\}$

$(A \cup B)' = \{9\}$

c) $P[A] = P[1] + P[2] + \ldots + P[6] = \dfrac{1+2+3+4+4+4}{24} = \dfrac{18}{24} = \dfrac{3}{4}$

$P[B] = P[5] + P[6] + P[7] + P[8] = \dfrac{4+4+3+2}{24} = \dfrac{13}{24}$

$P[A \cup B] = 1 - P[9] = \dfrac{23}{24}$

$P[A \cap B] = P[5] + P[6] = \dfrac{4+4}{24} = \dfrac{8}{24} = \dfrac{1}{3}$

$P[A'] = P[7] + P[8] + P[9] = \dfrac{3+2+1}{24} = \dfrac{6}{24} = \dfrac{1}{4}$

$P[(A \cup B)'] = P[9] = \dfrac{1}{24}$

2. Tenemos dos bolsas, A y B, con estas bolas:

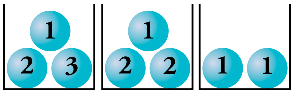
A: 7 blancas y 3 negras.

B: 1 blanca, 2 negras y 7 rojas.

Tirando un dado, si sale 1 o 2 extraemos una bola de A. Si sale 3, 4, 5 o 6, extraemos una bola de B. Calcula la probabilidad de extraer la bola roja.

$P[\text{ROJA}] = 0 \cdot P[1 \text{ o } 2] + \frac{7}{10} \cdot P[3, 4, 5 \text{ o } 6] = \frac{7}{10} \cdot \frac{4}{6} = \frac{28}{60} = \frac{7}{15}$

3. Extraemos una bola de cada caja. ¿Cuál es la probabilidad de que sumen 5?

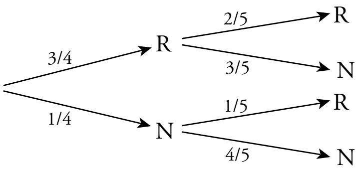


Como en la última siempre sale 1, el problema se reduce a sacar 4 en las dos primeras.

$P[4] = P[2] \cdot P[2] + P[3] \cdot P[1] = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{9} + \frac{1}{9} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$

Así, la probabilidad de sacar 5 entre las tres sumas es $\frac{1}{3}$.

4. La urna A tiene 3 bolas rojas y 1 negra, y la B, 3 negras y 1 roja. Sacamos una bola de A, la echamos en B, removemos y sacamos una bola de B. Calcula la probabilidad de que ambas bolas sean rojas.



$P[\text{R y R}] = \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{5} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$

5. En un grupo de hombres, unos llevan bigote, y otros, no. ¿Qué significan los sucesos BIG/AFRIC y AFRIC/BIG? Halla sus probabilidades.

	EUROPA	ÁFRICA	AMÉRICA
BIG	2	6	4
NO BIG	8	4	6

BIG/AFRIC $\rightarrow$ Los que tienen bigote entre los africanos. $P[\text{BIG/AFRIC}] = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$

AFRIC/BIG $\rightarrow$ Los que son africanos entre los que tienen bigote. $P[\text{AFRIC/BIG}] = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$

6. Extraemos tres naipes de una baraja de 40 cartas. Halla la probabilidad de que todas ellas sean ASES o REYES.

$P[\text{TODAS SON AS O REY}] = P[(1.^{a} \text{ AS O REY}) \cap (2.^{a} \text{ AS O REY}) \cap (3.^{a} \text{ AS O REY})] =$

$$= \frac{8}{40} \cdot \frac{7}{39} \cdot \frac{6}{38} = \frac{7}{1235} = 0{,}006$$

Autoevaluación

1. **Tenemos una bolsa con cuatro bolas numeradas: 0, 1, 2 y 3. Y disponemos de un dado normal. Extraemos una bola de la bolsa, lanzamos el dado y sumamos los dos resultados obtenidos. Llamamos x a la suma.**

a) Describe el espacio muestral de esta experiencia y asígnale probabilidad a cada uno de los casos.

b) A es el suceso "$x < 7$" y B es el suceso "$4 < x < 9$". Halla, pormenorizando todos sus casos, $A \cup B$, $A \cap B$, A' y $(A \cup B)'$.

c) Halla las probabilidades de los sucesos A, B, $A \cup B$, $A \cap B$, A' y $(A \cup B)'$.

a)

SUMA	⚀	⚁	⚂	⚃	⚄	⚅
0	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9

$E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

$P[1] = P[9] = \frac{1}{24}$

$P[3] = P[7] = \frac{3}{24} = \frac{1}{8}$

$P[2] = P[8] = \frac{2}{24} = \frac{1}{12}$

$P[4] = P[5] = P[6] = \frac{4}{24} = \frac{1}{6}$

b) $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$B = \{5, 6, 7, 8\}$

$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

$A' = \{7, 8, 9\}$

$A \cap B = \{5, 6\}$

$(A \cup B)' = \{9\}$

c) $P[A] = P[1] + P[2] + \ldots + P[6] = \frac{1+2+3+4+4+4}{24} = \frac{18}{24} = \frac{3}{4}$

$P[B] = P[5] + P[6] + P[7] + P[8] = \frac{4+4+3+2}{24} = \frac{13}{24}$

$P[A \cup B] = 1 - P[9] = \frac{23}{24}$

$P[A \cap B] = P[5] + P[6] = \frac{4+4}{24} = \frac{8}{24} = \frac{1}{3}$

$P[A'] = P[7] + P[8] + P[9] = \frac{3+2+1}{24} = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}$

$P[(A \cup B)'] = P[9] = \frac{1}{24}$

2. Tenemos dos bolsas, A y B, con estas bolas:

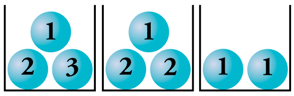
A: 7 blancas y 3 negras.

B: 1 blanca, 2 negras y 7 rojas.

Tirando un dado, si sale 1 o 2 extraemos una bola de A. Si sale 3, 4, 5 o 6, extraemos una bola de B. Calcula la probabilidad de extraer la bola roja.

$P[\text{ROJA}] = 0 \cdot P[1 \text{ o } 2] + \frac{7}{10} \cdot P[3, 4, 5 \text{ o } 6] = \frac{7}{10} \cdot \frac{4}{6} = \frac{28}{60} = \frac{7}{15}$

3. Extraemos una bola de cada caja. ¿Cuál es la probabilidad de que sumen 5?

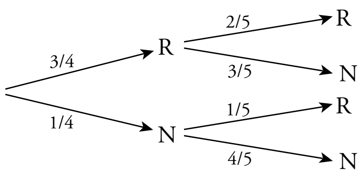


Como en la última siempre sale 1, el problema se reduce a sacar 4 en las dos primeras.

$P[4] = P[2] \cdot P[2] + P[3] \cdot P[1] = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{9} + \frac{1}{9} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$

Así, la probabilidad de sacar 5 entre las tres sumas es $\frac{1}{3}$.

4. La urna A tiene 3 bolas rojas y 1 negra, y la B, 3 negras y 1 roja. Sacamos una bola de A, la echamos en B, removemos y sacamos una bola de B. Calcula la probabilidad de que ambas bolas sean rojas.



$P[\text{R y R}] = \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{5} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$

5. En un grupo de hombres, unos llevan bigote, y otros, no. ¿Qué significan los sucesos BIG/AFRIC y AFRIC/BIG? Halla sus probabilidades.

	EUROPA	ÁFRICA	AMÉRICA
BIG	2	6	4
NO BIG	8	4	6

BIG/AFRIC → Los que tienen bigote entre los africanos. $P[\text{BIG/AFRIC}] = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$

AFRIC/BIG → Los que son africanos entre los que tienen bigote. $P[\text{AFRIC/BIG}] = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$

6. Extraemos tres naipes de una baraja de 40 cartas. Halla la probabilidad de que todas ellas sean ASES o REYES.

$P[\text{TODAS SON AS O REY}] = P[(1.^{a} \text{ AS O REY}) \cap (2.^{a} \text{ AS O REY}) \cap (3.^{a} \text{ AS O REY})] =$

$$= \frac{8}{40} \cdot \frac{7}{39} \cdot \frac{6}{38} = \frac{7}{1235} = 0{,}006$$