

Estudiar para qué valores de k es compatible el sistema siguiente:

$$\begin{cases} 2x - y = 4 \\ -x + \frac{1}{2}y = -2 \\ x + ky = 2 \end{cases}$$

Resolverlo para los valores de k que lo hacen compatible indeterminado.

$$\left. \begin{aligned} 2x - y &= 4 \\ -x + \frac{1}{2}y &= -2 \\ x + ky &= 2 \end{aligned} \right\}$$

$$A^* = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 4 \\ -1 & 1/2 & -2 \\ 1 & k & 2 \end{array} \right)$$

A

¡¡ojo!! la matriz aumentada en este sistema de tres ecuaciones con dos incógnitas es LA AUMENTADA

$$|A^*| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -1 & 1/2 & -2 \\ 1 & k & 2 \end{vmatrix} = \cancel{2} + \cancel{2} - \cancel{4}k - \cancel{2} + \cancel{4}k - \cancel{2} = 0$$

luego $r(A^*) < 3$ ya que $\nexists M_3 \neq 0$ en A^*

Buscamos entonces en $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1/2 \\ 1 & k \end{pmatrix}$ un menor de orden 2 distinto de cero:

Probamos con $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1/2 \end{vmatrix} = 1 - 1 = 0$ seguimos buscando...

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & k \end{vmatrix} = 2k + 1; \quad 2k + 1 = 0; \quad k = -\frac{1}{2}$$

Iniciamos la discusión de acuerdo al Teorema de Rouché:

1º caso: si $k \neq -\frac{1}{2}$ entonces $r(A) = 2$

$r(A^*) = 2$ ¡¡recuerda que al principio ya vimos que $r(A) < 3$!!

luego $r(A) = r(A^*) = 2$ (nº de incógnitas) S.C.D. (solución única)

2º caso: si $k = -\frac{1}{2}$ entonces:

$$A^* = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 4 \\ -1 & 1/2 & -2 \\ 1 & -1/2 & 2 \end{array} \right)$$

$C_1 \quad C_2 \quad C_3$

$r(A) = 1$ ya que C_1 y C_2 son proporcionales

$r(A^*) = 1$ ya que $C_3 = 2C_1$

otra manera de decir que son proporcionales

como $r(A) = r(A^*) = 1 < 2$ (nº de incógnitas)

S.C.I. (infinitas soluciones).

Lo resolvemos cuando es compatible indeterminado:

$$\left. \begin{array}{l} 2x - y = 4 \\ -x + \frac{1}{2}y = -2 \\ x - \frac{1}{2}y = 2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{las tres ecuaciones} \\ \text{son la misma,} \\ \text{nos quedamos} \\ \text{sólo con una} \end{array}$$

$$2x - y = 4$$

$$\boxed{y = \lambda} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

$$2x - \lambda = 4 ; \quad \boxed{x = \frac{4 + \lambda}{2}}$$

LO DISCUTIMOS AHORA UTILIZANDO EL MÉTODO DE GAUSS:

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x - y = 4 \\ -x + \frac{1}{2}y = -2 \\ x + ky = 2 \end{array} \right.$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 4 \\ -1 & 1/2 & -2 \\ 1 & k & 2 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow[-2F_3]{2F_2}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 4 \\ -2 & 1 & -4 \\ -2 & -2k & -4 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow[F_3 + F_1]{F_2 + F_1} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2k-1 & 0 \end{array} \right)$$

$0x + 0y = 0$
"sobra"

$$-2k-1=0 ; \quad k = -\frac{1}{2}$$

1º caso: si $k \neq -\frac{1}{2}$ entonces la 3ª ecuación es $(-2k-1)y = 0$ tiene solución $y=0$,
a partir de ahí calculamos la x y el sistema es COMPATIBLE DETERMINADO

2º caso: si $k = -\frac{1}{2}$ entonces la 3ª ecuación queda $0y = 0$ y el sistema es
COMPATIBLE INDETERMINADO.