PROGRAMACIÓN LINEAL

2.- Un agricultor dispone de 24 hectáreas de tierra para plantar manzanos y perales. Cada año se requiere para cada hectárea de manzanos 100 metros cúbicos de agua y 150 jornadas de trabajo, y para cada hectárea de perales 200 metros cúbicos de agua y 50 jornadas de trabajo. Sólo se dispone en total, para cada año, de 4000 m³ de agua y 3000 jornadas de trabajo. Sabiendo que el beneficio anual por hectárea de manzanos es de 2000 euros y por hectárea de perales de 3600 euros, determinar justificando las respuestas:

a) El número de hectáreas que dicho agricultor tiene que plantar de cada especie (manzanos y perales) con objeto de obtener los beneficios máximos anuales.

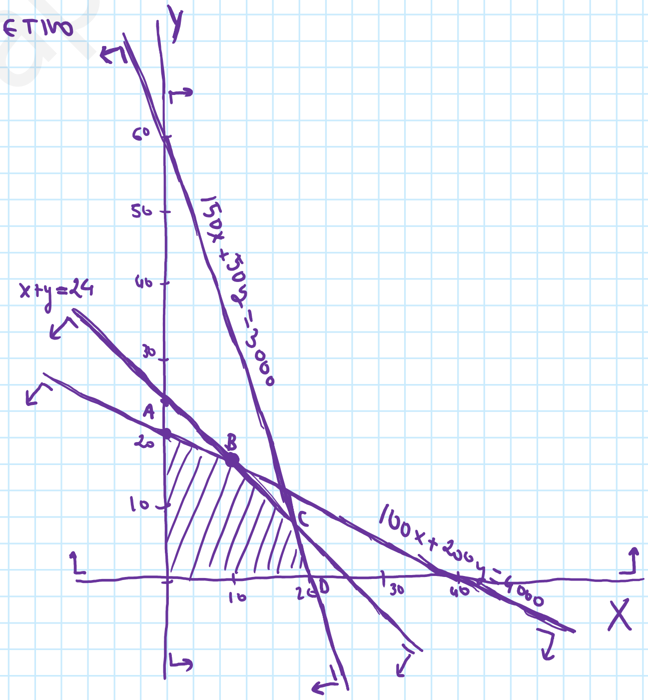
b) El valor de dichos beneficios máximos anuales.

a) nº de hectáreas para manzanos: x
nº de hectáreas para perales: y

$F(x,y) = 2000x + 3600y$ ← FUNCIÓN OBJETIVO

Restricciones:

$$\left.\begin{array}{l} x+y \leq 24 \\ 100x + 200y \leq 4000 \\ 150x + 50y \leq 3000 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array}\right\}$$



$x+y=24$

x	y
0	24
24	0

$100x+200y=4000$

x	y
0	20
40	0

$150x+50y=3000$

x	y
0	60
20	0

Determinamos los vértices B y C de la región factible:

$\boxed{B}$ $\left.\begin{array}{l} -100(x+y=24) \\ 100x+200y=4000 \end{array}\right\} + \begin{array}{r} -\cancel{100x} - 100y = -2400 \\ \cancel{100x} + 200y = 4000 \\ \hline 100y = 1600 \end{array}$; $y = \frac{1600}{100} = 16$

$x+16=24$
$x=8$

$B(8,16)$

$\boxed{C}$ $\left.\begin{array}{l} -50(x+y=24) \\ 150x+50y=3000 \end{array}\right\} + \begin{array}{r} -50x - \cancel{50y} = -1200 \\ 150x + \cancel{50y} = 3000 \\ \hline 100x = 1800 \end{array}$; $x = \frac{1800}{100} = 18$

$18+y=24$
$y=6$

$C(18,6)$

Evaluamos ahora la función objetivo en los vértices de la región factible:

$A(0,20)$; $F(0,20) = \cancel{2000}\cdot 0 + 3600\cdot 20 = 72000$

$B(8,16)$; $F(8,16) = 2000\cdot 8 + 3600\cdot 16 = 73600$

$C(18,6)$; $F(18,6) = 2000\cdot 18 + 3600\cdot 6 = 57600$

$D(20,0)$; $F(20,0) = 2000\cdot 20 + \cancel{3600\cdot 0} = 40000$

Interesa plantar 8 hectáreas de manzanos y 16 hectáreas de perales.

b) Los beneficios máximos que puede obtener son 73600 €.

CUESTIÓN B.1. (3 puntos) Un veterinario desea dar a uno de sus animales una dieta que contenga por lo menos 40 g de un nutriente A, 60 g de un nutriente B y 230 g del nutriente C cada día. Existen en el mercado dos productos, P_1 y P_2 que en cada bote contienen los siguientes gramos de esos elementos nutritivos:

	Nutriente A	Nutriente B	Nutriente C
P_1	40	10	60
P_2	10	60	100

Si el precio de un bote del producto P_1 es de 10 euros y el de un bote del producto P_2 es de 16 euros, determinar:

a) ¿Qué cantidad de botes de P_1 y P_2 debe utilizar para obtener la dieta deseada con el mínimo precio?

b) ¿Qué cantidad de cada elemento nutritivo le dará si decide gastar lo menos posible?

	nutriente A	nutriente B	nutriente C	Precio
nº de botes del producto P_1: x	40	10	60	10 €
nº de botes del producto P_2: y	10	60	100	16 €
	40	60	230	

Función a minimizar: $F(x,y) = 10x + 16y$

Restricciones:

$$\left.\begin{array}{l} 40x + 10y \geq 40 \\ 10x + 60y \geq 60 \\ 60x + 100y \geq 230 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array}\right\}$$

$40x+10y=40$

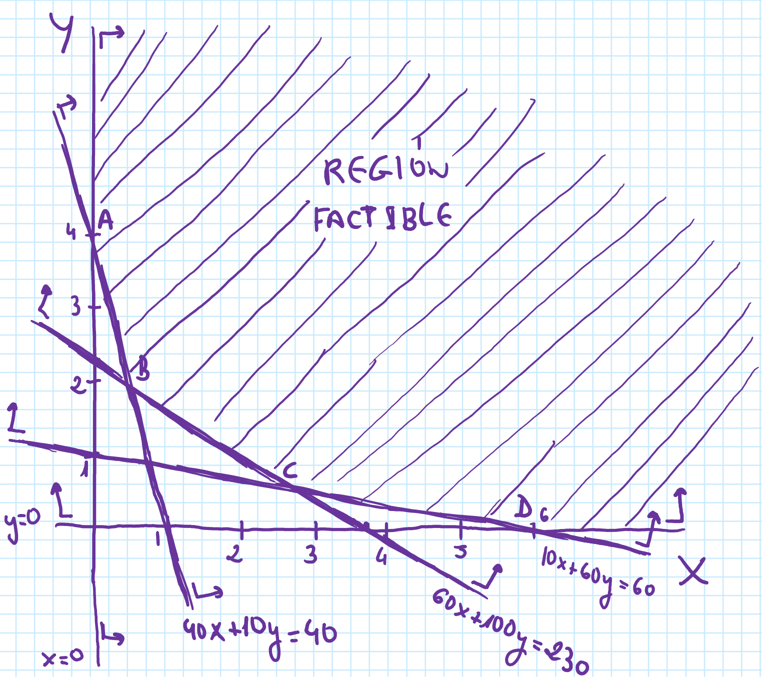
x	y
0	4
1	0

$10x+60y=60$

x	y
0	1
6	0

$60x+100y=230$

x	y
0	$23/10 = 2{,}3$
$\frac{23}{6} \simeq 3{,}8$	0



$$\begin{array}{l} G \quad \left.\begin{array}{r} 12x+\cancel{2y}=120 \\ -\ 4x+\cancel{2y}=80 \end{array}\right\} \\ \hline \quad 8x \qquad = 40 \end{array}$$

$4\cdot 5+2y=80;\ 2y=60;\ y=30 \quad G(5,30)$

$x=\frac{40}{8}=5$

Evaluamos ahora la función objetivo en cada uno de los vértices:

A(0,60) $\quad F(0,60)=\cancel{6\cdot 0}+4\cdot 60=240$ €

B(50,60) $\quad F(50,60)=6\cdot 50+4\cdot 60=300+240=540$ €

C(50,0) $\quad F(50,0)=6\cdot 50+\cancel{4\cdot 0}=300$ €

D(45,0) $\quad F(45,0)=6\cdot 45+\cancel{4\cdot 0}=270$ €

E(15,10) $\quad F(15,10)=6\cdot 15+4\cdot 10=90+40=\boxed{130\text{ €}}$

G(5,30) $\quad F(5,30)=6\cdot 5+4\cdot 30=30+120=150$ €

La mejor opción para el supermercado es comprar 15 lotes en la granja A y 10 lotes de la granja B. El precio será de 130 € (mínimo coste).

Un supermercado necesita, al menos, 80 docenas de huevos de tamaño pequeño, 120 docenas de tamaño mediano y 90 docenas de tamaño grande. Se abastece en dos granjas A y B. La granja A suministra lotes de 4 docenas de huevos pequeños, 12 docenas de medianos y 2 docenas de grandes, y el coste de cada lote es de 6 euros. La granja B proporciona lotes de 2 docenas de huevos pequeños, 2 docenas de medianos y 6 docenas de grandes, con un coste de 4 euros por lote. Además, la granja A puede suministrar, como máximo, 50 lotes y la granja B puede suministrar, como máximo, 60 lotes. Hallar el número de lotes que debe comprar a cada granja para satisfacer sus necesidades con el mínimo coste.

ES UN PROBLEMA DE PROGRAMACIÓN LINEAL

Guión para resolverlo:

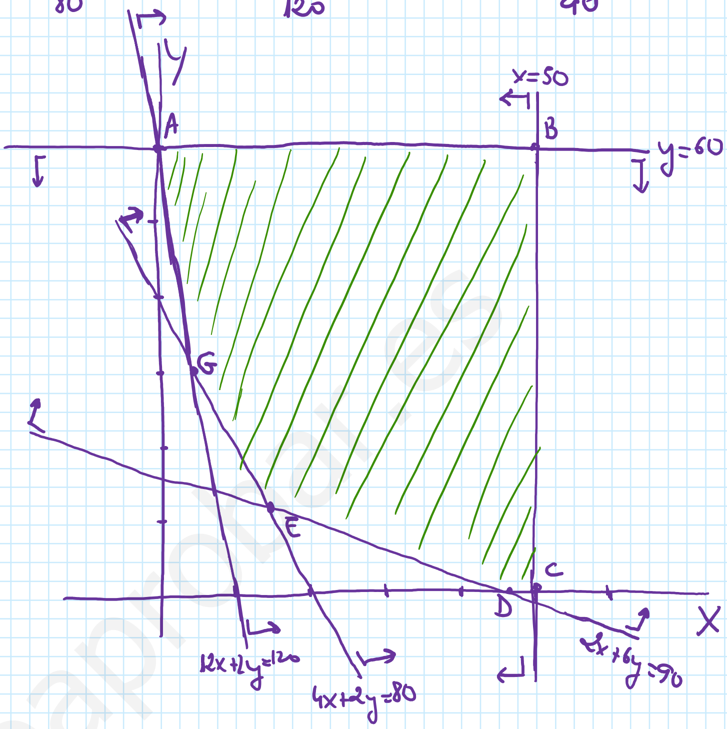
1) Hallamos la Función objetivo
2) Restricciones del problema
3) Dibujamos la región factible
4) Hallamos los vértices de la región factible
5) Hallamos en qué vértice, la Función objetivo es máxima o mínima

	Huevos pequeños	Huevos medianos	Huevos grandes
nº de lotes que suministra la granja A: x	$4x$	$12x$	$2x$
nº de lotes que suministra la granja B: y	$2y$	$2y$	$6y$
	80	120	90

FUNCIÓN OBJETIVO:

$F(x,y)=6x+4y$

$$\left.\begin{array}{l} 0\leq x\leq 50 \\ 0\leq y\leq 60 \\ 4x+2y\geq 80 \\ 12x+2y\geq 120 \\ 2x+6y\geq 90 \end{array}\right\}$$



$4x+2y=80$

x	y
0	40
20	0

$12x+2y=120$

x	y
0	60
10	0

$2x+6y=90$

x	y
0	15
45	0

Calculamos las coordenadas de los vértices E y G:

E $\left.\begin{array}{l} 2x+6y=90 \\ 4x+2y=80 \end{array}\right\}\xrightarrow{-2E_1}$ $\begin{array}{r} -\cancel{4x}-12y=-180 \\ \cancel{4x}+2y=80 \\ \hline -10y=-100 \end{array}$; $y=\frac{-100}{-10}=10$; $4x+2\cdot 10=80$; $4x=60$; $x=15$ $E(15,10)$

G $\left.\begin{array}{l} 12x+\cancel{2y}=120 \\ -\,4x+\cancel{2y}=80 \end{array}\right\}$ $4\cdot 5+2y=80$; $2y=60$; $y=30$ $G(5,30)$

El problema tiene INFINITAS SOLUCIONES.

La región factible es un recinto abierto.

Para obtener el mínimo precio, lo buscamos en uno de los vértices de la región factible:

Determinación de B:

$\left.\begin{array}{l} -10(40x+10y=40) \\ 60x+100y=230 \end{array}\right\}+$ $\begin{array}{r} -400x-\cancel{100y}=-400 \\ 60x+\cancel{100y}=230 \\ \hline -340x\quad=-170 \end{array}$; $x=\frac{-170}{-340}=\frac{1}{2}=0{,}5$

$40\cdot 0{,}5+10y=40$

$10y=40-20$; $y=2$

$\boxed{B(0{,}5;2)}$

Determinación de C:

$\left.\begin{array}{l} -6(10x+60y=60) \\ 60x+100y=230 \end{array}\right\}+$ $\begin{array}{r} -\cancel{60x}-360y=-360 \\ \cancel{60x}+100y=230 \\ \hline -260y=-130 \end{array}$; $y=\frac{-130}{-260}=\frac{1}{2}=0{,}5$

$10x+60\cdot 0{,}5=60$

$10x=60-30$

$10x=30$; $x=3$

$\boxed{C(3;0{,}5)}$

a)

Evaluamos la función objetivo:

$A(0,4)$ $F(0,4) = \cancel{10\cdot 0} + 16\cdot 4 = 64$

$B(0,5;2)$ $F(0,5;2) = 10\cdot 0,5 + 16\cdot 2 = 5 + 32 = \boxed{37}$

$C(3;0,5)$ $F(3;0,5) = 10\cdot 3 + 16\cdot 0,5 = 30 + 8 = 38$

$D(6,0)$ $F(6,0) = 10\cdot 6 + \cancel{16\cdot 0} = 60$

Debe utilizar medio bote del producto P_1 y 2 botes del producto P_2 para minimizar el gasto: 37 €

b) Las cantidades de producto que le da al animal con ese gasto de 37 € son:

Nutriente A: $40\cdot 0,5 + 10\cdot 2 = 40$ g

Nutriente B: $10\cdot 0,5 + 60\cdot 2 = 125$ g

Nutriente C: $60\cdot 0,5 + 100\cdot 2 = 230$ g

A 1 *(hasta 3 puntos)*

A la compañía de transportes que lleva a la escuela municipal los 160 jóvenes de su alumnado, un servicio de un autobús de 40 plazas le supone un gasto de 120€ y uno de un microbús de 20 plazas sólo 80€. Se debe decidir el número de autobuses *X* y microbuses *Y* que transporten a todo el alumnado, minimizando el gasto y cumpliendo ciertas limitaciones: la compañía sólo cuenta con 5 conductores de autobús (aptos para conducir microbuses) y otros 7 conductores de microbús (no aptos para conducir autobuses). Además las autoridades de tráfico obligan a que circulen al menos el doble de microbuses que de autobuses. Se pide:

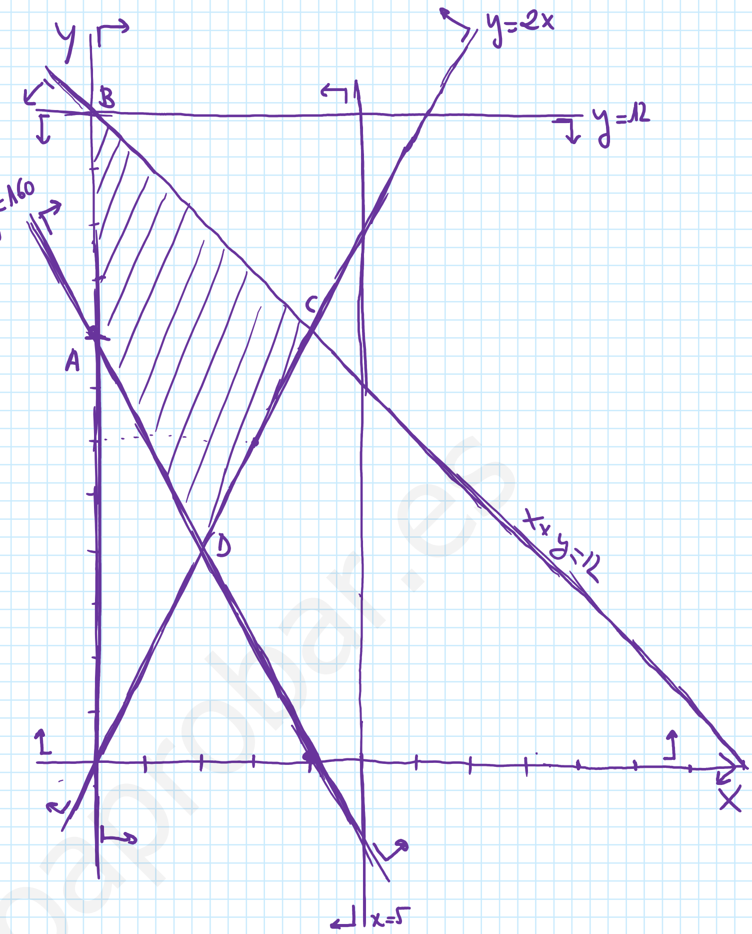
a) Representar en el plano *XY* la región de soluciones factibles del problema.

b) Encontrar el número óptimo de autobuses *X* y microbuses *Y* que minimizan el gasto de la empresa y cumplen con las restricciones. Calcular dicho gasto.

a) nº de autobuses: x — nº de alumnos: $40x$

nº de microbuses: y — $20y$

160 alumnos



Función objetivo:

$F(x,y) = 120x + 80y$

Restricciones:

$$\left.\begin{array}{l} 40x+20y \geq 160 \\ 0 \leq x \leq 5 \\ 0 \leq y \leq 12 \\ x+y \leq 12 \\ 2x \leq y \end{array}\right\}$$

$40x+20y = 160$

x	y
0	8
4	0

$x+y=12$

x	y
0	12
12	0

$2x \leq y$

x	y
0	0
3	6

Obtenemos los puntos C y D, vértices de la región factible:

C $\left.\begin{array}{l} x+y=12 \\ y=2x \end{array}\right\}$ $x+2x=12$; $x=4$; $y=2\cdot 4=8$ $\quad C(4,8)$

D $\left.\begin{array}{l} 40x+20y=160 \\ y=2x \end{array}\right\}$ $40x+20(2x)=160$; $80x=160$; $x=2$; $y=4$ $\quad D(2,4)$

b) Evaluamos la función objetivo en los cuatro vértices de la región factible:

$A(0,8) \rightarrow F(0,8) = \cancel{120\cdot 0} + 80\cdot 8 = 640$ €

$B(0,12) \rightarrow F(0,12) = 120\cdot 0 + 80\cdot 12 = 960$ €

$C(4,8) \rightarrow F(4,8) = 120\cdot 4 + 80\cdot 8 = 480 + 640 = 1120$ €

$D(2,4) \rightarrow F(2,4) = 120\cdot 2 + 80\cdot 4 = 240 + 320 = \boxed{560\text{ €}}$

Para minimizar el gasto de la empresa se deben utilizar 2 autobuses y 4 microbuses, lo que cuesta 560 €.

En un edificio público se quieren colocar, al menos, 20 máquinas expendedoras entre las de bebidas calientes y las de bebidas frías. Hay disponibles 12 máquinas de bebidas calientes y 40 de bebidas frías. Se pretende que el número de expendedoras de bebidas calientes no sea superior a una tercera parte del de bebidas frías y que, por lo menos, una quinta parte del total de máquinas que se coloquen sean de bebidas calientes. Cumpliendo las condiciones anteriores, ¿qué combinación de máquinas de cada tipo hace que la diferencia del número de máquinas de bebidas frías menos el de bebidas calientes colocadas sea mayor?

Máquinas para las bebidas calientes: x

Máquinas para las bebidas frías: y

$F(x,y) = y - x$ ← el problema pide maximizar esa diferencia

$$\left.\begin{array}{l} x+y \geq 20 \\ 0 \leq x \leq 12 \\ 0 \leq y \leq 40 \\ x \leq \frac{y}{3} \\ x \geq \frac{1}{5}(x+y) \end{array}\right\} \text{RESTRICCIONES.}$$

$x = \frac{x}{5} + \frac{y}{5}$

$5x = x + y$

$x+y=20$

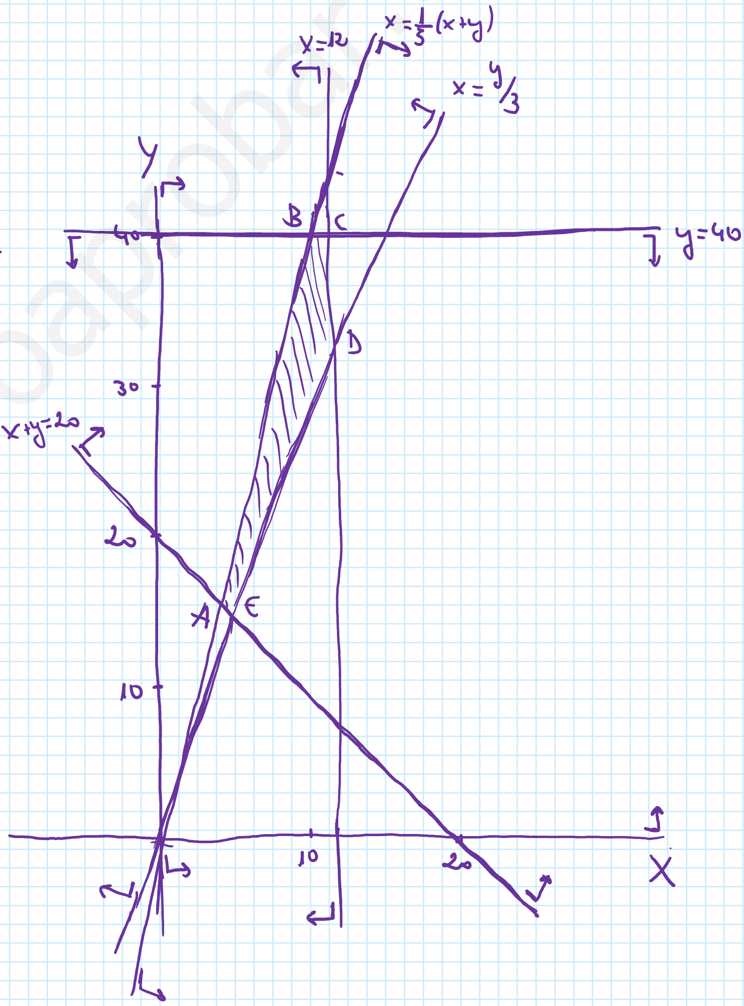
x	y
0	20
20	0

$x = \frac{y}{3}$

x	y
0	0
5	15

$4x = y$

x	y
0	0
10	40



Determinación de los vértices de la región factible:

$\boxed{A}$ $\left.\begin{array}{l} x = \frac{x+y}{5} \\ x+y=20 \end{array}\right\} \rightarrow y = 20-x$ $\quad x = \frac{x+20-x}{5}$; $x=4$ $\quad y=16$ $\quad A(4,16)$

$\boxed{B}$ $\left.\begin{array}{l} x = \frac{x+y}{5} \\ y=40 \end{array}\right\}$ $\quad x = \frac{x+40}{5}$; $5x = x+40$; $x=10$ $\quad B(10,40)$

$\boxed{C}$ $C(12,40)$

$\boxed{D}$ $\left.\begin{array}{l} x=12 \\ x=y/3 \end{array}\right\}$ $\frac{y}{3} = 12$; $y=36$ $\quad D(12,36)$

$\boxed{E}$ $x+y=20$ $\quad x+3x=20$; $x=5$ $\quad E(5,15)$

E $\left.\begin{array}{l} x+y=20 \\ x=y/3 \end{array}\right\} \rightarrow y=3x;$ $\quad x+3x=20;\ x=5$ $\quad y=3\cdot 5=15$ $\quad E(5,15)$

Evaluamos ahora la función objetivo: $F(x,y)=y-x$

$A(4,16)$	$F(4,16)=16-4=12$
$B(10,40)$	$F(10,40)=40-10=\boxed{30}$
$C(12,40)$	$F(12,40)=40-12=28$
$D(12,36)$	$F(12,36)=36-12=24$
$E(5,15)$	$F(5,15)=15-5=10$

Luego la máxima diferencia entre el número de máquinas frías y calientes se da al instalar 40 máquinas de bebida fría y 10 de bebidas calientes.