

Relación entre las razones trigonométricas

1) Calcular sin hacer uso de la calculadora las demás razones trigonométricas

- $\text{sen}(\alpha)=0.2$ (cuadrante II)
- $\text{cos}(\alpha)=-0.3$ (cuadrante III)
- $\text{tg}(\alpha)=2$ (cuadrante I)

Solución

a. $\text{sen}^2(\alpha)+\text{cos}^2(\alpha)=1 \rightarrow 0.2^2+\text{cos}^2(\alpha)=1 \rightarrow \text{cos}^2(\alpha)=0.96 \rightarrow \text{cos}(\alpha)=\pm\sqrt{0.96}$

la solución es $\text{cos}(\alpha)=-\sqrt{0.96}$ al ser del cuadrante II

$$\text{tg}(\alpha)=\text{sen}(\alpha)/\text{cos}(\alpha) \rightarrow \text{tg}(\alpha)=-0.2/\sqrt{0.96}$$

b. $\text{sen}^2(\alpha)+\text{cos}^2(\alpha)=1 \rightarrow \text{sen}^2(\alpha)+(-0.3)^2=1 \rightarrow \text{sen}^2(\alpha)=0.91 \rightarrow \text{sen}(\alpha)=\pm\sqrt{0.91}$

la solución es $\text{sen}(\alpha)=-\sqrt{0.91}$ al ser del cuadrante III

$$\text{tg}(\alpha)=\text{sen}(\alpha)/\text{cos}(\alpha) \rightarrow \text{tg}(\alpha)=\sqrt{0.91}/0.3$$

c.
$$\left. \begin{array}{l} \text{sen}^2(\alpha) + \text{cos}^2(\alpha) = 1 \\ \text{tg}(\alpha) = \frac{\text{sen}(\alpha)}{\text{cos}(\alpha)} \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} \text{sen}^2(\alpha) + \text{cos}^2(\alpha) = 1 \\ 2 = \frac{\text{sen}(\alpha)}{\text{cos}(\alpha)} \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} \text{sen}^2(\alpha) + \text{cos}^2(\alpha) = 1 \\ 2 \text{cos}(\alpha) = \text{sen}(\alpha) \end{array} \right\}$$

Tenemos un sistema con dos ecuaciones y dos incógnitas fácilmente resoluble sustituyendo en la primera ecuación $\text{sen}(\alpha)=2\text{cos}(\alpha)$:

$$(2\text{cos}(\alpha))^2+\text{cos}^2(\alpha)=1 \rightarrow 5\text{cos}^2(\alpha)=1 \rightarrow \text{cos}^2(\alpha)=1/5 \rightarrow \text{cos}(\alpha)=\pm 1/\sqrt{5}$$

la solución es $\text{cos}(\alpha)=1/\sqrt{5}$ ya que es del cuadrante I $\rightarrow \text{sen}(\alpha)=2/\sqrt{5}$

2) Comprueba que son ciertas las siguientes igualdades:

a.
$$\frac{1 + \text{tg}^2(\alpha)}{1 + \cot^2(\alpha)} = \text{tg}^2(\alpha)$$

Solución:
$$\frac{1 + \text{tg}^2(\alpha)}{1 + \cot^2(\alpha)} = \frac{1 + \text{tg}^2(\alpha)}{1 + \frac{1}{\text{tg}^2(\alpha)}} = \frac{1 + \text{tg}^2(\alpha)}{\frac{1 + \text{tg}^2(\alpha)}{\text{tg}^2(\alpha)}} = \text{tg}^2(\alpha)$$

b.
$$\frac{\text{cos}^2(\alpha)}{1 + \text{sen}(\alpha)} = 1 - \text{sen}(\alpha)$$

Solución:
$$\frac{\text{cos}^2(\alpha)}{1 + \text{sen}(\alpha)} = \frac{1 - \text{sen}^2(\alpha)}{1 + \text{sen}(\alpha)} = \frac{(1 - \text{sen}(\alpha))(1 + \text{sen}(\alpha))}{(1 + \text{sen}(\alpha))} = 1 - \text{sen}(\alpha)$$

c.
$$\sec^2(x) + \text{cosec}^2(x) = \sec^2(x) \cdot \text{cosec}^2(x)$$

Solución:
$$\begin{aligned} \sec^2(x) + \text{cosec}^2(x) &= \frac{1}{\text{cos}^2(x)} + \frac{1}{\text{sen}^2(x)} = \frac{\text{sen}^2(x) + \text{cos}^2(x)}{\text{cos}^2(x) \cdot \text{sen}^2(x)} = \\ &= \frac{1}{\text{cos}^2(x) \cdot \text{sen}^2(x)} = \left(\frac{1}{\text{cos}(x)} \right)^2 \cdot \left(\frac{1}{\text{sen}(x)} \right)^2 = \sec^2(x) \cdot \text{cosec}^2(x) \end{aligned}$$

3) Simplifica las siguientes expresiones

a. $(\sin(x)+\cos(x))^2+(\sin(x)-\cos(x))^2$

Solución: $(\sin(x)+\cos(x))^2+(\sin(x)-\cos(x))^2=$
 $=\sin^2(x)+\cos^2(x)+2\cdot\sin(x)\cdot\cos(x)+\sin^2(x)+\cos^2(x)-2\cdot\sin(x)\cdot\cos(x)=$
 $=2\cdot(\sin^2(x)+\cos^2(x))=2\cdot 1=2$

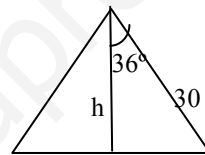
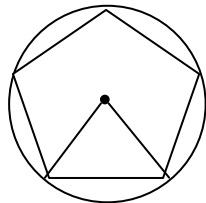
b. $\frac{\sin^3(x) + \sin(x)\cdot\cos^2(x)}{\sin(x)}$

Solución: $\frac{\sin^3(x) + \sin(x)\cdot\cos^2(x)}{\sin(x)} = \frac{\sin(x)\cdot(\sin^2(x) + \cos^2(x))}{\sin(x)} = \frac{\sin(x)}{\sin(x)} = 1$

Problemas de geometría

4) Calcular el perímetro de un pentágono regular inscrito en una circunferencia de 30cm de radio. Calcular su área

Ángulo del pentágono $\rightarrow \alpha=360^\circ/5=72^\circ$



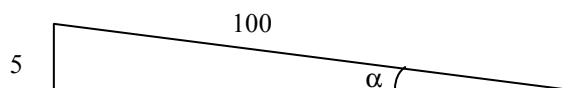
Lado pentágono=2x $\rightarrow \sin(36^\circ)=x/30 \rightarrow x=30\cdot\sin(36^\circ)=17.6\text{cm}$

Perímetro=10·x=176cm

Apotema=h $\rightarrow \cos(36^\circ)=x/30 \rightarrow x=30\cdot\cos(36^\circ)=24.3\text{cm}$

área= $\frac{p\cdot ap}{2} = \frac{176\cdot 24.3}{2} = 2138.4\text{cm}^2$

5) En un tramo de carretera la inclinación es del 5% (sube 5m en 100m). Calcular el ángulo que forma con la horizontal la carretera. Sabemos que hemos subido 100m, ¿Cuánto hemos andado por la carretera?

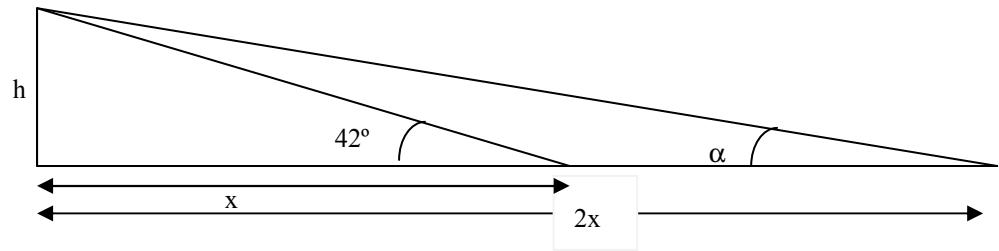


$\sin(\alpha)=\frac{5}{100} = 0.05 \rightarrow \alpha=\arcsen(0.05)=2.87^\circ$



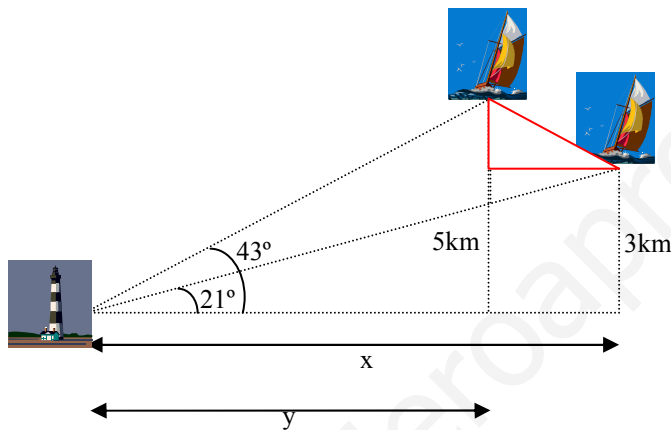
$\sin(\alpha)=0.05=100/x \rightarrow x=2000\text{m}$

- 6) Desde un cierto punto del suelo se ve un árbol bajo un ángulo de 42° ¿bajo qué ángulo se ve colocándose al doble de distancia?



$$\operatorname{tg}(42^\circ)=0.9=h/x \rightarrow \operatorname{tg}(\alpha)=h/2x=0.45 \rightarrow \alpha=\operatorname{arctg}(0.45)=24,2^\circ$$

- 7) Desde un faro F se ve un barco A con ángulo de 43° con la costa, y el barco B con 21° . El barco B está a 3km de la costa y el A a 5km. Calcular distancia entre los barcos.



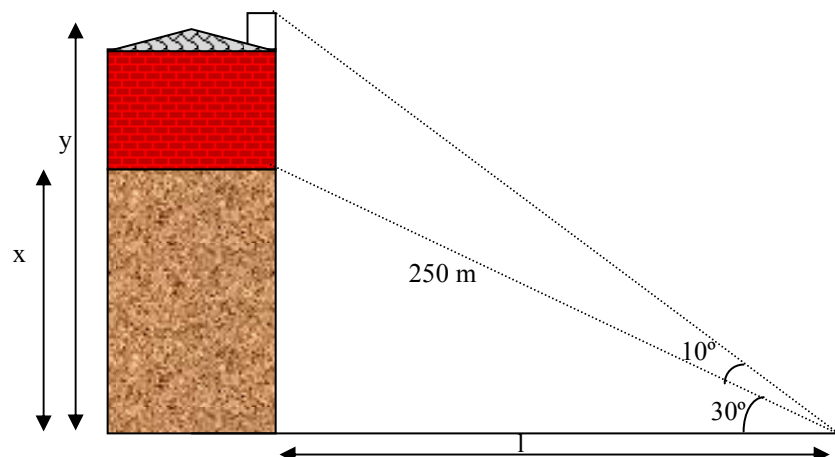
Podemos calcular la distancia si conocemos los catetos del triángulo rojo. Uno de los dos catetos mide $5\text{ km}-3\text{ km}=2\text{ km}$. El otro es $y-x$. Calculemoslo:

$$\operatorname{tg}(21^\circ)=3/x \rightarrow x=3/\operatorname{tg}(21^\circ)=7.82\text{ km}$$

$$\operatorname{tg}(43^\circ)=5/y \rightarrow y=5/\operatorname{tg}(43^\circ)=5.4\text{ km}$$

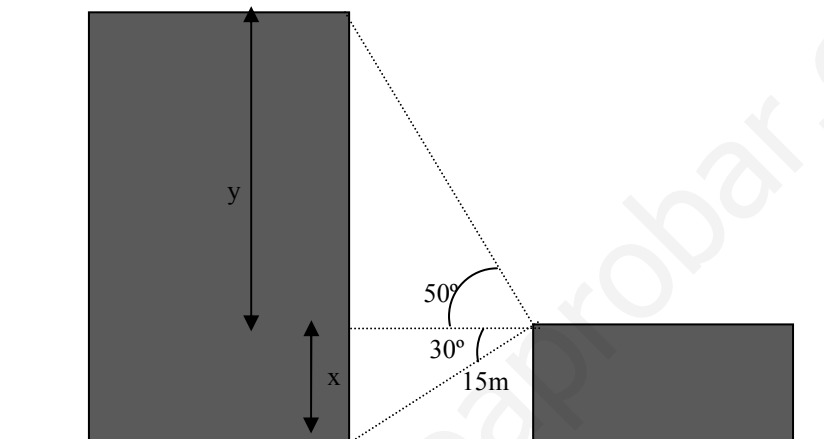
Así la distancia entre los dos barcos definida por la hipotenusa de un triángulo con catetos de 2 km y de $(x-y)=2.42\text{ km} \rightarrow d=\sqrt{2^2+(2.42)^2}=3.14\text{ km}$

- 8) Calcular la altura del edificio:



$$\begin{aligned} \sin(30^\circ) &= x/250 \rightarrow x = 250 \cdot \sin(30^\circ) = 125\text{m} \\ \cos(30^\circ) &= l/250 \rightarrow l = 250 \cdot \cos(30^\circ) = 216.5\text{m} \\ \tan(40^\circ) &= y/l \rightarrow y = 216.5\text{m} \cdot \tan(40^\circ) = 181.2\text{m} \\ h_{\text{casa}} &= y - x = 56.2\text{m} \end{aligned}$$

9) Calcular la altura de la torre grande a partir del siguiente dibujo



$$\begin{aligned} x &= 15 \cdot \sin(30^\circ) = 7.5\text{m} \\ l &= 15 \cdot \cos(30^\circ) = 13\text{m} \\ \tan(50^\circ) &= y/l \rightarrow y = l \cdot \tan(50^\circ) = 15.5\text{m} \\ \text{altura} &= y + x = 23\text{m} \end{aligned}$$

Ecuaciones.

10) Resolver las siguientes ecuaciones

- $\sin^2(x) - \sin(x) = 0$
- $\cos(x) + \sin^2(x) = 1$
- $3\tan^2(x) = \sec^2(x)$
- $\sin(2x) = 0.5$

Solución

a. $\sin(x) = y \rightarrow y^2 - y = 0, y(y-1) = 0 \rightarrow y = 0, y = 1.$

$$\text{Si } y = 0 \rightarrow \sin(x) = 0 \rightarrow x = \arcsen(0) = \begin{cases} 0^\circ + 360k \\ 180^\circ + 360k \end{cases}$$

$$\text{Si } y = 1 \rightarrow \sin(x) = 1 \rightarrow x = \arcsen(1) = 90^\circ + 360k$$

b. Tenemos expresar la ecuación sólo en función del seno o del coseno, para esto utilizamos $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1 \rightarrow \sin^2(x) = 1 - \cos^2(x)$

$$\cos(x) + \sin^2(x) = 1 \rightarrow \cos(x) + 1 - \cos^2(x) = 1 \rightarrow \cos(x) - \cos^2(x) = 0$$

Llamando $y = \cos(x)$ la ecuación será:

$$y - y^2 = 0 \rightarrow y(y-1) = 0 \quad y = 0, y = 1.$$

$$\text{Si } y=0 \rightarrow \cos(x)=0 \rightarrow x=\arccos(0)=\begin{cases} 90^\circ+360k \\ 270^\circ+360k \end{cases}$$

$$\text{Si } y=1 \rightarrow \cos(x)=1 \rightarrow x=\arccos(1)=0^\circ+360k$$

$$c. \quad 3\text{tg}^2(x)=\sec^2(x) \rightarrow$$

$$3 \cdot \frac{\text{sen}^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)} \rightarrow \text{sen}^2(x) = \frac{1}{3} \rightarrow \text{sen}(x) = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} = \pm \frac{\sqrt{3}}{3} \rightarrow$$

$$x = \arcsen\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \begin{cases} 35,26^\circ+360k \\ 180^\circ-35,26^\circ = 144,74^\circ+360k \end{cases}$$

$$x = \arcsen\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \begin{cases} 360^\circ-35,26^\circ = 324,74^\circ+360k \\ 180^\circ+35,26^\circ = 215,26^\circ+360k \end{cases}$$

$$d. \quad \text{sen}(2x)=0,5 \rightarrow 2x=\arcsen(0,5)=\begin{cases} 30^\circ+360k \\ 150^\circ+360k \end{cases} \rightarrow$$

$$\text{Si } 2 \cdot x=30^\circ+360k \rightarrow x=\begin{cases} k=0 \rightarrow 15^\circ+360k \\ k=1 \rightarrow 195^\circ+360k \end{cases}$$

$$\text{Si } 2 \cdot x=150^\circ+360k \rightarrow x=\begin{cases} k=0 \rightarrow 75^\circ+360k \\ k=1 \rightarrow 255^\circ+360k \end{cases}$$

Teorema del seno y del coseno. Resolución triángulos no rectángulos

11) Resolver los siguientes triángulos

a) $\hat{A}=45^\circ$, $b=50\text{m}$, $a=40\text{m}$

b) $\hat{C}=30^\circ$, $a=5\text{cm}$, $b=3\text{cm}$

c) $\hat{A}=45^\circ$, $\hat{C}=60^\circ$, $b=20\text{m}$

d) $\hat{C} = 45^\circ$, $b=10\text{m}$, $c=6\text{m}$

e) $a=5\text{cm}$, $b=4\text{cm}$, $c=4\text{cm}$

a) $\hat{A}=45^\circ$, $b=50\text{m}$, $a=40\text{m}$

Este es el caso en el que puede haber dos soluciones. Veámoslo:

Teorema del seno:

$$\frac{a}{\text{sen}\hat{A}} = \frac{b}{\text{sen}\hat{B}} \rightarrow \frac{40}{\text{sen}(45^\circ)} = \frac{50}{\text{sen}(\hat{B})} \rightarrow \text{sen}(\hat{B}) = 0,884 \rightarrow \hat{B} = \begin{cases} \hat{B}_1 = 62,11^\circ \\ \hat{B}_2 = 117,89^\circ \end{cases}$$

Los dos ángulos son soluciones, pues la suma con $\hat{A} + \hat{B} < 180^\circ$

Solución 1 : $\hat{B}_1 = 62,11^\circ \rightarrow \hat{C}_1 = 72,89^\circ$

Calculemos c por el teorema del seno $(\frac{a}{\text{sen}\hat{A}} = \frac{c}{\text{sen}\hat{C}}) \rightarrow \frac{40}{\text{sen}45} = \frac{c}{\text{sen}72,89^\circ} \rightarrow c=54\text{m}$

Solución 2 : $\hat{B}_2 = 117,89^\circ \rightarrow \hat{C}_2 = 17,11^\circ$

Calculemos c por el teorema del seno $(\frac{a}{\text{sen}\hat{A}} = \frac{c}{\text{sen}\hat{C}}) \rightarrow \frac{40}{\text{sen}45} = \frac{c}{\text{sen}17,11^\circ} \rightarrow c=16,6\text{m}$

b) $\hat{C}=30^\circ$, $a=5\text{cm}$, $b=3\text{cm}$

Este problema sólo puede tener una solución:

Apliquemos el teorema del coseno para calcular c:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos(\hat{C}) = 25 + 9 - 30 \cdot \cos(30) = 8,02\text{cm}^2 \rightarrow c = 2,84\text{cm}$$

Teorema del seno para calcular \hat{A} : $\frac{a}{\text{sen}\hat{A}} = \frac{c}{\text{sen}\hat{C}} \rightarrow \frac{5}{\text{sen}\hat{A}} = \frac{2,84}{\text{sen}30} \rightarrow \hat{A} = \begin{cases} \hat{A}_1 = 62^\circ \\ \hat{A}_2 = 118^\circ \end{cases}$

Las dos soluciones parecen válidas, luego lo comprobaremos:

Solución 1:

$$\hat{C}=30^\circ, \hat{A}=62^\circ, \hat{B}=88^\circ \quad a=5\text{cm}, b=3\text{cm}, c=2,84\text{cm}.$$

Solución 2:

$$\hat{C}=30^\circ, \hat{A}=118^\circ, \hat{B}=32^\circ \quad a=5\text{cm}, b=3\text{cm}, c=2,84\text{cm}.$$

En este caso la solución 1 no es válida, pues cuanto mayor sea el lado mayor el ángulo. Y en la solución 1 vemos como a es el mayor lado y \hat{A} no es el mayor ángulo.

c) $\hat{A}=45^\circ$, $\hat{C}=60^\circ$, $b=20\text{m}$

Podemos fácilmente calcular el otro ángulo $\hat{B} = 180 - 60 - 45 = 75^\circ$

Utilicemos el teorema del seno para calcular los 2 lados que faltan:

$$\frac{a}{\text{sen}\hat{A}} = \frac{b}{\text{sen}\hat{B}} = \frac{c}{\text{sen}\hat{C}} \rightarrow \begin{cases} \frac{a}{\text{sen}45} = \frac{20}{\text{sen}75} \rightarrow a = 14,6\text{m} \\ \frac{20}{\text{sen}75} = \frac{c}{\text{sen}60} \rightarrow c = 17,9\text{m} \end{cases}$$

d) $\hat{C} = 45^\circ$, $b=10\text{m}$, $c=6\text{m}$

Utilicemos el teorema del seno para calcular el ángulo \hat{B}

$$\frac{b}{\text{sen}\hat{B}} = \frac{c}{\text{sen}\hat{C}} \rightarrow \frac{10}{\text{sen}\hat{B}} = \frac{6}{\text{sen}45^\circ} \rightarrow \text{sen}\hat{B} = 1,17 \rightarrow \text{No solución}$$

e) $a=5\text{cm}$, $b=4\text{cm}$, $c=4\text{cm}$

Por el teorema del coseno obtendremos el ángulo deseado:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \hat{A} \rightarrow 25 = 16 + 16 - 32 \cdot \cos(\hat{A}) \rightarrow \hat{A} = 77,36^\circ$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos \hat{B} \rightarrow 16 = 25 + 16 - 40 \cdot \cos \hat{B} \rightarrow \hat{B} = 51,32^\circ$$

$$\hat{C} = 180 - \hat{A} - \hat{B} = 51,32^\circ$$