Trigonometría

PREGUNTAS MÁS FRECUENTES

1. ¿En qué unidades se miden los ángulos?

El sistema clásico de medida de ángulos es el sexagesimal que divide el ángulo recto en 90º. Existe un grado centesimal que divide el ángulo recto en 100º, pero no se usa. Ambas son medidas artificiales, la medida natural es el radián que mide los ángulos a través de las longitudes de los arcos sobre una circunferencia de radio igual a 1. Es decir, que al ángulo recto le corresponde la cuarta parte del perímetro de una circunferencia de radio uno: $\text{Ángulo Recto} = \frac{2\pi \cdot 1}{4} = \frac{\pi}{2}\ \text{Radianes}$

Las calculadoras disponen de los tres tipos. Suelen simbolizarlos con: DEG, GRAD, RAD para los grados sexagesimales, centesimales y los radianes respectivamente.

Para hacer la conversión de grados sexagesimales a radianes basta con aplicar el factor de conversión $\frac{\pi}{180}\ {}^{rad}\!/_{\text{o}}$ y para convertir un ángulo en radianes a grados sexagesimales el factor $\frac{180}{\pi}\ {}^{\text{o}}\!/_{rad}$

2. ¿Qué son las razones trigonométricas?

En principio son conceptos diseñados para relacionar los ángulos y los lados en un triángulo rectángulo. A continuación se extiende la definición para cualquier tipo de ángulo y por último acaban siendo funciones con identidad propia que les permite ser utilizadas en ámbitos que van mucho más allá de los triángulos.

3. ¿Cómo se definen las razones trigonométricas en un triángulo rectángulo?

Partimos de un ángulo agudo **α** perteneciente a un triángulo rectángulo. El seno, el coseno y la tangente de este ángulo se definen a través de las longitudes de los catetos y la hipotenusa. Diferenciamos los dos catetos según su situación respecto del ángulo: ya sea formando parte del ángulo (cateto contiguo) o en frente suyo (cateto opuesto). Las definiciones son:

$$sen\,\alpha = \frac{\text{Cateto Opuesto}}{\text{Hipotenusa}} \qquad \cos\alpha = \frac{\text{Cateto Contiguo}}{\text{Hipotenusa}} \qquad tg\,\alpha = \frac{\text{Cateto Opuesto}}{\text{Cateto Contiguo}}$$

Para un ángulo igual a cero se entiende que el cateto opuesto es cero y que coinciden el cateto contiguo y la hipotenusa, por lo que su seno y tangente son nulos y su coseno es igual a uno. Para un ángulo recto se entiende que el cateto contiguo es cero y que coinciden el cateto opuesto y la hipotenusa, por lo que su coseno es nulo, su seno es igual a uno no tiene definida su tangente al anularse el denominador.

Aplicando el teorema de Pitágoras se deducen otros valores, que forman la siguiente tabla:

	0º	**30º**	**45º**	**60º**	**90º**
Seno	0	${}^{1}\!/_{2}$	${}^{\sqrt{2}}\!/_{2}$	${}^{\sqrt{3}}\!/_{2}$	1
Coseno	1	${}^{\sqrt{3}}\!/_{2}$	${}^{\sqrt{2}}\!/_{2}$	${}^{1}\!/_{2}$	0
Tangente	0	${}^{\sqrt{3}}\!/_{3}$	1	$\sqrt{3}$	

Si invertimos estas definiciones tendremos las razones trigonométricas inversas, de nombre: cosecante, secante y cotangente:

$$\text{cosec}\,\alpha = \frac{1}{sen\,\alpha} = \frac{\text{Hipotenusa}}{\text{Cateto Opuesto}} \qquad \sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} = \frac{\text{Hipotenusa}}{\text{Cateto Contiguo}} \qquad \text{cotg}\,\alpha = \frac{1}{tg\,\alpha} = \frac{\text{Cateto Contiguo}}{\text{Cateto Opuesto}}$$

4. ¿Cómo están relacionadas entre si las razones trigonométricas de un mismo ángulo?

La primera relación que nace directamente de sus definiciones es: $\text{tg}\,\alpha = \frac{sen\,\alpha}{\cos\alpha}$ $\qquad \text{cotg}\,\alpha = \frac{\cos\alpha}{sen\,\alpha}$

Aplicando directamente el teorema de Pitágoras tendremos la llamada propiedad fundamental de la Trigonometría:

$$sen^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

De ésta se deducen: $1 + tg^2\alpha = \sec^2\alpha$ $\qquad 1 + \text{cotg}^2\alpha = \text{cosec}^2\alpha$

Con estas identidades, podríamos calcular las restantes razones trigonométricas partiendo de una cualquiera de ellas, como vemos en los siguientes ejemplos:

Ejemplos:

- Sea $sen\alpha = 0{,}6$

$$sen\alpha = 0{,}6 \Rightarrow \cos\alpha = \sqrt{1 - sen^2\alpha} = \sqrt{1 - 0{,}6^2} = 0{,}8 \Rightarrow tg\alpha = \frac{sen\alpha}{\cos\alpha} = \frac{0{,}6}{0{,}8} = 0{,}75$$

$$\text{cosec}\,\alpha = \frac{1}{sen\alpha} = \frac{1}{0{,}6} = \frac{5}{3},\ \sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} = \frac{1}{0{,}8} = 1{,}25,\ \text{cotg}\,\alpha = \frac{1}{tg\alpha} = \frac{1}{0{,}75} = \frac{4}{3}$$

- Sea $\cos\alpha = \frac{5}{12}$

$$\cos\alpha = \frac{5}{12} \Rightarrow sen\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha} = \sqrt{1 - \left(\frac{5}{12}\right)^2} = \frac{13}{12} \Rightarrow tg\alpha = \frac{sen\alpha}{\cos\alpha} = \frac{13}{5} = 2{,}6$$

$$\text{cosec}\,\alpha = \frac{1}{sen\alpha} = \frac{12}{13},\ \sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} = \frac{12}{5} = 2{,}4,\ \text{cotg}\,\alpha = \frac{1}{tg\alpha} = \frac{5}{13}$$

- Sea $tg\alpha = 2$

$$tg\alpha = 2 \Rightarrow \sec^2\alpha = 1 + tg^2\alpha \Rightarrow \sec\alpha = \sqrt{1 + tg^2\alpha} = \sqrt{1 + 2^2} = \sqrt{5} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{1}{\sec\alpha} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow sen\alpha = \cos\alpha \cdot tg\alpha = \frac{\sqrt{5}}{5} \cdot 2 = \frac{2 \cdot \sqrt{5}}{5}$$

$$\text{cosec}\,\alpha = \frac{1}{sen\alpha} = \frac{5}{2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{2},\ \ \text{cotg}\,\alpha = \frac{1}{tg\alpha} = \frac{1}{2} = 0{,}5$$

- Sea $\sec\alpha = 5$

$$\sec\alpha = 5 \Rightarrow \cos\alpha = \frac{1}{\sec\alpha} = \frac{1}{5} = 0{,}2 \Rightarrow sen\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{5}\right)^2} = \frac{\sqrt{24}}{5} \Rightarrow tg\alpha = \frac{sen\alpha}{\cos\alpha} = \sqrt{24}$$

$$\text{cosec}\,\alpha = \frac{1}{sen\alpha} = \frac{5}{\sqrt{24}} = \frac{5\sqrt{24}}{24},\ \ \text{cotg}\,\alpha = \frac{1}{tg\alpha} = \frac{1}{\sqrt{24}} = \frac{\sqrt{24}}{24}$$

- Sea $\text{cosec}\,\alpha = 3$

$$\text{cosec}\,\alpha = 4 \Rightarrow sen\alpha = \frac{1}{\text{cosec}\,\alpha} = \frac{1}{4} = 0{,}25 \Rightarrow \cos\alpha = \sqrt{1 - sen^2\alpha} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{15}}{4} \Rightarrow tg\alpha = \frac{sen\alpha}{\cos\alpha} = \frac{1}{\sqrt{15}}$$

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} = \frac{4}{\sqrt{15}},\ \text{cotg}\,\alpha = \frac{1}{tg\alpha} = \sqrt{15}$$

- Sea $\text{cotg}\,\alpha = 0{,}2$

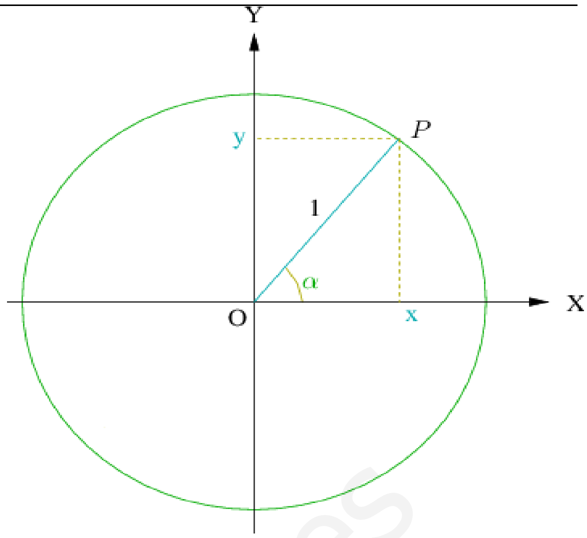
$$tg\alpha = \frac{1}{\text{cotg}\,\alpha} = \frac{1}{0{,}2} = 5$$

$$\text{cotg}\,\alpha = 0{,}2 \Rightarrow \text{cosec}^2\alpha = 1 + \text{cotg}^2\alpha \Rightarrow \text{cosec}\,\alpha = \sqrt{1 + \text{cotg}^2\alpha} = \sqrt{1 + 0{,}2^2} = \frac{\sqrt{26}}{5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow sen\alpha = \frac{1}{\sec\alpha} = \frac{5}{\sqrt{26}} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{sen\alpha}{tg\alpha} = \frac{1}{\sqrt{26}} = \frac{\sqrt{26}}{26}$$

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} = \sqrt{26}$$

5. **¿Qué es la circunferencia Goniométrica?**
Se trata de una circunferencia con radio igual a 1. Eligiendo un punto cualquiera ***P*** de la misma, tendremos definido un radio que forma con la parte positiva del eje ***X*** un ángulo α. Las coordenadas del punto ***P***(***x***, ***y***) coinciden respectivamente con el coseno y el seno del ángulo α.
Es muy intuitivo pensar que si trazamos un ángulo de supere una vuelta completa a la circunferencia, volveríamos a repetir los mismos puntos y coordenadas ***P***(***x***, ***y***).
Los ángulos se consideran positivos si se giran con sentido anti-horario y negativos si se giran como las agujas del reloj.



6. **¿Cómo se define se definen las razones trigonométricas de un ángulo cualquiera?**
Superando la anterior definición con catetos e hipotenusas, todo consiste en trazar el ángulo sobre la circunferencia goniométrica e identificar el coseno y seno del ángulo con las respectivas coordenadas ***x*** e ***y*** del punto ***P*** situado sobre la circunferencia.
De esta forma, tomarían los mismos valores que antes las razones trigonométricas de los ángulos agudos y quedarían definidas para ángulos positivos y negativos de cualquier amplitud.
Con esta nueva definición, podríamos ampliar la tabla de valores conocidos de seno, coseno y tangente para ángulos de los otros tres cuadrantes:

	0º	**30º**	**45º**	**60º**	**90º**	**120º**	**135º**	**150º**	**180º**
Seno	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
Coseno	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
Tangente	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$		$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

	210º	**225º**	**240º**	**270º**	**300º**	**315º**	**330º**	**360º**
Seno	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
Coseno	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
Tangente	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$		$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

7. **¿Qué valores pueden tomar las razones trigonométricas?**
Tal como las hemos definido tendremos:

$$-1 \leq sen\,\alpha \leq 1 \qquad -1 \leq \cos\alpha \leq 1 \qquad -\infty \leq tg\alpha \leq +\infty$$

$$1 \leq |\text{cosec}\,\alpha| < +\infty \qquad 1 \leq |\sec\alpha| < +\infty \qquad -\infty \leq \text{cotg}\,\alpha \leq +\infty$$

8. **¿Para qué ángulos se repiten las razones trigonométricas de distintos cuadrantes?**
La simetría de la circunferencia nos asegura que los valores de las razones trigonométricas se van a repetir con el mismo o distinto signo según cambiamos de cuadrantes. Son las siguientes relaciones:

Ángulos que difieren en 360º:	$sen(\alpha+360) = sen\,\alpha$	$\cos(\alpha+360) = \cos\alpha$	$tg(\alpha+360) = tg\alpha$
Ángulos que difieren en 180º:	$sen(\alpha+180) = -sen\,\alpha$	$\cos(\alpha+180) = -\cos\alpha$	$tg(\alpha+180) = tg\alpha$
Ángulos Opuestos:	$sen(-\alpha) = -sen\,\alpha$	$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$	$tg(-\alpha) = -tg\alpha$
Ángulos Complementarios:	$sen(90-\alpha) = \cos\alpha$	$\cos(90-\alpha) = sen\,\alpha$	$tg(90-\alpha) = \text{cotg}\,\alpha$
Ángulos Suplementarios:	$sen(180-\alpha) = -sen\,\alpha$	$\cos(180-\alpha) = -\cos\alpha$	$tg(180-\alpha) = -tg\alpha$

Si tenemos un ángulo que supere una vuelta completa, podemos hallar otro ángulo en su misma posición situado entre 0 y 360º. Para encontrarlo, basta con hallar el resto de su división entre 360º. Si es negativo, se actúa igual, pero luego se le suma 360º.

Ejemplos:

$$sen1946º = sen(5 \cdot 360º + 146º) = sen146º$$

$$\cos(-1946º) = \cos(-5 \cdot 360º - 146º) = \cos(-146º) = \cos(360º - 146º) = \cos 214º$$

9. ¿Son lineales las razones trigonométricas?

Si pensamos en algunos valores conocido enseguida nos damos cuenta que ninguna razón trigonométrica es lineal. Por ejemplo el seno del 180º no se parece en nada al doble del seno de 90º. Sin embargo hay unas fórmulas que permiten relacionarlos. Son las siguientes:

Suma de ángulos: $sen(\alpha+\beta) = sen\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot sen\beta$ $\qquad \cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta - sen\alpha\cdot sen\beta$

$$tg(\alpha+\beta) = \frac{tg\alpha + tg\beta}{1 - tg\alpha\cdot tg\beta}$$

Resta de ángulos: $sen(\alpha-\beta) = sen\alpha\cdot\cos\beta - \cos\alpha\cdot sen\beta$ $\qquad \cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta + sen\alpha\cdot sen\beta$

$$tg(\alpha-\beta) = \frac{tg\alpha - tg\beta}{1 + tg\alpha\cdot tg\beta}$$

Ángulo doble: $sen(2\alpha) = 2\cdot sen\alpha\cdot\cos\alpha$ $\qquad \cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - sen^2\alpha$ $\qquad tg(2\alpha) = \dfrac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}$

Ángulo mitad: $sen\dfrac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{2}}$ $\qquad \cos\dfrac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{2}}$ $\qquad tg\dfrac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$

Suma/Resta de senos: $sen\alpha + sen\beta = 2sen\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$ $\qquad sen\alpha - sen\beta = 2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cdot sen\dfrac{\alpha-\beta}{2}$

Suma/Resta de cosenos: $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$ $\qquad \cos\alpha - \cos\beta = -2sen\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cdot sen\dfrac{\alpha-\beta}{2}$

<u>Ejemplos</u>:

$$sen75º = sen(45º+30º) = sen45º\cdot\cos30º + \cos45º\cdot sen30º = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

$$\cos75º = \cos(45º+30º) = \cos45º\cdot\cos30º - sen45º\cdot sen30º = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

$$tg75º = tg(45º+30º) = \frac{tg45º + tg30º}{1 - tg45º\cdot tg30º} = \frac{1+\frac{\sqrt{3}}{3}}{1-1\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{3+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}} = 2+\sqrt{3}$$

$$sen15º = sen\frac{30º}{2} = +\sqrt{\frac{1-\cos30º}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$$

$$\cos15º = \cos\frac{30º}{2} = +\sqrt{\frac{1+\cos30º}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$$

10. ¿Cómo se hallan los ángulos de los que conocemos alguna de sus razones trigonométricas?

Lo primero que conviene saber es que no hay un único ángulo para cada valor concreto de una razón trigonométrica. Salvo en 0º, 90º, 180º y 270º, **siempre** tendremos dos ángulos entre 0 y 360º pertenecientes a cuadrantes distintos y todos los situados en sus mismas posiciones y que difieren de ellos en vueltas completas. En definitiva, infinitos ángulos.

Como ejemplo, con valor de seno igual a 0,5, tendríamos: 30º, 150º, 390º, 510º, ...-210º, -330º, ...

Por otro lado, cualquier calculadora científica dispone de las funciones recíprocas de las trigonométricas y que no debemos confundir con las inversas: cosecante, secante o cotangente. Son las llamadas arco seno (sen^{-1}), arco coseno ($\cos^{-1}$) y arco tangente ( ). Estas funciones está claro que responden a la pregunta: '*¿Cuál es el ángulo cuyo seno (coseno, tangente) es...?*' pero debemos saber cuál de los infinitos ángulos propone como respuesta. sen^{-1} y dan como respuesta un ángulo entre -90º y 90º mientras que $\cos^{-1}$ responde con un ángulo entre 0º y 180º. Si necesitásemos hallar cualquier otro ángulo distinto del que propone, lo tendríamos que localizar nosotros aplicando las relaciones ya vistas. En los siguientes ejemplos damos las respuestas con ángulos, redondeados a grados, entre 0 y 360 sumados o restados de vueltas completas. En los ejemplos con tg^{-1} las dos soluciones y sus vueltas completas se pueden poner como una solución y medias vueltas completas.

Ejemplos:

$$sen\,\alpha = 0{,}515 \rightarrow sen^{-1}0{,}515 = 31º \Rightarrow \alpha = \begin{cases} 31º \pm k\cdot 360º \\ 149º \pm k\cdot 360º \end{cases} \ (k = 0,1,2,...)$$

$$sen\,\alpha = -0{,}454 \rightarrow sen^{-1}(-0{,}454) = -27º \Rightarrow \alpha = \begin{cases} 207º \pm k\cdot 360º \\ 333º \pm k\cdot 360º \end{cases} \ (k = 0,1,2,...)$$

$$\cos\alpha = 0{,}53 \rightarrow \cos^{-1}0{,}53 = 58º \Rightarrow \alpha = \begin{cases} 58º \pm k\cdot 360º \\ 302º \pm k\cdot 360º \end{cases} \ (k = 0,1,2,...)$$

$$\cos\alpha = -0{,}191 \rightarrow \cos^{-1}(-0{,}191) = 101º \Rightarrow \alpha = \begin{cases} 101º \pm k\cdot 360º \\ 259º \pm k\cdot 360º \end{cases} \ (k = 0,1,2,...)$$

$$tg\alpha = 14{,}3 \rightarrow tg^{-1}86 = 31º \Rightarrow \alpha = \begin{cases} 86º \pm k\cdot 360º \\ 266º \pm k\cdot 360º \end{cases} \ k = 0,1,2,... \Rightarrow \alpha = 86º \pm k\cdot 180º \ (k = 0,1,2,...)$$

$$tg\alpha = -0{,}07 \rightarrow tg^{-1}(-0{,}07) = -4º \Rightarrow \alpha = \begin{cases} 176º \pm k\cdot 360º \\ 356º \pm k\cdot 360º \end{cases} \ k = 0,1,2,... \Rightarrow \alpha = 176º \pm k\cdot 180º \ (k = 0,1,2,...)$$

11. ¿Cómo se resuelven las ecuaciones trigonométricas?

El apartado anterior trata en realidad del caso más elemental de ecuación trigonométrica: Una única razón trigonométrica igualada a un número. Si aparece más de una razón trigonométrica debemos emplear las identidades trigonométricas hasta que en la ecuación aparezca una única razón. Normalmente se le identifica con una letra y se resuelve la ecuación resultante, que puede ser de segundo grado, polinómica, irracional etc. No hay que olvidar que por cada valor de la razón trigonométrica hay dos ángulos distintos. También hay que tener cuidado cuando se eleva al cuadrado, tendremos que comprobar todas las soluciones, ya que pueden aparecer soluciones falsas. Hay pocas instrucciones generales que dar, es posible que en cada caso se actúe de manera diferente.

Ejemplo:

$$50sen^2x - 5senx - 3 = 0$$

$$senx = t$$

$$50t^2 - 5t - 3 = 0 \Rightarrow t = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 4\cdot 50\cdot 3}}{2\cdot 50} = \begin{cases} 0{,}3 \rightarrow sen^{-1}0{,}3 = 17{,}46º \Rightarrow x = \begin{cases} 17{,}46º \\ 180º - 17{,}46º = 162{,}54º \end{cases} \\ -0{,}2 \rightarrow sen^{-1}(-0{,}2) = -11{,}54º \Rightarrow x = \begin{cases} 360º - 11{,}54º = 348{,}46º \\ 180º + 11{,}54º = 191{,}54º \end{cases} \end{cases}$$

Ejemplo:

$$senx - 2\cos x - 2 = 0$$

$$senx - 2\cos x - 2 = 0 \rightarrow senx = 2\cos x + 2 \rightarrow sen^2x = (2\cos x + 2)^2 \rightarrow sen^2x = 4\cos^2 x + 8\cos x + 4 \rightarrow$$

$$\rightarrow 1 - \cos^2 x = 4\cos^2 x + 8\cos x + 4 \Rightarrow 5\cos^2 x + 8\cos x + 3 = 0$$

$$\cos x = t$$

$$5t^2 + 8t + 3 = 0 \Rightarrow t = \frac{-8 \pm \sqrt{64 - 60}}{2\cdot 5} = \begin{cases} -0{,}6 \rightarrow \cos^{-1}(-0{,}6) = 126{,}87º \Rightarrow x = \begin{cases} 126{,}87º \\ 360º - 126{,}87º = 233{,}13º \end{cases} \\ -1 \rightarrow \cos^{-1}(-1) = 180º \Rightarrow x = 180º \end{cases}$$

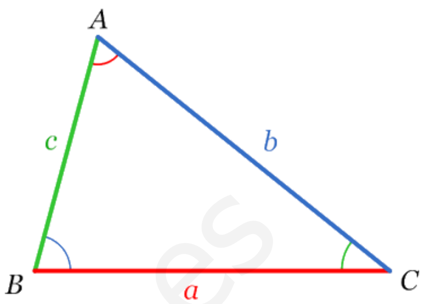
Se comprueban las tres soluciones, descubriendo que sólo son válidas dos de ellas 180º y 126,87º

12. ¿Qué es resolver un triángulo y qué fórmulas se emplean?

Partiendo de que en un triángulo podemos acabar conociendo sus tres lados y sus tres ángulos, se denomina resolver un triángulo a los procedimientos que me permiten, partiendo de unos datos, hallar los restantes. Quede claro que, como la suma de los tres ángulos de un triángulo es siempre 180º es lo mismo conocer dos ángulos que los tres.

Para poder resolver un triángulo tenemos que tener 3 datos para, a partir de ellos, poder hallar los tres restantes. Si se tratase de un triángulo rectángulo ya tendríamos un primer dato: que uno de sus ángulos es 90º y sólo necesitaríamos dos datos más. Hay cuatros casos distintos según en qué consistan los datos, si lados o ángulos y su posición relativa.

En los cuatro casos se aplican dos teoremas: el llamado de los senos y el del coseno. Por comodidad, se nombran a los tres ángulos del triángulo con las letras mayúsculas: ***A***, ***B***, ***C*** utilizando para sus respectivos lados opuestos las letras minúsculas: ***a***, ***b***, ***c***. En la fórmula del Teorema de los senos aparece el radio ***R*** de la circunferencia circunscrita al triángulo. El teorema del coseno consiste en realidad de tres fórmulas idénticas.



Teorema de los senos: $$\frac{a}{senA}=\frac{b}{senB}=\frac{c}{senC}=2R$$

Teorema del coseno:
$$a^2=b^2+c^2-2bc\cdot\cos A$$
$$b^2=a^2+c^2-2ac\cdot\cos B$$
$$c^2=a^2+b^2-2ab\cdot\cos C$$

Si el triángulo es rectángulo, una de las tres fórmulas del Teorema del coseno se convierte en el Teorema de Pitágoras.

13. ¿Cómo saber qué fórmulas debo escoger en los cuatro casos de resolución de triángulos?

La idea básica es que el teorema de los senos únicamente se puede emplear si es conocida al completo una de sus tres fracciones, esto es, una misma letra en minúscula y mayúscula. Por otra parte parece más cómoda la fórmula de los senos que la del coseno pero hay que tener en cuenta que al tratarse exclusivamente de ángulos menores de 180º es preferible utilizar el coseno, que con su signo nos aclararía si el ángulo es agudo u obtuso, mientras que con el seno tendríamos dos posibles ángulos y no sabríamos si son los dos correctos. En cualquier caso, realizado el primer cálculo, hay diversas opciones de continuación, pero debemos recordar que para hallar ángulos es preferible el coseno. El tercer ángulo se suele hallar como suplementario de la suma de los otros dos.

<u>Caso I</u>: Datos: ***a***, ***b***, ***c*** (los tres lados)

$$A=\cos^{-1}\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)\qquad B=\cos^{-1}\left(\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}\right)\qquad C=180º-A-B$$

Este caso podría no tener solución si alguno de los $\cos^{-1}$ quedase sin definir por tener un argumento que no esté entre -1 y 1.

<u>Ejemplo</u>:
Datos: ***a = 2***, ***b = 5***, ***c = 6***

$$A=\cos^{-1}\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)=\cos^{-1}\left(\frac{5^2+6^2-2^2}{2\cdot5\cdot6}\right)=\cos^{-1}\left(\frac{57}{60}\right)=18{,}19º$$

$$B=\cos^{-1}\left(\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}\right)=\cos^{-1}\left(\frac{2^2+6^2-5^2}{2\cdot2\cdot6}\right)=\cos^{-1}\left(\frac{15}{24}\right)=51{,}32º\qquad C=180º-18{,}19º-51{,}32º=110{,}49º$$

<u>Caso II</u>: Datos: ***a***, ***b***, ***C*** (dos lados y el ángulo formado por ellos)

$$c=\sqrt{a^2+b^2-2ab\cdot\cos C}\qquad B=\cos^{-1}\left(\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}\right)\qquad A=180º-A-C$$

Este caso siempre tiene solución.

Caben otras combinaciones distintas de letras, pero lo que distingue a este caso es que en los datos aparecen las tres letras, dos minúsculas y una mayúscula.

<u>Ejemplo</u>:
Datos: ***a = 2***, ***b = 5***, ***C = 18º***

$$c=\sqrt{a^2+b^2-2ab\cdot\cos C}=\sqrt{2^2+5^2-2\cdot2\cdot5\cdot\cos18º}=3{,}1589$$

$$B=\cos^{-1}\left(\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}\right)=\cos^{-1}\left(\frac{2^2+3{,}1589^2-5^2}{2\cdot2\cdot3{,}1589}\right)=\cos^{-1}(-0{,}8722)=150{,}72º$$

$$A=180º-18º-150{,}72º=11{,}28º$$

Caso III: Datos: ***a***, ***b***, ***A*** (dos lados y uno de los ángulo **no** formado por ellos)

$$senB = \frac{bsenA}{a} \Rightarrow \begin{cases} B = sen^{-1}\left(\frac{bsenA}{a}\right) \Rightarrow C = 180º - A - B \Rightarrow c = \frac{a \cdot senC}{senA} \\ y/o \\ B = 180º - sen^{-1}\left(\frac{bsenA}{a}\right) \Rightarrow C = 180º - A - B \Rightarrow c = \frac{a \cdot senC}{senA} \end{cases}$$

Este es el llamado caso ambiguo, puesto que podrían existir dos triángulos distintos con los datos dados si en los dos cálculos del tercer ángulo resultan cantidades positivas. Podría existir sólo una solución si sólo en uno de los cálculos del tercer ángulo resulta positivo. Podría no tener ninguna solución si el sen^{-1} quedase sin definir por tener argumento que no esté entre -1 y 1.
Caben otras combinaciones distintas de letras, pero lo que distingue a este caso es que en los datos **no** aparecen las tres letras, hay una en minúsculas y en mayúsculas y otra en minúsculas.

Ejemplo:
Datos: ***a = 2***, ***b = 5***, ***A = 18º***

$$\begin{cases} B = sen^{-1}\left(\frac{5sen18}{2}\right) = 50{,}58º \Rightarrow C = 180º - 18º - 50{,}58º = 111{,}42º \Rightarrow c = \frac{a \cdot senC}{senA} = \frac{2 \cdot sen111{,}42º}{sen18º} = 6{,}0251 \\ ó \\ B = 180º - 50{,}58º = 129{,}42º \Rightarrow C = 180º - 18º - 129{,}42º = 32{,}58º \Rightarrow c = \frac{a \cdot senC}{senA} = \frac{2 \cdot sen32{,}58º}{sen18º} = 3{,}4851 \end{cases}$$

Hay dos triángulos solución.

Ejemplo:
Datos: ***a = 5***, ***b = 2***, ***A = 18º***

$$\begin{cases} B = sen^{-1}\left(\frac{2sen18}{5}\right) = 7{,}1º \Rightarrow C = 180º - 18º - 7{,}1º = 154{,}9º \Rightarrow c = \frac{a \cdot senC}{senA} = \frac{5 \cdot sen154{,}9º}{sen18º} = 6{,}8637 \\ ó \\ B = 180º - 7{,}1º = 172{,}9º \Rightarrow C = 180º - 18º - 172{,}9º = -10{,}9º \rightarrow \text{Que no es solución} \end{cases}$$

Hay únicamente un triángulo solución.

Ejemplo:
Datos: ***a = 2***, ***b = 5***, ***A = 23º***

$$B = sen^{-1}\left(\frac{5sen25}{2}\right) = sen^{-1}\left(\frac{5sen25}{2}\right) = sen^{-1}(1{,}0565) \text{ Que no es posible}$$

No hay ninguna solución.

Caso IV: Datos: ***a***, ***A***, ***B*** (dos ángulos y un lados)

$$C = 180º - A - B \qquad b = \frac{a \cdot senB}{senA} \qquad c = \frac{a \cdot senC}{senA}$$

No importa la posición del dato lado respecto de los datos ángulos, ya que conocidos dos ángulos es conocido el tercero.
Este caso siempre tiene solución salvo que los dos ángulos conocidos sumen más de 180º.
Caben otras combinaciones distintas de letras, pero lo que distingue a este caso es que aparecen dos letras mayúsculas y una minúscula.

Ejemplo:
Datos: ***a = 2***, ***A = 35º***, ***B = 68º***

$$C = 180º - 35º - 68º = 77º \qquad b = \frac{2 \cdot sen68º}{sen35º} = 3{,}2330 \qquad c = \frac{2 \cdot sen77º}{sen35º} = 3{,}3975$$

14. ¿Qué fórmula se debe emplear para hallar el área de un triángulo?

Obviamente sigue siendo válida la clásica '*mitad de la base por la altura*', pero si conocemos alguno de sus ángulos es mucho más cómodo usar cualquiera de las tres siguientes que utilizan dos lados cualesquiera y el ángulo determinado por ellos. Es decir, dos letras en minúsculas y la letra que falta en mayúsculas.

$$Área = \frac{bc \cdot senA}{2} = \frac{ac \cdot senB}{2} = \frac{ab \cdot senC}{2}$$

Si no tenemos exactamente dichos datos, resolveríamos el triángulo hasta tenerlos.

Ejemplo:
Datos: ***a = 2***, ***A = 65º***, ***C = 16º***

$$B = 180º - 65º - 16º = 99º \qquad b = \frac{2 \cdot sen99º}{sen65º} = 2{,}1796 \qquad Área = \frac{ab \cdot senC}{2} = \frac{2 \cdot 2{,}1796 \cdot sen99}{2} = 2{,}1528$$