Trigonometría

Nombre: ....

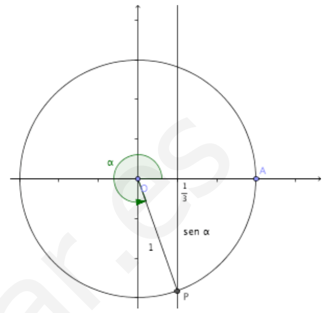
Valor	Nota
10	

1. a) Sin usar la calculadora y sabiendo que el ángulo α está comprendido entre 270º y 360º y que su coseno vale: cos α = 1/3, calcular el seno y la tangente del ángulo α.
b) Dibuja el ángulo α en una circunferencia de radio 1.

a) El ángulo es del cuarto cuadrante, luego su seno será negativo y su tangente también

$$sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \quad sen\,\alpha = \sqrt{1-cos^2\alpha} = \sqrt{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2} = \boxed{-\frac{\sqrt{8}}{3}};$$

$$tan\,\alpha = \frac{sen\,\alpha}{cos\,\alpha} = \left(-\frac{\sqrt{8}}{3}\right):\left(\frac{1}{3}\right) = \boxed{-\sqrt{8}}.$$



b) En la figura adjunta se ha trazado una perpendicular sobre el punto de coordenadas (1/3, 0) y se ha unido el punto de corte con la circunferencia que está en el tercer cuadrante para determinar el ángulo.

Valor	Nota
10	

2. Demostrar que: $\dfrac{\cos x}{1+\operatorname{sen} x} + \dfrac{1+\operatorname{sen} x}{\cos x} = 2\cdot \sec x$

En la parte de la izquierda de la expresión, se pone denominador común y se opera:

$$\frac{cos\,x}{1+sen\,x} + \frac{1+sen\,x}{cos\,x} = \frac{cos\,\alpha\cdot cos\,\alpha}{cos\,\alpha\cdot(1+sen\,\alpha)} + \frac{(1+sen\,\alpha)\cdot(1+sen\,\alpha)}{cos\,\alpha\cdot(1+sen\,\alpha)} = \frac{cos^2\alpha+1+sen^2\alpha+2\cdot sen\,\alpha}{cos\,\alpha\cdot(1+sen\,\alpha)} =$$

$$= \frac{1+1+2\cdot sen\,\alpha}{cos\,\alpha\cdot(1+sen\,\alpha)} = \frac{2\cdot(1+sen\,\alpha)}{cos\,\alpha\cdot(1+sen\,\alpha)} = \frac{2}{cos\,\alpha} = 2\cdot sec\,\alpha$$

Valor	Nota
10	

3. Demostrar, usando fórmulas trigonométricas y sin calculadora, que:

$$\operatorname{sen}105^\circ - \operatorname{sen}45^\circ - \operatorname{sen}15^\circ = 0$$

Como 105º = 60º + 45º y 15º = 45º - 30º, tenemos que:

$$sen\,105^\circ - sen\,45^\circ - sen\,15^\circ = sen\,(60^\circ+45^\circ) - sen\,45^\circ - sen\,(45^\circ-30^\circ) =$$

$$= sen\,60^\circ\cdot cos\,45^\circ + cos\,60^\circ\cdot sen\,45^\circ - sen\,45^\circ - (sen\,45^\circ\cdot cos\,30^\circ - cos\,45^\circ\cdot sen\,30^\circ) =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} =$$

$$= \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}-2\sqrt{2}+\sqrt{2}}{4} = 0$$

Valor	Nota
10	

4. Demostrar que: $\tan 3\alpha = \dfrac{\operatorname{sen} 6\alpha}{1+\cos 6\alpha}$

Aplicamos las fórmulas del ángulo doble para 6α, que es el doble de 3α:

$$\frac{sen\,6\alpha}{1+cos\,6\alpha} = \frac{2\cdot sen\,3\alpha\cdot cos\,3\alpha}{1+cos^2 3\alpha - sen^2 3\alpha} = \frac{2\cdot sen\,3\alpha\cdot cos\,3\alpha}{1+cos^2 3\alpha - (1-cos^2 3\alpha)} = \frac{2\cdot sen\,3\alpha\cdot cos\,3\alpha}{2\cdot cos^2 3\alpha} = \frac{sen\,3\alpha}{cos\,3\alpha} = tan\,3\alpha$$

Valor	Nota
20	

5. Encima de un edificio de 120 m de altura, hay una antena de radio. Una persona de 1,80 m de altura, desde el suelo ve el pie de la antena con un ángulo de elevación de 38º 20' y el extremo de la antena con un ángulo de elevación de 50° 35'. Calcular la altura de la antena.

Los triángulos ABC y ABD son rectángulos. En cada uno de ellos calculamos la tangente del ángulo A. Quedan dos ecuaciones que al resolverlas nos permiten hallar la altura de la antena:

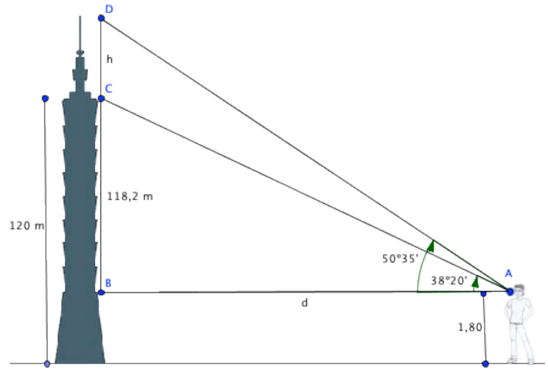
$$tan\,38^\circ 20' = \frac{118,2}{d} \Rightarrow \quad d = \frac{118,2}{tan\,38^\circ 20'} = \frac{118,2}{0,790697} = 149,49\ m$$

y sustituyendo en la tangente del otro lado, tenemos:

$$\tan 50^\circ 35' = \frac{118,2+h}{d} \Rightarrow \quad 1,216698 = \frac{118,2+h}{149,49}$$

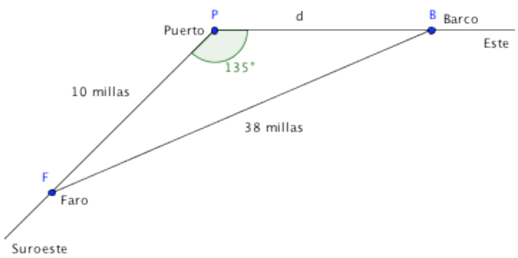
Se resuelve ahora la ecuación y queda que:

$$181,88 = 118,2 + h \Rightarrow \quad \boxed{h = 63,68\ m}$$



Valor	Nota
20	

6. A 10 millas al Suroeste de un puerto hay un faro. Un barco navega hacia el Este desde el puerto a 24 nudos y ha salido al mediodía. ¿A qué hora está a 38 millas del faro?



La dirección Este con la Suroeste forma un ángulo de 135°. En la figura se puede observar la disposición del Faro, Puerto y Barco, así como los datos del problema. Sólo tenemos que averiguar la distancia recorrida por el barco y una vez la sepamos dividir por la velocidad, que es de 24 nudos (millas/hora) para saber el tiempo que necesitamos para recorrerlo. Aplicamos el teorema del coseno:

$$38^2 = 10^2 + d^2 - 2\cdot 10\cdot d\cdot \cos 135^\circ \Rightarrow \quad 1444 = 100 + d^2 + 14,14\cdot d$$

Resolvemos la ecuación de segundo grado que resulta:

$$d^2 + 14,14\cdot d - 1344 = 0 \Rightarrow \quad d = \frac{-14,14 \pm \sqrt{14,14^2 + 4\cdot 1344}}{2} = \begin{cases} 30,27\ \text{millas} \\ -44,41\ \text{millas} \end{cases}$$

Evidentemente, la solución negativa no sirve pues indicaría que el barco ha ido hacia el Oeste. Luego el Barco está a 30,27 millas del Puerto que a 24 millas hora, le ha costado hacerlo: $t = \frac{30,27}{24} = 1,26\ h = \boxed{1h\ 16 min}$. *Como sal del Puerto a mediodía, es precisamente esa hora.*

Valor	Nota
20	

7. Un barco que navega en dirección noreste con una velocidad de 30 nudos, observa un faro al mediodía, en dirección N 100° E. Una hora más tarde ese mismo faro lo observa en dirección N 150° O. ¿A qué distancia estaba en cada momento del faro? ¿Cuál ha sido la menor distancia a la que ha estado del faro? ¿A qué hora? ?

En la figura adjunta A indica la primera posición del Barco, B la segunda una hora después a 30 millas al Noreste de A. El Faro se encuentra en F. Del triángulo ABF, conocemos el lado AB = 30 y los ángulos A = 100° - 45° = 55° y B= 150° - 135° = 15°. Por tanto el tercer ángulo vale F= 180° - 55° - 15° = 110°. Aplicando el teorema del seno podemos averiguar los otros dos lados, que son las distancia del Barco al Faro en los dos momentos:

$$\frac{30}{\operatorname{sen} 110^\circ} = \frac{AF}{\operatorname{sen} 15^\circ} = \frac{BF}{\operatorname{sen} 55^\circ} \Rightarrow \begin{cases} AF = \dfrac{30\cdot \operatorname{sen} 15^\circ}{\operatorname{sen} 110^\circ} = \boxed{8,26\ \text{millas}} \\[2ex] BF = \dfrac{30\cdot \operatorname{sen} 55^\circ}{\operatorname{sen} 110^\circ} = \boxed{26,16\ \text{millas}} \end{cases}$$

La menor distancia al Faro es en el punto D, que es el pie de la altura. Tenemos que calcular AD para saber la distancia que hay que recorrer para llegar a él y dividiendo por la velocidad (30 millas/h) sabremos cuanto le cuesta llegar a D. En el triángulo ADF calculamos el seno y el coseno de A:

$$\cos 55^\circ = \frac{AD}{AF} \Rightarrow \quad AD = AF\cdot \cos 55^\circ = 4,74\ \text{millas}$$

$$\operatorname{sen} 55^\circ = \frac{DF}{AF} \Rightarrow \quad h = DF = AF\cdot \operatorname{sen} 55^\circ = \boxed{6,77\ \text{millas}}$$

Luego la menor distancia a la que está del faro son 6,77 millas y eso ocurre: $t = \frac{4,74}{30} = 0,158\ h = \boxed{9,5 min}$ *después del mediodía, que es el tiempo que le cuesta al barco recorrer las 4,74 millas que le separan de D*