

Trigonometría y Triángulos

**INTRODUCCIÓN A LA TRIGONOMETRÍA
FÓRMULAS Y ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS
RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS**

www.yourpaperbar.es

TEMA 1.- INTRODUCCIÓN A LA TRIGONOMETRÍA

1.- ÁNGULOS

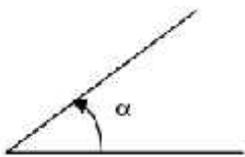
1.- Definición

Un **ángulo** es la parte del plano limitada por dos que se cortan.

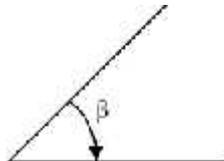


A las semirrectas se les llama *lados* y al punto común *vértice*.

El ángulo es *positivo* si se desplaza en sentido contrario al movimiento de las agujas del reloj y *negativo* en caso contrario



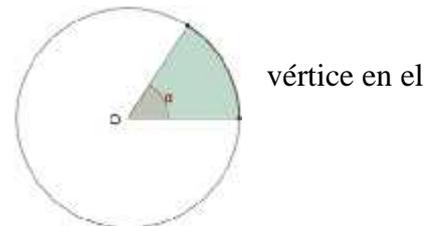
$\alpha > 0$ positivo



$\beta < 0$ negativo

2.- Medidas de ángulos

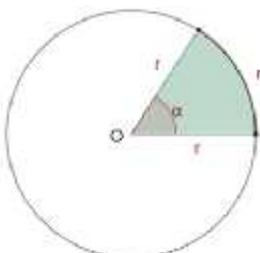
Para medir un ángulo se colocan las semirrectas con el centro de una circunferencia:



Existen tres unidades fundamentales de medidas de ángulos:
Grados sexagesimales, radianes y grados centesimales

Un **grado sexagesimal** ($^\circ$) es lo que mide un ángulo resultante de dividir la circunferencia en 360 partes iguales, es decir, una circunferencia mide 360 grados sexagesimales (360°). Por tanto, un ángulo recto medirá 90° y una semicircunferencia 180° .

Un **radián (rad)** es la medida de un ángulo cuyo arco mide un radio:



Como la longitud de la circunferencia es $2\pi r$, es fácil ver que el ángulo completo de una circunferencia mide 2π radianes.

Por tanto, la equivalencia entre ambas unidades de medida es:

$$360^\circ \leftrightarrow 2\pi \text{ rad}$$

Usando esta relación como referencia, se obtienen equivalencias:

$$180^\circ \leftrightarrow f \text{ rad}$$

$$90^\circ \leftrightarrow \frac{f}{2} \text{ rad}$$

Por tanto, mediante una sencilla regla de 3 se puede pasar de una unidad de medida a otra.

Ejercicio:

Transformar de radianes a grados sexagesimales y viceversa:

$$45^\circ, \frac{\pi}{3}, 270^\circ, \frac{5\pi}{4}, 30^\circ, 120^\circ, \frac{7\pi}{6}, 315^\circ$$

Un **grado centesimal** (g) es lo que mide un ángulo resultante de dividir la circunferencia en 400 partes iguales, es decir, una circunferencia mide 400 grados sexagesimales (400^g). Por tanto, un ángulo recto medirá 100^g y una semicircunferencia 200^g .

Esta unidad de medida de ángulos está en desuso, y nosotros sólo trabajaremos con grados sexagesimales y radianes.

2.- RAZONES TRIGONOMÉTRICAS

Para definir las razones trigonométricas colocamos el ángulo en una circunferencia de radio r y con el centro en el origen del sistema de coordenadas.

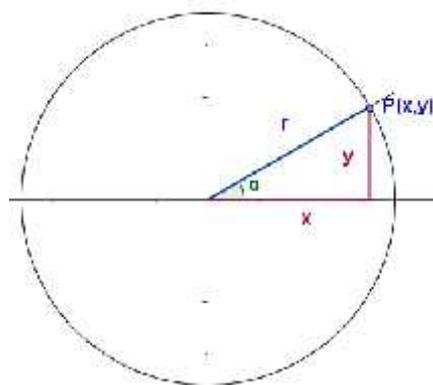
Cada ángulo tiene un punto asociado en la circunferencia, $P(x,y)$

A partir de ese punto, se definen las razones trigonométricas del ángulo como:

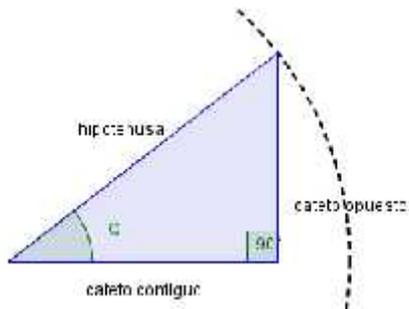
- **Seno de** $\Rightarrow \operatorname{sen} \gamma = \frac{y}{r}$
- **Coseno de** $\Rightarrow \operatorname{cos} \gamma = \frac{x}{r}$
- **Tangente de** $\Rightarrow \operatorname{tg} \gamma = \frac{\operatorname{sen} \gamma}{\operatorname{cos} \gamma} = \frac{y}{x}$

Y sus inversas:

- **Cosecante de** $\Rightarrow \operatorname{cosec} \gamma = \frac{1}{\operatorname{sen} \gamma} = \frac{r}{y}$
- **Secante de** $\Rightarrow \operatorname{sec} \gamma = \frac{1}{\operatorname{cos} \gamma} = \frac{r}{x}$
- **Cotangente de** $\Rightarrow \operatorname{cot} \gamma = \frac{1}{\operatorname{tg} \gamma} = \frac{\operatorname{cos} \gamma}{\operatorname{sen} \gamma} = \frac{x}{y}$



Es importante destacar que las razones trigonométricas están relacionadas con los triángulos rectángulos, ya que si inscribimos un triángulo rectángulo en una circunferencia, las razones trigonométricas definidas anteriormente serán:



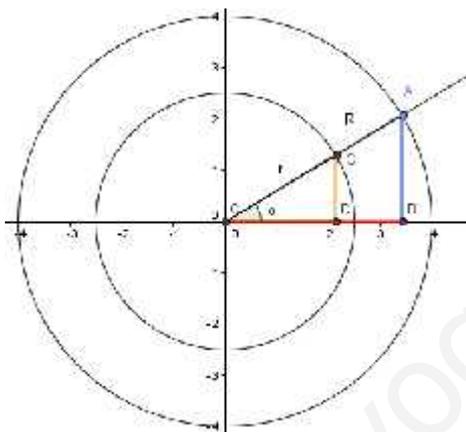
$$\text{sen } \gamma = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\text{cos } \gamma = \frac{\text{cateto contiguo}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\text{tg } \gamma = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto contiguo}}$$

Lo que será muy útil en la resolución de triángulos, como veremos en el tema 3.

Estas definiciones son independientes de la circunferencia sobre la que se sitúa el ángulo ya que, por el Teorema de Tales:



Los triángulos ABO y CDO son semejantes y por tanto:

$$\text{sen } \gamma = \frac{AB}{R} = \frac{CD}{r}$$

$$\text{cos } \gamma = \frac{BO}{R} = \frac{DO}{r}$$

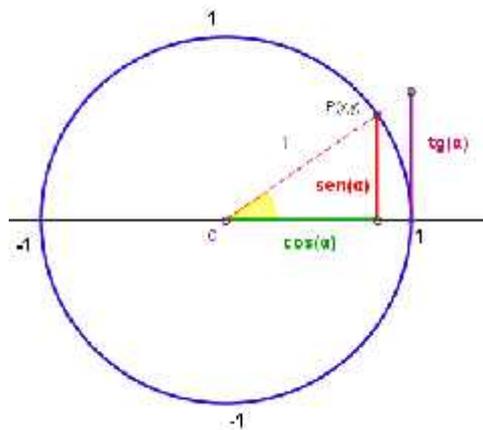
Es por eso que a partir de este momento usaremos como referencia a la hora de situar las razones trigonométricas de un ángulo una circunferencia de radio 1 (y centro el origen de coordenadas), llamada **circunferencia goniométrica**.

En ella se pueden situar fácilmente de manera gráfica las razones trigonométricas de un ángulo:

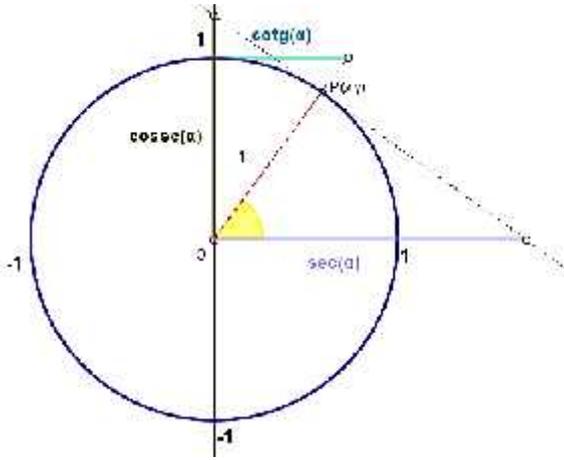
$$\text{sen } \gamma = y$$

$$\text{cos } \gamma = x$$

$$\text{tg } \gamma = \frac{y}{x}$$



Y las inversas:

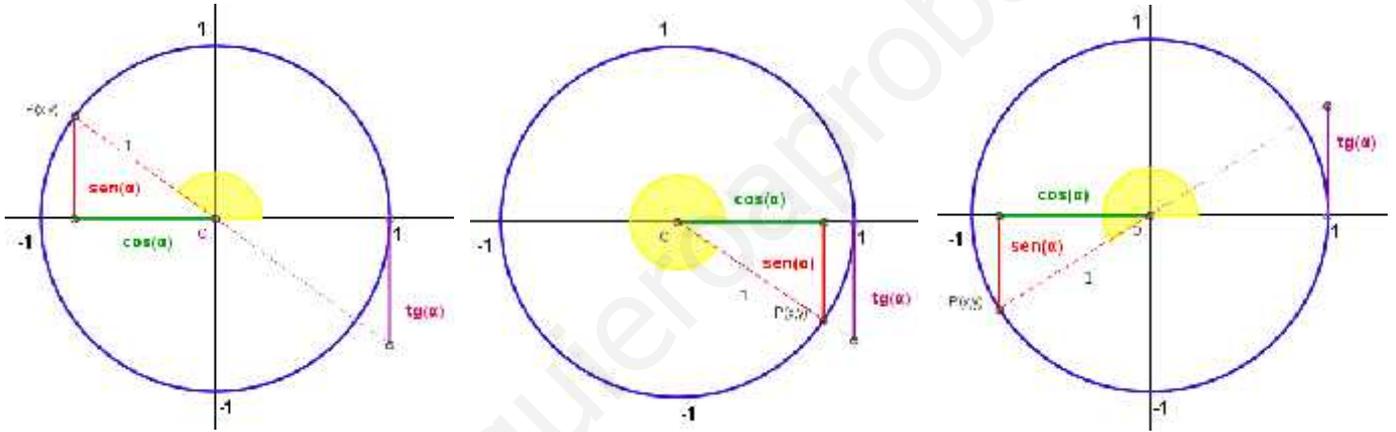


$$\operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{y}$$

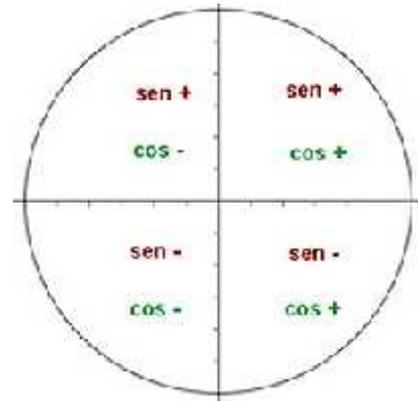
$$\operatorname{sec} \alpha = \frac{1}{x}$$

$$\operatorname{cotg} \alpha = \frac{x}{y}$$

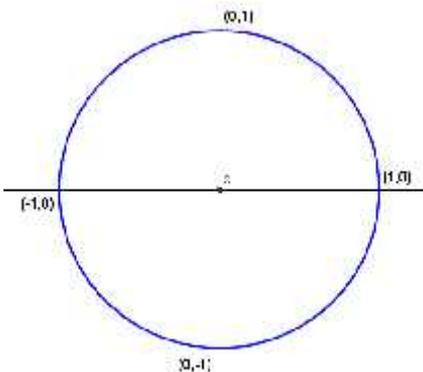
Y en los demás cuadrantes:



Además, al estar colocada la circunferencia en el origen de coordenadas, los signos de las razones trigonométricas en cada cuadrante serán (la tangente y las inversas quedan como ejercicio):



Y teniendo en cuenta la definición, podemos obtener las razones trigonométricas de algunos ángulos importantes. Por ejemplo:



$$\operatorname{sen} 90^\circ = 1 \quad ; \quad \operatorname{cos} 180^\circ = -1$$

$$\operatorname{sen} \frac{3\pi}{2} = -1 \quad ; \quad \operatorname{tg} 0^\circ = 0$$

$$\operatorname{cos} 90^\circ = 0 \quad ; \quad \operatorname{tg} 270^\circ \text{ no existe } \left(\frac{-1}{0} \right)$$

Ejercicio: Completar la siguiente tabla

	0°	$90^\circ \left(\frac{f}{2} \text{ rad}\right)$	$180^\circ (f \text{ rad})$	$270^\circ \left(\frac{3f}{2} \text{ rad}\right)$	$360^\circ (2f \text{ rad})$
sen					
cos					
tg					

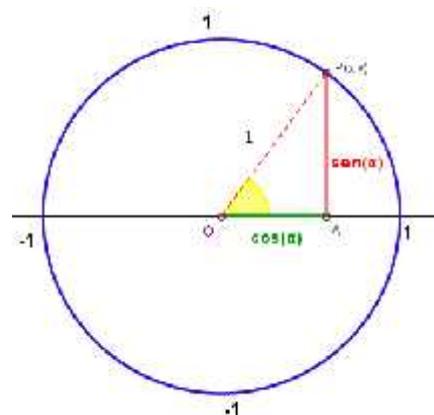
Conviene además conocer las razones trigonométricas de los ángulos más destacados del primer cuadrante:

$\alpha:$	0°	30°	45°	60°	90°
sen	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tg	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	

3.- RELACIONES ENTRE LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS

En el triángulo rectángulo OAP de la figura es fácil ver que, usando en Teorema de Pitágoras, se obtiene la *fórmula fundamental de la trigonometría*:

$$\boxed{\text{sen}^2 r + \text{cos}^2 r = 1}$$



Si dividimos en la igualdad anterior por $\text{sen}^2 r$ obtenemos:

$$\text{sen}^2 r + \text{cos}^2 r = 1 \Rightarrow \frac{\text{sen}^2 r}{\text{sen}^2 r} + \frac{\text{cos}^2 r}{\text{sen}^2 r} = \frac{1}{\text{sen}^2 r} \Rightarrow$$

$$\boxed{1 + \cot^2 r = \text{cosec}^2 r}$$

Si ahora dividimos por $\text{cos}^2 r$:

$$\text{sen}^2 r + \text{cos}^2 r = 1 \Rightarrow \frac{\text{sen}^2 r}{\text{cos}^2 r} + \frac{\text{cos}^2 r}{\text{cos}^2 r} = \frac{1}{\text{cos}^2 r} \Rightarrow \boxed{1 + \text{tg}^2 r = \text{sec}^2 r}$$

Estas relaciones permiten calcular todas las razones trigonométricas de un ángulo conociendo solo una de ellas. Siempre habrá que elegir un signo teniendo en cuenta el cuadrante en el que se encuentre el ángulo cuyas razones trigonométricas queremos calcular.

Ejemplo 1:

Sabiendo que α es un ángulo del primer cuadrante ($0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$) y que $\operatorname{sen} \alpha = \frac{2}{3}$, calcular sus restantes razones trigonométricas

Solución:

Por la fórmula fundamental: $\cos^2 \alpha = 1 - \operatorname{sen}^2 \alpha \Rightarrow \cos^2 \alpha = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9} \Rightarrow \cos \alpha = \pm \frac{\sqrt{5}}{3}$

Como α está en el primer cuadrante nos quedamos con el positivo y por tanto $\cos \alpha = +\frac{\sqrt{5}}{3}$

A partir de aquí es sencillo obtener las restantes razones trigonométricas:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{\sqrt{5}}{3}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$\operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{3}{2}$$

$$\operatorname{sec} \alpha = \frac{1}{\cos \alpha} = \frac{1}{\frac{\sqrt{5}}{3}} = \frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{5}$$

$$\operatorname{cot} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

Ejemplo 2:

Sabiendo que $\operatorname{tg} \alpha = -3$, $\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \pi$, calcular las restantes razones trigonométricas de

Solución:

Por la fórmula $1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \operatorname{sec}^2 \alpha$ obtendremos la secante:

$$\operatorname{sec}^2 \alpha = 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = 1 + 9 = 10 \Rightarrow \operatorname{sec} \alpha = \pm \sqrt{10}$$

Como α está en el segundo cuadrante, la secante (que es la inversa del coseno) será negativa y por tanto

$$\operatorname{sec} \alpha = -\sqrt{10}, \text{ de donde también podemos obtener que } \cos \alpha = -\frac{1}{\sqrt{10}} = -\frac{\sqrt{10}}{10}$$

Para calcular el seno, podemos usar la fórmula fundamental o la definición de tangente:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} \Rightarrow \operatorname{sen} \alpha = \operatorname{tg} \alpha \cdot \cos \alpha = (-3) \cdot \left(-\frac{\sqrt{10}}{10}\right) = \frac{3\sqrt{10}}{10}$$

Y las otras dos:

$$\operatorname{cosec} \alpha = \frac{10}{3\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{3} \quad ; \quad \operatorname{cot} \alpha = -\frac{1}{3}$$

Ejercicio:

Calcular las restantes razones trigonométricas en cada caso:

$$a) \operatorname{cosec} r = -\frac{5}{4}, \quad 180^\circ \leq r \leq 270^\circ$$

$$b) \cot gr = -\frac{1}{2}, \quad \frac{3f}{2} \leq r \leq 2f$$

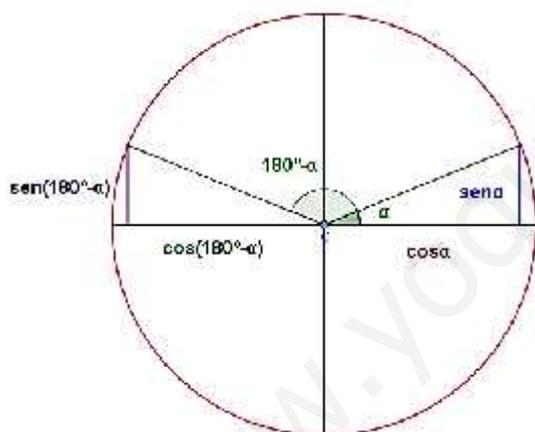
$$c) \cos r = \frac{2}{3}, \quad \operatorname{tgr} < 0$$

4.- RELACIONES ENTRE CUADRANTES

Las fórmulas que se exponen a continuación son válidas para cualquier ángulo esté en el cuadrante que esté, aunque representaremos como un ángulo del primer cuadrante por comodidad y facilidad de visualizar y porque de este modo permiten relacionar las razones trigonométricas de cualquier ángulo con las de un ángulo del primer cuadrante. Son fórmulas que no conviene memorizar, sino aprender a “visualizarlas” y así poder usarlas cuando se necesiten.

1.- *Ángulos Suplementarios*

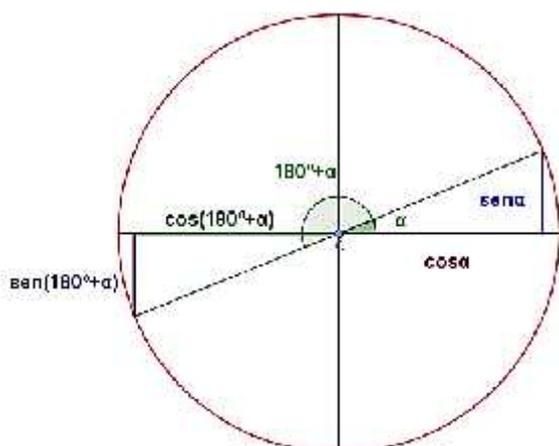
Son aquellos que suman 180° (r y $180^\circ - r$)



$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(180^\circ - r) &= \operatorname{sen} r \\ \operatorname{cos}(180^\circ - r) &= -\operatorname{cos} r \\ \operatorname{tg}(180^\circ - r) &= -\operatorname{tg} r \end{aligned}$$

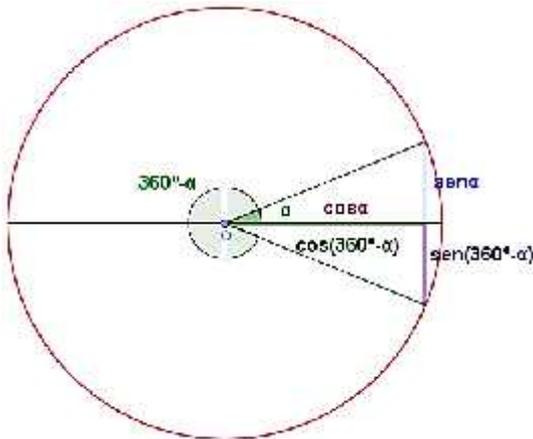
2.- *Ángulos que se diferencian en 180°*

(r y $180^\circ + r$)



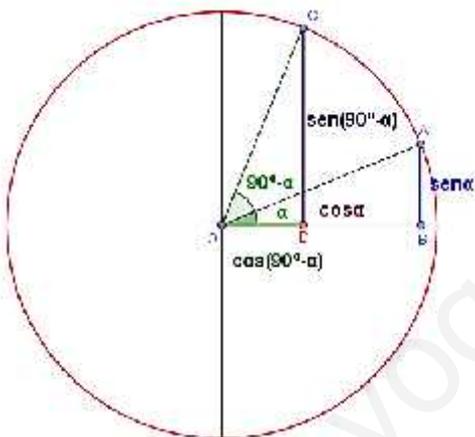
$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(180^\circ + r) &= -\operatorname{sen} r \\ \operatorname{cos}(180^\circ + r) &= -\operatorname{cos} r \\ \operatorname{tg}(180^\circ + r) &= \operatorname{tg} r \end{aligned}$$

3.- **Ángulos opuestos**
 (r y $-r$) ó (r y $360^\circ - r$)



$$\begin{aligned} \text{sen}(360^\circ - r) &= \text{sen}(-r) = -\text{sen}r \\ \text{cos}(360^\circ - r) &= \text{cos}(-r) = \text{cos}r \\ \text{tg}(360^\circ - r) &= \text{tg}(-r) = -\text{tg}r \end{aligned}$$

4.- **Ángulos Complementarios**
 Son aquellos que suman 90° (r y $90^\circ - r$)

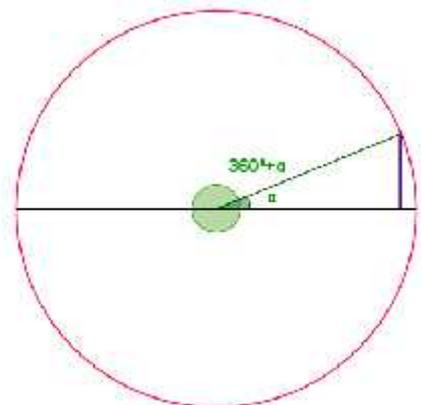


Como los triángulos ABO y CDO son iguales al ser rectángulos y tener la hipotenusa y los ángulos iguales:

$$\begin{aligned} \text{sen}(90^\circ - r) &= \text{cos}r \\ \text{cos}(90^\circ - r) &= \text{sen}r \\ \text{tg}(90^\circ - r) &= \text{cot}gr \end{aligned}$$

5.- **Ángulos mayores de 360°**

Como podemos ver, el punto asociado al ángulo es el mismo que el asociado a $360^\circ +$, y por tanto sus razones trigonométricas serán las mismas. De hecho, si un ángulo da k vueltas a la circunferencia y sobra, sus razones trigonométricas seguirán siendo las mismas que las de



$$\begin{aligned} \text{sen}(360^\circ + r) &= \text{sen}(360^\circ k + r) = \text{sen}r \\ \text{cos}(360^\circ + r) &= \text{cos}(360^\circ k + r) = \text{cos}r \\ \text{tg}(360^\circ + r) &= \text{tg}(360^\circ k + r) = \text{tg}r \end{aligned}$$

Ejercicio propuesto:

Razonar las fórmulas que relacionan las razones trigonométricas de un ángulo con las del ángulo $90^\circ +$

Ejemplo 1:

Calcular las siguientes razones trigonométricas:

a) $\text{sen}120^\circ$ b) $\text{cos}240^\circ$ c) $\text{tg}\left(-\frac{f}{4}\right)$ d) $\text{sec}300^\circ$ e) $\text{cotg}510^\circ$ f) $\text{cosec}2205^\circ$

Solución:

a) $\text{sen}120^\circ = \text{sen}(180 - 60^\circ) = \text{sen}60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

b) $\text{cos}240^\circ = \text{cos}(180^\circ + 60^\circ) = -\text{cos}60^\circ = -\frac{1}{2}$

c) $\text{tg}\left(-\frac{f}{4}\right) = -\text{tg}\left(\frac{f}{4}\right) = -1$

d) $\text{sec}300^\circ = \frac{1}{\text{cos}300^\circ} = \frac{1}{\text{cos}(360^\circ - 60^\circ)} = \frac{1}{\text{cos}60^\circ} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$

e) $\text{cotg}510^\circ = \frac{1}{\text{tg}510^\circ} = \frac{1}{\text{tg}(360^\circ + 150^\circ)} = \frac{1}{\text{tg}150^\circ} = (\otimes) = \frac{1}{-\frac{\sqrt{3}}{3}} = -\sqrt{3}$

$$\otimes \text{tg}150^\circ = \text{tg}(180^\circ - 30^\circ) = -\text{tg}30^\circ = -\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

f) $\text{cosec}2205^\circ = \text{cosec}(360^\circ \cdot 6 + 45^\circ) = \text{cosec}45^\circ = \frac{1}{\text{sen}45^\circ} = \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

Ejemplo 2:

Sabiendo que $\text{tgr} = \frac{1}{3}$, $0 \leq r \leq \frac{f}{2}$, calcular:

a) $\text{tg}(180^\circ - r)$ b) $\text{cotg}(f + r)$ c) $\text{tg}(-r)$ d) $\text{tg}(4f + r)$ e) $\text{sen}\left(\frac{f}{2} - r\right)$

Solución:

a) $\text{tg}(180^\circ - r) = -\text{tgr} = -\frac{1}{3}$

b) $\text{cotg}(f + r) = \text{cotgr} = 3$

c) $\text{tg}(-r) = -\text{tgr} = -\frac{1}{3}$

d) $\text{tg}(4f + r) = \text{tgr} = \frac{1}{3}$

e) $\operatorname{sen}\left(\frac{f}{2}-r\right) = \cos r = \otimes$

Calculamos aparte el cos :

$$\sec^2 r = 1 + \operatorname{tg}^2 r = 1 + \frac{1}{9} = \frac{10}{9} \Rightarrow \sec r = \pm \sqrt{\frac{10}{9}} = (\text{primer cuadrante}) = + \frac{\sqrt{10}}{3}$$

$$\Rightarrow \cos r = + \frac{3}{\sqrt{10}} = + \frac{3\sqrt{10}}{10}$$

Luego $\operatorname{sen}\left(\frac{f}{2}-r\right) = \cos r = + \frac{3\sqrt{10}}{10}$

Ejercicios:

1.- Calcular las razones trigonométricas directas de los siguientes ángulos:

$$135^\circ, \frac{7f}{4}, 210^\circ, 480^\circ, \frac{5f}{6}, 225^\circ, -210^\circ, \frac{11f}{6}$$

2.- Sabiendo que $\operatorname{sen} r = 0'35$, $0 < r < \frac{f}{2}$, calcular:

a) $\operatorname{sen}(180^\circ - r)$ b) $\operatorname{sen}(f + r)$ c) $\operatorname{sen}(90^\circ - r)$
d) $\operatorname{sen}(2f - r)$ e) $\operatorname{sen}(720^\circ + r)$ f) $\cos(3f + r)$

3.- Sabiendo que $\operatorname{tg} r = \frac{4}{3}$, $f < r < \frac{3f}{2}$, calcular:

a) $\operatorname{sen} r$ b) $\operatorname{tg}\left(\frac{f}{2}-r\right)$ c) $\cos(180^\circ + r)$
d) $\operatorname{sen}(f - r)$ e) $\cot g(-r)$ f) $\sec(3f + r)$

EJERCICIOS

1. Completa la tabla:

Radianes	$\pi/3$					$3\pi/4$	$5\pi/4$		$\pi/2$	
Grados		30°	45°		225°			330°		270°

2.- Halla las restantes razones trigonométricas del ángulo r :

$$a) \cos r = \frac{3}{5}, r \in 4^\circ C \qquad b) \cos r = -\frac{1}{3}, 90^\circ < r < 180^\circ$$

$$c) \operatorname{cosec} r = -\frac{3\sqrt{5}}{5}, r < \frac{3f}{2} \qquad d) \operatorname{tg} r = \frac{1}{2}, \cos r < 0$$

3.- Expresar en función de ángulos del primer cuadrante, los senos y cosenos de los siguientes ángulos:

$120^\circ, 135^\circ, 150^\circ, 180^\circ, 210^\circ, 225^\circ, 240^\circ, 270^\circ, 300^\circ, 315^\circ, 330^\circ$

4.- Sin utilizar la calculadora calcula las razones trigonométricas de los ángulos:

a) 765° b) -240° .

5.- Sabiendo que $\operatorname{sen} 37^\circ = 0,6$. Calcula las razones de 53° y de 143°

6.- Si $\operatorname{sen} r = 0,6, \frac{f}{2} < r < f$, calcula: $\operatorname{sen}(f+r)$, $\cos(-r)$, $\operatorname{tg}(4f+r)$

7.- Sabiendo que $\cos r = \frac{1}{2}, 0 < r < \frac{f}{2}$

a) Halla las restantes razones trigonométricas de

b) Calcula razonadamente los valores de: $\cos(f-r)$, $\operatorname{sen}(f+r)$, $\operatorname{tg}\left(\frac{f}{2}-r\right)$

8.- Sabiendo que $\operatorname{tg} r = \frac{1}{3}, f < r < \frac{3f}{2}$, calcular:

a) $\operatorname{tg}(180^\circ - r)$ b) $\operatorname{cot} g(f+r)$ c) $\cos(-r)$ d) $\operatorname{sec}\left(\frac{f}{2}-r\right)$

9.- Calcula, usando la calculadora, el ángulo r en cada caso:

a) $\operatorname{sen} r = 0,743, \frac{f}{2} < r < f$ b) $\operatorname{sen} r = -0,743, f < r < \frac{3f}{2}$

c) $\cos r = 0,374, r > f$ d) $\operatorname{tg} r = 1,376, \operatorname{sen} r < 0$

10.- Razona, sin usar calculadora, si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

a) Si la tangente de un ángulo vale $\frac{1}{3}$, entonces su seno vale 1 y su coseno vale 3

b) Si r , s y x son tres ángulos de un triángulo, entonces $tg(r + s) + tgx = 0$

c) $sen\left(\frac{2f}{3}\right) + cos\left(\frac{7f}{6}\right) + tg\left(\frac{4f}{3}\right) + tg\left(\frac{5f}{3}\right) = 2\sqrt{3}$

d) No existe ningún ángulo tal que $senr + cosr = 2$

e) No existe ningún ángulo tal que $senr + cosr = 1$

www.yoquieroaprobar.es

Soluciones:

- 1.- $\frac{1}{6}, \frac{1}{4}, \frac{5}{4}, 11 \frac{1}{6}, 3 \frac{1}{2}, 60^\circ, 180^\circ, 135^\circ, 225^\circ, 90^\circ$
- 2.- a) $\text{sen} = -4/5; \text{tg} = -4/3$; b) $\text{sen} = 2\sqrt{2}/3, \text{tg} = -2\sqrt{2}$
c) $\text{sen} = -\sqrt{5}/3, \text{cos} = -2/3$; d) $\text{cos} = -\frac{2\sqrt{5}}{5}, \text{sen} = -\frac{\sqrt{5}}{5}$
- 3.- $\text{sen}120^\circ = \text{sen}60^\circ, \text{cos}120^\circ = -\text{cos}60^\circ; \text{sen}135^\circ = \text{sen}45^\circ, \text{cos}135^\circ = -\text{cos}45^\circ; \text{sen}150^\circ = \text{sen}30^\circ,$
 $\text{cos}150^\circ = -\text{cos}30^\circ; \text{sen}180^\circ = \text{sen}0, \text{cos}180^\circ = -\text{cos}0; \text{sen}210^\circ = -\text{sen}30^\circ, \text{cos}210^\circ = -\text{cos}30^\circ;$
 $\text{sen}225^\circ = -\text{sen}45^\circ, \text{cos}225^\circ = -\text{cos}45^\circ; \text{sen}240^\circ = -\text{sen}60^\circ, \text{cos}240^\circ = -\text{cos}60^\circ; \text{sen}270^\circ = -\text{sen}90^\circ,$
 $\text{cos}270^\circ = -\text{cos}90^\circ; \text{sen}300^\circ = -\text{sen}60^\circ, \text{cos}300^\circ = \text{cos}60^\circ; \text{sen}315^\circ = -\text{sen}45^\circ, \text{cos}315^\circ = \text{cos}45^\circ;$
 $\text{sen}330^\circ = -\text{sen}30^\circ, \text{cos}330^\circ = \text{cos}30^\circ$
- 4.- a) $\text{sen}765^\circ = \text{cos}765^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$
b) $\text{sen}(-240^\circ) = \sqrt{3}/2, \text{cos}(-240^\circ) = -1/2$
- 5.- $\text{sen}53 = 0,8; \text{cos}53 = 0,6; \text{sen}143 = 0,6; \text{cos}143 = -0,8$
- 6.- $-0,6, -0,8, -0,75$
- 7.- a) $\text{sen} = \sqrt{3}/2; \text{tg} = \sqrt{3}$; b) $-1/2, -\sqrt{3}/2, 1/\sqrt{3}$
- 8.- a) $-\frac{1}{3}$ b) 3 c) $-\frac{3\sqrt{10}}{10}$ d) $-\sqrt{10}$
- 9.- a) 132° b) 228° c) 292° d) 234°
- 10.- a) Falsa b) Verdadera c) Falsa d) Verdadera e) Falsa

TEMA 2.- FÓRMULAS Y ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS

1.- RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE LA SUMA DE DOS ÁNGULOS

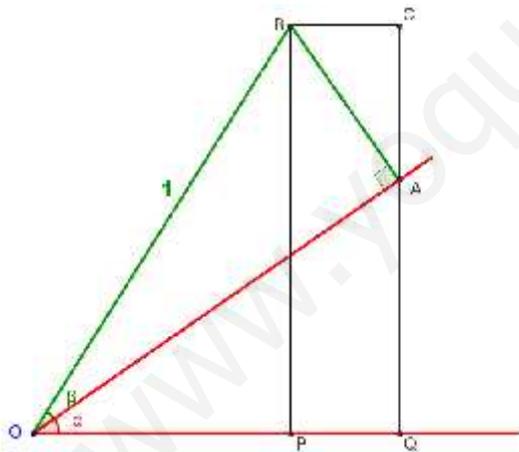
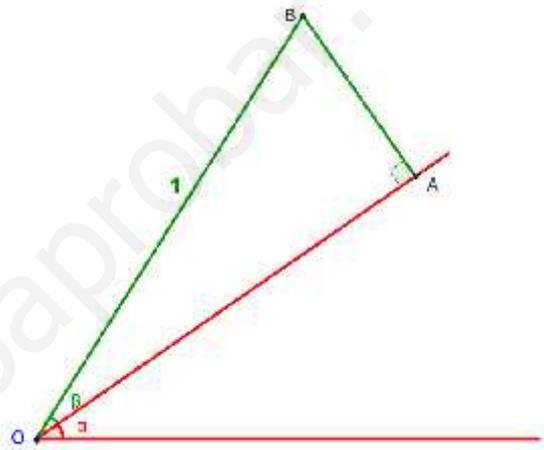
1.- Seno de la Suma

Para calcular el seno de la suma de dos ángulos, α y β , se usa la siguiente fórmula

$$\boxed{\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen}\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \operatorname{sen}\beta}$$

Demostración:

Dibujamos un ángulo α y a continuación otro ángulo β , y sobre éste un triángulo rectángulo de hipotenusa 1, OAB, tal y como se ve en la figura:

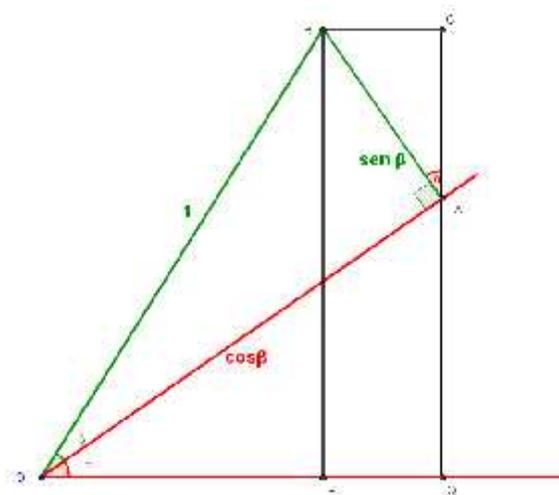


En dicho dibujo colocamos los triángulos rectángulos OPB, OQA y ACB:

En el triángulo OPB está el ángulo $\alpha + \beta$, mientras que en el triángulo OQA está el ángulo α

Como la hipotenusa del triángulo OAB es 1, se obtiene en dicho triángulo que $OA = \cos\beta$; $AB = \operatorname{sen}\beta$

Además el ángulo en A del triángulo ACB es igual que β , puesto que los lados que lo forman, AB y AC, son perpendiculares a los lados que forman α , OA y OQ:



En el triángulo OPB $\Rightarrow \operatorname{sen}(\gamma + S) = BP = QA + AC \quad (1)$

Por otra parte, en OQA:

$$\operatorname{sen} r = \frac{QA}{\cos S} \Rightarrow QA = \operatorname{sen} r \cdot \cos S$$

En ACB: $\operatorname{cos} r = \frac{AC}{\operatorname{sen} S} \Rightarrow AC = \operatorname{cos} r \cdot \operatorname{sen} S$

Por tanto, volviendo a (1):

$$\operatorname{sen}(\gamma + S) = \operatorname{sen} r \cdot \cos S + \operatorname{cos} r \cdot \operatorname{sen} S$$

2.- Coseno de la suma

Para calcular el coseno de la suma de dos ángulos, γ y S , se usa la siguiente fórmula

$$\operatorname{cos}(\gamma + S) = \operatorname{cos} r \cdot \cos S - \operatorname{sen} r \cdot \operatorname{sen} S$$

Demostración:

La demostración queda propuesta como ejercicio (usar el mismo dibujo que para la demostración anterior)

3.- Tangente de la suma

Para calcular la tangente de la suma de dos ángulos, γ y S , se usa la siguiente fórmula

$$\operatorname{tg}(\gamma + S) = \frac{\operatorname{tg} r + \operatorname{tg} S}{1 - \operatorname{tg} r \cdot \operatorname{tg} S}$$

Demostración:

$$\operatorname{tg}(\gamma + S) = \frac{\operatorname{sen}(\gamma + S)}{\operatorname{cos}(\gamma + S)} = \frac{\operatorname{sen} r \cdot \cos S + \operatorname{cos} r \cdot \operatorname{sen} S}{\operatorname{cos} r \cdot \cos S - \operatorname{sen} r \cdot \operatorname{sen} S} = \text{Dividiendo todo por } \operatorname{cos} r \cdot \cos S =$$

$$\begin{aligned} & \frac{\operatorname{sen} r \cdot \cos S}{\operatorname{cos} r \cdot \cos S} + \frac{\operatorname{cos} r \cdot \operatorname{sen} S}{\operatorname{cos} r \cdot \cos S} \\ &= \frac{\operatorname{sen} r \cdot \cos S}{\operatorname{cos} r \cdot \cos S} + \frac{\operatorname{cos} r \cdot \operatorname{sen} S}{\operatorname{cos} r \cdot \cos S} = \text{simplificando} = \frac{\operatorname{tg} r + \operatorname{tg} S}{1 - \operatorname{tg} r \cdot \operatorname{tg} S} \end{aligned}$$

Nota: para calcular las razones trigonométricas inversas (secante, cosecante y cotangente) de la suma de dos ángulos, se usan estas fórmulas y al resultado se le calcula el inverso.

Ejemplo 1:

Calcular las razones trigonométricas de 75°

Solución:

$$\operatorname{sen}75^\circ = \operatorname{sen}(45^\circ + 30^\circ) = \operatorname{sen}45^\circ \cdot \cos 30^\circ + \cos 45^\circ \cdot \operatorname{sen}30^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} (\approx 0'97)$$

$$\operatorname{cos}75^\circ = \operatorname{cos}(45^\circ + 30^\circ) = \operatorname{cos}45^\circ \cdot \cos 30^\circ - \operatorname{sen}45^\circ \cdot \operatorname{sen}30^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} (\approx 0'26)$$

$$\operatorname{tg}75^\circ = \operatorname{tg}(45^\circ + 30^\circ) = \frac{\operatorname{tg}45^\circ + \operatorname{tg}30^\circ}{1 - \operatorname{tg}45^\circ \cdot \operatorname{tg}30^\circ} = \frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 - \frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{3 + \sqrt{3}}{3 - \sqrt{3}} (\approx 3'73)$$

Ejemplo 2:

Sabiendo que $\operatorname{sen}r = \frac{3}{5}$, $\frac{f}{2} < r < f$; $\operatorname{cos}S = \frac{1}{3}$, $\frac{3f}{2} < r < 2f$, calcular las razones trigonométricas del ángulo $r + S$

Solución:

➤ $\operatorname{sen}(r + S) = \operatorname{sen}r \cdot \cos S + \cos r \cdot \operatorname{sen}S$

Calculamos aparte el \cos y el sen :

$$\operatorname{sen}^2 r + \cos^2 r = 1 \Rightarrow \cos^2 r = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25} \Rightarrow \cos r = \pm \frac{4}{5} \Rightarrow \cos r = -\frac{4}{5} (r \in 2^\circ C)$$

$$\operatorname{sen}^2 S + \cos^2 S = 1 \Rightarrow \operatorname{sen}^2 S = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9} \Rightarrow \operatorname{sen}S = \pm \frac{2\sqrt{2}}{3} \Rightarrow \operatorname{sen}S = -\frac{2\sqrt{2}}{3} (S \in 4^\circ C)$$

Sustituyendo:

$$\operatorname{sen}(r + S) = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{3} + \left(-\frac{4}{5}\right) \cdot \left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right) = \frac{3 + 8\sqrt{2}}{15}$$

➤ Sustituyendo en la fórmula los resultados anteriores:

$$\operatorname{cos}(r + S) = \operatorname{cos}r \cdot \cos S - \operatorname{sen}r \cdot \operatorname{sen}S = \left(-\frac{4}{5}\right) \cdot \frac{1}{3} - \frac{3}{5} \cdot \left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right) = \frac{6\sqrt{2} - 4}{15}$$

➤ $\operatorname{tg}(r + S) = \frac{\operatorname{tg}r + \operatorname{tg}S}{1 - \operatorname{tg}r \cdot \operatorname{tg}S}$

Del primer apartado tenemos:

$$\operatorname{tg}r = \frac{\operatorname{sen}r}{\cos r} = -\frac{3}{4} ; \operatorname{tg}S = \frac{\operatorname{sen}S}{\cos S} = \frac{-2\sqrt{2}/3}{1/3} = -2\sqrt{2}$$

Y sustituyendo: $\operatorname{tg}(r + S) = \frac{-\frac{3}{4} - 2\sqrt{2}}{1 - \left(-\frac{3}{4}\right) \cdot \left(-2\sqrt{2}\right)} = \frac{-3 - 8\sqrt{2}}{4 + 6\sqrt{2}}$

Ejercicios:

- 1.- Calcular las razones trigonométricas de 105°
- 2.- Sabiendo que $\operatorname{sen} r = \frac{2}{3}$, $0 < r < 90^\circ$, calcular $\operatorname{sec}\left(\frac{r}{4} + r\right)$
- 3.- Calcular el $\cos(r + s)$ sabiendo que
$$\operatorname{sen} r = \frac{5}{13}, 90^\circ < r < 180^\circ; \operatorname{tg} s = \frac{12}{5}, 180^\circ < s < 270^\circ$$
- 4.- Si $\operatorname{tg} r = 1$, $\operatorname{tg} s = 2$, $\operatorname{tg} u = 3$, calcular $\operatorname{tg}(r + s + u)$

2.- RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE LA DIFERENCIA DE DOS ÁNGULOS

1.- Seno de la Diferencia

Para calcular el seno de la diferencia de dos ángulos, r y s , se usa la siguiente fórmula

$$\operatorname{sen}(r - s) = \operatorname{sen} r \cdot \cos s - \cos r \cdot \operatorname{sen} s$$

Demostración:

Partimos de la fórmula del seno de la suma, y cambiamos s por $-s$:

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(r - s) &= \operatorname{sen}(r + (-s)) = \operatorname{sen} r \cdot \cos(-s) + \cos r \cdot \operatorname{sen}(-s) = \\ &\text{usando las fórmulas de las razones trigonométricas de ángulos opuestos (tema 1)} \\ &= \operatorname{sen} r \cdot \cos s + \cos r \cdot (-\operatorname{sen} s) = \operatorname{sen} r \cdot \cos s - \cos r \cdot \operatorname{sen} s\end{aligned}$$

Con lo que queda demostrado

2.- Coseno y tangente de la Diferencia

Queda como ejercicio la demostración de las siguientes fórmulas:

$$\cos(r - s) = \cos r \cdot \cos s + \operatorname{sen} r \cdot \operatorname{sen} s$$

$$\operatorname{tg}(r - s) = \frac{\operatorname{tg} r - \operatorname{tg} s}{1 + \operatorname{tg} r \cdot \operatorname{tg} s}$$

Ejercicios:

- 1.- Calcular las razones trigonométricas de 15°
- 2.- Sabiendo que $\text{sen}12^\circ = 0'2$ y $\text{sen}37^\circ = 0'6$, calcula $\text{tg}49^\circ$ y $\text{cosec}25^\circ$
- 3.- Si γ y δ son dos ángulos del primer cuadrante con $\text{sen}\gamma = \frac{12}{13}$, $\text{sen}\delta = \frac{4}{5}$, calcular $\text{sen}(\delta - \gamma)$
- 4.- Si $\text{cot}\gamma = \frac{4}{3}$, $f < \gamma < \frac{3f}{2}$, calcular $\text{tg}\left(\gamma + \frac{f}{6}\right)$ y $\text{cot}\left(\frac{f}{4} - \gamma\right)$

3.- RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DEL ÁNGULO DOBLE

Queremos ahora relacionar las razones trigonométricas de un ángulo γ con las del ángulo 2γ . Para ello nos basaremos en las fórmulas de la suma de ángulos:

$$\diamond \text{sen}(2\gamma) = \text{sen}(\gamma + \gamma) = \text{sen}\gamma \cdot \text{cos}\gamma + \text{cos}\gamma \cdot \text{sen}\gamma$$

Y por tanto:

$$\boxed{\text{sen}(2\gamma) = 2\text{sen}\gamma \cdot \text{cos}\gamma}$$

$$\diamond \text{cos}(2\gamma) = \text{cos}(\gamma + \gamma) = \text{cos}\gamma \cdot \text{cos}\gamma - \text{sen}\gamma \cdot \text{sen}\gamma$$

Y por tanto:

$$\boxed{\text{cos}(2\gamma) = \text{cos}^2\gamma - \text{sen}^2\gamma}$$

$$\diamond \text{tg}(2\gamma) = \text{tg}(\gamma + \gamma) = \frac{\text{tg}\gamma + \text{tg}\gamma}{1 - \text{tg}\gamma \cdot \text{tg}\gamma}$$

Y por tanto:

$$\boxed{\text{tg}(2\gamma) = \frac{2\text{tg}\gamma}{1 - \text{tg}^2\gamma}}$$

Ejercicios:

- 1.- Hallar las razones trigonométricas del ángulo 2γ sabiendo que $\text{cos}\gamma = -\frac{3}{5}$, $\frac{f}{2} < \gamma < f$
- 2.- Si $\text{tg}\gamma = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $180^\circ < \gamma < 270^\circ$; $\text{cos}\delta = \frac{1}{2}$, $270^\circ < \delta < 360^\circ$, calcular $\text{sen}(2\gamma + \delta)$
- 3.- Obtener las fórmulas que permitan obtener las razones trigonométricas del ángulo 3γ en función de las razones trigonométricas de γ

4.- RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DEL ÁNGULO MITAD

Queremos ahora relacionar las razones trigonométricas de un ángulo γ con las del ángulo $\frac{\gamma}{2}$

Por un lado vamos a usar la fórmula fundamental cambiando el ángulo por $\frac{\gamma}{2}$:

$$\operatorname{sen}^2 \gamma + \operatorname{cos}^2 \gamma = 1 \Rightarrow \operatorname{sen}^2 \left(\frac{\gamma}{2} \right) + \operatorname{cos}^2 \left(\frac{\gamma}{2} \right) = 1$$

También usaremos la fórmula del coseno del ángulo doble, cambiando también el ángulo por $\frac{\gamma}{2}$:

$$\operatorname{cos}(2\gamma) = \operatorname{cos}^2 \gamma - \operatorname{sen}^2 \gamma \Rightarrow \operatorname{cos}(\gamma) = \operatorname{cos}^2 \left(\frac{\gamma}{2} \right) - \operatorname{sen}^2 \left(\frac{\gamma}{2} \right)$$

Si juntamos ambas expresiones obtenemos el siguiente sistema:

$$\begin{cases} 1 = \operatorname{cos}^2 \left(\frac{\gamma}{2} \right) + \operatorname{sen}^2 \left(\frac{\gamma}{2} \right) \\ \operatorname{cos}(\gamma) = \operatorname{cos}^2 \left(\frac{\gamma}{2} \right) - \operatorname{sen}^2 \left(\frac{\gamma}{2} \right) \end{cases}$$

Si sumamos ambas ecuaciones:

$$1 + \operatorname{cos} \gamma = 2 \operatorname{cos}^2 \left(\frac{\gamma}{2} \right)$$

De donde obtenemos la fórmula para el coseno del ángulo mitad:

$$\boxed{\operatorname{cos} \left(\frac{\gamma}{2} \right) = \pm \sqrt{\frac{1 + \operatorname{cos} \gamma}{2}}} \quad (\text{El signo dependerá del cuadrante en que esté } \frac{\gamma}{2})$$

Si ahora restamos las dos ecuaciones del sistema anterior:

$$1 - \operatorname{cos} \gamma = 2 \operatorname{sen}^2 \left(\frac{\gamma}{2} \right)$$

De donde obtenemos la fórmula para el seno del ángulo mitad:

$$\boxed{\operatorname{sen} \left(\frac{\gamma}{2} \right) = \pm \sqrt{\frac{1 - \operatorname{cos} \gamma}{2}}} \quad (\text{El signo dependerá del cuadrante en que esté } \frac{\gamma}{2})$$

Y por último, al dividir las fórmulas anteriores obtenemos la de la tangente:

$$\operatorname{tg} \left(\frac{\gamma}{2} \right) = \frac{\operatorname{sen} \left(\frac{\gamma}{2} \right)}{\operatorname{cos} \left(\frac{\gamma}{2} \right)} = \frac{\pm \sqrt{\frac{1 - \operatorname{cos} \gamma}{2}}}{\pm \sqrt{\frac{1 + \operatorname{cos} \gamma}{2}}} \Rightarrow \boxed{\operatorname{tg} \left(\frac{\gamma}{2} \right) = \pm \sqrt{\frac{1 - \operatorname{cos} \gamma}{1 + \operatorname{cos} \gamma}}}$$

Ejercicios:

1.- Calcula $\operatorname{tg} \frac{f}{8}$

2.- Si $\operatorname{tg} r = -\sqrt{3}$ y está en el cuarto cuadrante, calcular la tangente y la cosecante de $\frac{r}{2}$

3.- Calcular el $\operatorname{tg} \left(\frac{r+s}{2} \right)$ sabiendo que

$$\operatorname{sen} r = \frac{3}{5}, \quad 90^\circ < r < 180^\circ \quad ; \quad \operatorname{tg} s = \frac{4}{3}, \quad 0^\circ < s < 90^\circ$$

5.- IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS

Las identidades trigonométricas son igualdades en las que aparecen razones trigonométricas. Para demostrar dichas identidades conviene en general partir de uno de los miembros de la igualdad y operando (sustituyendo fórmulas, simplificando,...) llegar al otro miembro.

Ejemplo 1:

Demuestra la siguiente identidad:

$$\frac{\operatorname{sen} r - \operatorname{cos} r}{\operatorname{tg} r - 1} = \operatorname{cos} r$$

Solución:

Sustituimos en la parte de la izquierda la tangente:

$$\frac{\operatorname{sen} r - \operatorname{cos} r}{\operatorname{tg} r - 1} = \frac{\operatorname{sen} r - \operatorname{cos} r}{\frac{\operatorname{sen} r}{\operatorname{cos} r} - 1} = \text{Operando en el denominador} = \frac{\operatorname{sen} r - \operatorname{cos} r}{\frac{\operatorname{sen} r - \operatorname{cos} r}{\operatorname{cos} r}} = \frac{\operatorname{cos} r (\operatorname{sen} r - \operatorname{cos} r)}{\operatorname{sen} r - \operatorname{cos} r} = \operatorname{cos} r$$

Y hemos llegado por tanto a lo que pretendíamos demostrar

Ejemplo 2:

Demuestra la siguiente identidad:

$$\frac{\operatorname{sen}(r+s)}{\operatorname{sen}(r-s)} = \frac{\operatorname{tg} r + \operatorname{tg} s}{\operatorname{tg} r - \operatorname{tg} s}$$

Solución:

Partimos del miembro de la izquierda y sustituimos las fórmulas del seno de la suma y diferencia de ángulos:

$$\begin{aligned} \frac{\operatorname{sen}(\gamma + \delta)}{\operatorname{sen}(\gamma - \delta)} &= \frac{\operatorname{sen}\gamma \cdot \cos \delta + \cos \gamma \cdot \operatorname{sen} \delta}{\operatorname{sen}\gamma \cdot \cos \delta - \cos \gamma \cdot \operatorname{sen} \delta} = \text{Dividiendo por } \cos \gamma \cdot \cos \delta = \\ &= \frac{\frac{\operatorname{sen}\gamma \cdot \cos \delta}{\cos \gamma \cdot \cos \delta} + \frac{\cos \gamma \cdot \operatorname{sen} \delta}{\cos \gamma \cdot \cos \delta}}{\frac{\operatorname{sen}\gamma \cdot \cos \delta}{\cos \gamma \cdot \cos \delta} - \frac{\cos \gamma \cdot \operatorname{sen} \delta}{\cos \gamma \cdot \cos \delta}} = \text{Simplificando} = \frac{\operatorname{tg} \gamma + \operatorname{tg} \delta}{\operatorname{tg} \gamma - \operatorname{tg} \delta} \end{aligned}$$

Con lo que queda demostrada la identidad

Ejemplo 3:

Demuestra la siguiente identidad:

$$\operatorname{tg}^2\left(\frac{\gamma}{2}\right) = \frac{2\operatorname{sen}\gamma - \operatorname{sen}(2\gamma)}{2\operatorname{sen}\gamma + \operatorname{sen}(2\gamma)}$$

Solución:

Partimos en este caso de la parte derecha y aplicamos las fórmulas del ángulo doble:

$$\begin{aligned} \frac{2\operatorname{sen}\gamma - \operatorname{sen}(2\gamma)}{2\operatorname{sen}\gamma + \operatorname{sen}(2\gamma)} &= \frac{2\operatorname{sen}\gamma - 2\operatorname{sen}\gamma \cdot \cos \gamma}{2\operatorname{sen}\gamma + 2\operatorname{sen}\gamma \cdot \cos \gamma} = \text{sacando factor común} = \\ &= \frac{2\operatorname{sen}\gamma (1 - \cos \gamma)}{2\operatorname{sen}\gamma (1 + \cos \gamma)} = \text{simplificando} = \frac{1 - \cos \gamma}{1 + \cos \gamma} \end{aligned}$$

Que es justamente el cuadrado de la fórmula de la tangente del ángulo mitad

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\gamma}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \gamma}{1 + \cos \gamma}} \Rightarrow \operatorname{tg}^2\left(\frac{\gamma}{2}\right) = \frac{1 - \cos \gamma}{1 + \cos \gamma}$$

Con lo que queda demostrada la identidad

Ejercicio:

Demuestra las siguientes identidades:

a) $\operatorname{sen}(2\gamma) + 1 = (\operatorname{sen}\gamma + \cos \gamma)^2$

b) $\frac{\operatorname{sen}(\gamma + \delta)}{\operatorname{sen}(\gamma - \delta)} = \frac{\operatorname{tg}\gamma \cdot \cot \delta + 1}{\operatorname{tg}\gamma \cdot \cot \delta - 1}$

c) $\operatorname{sen}\left(\frac{3f}{4} + \gamma\right) - \cos\left(\frac{3f}{4} + \gamma\right) = \sqrt{2} \cos \gamma$

d) $2\operatorname{tg}\gamma \cdot \cos^2\left(\frac{\gamma}{2}\right) - \operatorname{sen}\gamma = \operatorname{tg}\gamma$

e) $\cos \gamma \cdot \cos(\gamma - \delta) + \operatorname{sen}\gamma \cdot \operatorname{sen}(\gamma - \delta) = \cos \delta$

f) $\frac{\cos\left(\frac{f}{4} + \gamma\right) \cdot \cos\left(\frac{f}{4} - \gamma\right)}{\cos(2\gamma)} = \frac{1}{2}$

6.- ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS

Son aquellas en las que la incógnita en las que aparecen razones trigonométricas y la incógnita es un ángulo.

Por ejemplo: $2\operatorname{sen}x = 1$; $\operatorname{sen}x + \operatorname{cos}x = 1$; $\operatorname{cos}^2\left(\frac{x}{2}\right) + \operatorname{cos}x = \frac{1}{2}$

Empezamos resolviendo algunas ecuaciones trigonométricas sencillas, en las que sólo interviene una razón trigonométrica y un ángulo x :

$$\text{➤ } 2\operatorname{sen}x = 1 \Rightarrow \operatorname{sen}x = \frac{1}{2}$$

Es en este momento recordamos las razones trigonométricas de los ángulos conocidos, y por tanto $x = 30^\circ$.

Pero existe otro ángulo en una circunferencia con el mismo seno (en este caso en el segundo cuadrante al ser positivo): $x = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$

Luego en una circunferencia esta ecuación tiene 2 soluciones, pero en realidad existen infinitas soluciones obtenidas al dar vueltas a la circunferencia.

Expresaremos por tanto las soluciones de esta ecuación como:

$$\begin{aligned} x = 30^\circ + 360^\circ k \\ x = 150^\circ + 360^\circ k \end{aligned} \quad , \text{ o en radianes } \quad \begin{aligned} x = \frac{f}{6} + 2kf \\ x = \frac{5f}{6} + 2kf \end{aligned}$$

Nota: siempre expresaremos las soluciones en radianes

$$\text{➤ } \operatorname{cos}x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

El coseno vale $\frac{\sqrt{2}}{2}$ en 45° . Al ser negativo, buscamos los ángulos asociados a 45° del segundo y tercer cuadrante ($180^\circ -$ y $180^\circ +$)

$$\text{Luego las soluciones serán: } \begin{cases} x = 135^\circ + 360^\circ k \\ x = 225^\circ + 360^\circ k \end{cases} = \begin{cases} x = \frac{3f}{4} + 2kf \\ x = \frac{5f}{4} + 2kf \end{cases}$$

$$\text{➤ } \operatorname{tg}x = -\sqrt{3}$$

La tangente vale $\sqrt{3}$ en 60° , luego será negativa en los ángulos correspondientes al segundo y cuarto cuadrante ($180^\circ -$ y $360^\circ -$)

$$\text{Luego las soluciones serán: } \begin{cases} x = 120^\circ + 360^\circ k \\ x = 300^\circ + 360^\circ k \end{cases} = \begin{cases} x = \frac{2f}{3} + 2kf \\ x = \frac{5f}{3} + 2kf \end{cases}$$

➤ $\text{sen}(2x) = 1$

El único ángulo donde el seno vale 1 es el de 90°

Por tanto $2x = 90^\circ \Rightarrow x = 45^\circ \Rightarrow x = \frac{f}{4} + 2kf$

Ejercicio:

Resuelve:

a) $\cos x = -\frac{1}{2}$ b) $\cot gx = -1$ c) $\cos ecx = -2$

d) $\text{sen} x = 0$ e) $3 \sec x + 2\sqrt{3} = 0$ f) $\cos(3x) = \frac{1}{2}$

Más complicadas resultan aquellas ecuaciones en las que aparecen distintas razones trigonométricas y distintos ángulos. Como pasos aconsejables a seguir en la resolución de estas ecuaciones están:

1. Expresar todo en función de un mismo ángulo
2. Expresar todo en función de una sola razón trigonométrica
3. Resolver la ecuación resultante
4. Comprobar las soluciones en la ecuación original

Vemos algunos ejemplos:

➤ $2\text{sen}^2 x + 3 \cos x = 3$

En este caso sustituimos el $\text{sen}^2 x$ en función del coseno y resolvemos la ecuación de segundo grado correspondiente:

$$2(1 - \cos^2 x) + 3 \cos x = 3 \Rightarrow 2 - 2\cos^2 x + 3 \cos x = 3 \Rightarrow 2\cos^2 x - 3 \cos x + 1 = 0$$

$$\cos x = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 8}}{4} = \frac{3 \pm 1}{4} = \begin{cases} \cos x = 1 \\ \cos x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Si $\cos x = 1 \Rightarrow x = 0^\circ$

Si $\cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 60^\circ \\ x = 300^\circ \end{cases}$

Tenemos por tanto 3 posibles soluciones de la ecuación. Es fácil comprobar que todas cumplen la ecuación inicial, por tanto, las soluciones de esta ecuación son:

$$x = 0 + 2kf \quad ; \quad x = \frac{f}{3} + 2kf \quad ; \quad x = \frac{5f}{3} + 2kf$$

$$\triangleright \operatorname{sen} x + \operatorname{cos} x = \sqrt{2}$$

Como hay dos razones trigonométricas, sustituimos, de la fórmula fundamental, el seno o el coseno en función de la otra razón trigonométrica, es decir:

$$\operatorname{sen} x + \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 x} = \sqrt{2}$$

Y ya sólo queda resolver esta ecuación radical (dejar la raíz sola, elevar al cuadrado,...):

$$\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 x} = \sqrt{2} - \operatorname{sen} x \Rightarrow \left(\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 x}\right)^2 = \left(\sqrt{2} - \operatorname{sen} x\right)^2$$

$$\Rightarrow 1 - \operatorname{sen}^2 x = 2 + \operatorname{sen}^2 x - 2\sqrt{2}\operatorname{sen} x \Rightarrow 2\operatorname{sen}^2 x - 2\sqrt{2}\operatorname{sen} x + 1 = 0$$

Resolviendo la ecuación de segundo grado obtenemos:

$$\operatorname{sen} x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 45^\circ \\ x = 135^\circ \end{cases}$$

Al comprobar las dos posibles soluciones en la ecuación inicial, vemos que la de 135° no la cumple. Por tanto, la solución de esta ecuación (que en realidad son infinitas) es:

$$x = \frac{f}{4} + 2kf$$

$$\triangleright \operatorname{cos}\left(\frac{f}{6} + x\right) = \operatorname{sen} x$$

Desarrollamos el coseno de la suma y sustituimos los valores conocidos:

$$\operatorname{cos}\frac{f}{6} \cdot \operatorname{cos} x - \operatorname{sen}\frac{f}{6} \cdot \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} x \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{cos} x - \frac{1}{2} \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} x$$

$$\Rightarrow \sqrt{3} \operatorname{cos} x - \operatorname{sen} x = 2\operatorname{sen} x \Rightarrow \sqrt{3} \operatorname{cos} x = 3\operatorname{sen} x$$

Sustituyendo el coseno en función del seno y elevando al cuadrado:

$$\left(\sqrt{3} \cdot \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 x}\right)^2 = (3\operatorname{sen} x)^2 \Rightarrow 3 - 3\operatorname{sen}^2 x = 9\operatorname{sen}^2 x$$

$$\Rightarrow 3 = 12\operatorname{sen}^2 x \Rightarrow \operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{4} \Rightarrow \operatorname{sen} x = \pm \frac{1}{2}$$

Calculamos x en cada caso:

$$\text{Si } \operatorname{sen} x = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 30^\circ \\ x = 150^\circ \end{cases} ; \quad \text{Si } \operatorname{sen} x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 210^\circ \\ x = 330^\circ \end{cases}$$

Al comprobar las soluciones, no sirven ni 150° ni 330° , luego las soluciones de esta ecuación son:

$$x = \frac{f}{6} + 2kf \quad ; \quad x = \frac{7f}{6} + 2kf$$

➤ $\text{sen}2x - \text{tg}x = 0$

Sustituyendo el seno del ángulo doble y la tangente: $2\text{sen}x \cos x - \frac{\text{sen}x}{\cos x} = 0$

Quitando denominadores y sacando factor común:

$$2\text{sen}x \cos^2 x - \text{sen}x = 0 \Rightarrow \text{sen}x(2\cos^2 x - 1) = 0$$

De donde:

$$\text{O bien } \text{sen}x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0^\circ \\ x = 180^\circ \end{cases}$$

$$\text{O bien } 2\cos^2 x - 1 = 0 \Rightarrow \cos^2 x = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{Si } \cos x = +\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 45^\circ \\ x = 315^\circ \end{cases}$$

$$\text{Si } \cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 135^\circ \\ x = 225^\circ \end{cases}$$

Al comprobar vemos que sirven todas, y por tanto las soluciones de esta ecuación son:

$$x = 0 + 2kf \quad ; \quad x = f + 2kf$$

$$x = \frac{f}{4} + 2kf \quad ; \quad x = \frac{3f}{4} + 2kf \quad ; \quad x = \frac{5f}{4} + 2kf \quad ; \quad x = \frac{7f}{4} + 2kf$$

Ejercicio:

Resuelve:

a) $\cos 2x + 5 \cos x + 3 = 0$

b) $\text{tg}x \cdot \sec x = \sqrt{2}$

c) $4\text{sen}\left(\frac{x}{2}\right) + 2\cos x = 3$

d) $\frac{\text{sen}\left(x + \frac{f}{6}\right)}{\cos\left(x + \frac{f}{3}\right)} = 1$

e) $3\cos x \cdot \cos 2x - 2\cos^3 x = 0$

f) $\text{tg}2x + \text{tg}x = 0$

g) $\text{sen}(f - x) = \cos\left(\frac{3f}{2} - x\right) + \cos f$

h) $\text{sen}\left(\frac{f}{4} - x\right) + \sqrt{2}\text{sen}x = 0$

i) $\text{tg}2x + 2\cos x = 0$

7.- SISTEMAS DE ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS

Por supuesto son sistemas en los que aparecen ecuaciones trigonométricas. Los métodos de resolución son los habituales (sustitución, reducción o igualación), si bien el más habitual es el de sustitución. Vemos algunos ejemplos:

$$\triangleright \begin{cases} \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y = 1 \\ x + y = \frac{f}{2} \end{cases}$$

Por sustitución, despejamos en la segunda ecuación y sustituimos en la primera:

$$y = \frac{f}{2} - x \Rightarrow \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} \left(\frac{f}{2} - x \right) = 1 \Rightarrow \operatorname{sen} x + \cos x = 1$$

Y ahora resolvemos la ecuación trigonométrica obtenida poniendo el seno en función del coseno (o al revés):

$$\begin{aligned} \sqrt{1 - \cos^2 x} = 1 - \cos x &\Rightarrow \left(\sqrt{1 - \cos^2 x} \right)^2 = (1 - \cos x)^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow 1 - \cos^2 x = 1 + \cos^2 x - 2 \cos x &\Rightarrow 2 \cos^2 x - 2 \cos x = 0 \Rightarrow \cos^2 x - \cos x = 0 \\ \Rightarrow \cos x (\cos x - 1) = 0 &\Rightarrow \begin{cases} \cos x = 0 &\Rightarrow x = 90^\circ, x = 270^\circ \\ \cos x = 1 &\Rightarrow x = 0^\circ \end{cases} \end{aligned}$$

Nota: en los sistemas de ecuaciones trigonométricas nos quedaremos, por simplificar, únicamente con las soluciones del primer cuadrante

$$\begin{aligned} \text{Así pues, si } x = 90^\circ &\Rightarrow y = 0^\circ \\ x = 0^\circ &\Rightarrow y = 90^\circ \end{aligned}$$

Luego este sistema tiene dos soluciones en el primer cuadrante, que serán:

$$(90^\circ, 0^\circ) \text{ y } (0^\circ, 90^\circ) \approx \left(\frac{f}{2}, 0 \right) \text{ y } \left(0, \frac{f}{2} \right)$$

$$\triangleright \begin{cases} \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y = \frac{1}{2} \\ \cos(x + y) = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

En la segunda ecuación podríamos desarrollar la fórmula del coseno de la suma, pero sólo conseguiríamos complicar la ecuación.

$$\text{Podemos deducir que si } \cos(x + y) = -\frac{1}{2} \Rightarrow x + y = 120^\circ$$

Ahora despejamos y sustituimos en la primera ecuación: $x = 120^\circ - y$

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(120^\circ - y) - \operatorname{sen} y &= \frac{1}{2} \Rightarrow \operatorname{sen} 120^\circ \cdot \cos y - \cos 120^\circ \cdot \operatorname{sen} y - \operatorname{sen} y = \frac{1}{2} \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} \cos y + \frac{1}{2} \operatorname{sen} y - \operatorname{sen} y &= \frac{1}{2} \Rightarrow \sqrt{3} \cos y + \operatorname{sen} y - 2 \operatorname{sen} y = 1 \Rightarrow \sqrt{3} \cos y = 1 + \operatorname{sen} y \\ \Rightarrow \sqrt{3} \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 y} &= 1 + \operatorname{sen} y \Rightarrow 3 - 3 \operatorname{sen}^2 y = 1 + \operatorname{sen}^2 y + 2 \operatorname{sen} y \Rightarrow \\ \Rightarrow 4 \operatorname{sen}^2 y + 2 \operatorname{sen} y - 2 &= 0 \Rightarrow 2 \operatorname{sen}^2 y + \operatorname{sen} y - 1 = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \operatorname{sen} y &= \frac{-1 \pm 3}{4} = \begin{cases} -1 \\ \frac{1}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

Como trabajamos sólo con soluciones del primer cuadrante $\operatorname{sen} y = \frac{1}{2} \Rightarrow y = 30^\circ$

Y por tanto $x = 90^\circ$

Luego la solución del sistema es $(90^\circ, 30^\circ) \approx \left(\frac{f}{2}, \frac{f}{6}\right)$

$$\begin{cases} \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 y = 1 \\ \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 y = 1 \end{cases}$$

Como aparecen cuatro razones trigonométricas, ponemos el sistema en función de dos de ellas:

$$\begin{cases} \operatorname{sen}^2 x + 1 - \operatorname{sen}^2 y = 1 \\ 1 - \operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen}^2 y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen}^2 y = 0 \\ -\operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen}^2 y = 0 \end{cases} \quad \text{y ahora por reducción, sumando las}$$

dos ecuaciones:

$$-2 \operatorname{sen}^2 y = 0 \Rightarrow \operatorname{sen} y = 0 \Rightarrow y = 0^\circ$$

Si ahora sustituimos por ejemplo en la primera ecuación del sistema:

$$\operatorname{sen}^2 x + 1 = 1 \Rightarrow \operatorname{sen}^2 x = 0 \Rightarrow \operatorname{sen} x = 0 \Rightarrow x = 0^\circ$$

Luego la solución es $(0^\circ, 0^\circ) \approx (0, 0)$

Ejercicio:

Resuelve:

$$a) \begin{cases} \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y = \frac{3}{2} \\ \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen} y = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} \cos(x+y) = \frac{1}{2} \\ \operatorname{sen}(x-y) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y = \frac{\sqrt{3}+1}{2} \\ \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y = \frac{\sqrt{3}-1}{2} \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 y = \frac{3}{4} \\ \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 y = \frac{1}{4} \end{cases}$$

$$e) \begin{cases} \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = 2 \\ x + y = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$f) \begin{cases} \operatorname{sen} x \cdot \cos y = \frac{1}{4} \\ \cos x \cdot \operatorname{sen} y = \frac{1}{4} \end{cases}$$

www.yoquieroaprobar.es

EJERCICIOS

- 1.- Sabiendo que $\operatorname{sen} r = \frac{4}{5}$, $r < \frac{f}{2}$, halla las razones trigonométricas de $2r$ y $r/2$.
- 2.- Sabiendo que $\operatorname{tg} r = 1/2$, halla $\operatorname{tg}(r + 45^\circ)$ y $\operatorname{tg}(45^\circ - r)$.
- 3.- Sabiendo que $\operatorname{tg} r = -\frac{3}{4}$ y que $\cos r < 0$, calcular:
a) $\operatorname{tg}\left(\frac{r}{2}\right)$ b) $\cot g\left(\frac{f}{4} + r\right)$
- 4.- Sabiendo que $\operatorname{sec} r = -2$, $\frac{3f}{2} < r < 2f$, calcular:
a) $\operatorname{sen} 2r$ b) $\cos\left(\frac{r}{2}\right)$ c) $\operatorname{sen}(r - 30^\circ)$ d) $\operatorname{tg}\left(r + \frac{f}{3}\right)$ e) $\operatorname{cosec}(r + 1650^\circ)$
- 5.- Si $\operatorname{sen} r = \frac{4}{5}$, $0 < r < \frac{f}{2}$, $\operatorname{sen} s = \frac{3}{5}$, $\frac{f}{2} < s < f$, calcular:
a) $\cos(r - s)$ b) $\operatorname{sen}(2s)$ c) $\operatorname{tg}\left(\frac{r}{2} + s\right)$
- 6.- Calcula $\cos(r - s)$ sabiendo que $\operatorname{sen} r = \frac{4}{5}$ y $\operatorname{sen} s = \frac{12}{13}$ y que r y s son ángulos del mismo cuadrante
- 7.- Si $\operatorname{tg} r = -2$, calcula $\operatorname{sen} 4r$ y $\cos 4r$
- 8.- Dos ángulos agudos r y s verifican que $7\operatorname{tg} r = 1$, $10\operatorname{sen}^2 s = 1$
a) ¿Cuál de los dos ángulos es mayor?
b) Calcula $\operatorname{tg}(r + 2s)$
c) Indica razonadamente cuál es el ángulo $r + 2s$
- 9.- Sabiendo que r es un ángulo del primer cuadrante y que $\operatorname{sen} \frac{r}{2} = \frac{1}{3}$, calcular el valor de la tangente de r
- 10.- Simplifica las siguientes expresiones:
a) $\frac{\operatorname{sen} 2r}{1 - \cos^2 r}$ b) $\frac{\operatorname{sen} r + \cos r}{\sqrt{2} \cos\left(\frac{f}{4} - r\right)}$ c) $\operatorname{sen} 2r \cdot \cos r + \operatorname{sen} r \cdot \cos 2r$

10.- Demuestra las siguientes identidades trigonométricas:

$$a) \frac{\cos^2 a}{1 + \operatorname{sen} a} = 1 - \operatorname{sen} a$$

$$b) (\operatorname{sen} a - \cos a)^2 + (\operatorname{sen} a + \cos a)^2 = 2$$

$$c) \operatorname{tg} \left(\frac{f}{4} + a \right) \cdot \operatorname{tg} \left(\frac{f}{4} - a \right) = 1$$

$$d) 1 + \operatorname{sen}(2a) = (\operatorname{sen} a + \cos a)^2$$

$$e) \operatorname{sen}(a+b) \cdot \operatorname{sen}(a-b) = \cos^2 b - \cos^2 a$$

$$f) \left(\operatorname{sen} \frac{a}{2} + \cos \frac{a}{2} \right)^2 = 1 + \operatorname{sen} a$$

$$g) \operatorname{tg} \left(\frac{f}{4} + r \right) - \operatorname{tg} \left(\frac{f}{4} - r \right) = 2 \operatorname{tg} r$$

$$h) 2 \cos \left(\frac{f}{4} + r \right) \cdot \cos \left(\frac{f}{4} - r \right) = \cos 2r$$

$$i) \cos^2 \left(\frac{r-s}{2} \right) - \cos^2 \left(\frac{r+s}{2} \right) = \operatorname{sen} r \cdot \operatorname{sen} s$$

$$j) \operatorname{sen} r = \frac{2 \operatorname{tg} \left(\frac{r}{2} \right)}{1 + \operatorname{tg}^2 \left(\frac{r}{2} \right)}$$

11.- Resuelve las ecuaciones:

$$a) \operatorname{tg} x = \sqrt{2} \cos x$$

$$b) 3 \cos x = 2 \sec x - \frac{5}{2}$$

$$c) \frac{\cos x}{\operatorname{tg} x} = \frac{3}{2}$$

$$d) 6 \cos^2 x + 6 \operatorname{sen}^2 x = 5 + \operatorname{sen} x$$

$$e) \operatorname{sen} x - 2 \cos(2x) = -\frac{1}{2}$$

$$f) 4 \operatorname{sen} \left(\frac{x}{2} \right) + 2 \cos x = 3$$

$$g) 6 \cos^2 x + \cos(2x) = 5$$

$$h) 1 + \cos x + \cos(2x) = 0$$

$$i) \frac{1}{\cos x} = \operatorname{sen} x + \cos x$$

$$j) \operatorname{tg} \left(\frac{f}{4} + x \right) - 3 \operatorname{tg} x = 2$$

$$k) \cos x - \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = 0$$

$$l) \cos^2 \frac{x}{2} + \cos x = \frac{1}{2}$$

$$ll) \operatorname{sen} x - \sqrt{3} \cos x = 2$$

$$m) \operatorname{tg} \left(4x - \frac{f}{4} \right) = -1$$

$$n) \operatorname{tg} 2x + \operatorname{tg} x = 0$$

12.- Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones:

$$a) \begin{cases} \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y = 1 \\ \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y = 1 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} \cos x + \operatorname{sen} y = \frac{3}{2} \\ y - x = \frac{f}{6} \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} y} = 2 \\ x - y = \frac{f}{3} \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} x - 2y = 0 \\ \cos x + \operatorname{sen} y = 1 \end{cases}$$

$$e) \begin{cases} \operatorname{sen} x + \cos y = 1 \\ x + y = \frac{f}{2} \end{cases}$$

$$f) \begin{cases} \operatorname{sen}^2 x - \cos^2 y = \frac{1}{2} \\ \cos^2 x - \cos^2 y = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$g) \begin{cases} \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y = \frac{3}{2} \\ x + y = 120^\circ \end{cases}$$

$$h) \begin{cases} \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y = \frac{3}{2} \\ \cos \left(\frac{x-y}{2} \right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

13.- Responde razonadamente y sin usar la calculadora a las siguientes cuestiones:

- a) ¿Es posible que un ángulo tenga igual secante que cosecante?
- b) Si $\operatorname{sen} \alpha = 1'25$, ¿cuánto vale $\cos(2\alpha)$?
- c) Si un ángulo mide $1'5$ radianes, ¿es agudo, obtuso o recto?
- d) ¿Es cierto que $\operatorname{sen}(12\alpha - \alpha) = \operatorname{sen} \alpha$?
- e) Si un ángulo α pertenece al tercer cuadrante, ¿en qué cuadrante están $\frac{\alpha}{2}$ y 2α ?
- f) ¿Es cierto siempre que $\operatorname{sen} \alpha + \operatorname{sen} \beta = \operatorname{sen}(\alpha + \beta)$?
- g) Como $\operatorname{sen}(2\alpha) = 2\operatorname{sen} \alpha \cdot \cos \alpha$, entonces ¿ $\operatorname{cosec}(2\alpha) = 2 \operatorname{cosec} \alpha \cdot \sec \alpha$?

www.yoquieroaprobar.es

Soluciones:

1.- $\sin(2) = 24/25$, $\cos(2) = -7/25$; $\sin(\pi/2) = \frac{\sqrt{5}}{5}$, $\cos(\pi/2) = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

2.- 3; 1/3

3.- 3; 7

4.- a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ b) $-\frac{1}{2}$ c) $-\frac{1}{2}$ d) $-\sqrt{3}$ e) 1

5.- a) 0 b) $-\frac{24}{25}$ c) $-\frac{2}{11}$

6.- $\frac{63}{65}$

7.- $\frac{24}{25}$; $-\frac{7}{25}$

8.- a) b) 1 c) 45°

9.- $\frac{4\sqrt{2}}{7}$

10.- a) $2 \cot \alpha$ b) 1 c) $\sin \alpha$

11.- a) 45, 135 b) 60, 300 c) 30, 150 d) 90 e) 30, 150, 228 y 312 (aprox.)

f) 60, 300 g) 30, 150, 210 y 330 h) 90, 120, 240 y 270

i) 0, 45, 135, 180, 225, 315 j) 30, 150, 210 y 330 k) 30, 150

l) 90, 270 ll) 150 m) 45, 90 n) 0, 180, 30, 150, 210 y 330

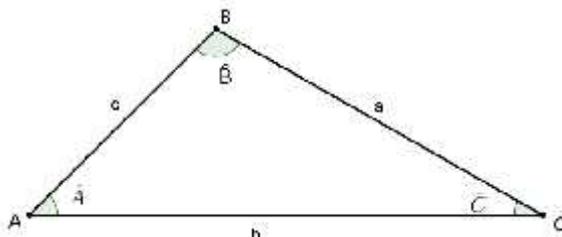
12.- a) (90,0) b) (0,30), (60,90) c) (30,90) d) (60,30)

e) (30,60) f) (90,45) g) (30,90), (90,30) h) (90,30)

TEMA 3.- RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS

1.- INTRODUCCIÓN

Resolver un triángulo en general consiste en conocer las medidas de sus tres lados y sus tres ángulos. Habitualmente nombraremos los vértices como A , B y C , sus ángulos correspondientes como \hat{A} , \hat{B} y \hat{C} y a los lados apuestos a cada vértice como a , b y c :



Los teoremas y propiedades que usaremos para la resolución de triángulos dependerán de si son o no triángulos rectángulos.

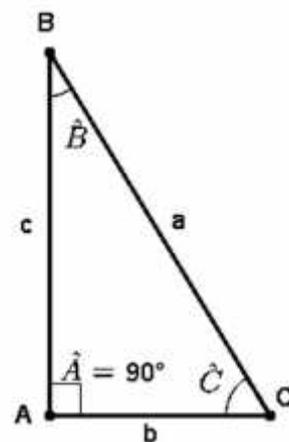
2.- TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

En la resolución de los triángulos rectángulos, con sus elementos como el de la figura, usaremos por un lado que $\hat{B} + \hat{C} = 90^\circ$, además del teorema de Pitágoras: $a^2 = b^2 + c^2$

Por otra parte las definiciones de las razones trigonométricas de los ángulos \hat{B} y \hat{C} :

$$\operatorname{sen}\hat{B} = \frac{b}{a}, \quad \operatorname{cos}\hat{B} = \frac{c}{a}, \quad \operatorname{tg}\hat{B} = \frac{b}{c}$$

$$\operatorname{sen}\hat{C} = \frac{c}{a}, \quad \operatorname{cos}\hat{C} = \frac{b}{a}, \quad \operatorname{tg}\hat{C} = \frac{c}{b}$$



Conviene tener en cuenta que bastan dos datos para resolver estos triángulos, y que no hay una única manera de resolver un triángulo rectángulo, sino que usando de formas diferentes las fórmulas anteriores se puede llegar igualmente a la solución.

Ejemplo 1:

Resolver un triángulo rectángulo del que se conocen un cateto $b = 15$ cm y el ángulo $\hat{C} = 50^\circ$

Solución:

Claramente el ángulo \hat{B} será $\hat{B} = 90^\circ - 50^\circ = 40^\circ$

Podemos calcular el cateto c por ejemplo con:

$$\operatorname{tg} \hat{C} = \frac{c}{b} \Rightarrow c = b \cdot \operatorname{tg} \hat{C} \Rightarrow c = 15 \cdot \operatorname{tg} 50^\circ \approx 17' 88 \text{ cm.}$$

Sólo falta calcular la hipotenusa, por ejemplo con:

$$\cos \hat{C} = \frac{b}{a} \Rightarrow a = \frac{b}{\cos \hat{C}} = \frac{15}{\cos 50^\circ} \approx 23' 34 \text{ cm.}$$

Ejemplo 2:

Resolver un triángulo rectángulo del que se conocen un cateto $b = 11 \text{ cm}$ y la hipotenusa $a = 20 \text{ cm}$.

Solución:

Por Pitágoras: $a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow c^2 = a^2 - b^2 = 400 - 121 = 279 \Rightarrow c \approx 16' 7 \text{ cm}$

Para calcular los ángulos:

$$\operatorname{sen} \hat{B} = \frac{b}{a} = \frac{11}{20} = 0' 55 \Rightarrow \hat{B} = \operatorname{arcsen}(0' 55) \approx 33' 37^\circ$$

$$\hat{C} = 90^\circ - 33' 37^\circ = 56' 63^\circ$$

Ejemplo 3:

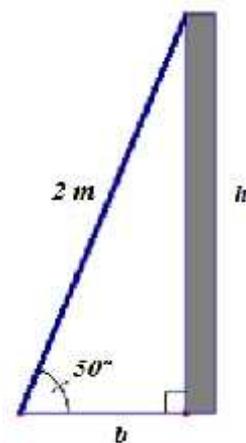
Una escalera de 2 m. está apoyada en una pared formando un ángulo de 50° con el suelo. Halla la altura a la que llega y la distancia que separa su base de la pared

Solución:

A la vista del dibujo: $\operatorname{sen} 50^\circ = \frac{h}{2} \Rightarrow h = 2 \operatorname{sen} 50^\circ = 1' 53 \text{ m}$

Para sacar b , por ejemplo: $\cos 50^\circ = \frac{b}{2} \Rightarrow b = 2 \cos 50^\circ = 1' 29 \text{ m}$

Luego la escalera alcanza una altura en la pared de 1'53 m y se encuentra situada a 1'29 m de dicha pared

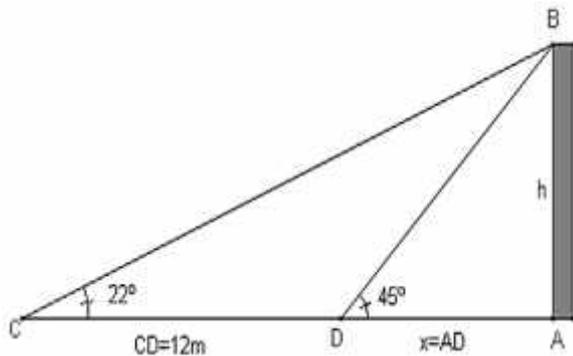


Ejemplo 4:

El ángulo de elevación del punto más alto de una torre medido desde un punto C del suelo es de 22° . Avanzamos 12 m. hacia la torre y dicho ángulo es ahora de 45° . Calcular la altura de la torre

Solución:

En primer lugar representamos gráficamente el problema:



En el triángulo DAB: $tg 45^\circ = \frac{h}{x}$

En el triángulo CAB: $tg 22^\circ = \frac{h}{x+12}$

Tenemos por tanto dos ecuaciones con dos incógnitas. Resolvemos por igualación despejando h :

$$\left. \begin{array}{l} h = x \operatorname{tg} 45^\circ \\ h = (x+12) \operatorname{tg} 22^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow x \operatorname{tg} 45^\circ = (x+12) \operatorname{tg} 22^\circ \Rightarrow x = 0'404(x+12)$$
$$\Rightarrow x = 0'404x + 4'848 \Rightarrow 0'596x = 4'848 \Rightarrow x \approx 8'13$$

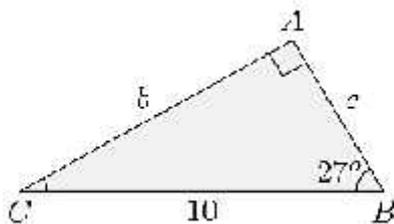
Luego la torre mide aproximadamente 8'13 m.

Nota: estos problemas “de doble medida” son un ejemplo clásico de aplicación de triángulos rectángulos, y se suele usar la tangente en su resolución

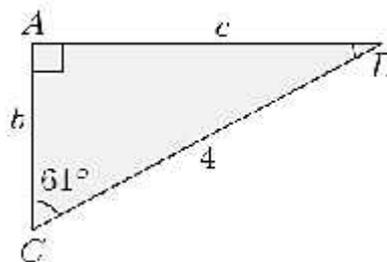
Ejercicios:

- 1.- La base de un triángulo isósceles mide 55 cm., y sus lados iguales 39 cm. Calcula los ángulos del triángulo
- 2.- Resuelve:

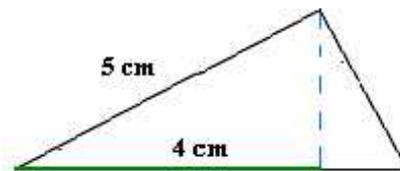
(ii)



(i)



- 3.- En un triángulo rectángulo, un cateto mide 5 cm, y su proyección sobre la hipotenusa, 4 cm.
Calcula la longitud de la hipotenusa y del otro cateto

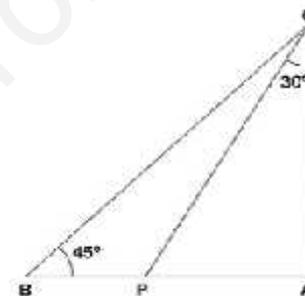


- 4.- Calcula el lado y la apotema de un pentágono regular inscrito en una circunferencia de radio 5cm.

- 5.- Un montículo es observado por una persona desde el suelo bajo un ángulo de 55° . Otra persona, situada a 150 metros de la primera y al otro lado del montículo, lo observa con un ángulo de 75° . Calcula la altura del montículo y las distancias que hay entre el montículo y cada persona.

- 6.- Con un teodolito de 1'5 m de altura, situado a 75 m de una torre, se ha observado ésta con un ángulo de 40° con la horizontal. Halla la altura de la torre.

- 7.- Calcula el perímetro del triángulo rectángulo ABC , sabiendo que la longitud del segmento CP es $2\sqrt{3}$ cm.



- 8.- En lo alto de un edificio en construcción hay una grúa de 4 m. Desde un punto del suelo se ve el punto más alto de la grúa con un ángulo de elevación de 50° , y el punto más alto del edificio con un ángulo de elevación de 40° . Halla la altura del edificio.

3.- TRIÁNGULOS CUALESQUIERA

Para resolver un triángulo no rectángulo usaremos, además del hecho de que $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$, dos teoremas especiales que amplían lo visto en triángulos rectángulos.

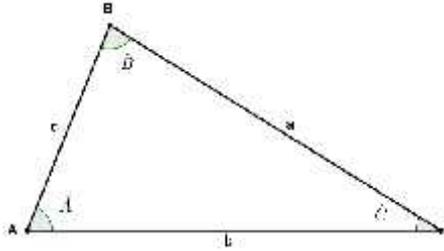
Conviene destacar que la resolución de un triángulo cualquiera puede tener una solución única, dos soluciones o ninguna solución, dependiendo de los datos, y que para que un triángulo tenga sentido al ángulo mayor le tiene que corresponder el lado opuesto mayor, y que al ángulo menor le tiene que corresponder el lado opuesto menor, por la propia definición de ángulo. Esto es algo que deberemos comprobar en las posibles soluciones siempre que resolvamos un triángulo.

Veamos ahora los dos teoremas que vamos a utilizar:

Teorema del Seno

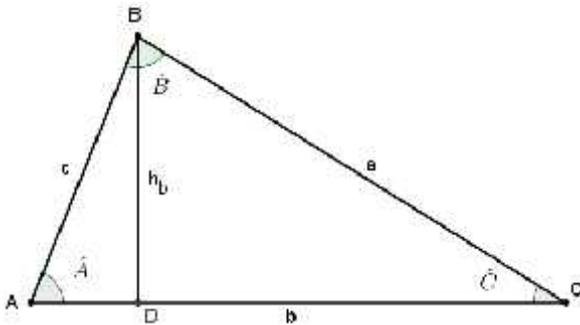
“Los lados de un triángulo cualquiera son proporcionales a los senos de sus ángulos opuestos”, es decir:

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\hat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen}\hat{B}} = \frac{c}{\operatorname{sen}\hat{C}}$$



Demostración:

La altura h_b correspondiente al vértice B divide al triángulo en dos triángulos rectángulos



En ADB:

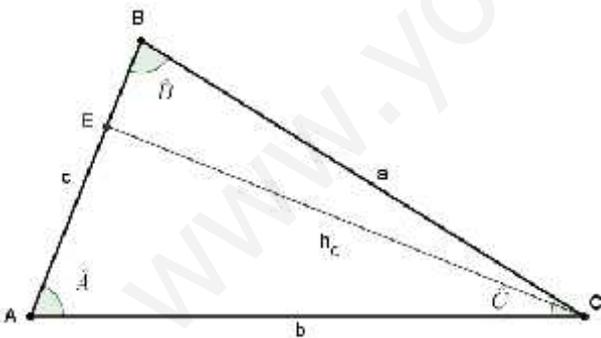
$$\operatorname{sen}\hat{A} = \frac{h_b}{c} \Rightarrow h_b = c \cdot \operatorname{sen}\hat{A}$$

En CDB:

$$\operatorname{sen}\hat{C} = \frac{h_b}{a} \Rightarrow h_b = a \cdot \operatorname{sen}\hat{C}$$

De donde igualando obtenemos: $c \cdot \operatorname{sen}\hat{A} = a \cdot \operatorname{sen}\hat{C} \Rightarrow \frac{a}{\operatorname{sen}\hat{A}} = \frac{c}{\operatorname{sen}\hat{C}}$

Si hacemos lo mismo con la altura correspondiente al vértice C:



En AEC:

$$\operatorname{sen}\hat{A} = \frac{h_c}{b} \Rightarrow h_c = b \cdot \operatorname{sen}\hat{A}$$

En CEB:

$$\operatorname{sen}\hat{B} = \frac{h_c}{a} \Rightarrow h_c = a \cdot \operatorname{sen}\hat{B}$$

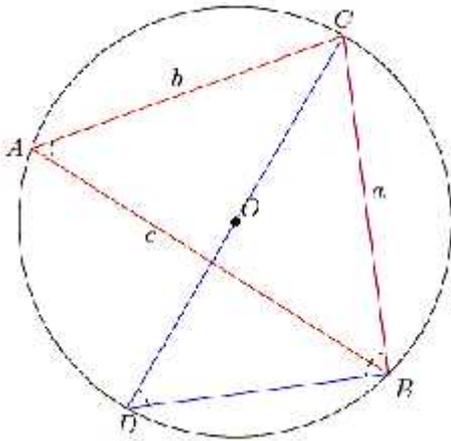
De donde igualando obtenemos: $b \cdot \operatorname{sen}\hat{A} = a \cdot \operatorname{sen}\hat{B} \Rightarrow \frac{a}{\operatorname{sen}\hat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen}\hat{B}}$

Y uniendo ambas igualdades obtenemos lo que queríamos demostrar:

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\hat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen}\hat{B}} = \frac{c}{\operatorname{sen}\hat{C}}$$

Curiosidad:

Si construimos la circunferencia de radio r circunscrita al triángulo ABC y trazamos el diámetro CD:



$$\text{En ABC:} \quad \frac{a}{\text{sen}\hat{A}} = \frac{b}{\text{sen}\hat{B}} = \frac{c}{\text{sen}\hat{C}}$$

En el triángulo DBC el ángulo \hat{B} es de 90° por abarcar un diámetro, y aplicando el teorema del seno:

$$\frac{a}{\text{sen}\hat{D}} = \frac{2r}{\text{sen}90^\circ} = 2r$$

Como los ángulos \hat{A} y \hat{D} por abarcar el mismo arco (a):

$$\frac{a}{\text{sen}\hat{A}} = \frac{b}{\text{sen}\hat{B}} = \frac{c}{\text{sen}\hat{C}} = 2r$$

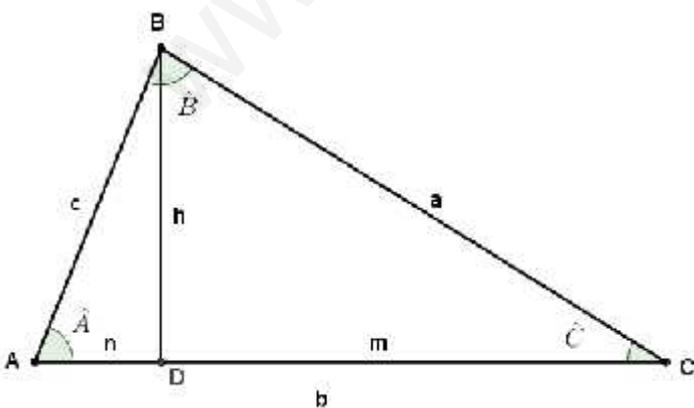
Luego la proporción entre los lados de un triángulo y los senos de sus ángulos opuestos coincide con el diámetro de la circunferencia circunscrita al triángulo

Teorema del Coseno

“En un triángulo cualquiera, el cuadrado de un lado es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados menos el doble de dichos lados por el coseno del ángulo que forman”, es decir:

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A} \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac \cos \hat{B} \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos \hat{C} \end{aligned}$$

Demostración:



La altura h divide al triángulo en dos triángulos rectángulos.

$$\text{En BDC:} \quad a^2 = m^2 + h^2$$

Como $m = b - n$, y además en ADB $h^2 = c^2 - n^2$:

$$\begin{aligned} a^2 &= (b - n)^2 + c^2 - n^2 = b^2 + n^2 - 2bn + c^2 - n^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow a^2 &= b^2 + c^2 - 2bn \end{aligned}$$

$$\text{En ADB:} \quad \cos \hat{A} = \frac{n}{c} \Rightarrow n = c \cos \hat{A}$$

Luego $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}$

Las otras dos igualdades se demuestran obviamente tomando las otras alturas del triángulo.

Nota: Si el triángulo fuera rectángulo por ejemplo en el ángulo \hat{A} , quedaría justo el Teorema de Pitágoras. Es decir, el Teorema del Coseno es una ampliación del Teorema de Pitágoras para triángulos no rectángulos.

Consideraciones a tener en cuenta para resolver triángulos

- Cuando calculamos un ángulo usando el Teorema del Seno, al despejar aparece una expresión como: $\text{sen}\hat{A} = 0'72$
Con la calculadora obtenemos $\hat{A} = \text{arcsen}(0'72) \approx 46^\circ$
Pero existe otro posible ángulo en un triángulo cuyo seno valga eso: $\hat{A} = 180^\circ - 46^\circ = 134^\circ$
Eso da lugar a dos posibles soluciones que hay que tener en cuenta
- También podría pasar que $\text{sen}\hat{A} = 1'12$, lo cual es imposible y por tanto el triángulo no tendría solución
- Cuando aparezcan varias posibles soluciones, hay que comprobar su validez teniendo en cuenta que, como ya comentamos, al ángulo mayor le corresponde el lado opuesto mayor y al ángulo menor el lado opuesto menor
- Es por todo esto, y para evitar calcular soluciones que luego no sirvan, por lo que usaremos como norma general el Teorema del Coseno a la hora de calcular ángulos (el tercer ángulo se calcula sabiendo que suman 180°)
- Podemos guiarnos por la siguiente tabla, aunque no es estrictamente necesario si tenemos en cuenta el punto anterior:

I. Dos ángulos y un lado	II. Dos lados y el ángulo comprendido	III. Dos lados y el ángulo no comprendido	IV. Tres lados
<ul style="list-style-type: none"> • Tercer ángulo con $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$ • Los otros dos lados con el Teorema del Seno 	<ul style="list-style-type: none"> • Tercer lado y un ángulo con el Teorema del Coseno • Tercer ángulo con $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$ 	<ul style="list-style-type: none"> • Segundo ángulo con el Teorema del Seno • Tercer ángulo con $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$ • Tercer lado con el Teorema del Seno 	<ul style="list-style-type: none"> • Dos ángulos con el Teorema del Coseno • Tercer ángulo con $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$
Solución única	Solución única	Una, dos o ninguna solución	Una o ninguna solución

Ejemplo 1:

Resuelve un triángulo en el que $a = 5 \text{ cm.}$, $\hat{B} = 40^\circ$, $\hat{C} = 60^\circ$

Solución:

El ángulo \hat{A} será $\hat{A} = 180^\circ - 40^\circ - 60^\circ = 80^\circ$

Por el Teorema del Seno:

$$\frac{a}{\text{sen}\hat{A}} = \frac{b}{\text{sen}\hat{B}} \Rightarrow b = \frac{a \cdot \text{sen}\hat{B}}{\text{sen}\hat{A}} = \frac{5 \text{sen}40^\circ}{\text{sen}80^\circ} = 3'26 \text{ cm}$$

$$\frac{a}{\text{sen}\hat{A}} = \frac{c}{\text{sen}\hat{C}} \Rightarrow c = \frac{a \cdot \text{sen}\hat{C}}{\text{sen}\hat{A}} = \frac{5 \text{sen}60^\circ}{\text{sen}80^\circ} = 4'4 \text{ cm}$$

Ejemplo 2:

Resuelve un triángulo en el que $a = 5 \text{ cm.}$, $b = 7 \text{ cm.}$, $\hat{C} = 50^\circ$

Solución:

Calculamos el tercer lado con el Teorema del Coseno:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \hat{C} = 25 + 49 - 70 \cos 50^\circ = 29 \Rightarrow c = 5'39 \text{ cm.}$$

Usamos de nuevo el Teorema del Coseno para calcular el ángulo \hat{A} :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A} \Rightarrow \cos \hat{A} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{49 + 29 - 25}{2 \cdot 7 \cdot 5'39} = 0'702 \Rightarrow \hat{A} = 45'41^\circ$$

Y el otro ángulo será $\hat{B} = 180^\circ - 50^\circ - 45'41^\circ = 84'59^\circ$

Ejemplo 3:

Resuelve un triángulo en el que $a = 3 \text{ cm.}$, $b = 5 \text{ cm.}$, $c = 10 \text{ cm.}$

Solución:

Por el Teorema del Coseno:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A} \Rightarrow \cos \hat{A} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{25 + 100 - 9}{100} = 1'16$$

Como no existe ningún ángulo cuyo coseno sea mayor que 1, este triángulo no tiene solución

Ejemplo 4:

Resuelve un triángulo en el que $a = 4\text{ cm.}$, $b = 5\text{ cm.}$, $\hat{A} = 45^\circ$

Solución:

Por el Teorema del Seno:

$$\frac{a}{\text{sen}\hat{A}} = \frac{b}{\text{sen}\hat{B}} \Rightarrow \text{sen}\hat{B} = \frac{b \cdot \text{sen}\hat{A}}{a} = \frac{5 \text{sen}45^\circ}{4} = 0'88 \Rightarrow \begin{cases} \hat{B}_1 = 61'64^\circ \\ \hat{B}_2 = 180^\circ - 61'64^\circ = 118'36^\circ \end{cases}$$

$$\text{Si } \hat{B}_1 = 61'64^\circ \Rightarrow \hat{C}_1 = 180^\circ - 45^\circ - 61'64^\circ = 73'36^\circ$$

$$\text{El lado } c \text{ será: } \frac{a}{\text{sen}\hat{A}} = \frac{c_1}{\text{sen}\hat{C}_1} \Rightarrow c_1 = \frac{a \cdot \text{sen}\hat{C}_1}{\text{sen}\hat{A}} = \frac{4 \text{sen}73'36}{\text{sen}45} \approx 5'42\text{ cm}$$

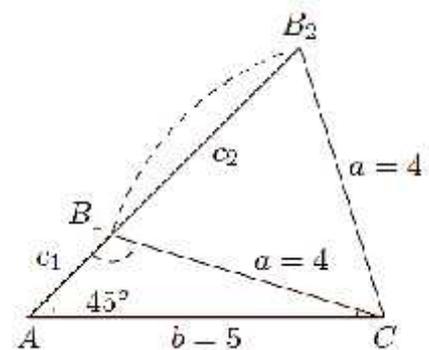
$$\text{Si } \hat{B}_2 = 118'36^\circ \Rightarrow \hat{C}_2 = 180^\circ - 45^\circ - 118'36^\circ = 16'64^\circ$$

$$\text{El lado } c \text{ será: } \frac{a}{\text{sen}\hat{A}} = \frac{c_2}{\text{sen}\hat{C}_2} \Rightarrow c_2 = \frac{a \cdot \text{sen}\hat{C}_2}{\text{sen}\hat{A}} = \frac{4 \text{sen}16'64}{\text{sen}45} \approx 1'62\text{ cm}$$

Las dos posibles soluciones serán por tanto:

$a = 4\text{ cm}$	$\hat{A} = 45^\circ$	$a = 4\text{ cm}$	$\hat{A} = 45^\circ$
$b = 5\text{ cm}$	$\hat{B}_1 = 61'64^\circ$	$b = 5\text{ cm}$	$\hat{B}_2 = 118'36^\circ$
$c_1 = 5'42\text{ cm}$	$\hat{C}_1 = 73'36^\circ$	$c_2 = 1'62\text{ cm}$	$\hat{C}_2 = 16'64^\circ$

Y como podemos comprobar, ambas soluciones son válidas

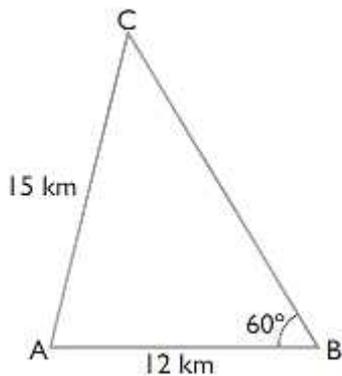


Ejemplo 5:

Tres pueblos A, B y C están unidos por carreteras rectas que forman un triángulo; la distancia de A hasta B es de 12 km, de A hasta C de 15 km y el ángulo que forman las visuales desde B hasta A y C mide 60° . Calcula la distancia del pueblo B al C

Solución:

En primer lugar, representamos gráficamente la situación planteada en el problema:



Conocemos dos lados y el ángulo no comprendido entre ellos:

$$b = 15 \text{ km.}, c = 12 \text{ km.}, \hat{B} = 60^\circ$$

Por el Teorema del Seno:

$$\frac{b}{\text{sen}\hat{B}} = \frac{c}{\text{sen}\hat{C}} \Rightarrow \text{sen}\hat{C} = \frac{c \cdot \text{sen}\hat{B}}{b} = \frac{12 \cdot \text{sen}60^\circ}{15} = 0'69$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \hat{C} = 43'63^\circ \\ \hat{C} = 136'37^\circ \end{cases}$$

La segunda solución no tiene sentido pues con el ángulo \hat{B} ya sumarían más de 180°

$$\text{Luego } \hat{C} = 43'63^\circ \Rightarrow \hat{A} = 180^\circ - 60^\circ - 43'63^\circ = 76'37^\circ$$

Y de nuevo por el Teorema del Seno:

$$\frac{a}{\text{sen}\hat{A}} = \frac{b}{\text{sen}\hat{B}} \Rightarrow a = \frac{b \cdot \text{sen}\hat{A}}{\text{sen}\hat{B}} = \frac{15 \cdot \text{sen}76'37^\circ}{\text{sen}60^\circ} = 16'83$$

Luego la distancia de B a C es de $16'83 \text{ km.}$

Ejercicios:

1.- Resuelve los siguientes triángulos:

a) $a = 12 \text{ cm.}, b = 16 \text{ cm.}, c = 10 \text{ cm.}$

b) $a = 7 \text{ cm.}, b = 22 \text{ cm.}, \hat{C} = 40^\circ$

c) $a = 4 \text{ cm.}, \hat{B} = 45^\circ, \hat{C} = 60^\circ$

d) $a = 12 \text{ cm.}, b = 15 \text{ cm.}, \hat{A} = 48^\circ$

e) $b = 20 \text{ cm.}, c = 14 \text{ cm.}, \hat{A} = 35^\circ$

f) $a = 12'6 \text{ cm.}, b = 26'4 \text{ cm.}, \hat{B} = 124^\circ$

2.- Desde la puerta de mi casa veo el cine, que está a 120 m., y el quiosco, que está a 85 m., y el ángulo que forman ambas visuales es de 40° . Calcular la distancia entre el cine y el quiosco

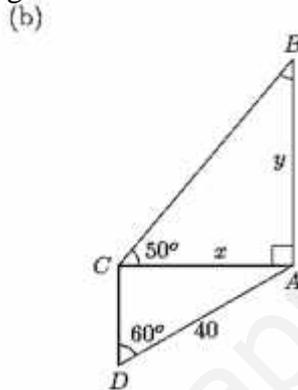
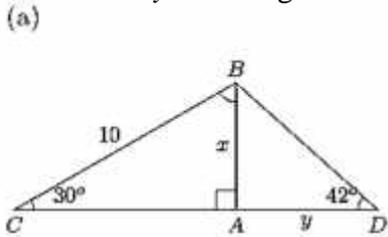
3.- Dos coches, con velocidades constantes respectivas de 90 y 80 kilómetros por hora, toman dos carreteras que se bifurcan con un ángulo de 82° . ¿Qué distancia habrá entre ellos cuando lleven 15 minutos de viaje?

4.- El radio de la circunferencia circunscrita al triángulo ABC mide 72 cm. si dos de los ángulos del triángulo son de 60° y 45° . Resuelve el triángulo y calcula su área

EJERCICIOS

- 1.- La base de un triángulo isósceles mide 20 m y el ángulo opuesto 74° . Calcula los lados y la superficie
- 2.- Una escalera de bomberos de 10 m. de longitud se ha fijado en un punto de la calzada. Si se apoya sobre una de las fachadas forma un ángulo con el suelo de 45° , y si se apoya sobre la otra fachada dicho ángulo es de 30° . ¿Cuál es la anchura de la calle? ¿Qué altura se alcanza con la escalera sobre cada fachada?

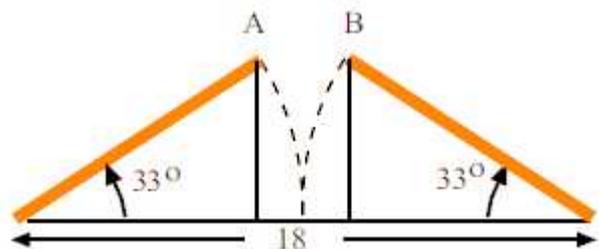
- 3.- Calcular x e y en los siguientes triángulos:



- 4.- Un grupo decide escalar una montaña de la que desconocen la altura. A la salida del pueblo han medido el ángulo de elevación, que resulta ser 30° . A continuación han avanzado 100 m hacia la base de la montaña y han vuelto a medir el ángulo de elevación, siendo ahora 45° . Calcular la altura de la montaña.
- 5.- Una montaña de 650 m. de altura separa dos pueblos A y B. Desde A se ve la cima C de la montaña con un ángulo de elevación de 24° , y desde B con 36° . ¿Cuál es la distancia entre los dos pueblos?
- 6.- Dos edificios están separados entre sí por 20 m. Desde la azotea de uno de ellos, de 40 m. de altura, veo la azotea del otro con un ángulo de elevación de 70° . Halla su altura.

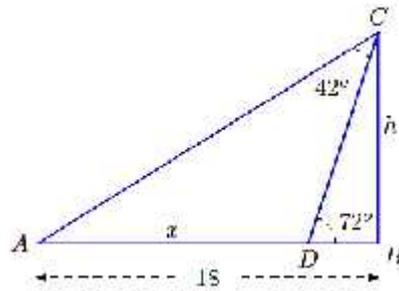
- 7.- Dos puentes levadizos iguales están elevados 33° , y sus bases separadas 18 m., como indica la figura:

¿Qué distancia separa los puntos A y B?

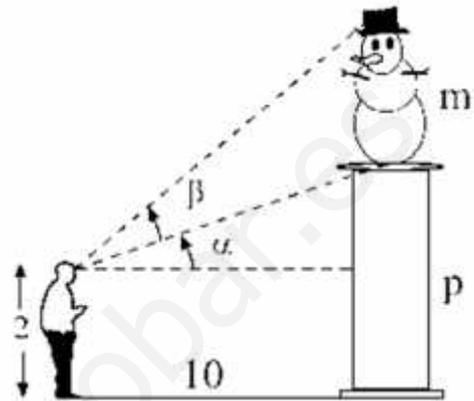


- 8.- Calcula la apotema y el área de un heptágono regular cuyo lado mide $9\sqrt{2}$ cm.

9.- Calcular x y h en el siguiente gráfico:



10.- Una persona de 2 m. se sitúa a 10 m. de una estatua de longitud m sobre un pedestal de longitud p . Si calcula los ángulos $\alpha = 20^\circ$ y $\beta = 15^\circ$, halla la longitud de la estatua.



11.- Resolver los siguientes triángulos:

a) $a = 10, b = 9, \hat{C} = 70^\circ$

b) $a = 12, \hat{A} = 30^\circ, \hat{B} = 100^\circ$

c) $a = 4, b = 8, \hat{B} = 40^\circ$

d) $a = 6, b = 7, c = 8$

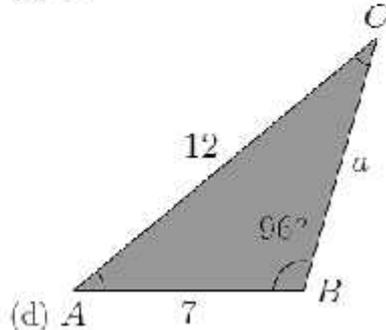
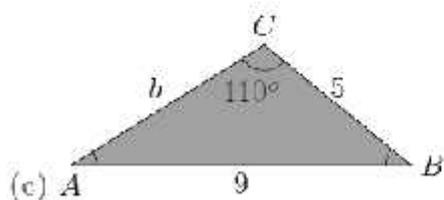
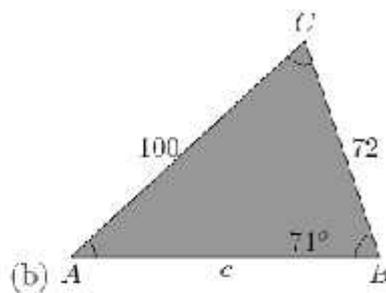
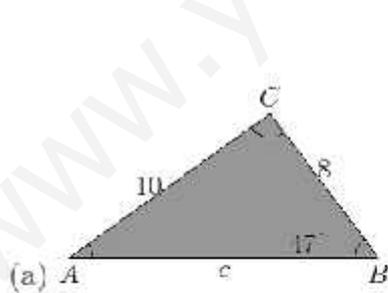
e) $a = 8, b = 12, c = 20$

f) $b = 10, c = 6, \hat{C} = 45^\circ$

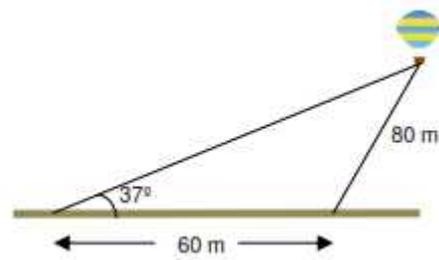
g) $a = 10, \hat{A} = 45^\circ, \hat{C} = 75^\circ$

h) $a = 1, c = \sqrt{3}, \hat{B} = 30^\circ$

12.- Hallar los elementos que faltan de cada triángulo:



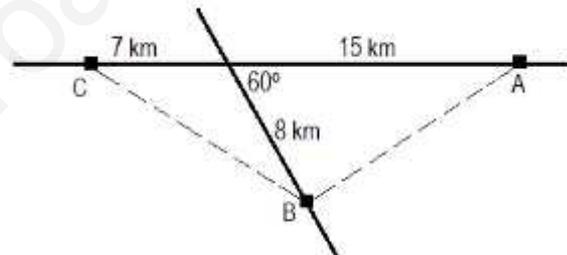
- 13.- Un globo aerostático está sujeto al suelo mediante dos cables de acero, en dos puntos que distan 60 m. El cable más corto mide 80 m y el ángulo que forma el otro cable con el suelo es de 37° . Hallar la altura del globo y la longitud del cable más extenso.



- 14.- Dos caminantes salen del mismo punto por dos caminos distintos que forman entre sí un ángulo de 120° . Uno anda a 5 km/h y el otro, a 3 km/h. ¿A qué distancia se encontrarán uno del otro al cabo de tres horas?
- 15.- Una señal de socorro de un teléfono móvil A se escucha desde dos antenas B y C separadas entre sí 25 km, el ángulo B mide 54° y el ángulo C mide 66° . Calcula las distancias que hay desde cada una de las antenas B y C al teléfono móvil.

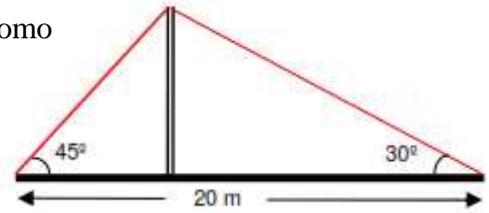
- 16.- Rosa y Juan se encuentran a ambos lados de la orilla de un río, en los puntos A y B respectivamente. Rosa se aleja hasta un punto C distante 100 m del punto A desde la que dirige visuales a los puntos A y B que forman un ángulo de 20° y desde A ve los puntos C y B bajo un ángulo de 120° . ¿Cuál es la anchura del río?

- 17.- Dos carreteras se cruzan con un ángulo de 60° . Desde dicho cruce, las distancias a tres pueblos A, B y C, son respectivamente 15, 8 y 7 km, tal como se indica en la figura. ¿Cuál de los pueblos A o C está más cerca de B en línea recta?

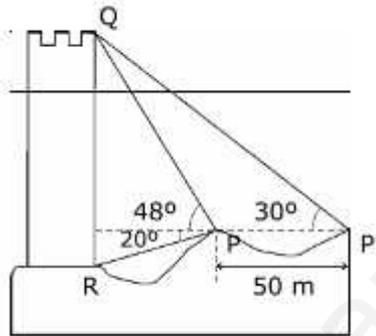


- 18.- Un solar tiene forma de triángulo y se conocen dos lados, que miden 18 m y 23 m, y el ángulo que forman, que es de 125° . Si el m^2 vale 30 € calcular el valor del solar
- 19.- Desde dos puntos de la orilla, A y B, separados entre sí 450 m., observamos dos barcos C y D. Con un teodolito se han medido los ángulos: $CAD = 48^\circ$, $BAD = 57^\circ$, $ABC = 42^\circ$ y $CBD = 53^\circ$. Calcular la distancia entre los dos barcos.
- 20.- Desde mi casa veo la fuente que está en el centro de la plaza mayor y también veo el ayuntamiento, que sé que está al menos a 50 m. He preparado un teodolito para calcular el ángulo formado por dichas visuales y ha dado $26^\circ 23'$. La distancia desde mi casa a la fuente es de 40 m y la distancia de la fuente al ayuntamiento es de 30 m. ¿Qué distancia hay desde mi casa al ayuntamiento?
- 21.- Antonio y Beatriz se encuentran en una misma orilla de un río separados por 60 m. Carlos está en un punto de la otra orilla. Las visuales desde Antonio a Beatriz y Carlos forman 60° , y desde Beatriz a Antonio y Carlos 80° . Halla la anchura del río

- 22.- Se ha colocado un cable sobre un mástil que lo sujeta, como muestra la figura. ¿Cuánto miden el cable y el mástil?

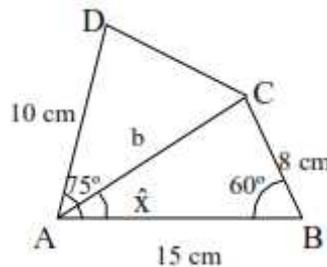


- 23.- El radio de una circunferencia mide 25 m. Calcula el ángulo que formarán las tangentes a dicha circunferencia, trazadas por los extremos de una cuerda de longitud 36 m.
- 24.- Halla la altura de la torre QR, de pie inaccesible, con los datos de la figura:



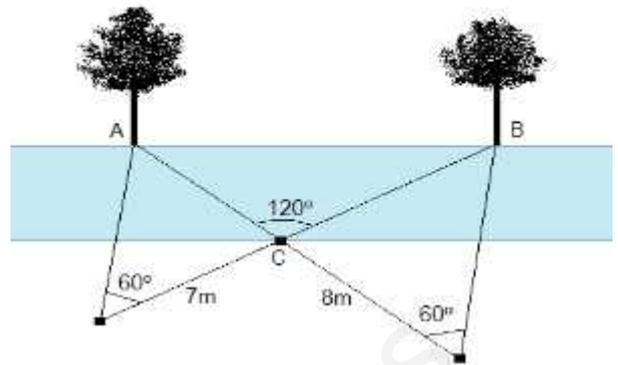
- 25.- Dos automóviles parten de un punto al mismo tiempo. Uno va hacia el Este a una velocidad de 120 km/h, y el otro hacia el Noroeste a 100 km/h. Al cabo de una hora y media ¿qué distancia los separa?
- 26.- Demostrar que en un triángulo cualquiera, su área es igual a la mitad del producto de dos de sus lados por el seno del ángulo que forman.
Utilizar el resultado anterior para calcular el área de un triángulo en el que $a = 8 \text{ cm.}$, $\hat{B} = 30^\circ$, $\hat{C} = 45^\circ$

- 27.- Halla b , \hat{X} y el área de la figura:

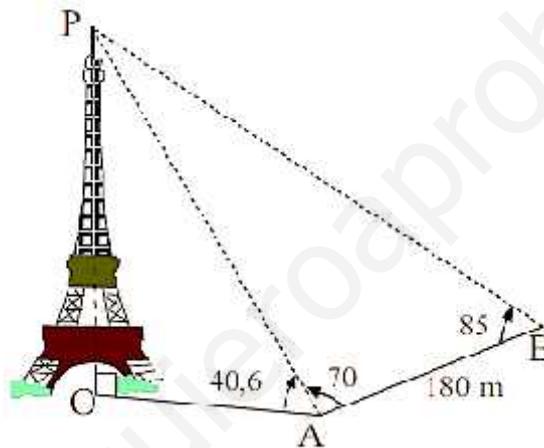


- 28.- Las diagonales de un paralelogramo miden 15 y 12 m., y forman un ángulo de 60° . Halla la longitud de sus lados.

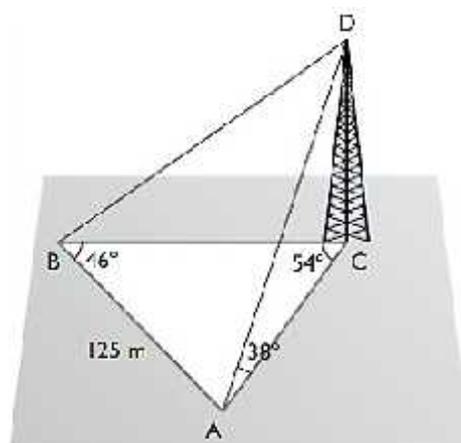
- 29.- Desde un punto C de la orilla de un río, se observan dos árboles A y B situados en la orilla opuesta bajo un ángulo de 120° . Si nos alejamos 8m desde C en la dirección opuesta al árbol A, el ángulo medido entre los dos árboles es ahora de 60° . Y si nos alejamos 7m, también desde C pero en la dirección opuesta al árbol B, se mide también un ángulo de 60° . Calcula de forma exacta la distancia AB entre los árboles.



- 30.- Para calcular la altura de la torre Eiffel una persona efectúa las medidas de los ángulos del dibujo en dos puntos A y B separados entre sí 180 m. Calcula la OP de la torre Eiffel.



- 31.- Dos automóviles salen del mismo punto a las 10 h de la mañana en direcciones que forman entre sí 72° . Uno va a 90 km/h y otro a 82 km/h. ¿A qué hora les separarán 126 km?
- 32.- Con los datos de la figura, calcular la altura CD de la torre:



Soluciones: (aproximadas)

- 1.- 16'62m. ; 132'7 m²
- 2.- 15'73 m; 7'07 y 5 m.
- 3.- a) x = 5, y = 5'55 b) x = 34'64, y = 41'28
- 4.- 136'6 m.
- 5.- 2354'56 m.
- 6.- 90'95 m.
- 7.- 2'9 m.
- 8.- a = 9'55 cm.; Área = 307'51 cm²
- 9.- h = 3'46, x = 14'6
- 10.- 3'36 m.
- 11.- a) a = 10 b = 9 c = 10,93 $\hat{A} = 59,3^\circ$ $\hat{B} = 50,7^\circ$ $\hat{C} = 70^\circ$
b) a = 12 b = 23,63 c = 18,38 $\hat{A} = 30^\circ$ $\hat{B} = 10^\circ$ $\hat{C} = 50^\circ$
c) a = 4 b = 8 c = 10,64 $\hat{A} = 18,74^\circ$ $\hat{B} = 40^\circ$ $\hat{C} = 121,25^\circ$
d) a = 6 b = 7 c = 8 $\hat{A} = 46,56^\circ$ $\hat{B} = 57,9^\circ$ $\hat{C} = 75,5^\circ$
e) a = 8 b = 12 c = 20 \implies no tiene solución.
f) b = 10, c = 6, $\hat{C} = 45^\circ \implies$ no tiene solución.
g) a = 8,16 b = 10 c = 11,15 $\hat{A} = 45^\circ$ $\hat{B} = 60^\circ$ $\hat{C} = 75^\circ$
h) a = 1 b = 1 c = $\sqrt{3}$ $\hat{A} = 30^\circ$ $\hat{B} = 30^\circ$ $\hat{C} = 120^\circ$
- 12.- a) $\hat{A} = 35'8^\circ$, $\hat{C} = 97'19^\circ$, c = 13'56
b) $\hat{A} = 42'9^\circ$, $\hat{C} = 66'1^\circ$, c = 96'69
c) $\hat{A} = 31'5^\circ$, $\hat{B} = 38'5^\circ$, b = 5'97
d) $\hat{A} = 48'54^\circ$, $\hat{C} = 35'46^\circ$, a = 9'04
- 13.- 71'8 m. y 119'31 m.
- 14.- 21 km.
- 15.- 26'37 y 23'35 km.
- 16.- 53'21 m.

- 17.- Los dos igual
- 18.- 5086'8 €
- 19.- 715 m.
- 20.- 60'11 m.
- 21.- 59'9 m.
- 22.- Cable 25 m.; mástil 7'32 m.
- 23.- 87'89°
- 24.- 79'82 m.
- 25.- 305'1 km
- 26.- Área = 11'71 cm²
- 27.- $b = 13 \text{ cm.}, \hat{X} = 32' 2^{\circ}, \text{Área} = 114'75 \text{ cm}^2$
- 28.- 6'87 y 11'72 m.
- 29.- 13 m.
- 30.- 276'1 m.
- 31.- 11h 15'
- 32.- 86'83 m.

FORMULARIO

Relaciones Fundamentales

$$\boxed{\text{sen}^2 r + \text{cos}^2 r = 1}$$

$$\boxed{1 + \text{tg}^2 r = \text{sec}^2 r}$$

$$\boxed{1 + \text{cot}^2 r = \text{cosec}^2 r}$$

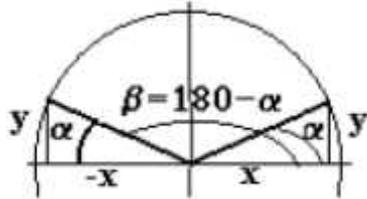
Relaciones entre Cuadrantes

Ángulos suplementarios:

$$\text{sen}(180^\circ - r) = \text{sen} r$$

$$\text{cos}(180^\circ - r) = -\text{cos} r$$

$$\text{tg}(180^\circ - r) = -\text{tg} r$$

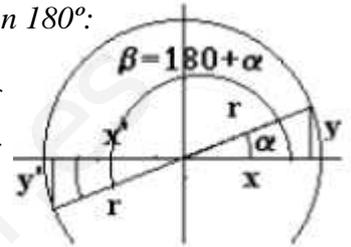


Ángulos que difieren en 180°:

$$\text{sen}(180^\circ + r) = -\text{sen} r$$

$$\text{cos}(180^\circ + r) = -\text{cos} r$$

$$\text{tg}(180^\circ + r) = \text{tg} r$$

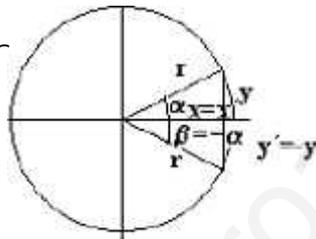


Ángulos opuestos:

$$\text{sen}(360^\circ - r) = \text{sen}(-r) = -\text{sen} r$$

$$\text{cos}(360^\circ - r) = \text{cos}(-r) = \text{cos} r$$

$$\text{tg}(360^\circ - r) = \text{tg}(-r) = -\text{tg} r$$

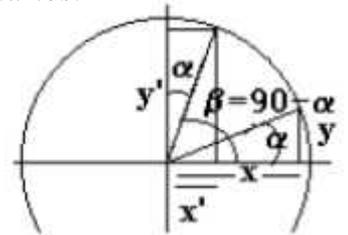


Ángulos complementarios:

$$\text{sen}(90^\circ - r) = \text{cos} r$$

$$\text{cos}(90^\circ - r) = \text{sen} r$$

$$\text{tg}(90^\circ - r) = \text{cotg} r$$



Suma y Diferencia de Ángulos

$$\boxed{\text{sen}(r \pm s) = \text{sen} r \cdot \text{cos} s \pm \text{cos} r \cdot \text{sen} s}$$

$$\boxed{\text{cos}(r \pm s) = \text{cos} r \cdot \text{cos} s \mp \text{sen} r \cdot \text{sen} s}$$

$$\boxed{\text{tg}(r \pm s) = \frac{\text{tg} r \pm \text{tg} s}{1 \mp \text{tg} r \cdot \text{tg} s}}$$

Ángulo Doble

$$\boxed{\text{sen}(2r) = 2 \text{sen} r \cdot \text{cos} r}$$

$$\boxed{\text{cos}(2r) = \text{cos}^2 r - \text{sen}^2 r}$$

$$\boxed{\text{tg}(2r) = \frac{2 \text{tg} r}{1 - \text{tg}^2 r}}$$

Ángulo Mitad

$$\boxed{\text{sen}\left(\frac{r}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1 - \text{cos} r}{2}}}$$

$$\boxed{\text{cos}\left(\frac{r}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1 + \text{cos} r}{2}}}$$

$$\boxed{\text{tg}\left(\frac{r}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1 - \text{cos} r}{1 + \text{cos} r}}}$$

Teorema Pitágoras

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2}$$

Teorema del Seno

$$\boxed{\frac{a}{\text{sen} \hat{A}} = \frac{b}{\text{sen} \hat{B}} = \frac{c}{\text{sen} \hat{C}}}$$

Teorema del Coseno

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}}$$