

## INSTRUCCIONES GENERALES Y VALORACIÓN

**Instrucciones:** El examen presenta dos opciones A y B; el alumno deberá elegir una y sólo una de ellas, y resolver los cuatro ejercicios de que consta. No se permite el uso de calculadoras con capacidad de representación gráfica.

**Puntuación:** La puntuación máxima de cada ejercicio se indica en el encabezamiento del mismo.

**Tiempo:** 90 minutos.

### OPCIÓN A

**Ejercicio 1. Calificación máxima: 2 puntos**

Calcular los siguientes límites (donde  $\ln$  significa Logaritmo Neperiano).

a) (1 punto)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos(3x))}{\ln(\cos(2x))}$

b) (1 punto)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4+x} - \sqrt{4-x}}{4x}$

**Ejercicio 2. Calificación máxima: 2 puntos**

Dada la función:

$$f(x) = \frac{x^5 - x^8}{1 - x^6}$$

- a) (1 punto) Encontrar los puntos de discontinuidad de  $f$ . Determinar razonadamente si alguna de las discontinuidades es evitable.
- b) (1 puntos) Estudiar si  $f$  tiene alguna asíntota vertical.

**Ejercicio 3. Calificación máxima: 3 puntos**

Se considera el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} (m+2)x + (m-1)y - z = 3 \\ mx - y + z = 2 \\ x + my - z = 1 \end{cases}$$

Se pide:

- a) (1 puntos) Resolverlo para  $m = 1$ .
- b) (2 puntos) Discutirlo para los distintos valores de  $m$ .

**Ejercicio 4. Calificación máxima: 3 puntos**

Dadas las rectas en el espacio:

$$r \equiv \frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z}{1} \quad s \equiv \frac{x+1}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-1}{2}$$

- a) (1,5 puntos) Hallar la distancia entre las dos rectas.
- b) (1,5 puntos) Determinar las ecuaciones de la perpendicular común a  $r$  y  $s$ .

## OPCIÓN B

### Ejercicio 1. Calificación máxima: 2 puntos

Comprobar, aplicando las propiedades de los determinantes, la identidad:

$$\begin{vmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ 2a & a+b & 2b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (a-b)^3$$

### Ejercicio 2. Calificación máxima: 2 puntos

Encontrar un número real  $\lambda \neq 0$ , y todas las matrices  $B$  de dimensión  $2 \times 2$  (distintas a la matriz nula), tales que

$$B \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = B \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 9 & 3 \end{pmatrix}$$

### Ejercicio 3. Calificación máxima: 3 puntos

a) (1 punto) Dibujar la gráfica de la función  $g(x) = e^x - x$ .

b) (1 punto) Calcular el dominio de definición de  $f(x) = \frac{1}{e^x - x}$  y su comportamiento cuando  $x \rightarrow \infty$  y  $x \rightarrow -\infty$ .

c) (1 punto) Determinar (si existen) los máximos y mínimos absolutos de  $f(x)$  en su dominio de definición.

### Ejercicio 4. Calificación máxima: 3 puntos

Dado el plano

$$p: x + 3y - z = 1$$

y la recta

$$r \equiv \frac{x+2}{6} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{1}$$

se pide:

a) (1,5 puntos) Hallar la ecuación general del plano  $p'$  que contiene a  $r$  y es perpendicular a  $p$ .

b) (1,5 puntos) Escribir las ecuaciones paramétricas de la recta intersección de los planos  $p, p'$ .

## Soluciones de la Opción A

### Ejercicio 1.

En los dos casos utilizamos L'Hôpital

$$\begin{aligned} \text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos(3x))}{\ln(\cos(2x))} &= \left[ \frac{0}{0} \right] = (\text{L'Hôpital}) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{-3\text{sen}3x}{\cos 3x}}{\frac{-2\text{sen}2x}{\cos 2x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \tan 3x}{2 \tan 2x} = \left[ \frac{0}{0} \right] = \\ &= (\text{L'Hôpital}) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{9(1 + \tan^2 3x)}{4(1 + \tan^2 2x)} = \frac{9}{4} \end{aligned}$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4+x} - \sqrt{4-x}}{4x} \left[ \frac{0}{0} \right] = (\text{L'Hôpital}) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2\sqrt{4+x}} + \frac{1}{2\sqrt{4-x}}}{4} = \frac{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}}{4} = \frac{1}{8}$$

NOTA: Este segundo límite puede resolverse también multiplicando y dividiendo por la expresión conjugada del numerador.

### Ejercicio 2.

a) La función es discontinua cuando  $1 - x^6 = 0 \Rightarrow x = -1$  o  $x = 1$ .

La discontinuidad puede evitarse si existe límite.

En  $x = -1$  la discontinuidad no puede evitarse pues la función no tiene límite en ese punto:

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^5 - x^8}{1 - x^6} = \left[ \frac{-2}{0} \right] = \infty$$

En  $x = 1$ , como

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^5 - x^8}{1 - x^6} = \left[ \frac{0}{0} \right] \stackrel{(L'H)}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{5x^4 - 8x^7}{-6x^5} = \frac{5-8}{-6} = \frac{1}{2}$$

la discontinuidad puede evitarse, definiendo  $f(1) = \frac{1}{2}$

b) La recta  $x = -1$  es asíntota vertical de la función pues  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^5 - x^8}{1 - x^6} = \infty$ . Además, puede observarse que si  $x \rightarrow -1^{-1}$ ,  $f(x) \rightarrow +\infty$ ; y si  $x \rightarrow -1^{+1}$ ,  $f(x) \rightarrow -\infty$ .

### Ejercicio 3.

a) Si  $m = 1$  el sistema queda:

$$\begin{cases} 3x & -z = 3 \\ x - y + z = 2 \\ x + y - z = 1 \end{cases} \rightarrow (\text{por Gauss}) \rightarrow \begin{matrix} E2 + E1 \\ E3 - E1 \end{matrix} \begin{cases} 3x & -z = 3 \\ 4x - y = 5 \\ -2x + y = -2 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} 3x - z = 3 \\ 4x - y = 5 \\ 2x = 3 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{3}{2}, y = 1, z = \frac{3}{2}$$

b) Calculamos los rangos de las matrices de coeficientes y ampliada.

$$|A| = \begin{vmatrix} m+2 & m-1 & -1 \\ m & -1 & 1 \\ 1 & m & -1 \end{vmatrix} = -m(m+1) \Rightarrow r(A) = 3 \text{ si } m \neq 0, -1; r(A) = 2 \text{ si } m = 0 \text{ o } -1.$$

- Para  $m = 0$ , la matriz ampliada es  $M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ , cuyo rango es 3, pues

$$\begin{vmatrix} -1 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

- Para  $m = -1$ , la matriz ampliada es  $M = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 3 \\ -1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ , que también tiene rango 3,

$$\text{pues } \begin{vmatrix} -2 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

En consecuencia:
 

- Si  $m \neq 0, -1$  el sistema es compatible determinado.
- Si  $m = 0$  o  $m = -1$ , el sistema es incompatible.

#### Ejercicio 4.

a) La distancia entre ellas es:  $d(r, s) = \frac{\left| \left[ \vec{v}_r, \vec{v}_s, \vec{PQ} \right] \right|}{|\vec{v}_r \times \vec{v}_s|}$ , siendo  $\vec{v}_r$  y  $\vec{v}_s$  los vectores de dirección respectivos, y  $\vec{PQ}$  un vector que va de  $r$  a  $s$ :  $P \in r$  y  $Q \in s$ .

En este caso:  $\vec{v}_r = (3, -2, 1)$ ;  $\vec{v}_s = (2, -1, 2)$ ; y  $\vec{PQ} = (-1, -2, 1) - (2, 1, 0) = (-3, -3, 1)$ .

$$\text{Con esto: } \left[ \vec{v}_r, \vec{v}_s, \vec{PQ} \right] = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -3 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 22;$$

$$\vec{v}_r \times \vec{v}_s = \begin{vmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 \\ 3 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = (-3, -4, 1) \Rightarrow |\vec{v}_r \times \vec{v}_s| = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2 + 1^2} = \sqrt{26}$$

$$\text{Luego: } d(r, s) = \frac{22}{\sqrt{26}}$$

b) Puntos genéricos de r y s son, respectivamente,

$$R = (2 + 3t, 1 - 2t, t), \quad S = (1 + 2p, -2 - p, 1 + 2p)$$

De donde  $\mathbf{RS} = (-3 + 2p - 3t, -6 - p + 2t, 1 + 2p - t)$ . Este vector debe ser perpendicular a los de dirección de r y s,  $\vec{v}_r = (3, -2, 1)$  y  $\vec{v}_s = (2, -1, 2)$ ;

Multiplicando escalarmente:  $\mathbf{RS} \cdot \vec{v}_r = 0$  y  $\mathbf{RS} \cdot \vec{v}_s = 0$ , se tiene:

$$\left. \begin{array}{l} -2 + 10p - 14t = 0 \\ -1 + 9p - 10t = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow t = \frac{-4}{13} \text{ y } p = \frac{-3}{13}$$

Con esto:

$$R = \left( \frac{14}{13}, \frac{21}{13}, \frac{-4}{13} \right), \quad S = \left( \frac{-19}{13}, \frac{-23}{13}, \frac{7}{13} \right) \text{ y } \mathbf{RS} = \left( \frac{-33}{13}, \frac{-44}{13}, \frac{11}{13} \right) \equiv (3, 4, -1)$$

$$\text{La recta perpendicular común es: } \begin{cases} x = 14/13 + 3I \\ y = 21/13 + 4I \\ z = -4/13 - I \end{cases}$$