

INSTRUCCIONES GENERALES Y VALORACIÓN

El examen presenta dos opciones, A y B.

Se deberá elegir **UNA Y SÓLO UNA** de ellas y resolver los cuatro ejercicios de que consta.

No se permite el uso de calculadoras con capacidad de representación gráfica.

PUNTUACIÓN: La calificación máxima de cada ejercicio se indica en el encabezamiento del mismo.

Tiempo: 90 minutos

OPCIÓN A

1. (2 puntos). Estudiar el rango de la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} m & m-1 & m(m-1) \\ m & 1 & m \\ m & 1 & m-1 \end{pmatrix}$$

según los valores del parámetro  $m$ .

2. (2 puntos). Sean las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 8 & -9 \\ 6 & -7 \end{pmatrix}$$

Hallar una matriz  $X$  tal que  $XAX^{-1} = B$ .

3. (3 puntos). Dados el punto  $A(1, -2, -3)$ , la recta  $r: \begin{cases} x + y + 1 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

y el plano  $\pi: x - 2y - 3z + 1 = 0$ , se pide:

a) (1,5 puntos). Ecuación del plano que pasa por A, es paralelo a  $r$  y perpendicular a  $\pi$ .

b) (1,5 puntos). Ecuación de la recta que pasa por A, corta a  $r$  y es paralela a  $\pi$ .

4. (3 puntos). Se considera la función  $f(x) = x^2 + m$ , donde  $m > 0$  es una constante.

a) (1,5 puntos). Para cada valor de  $m$  hallar el valor  $a > 0$  tal que la recta tangente a la gráfica de  $f$  en el punto  $(a, f(a))$  pase por el origen de coordenadas.

b) (1,5 puntos). Hallar el valor de  $m$  para que la recta  $y = x$  sea tangente a la gráfica de  $f(x)$ .

OPCIÓN B

1. (2 puntos). Dada la función  $f(x) = \frac{x^2 - 12}{x^2 + 4}$  calcular el área de la región acotada encerrada por su gráfica y el eje OX.

2. (2 puntos). Dibujar la gráfica de la función

$$f(x) = \frac{|x|}{2-x}$$

indicando su dominio, intervalos de crecimiento y decrecimiento y asíntotas.

3. (3 puntos). Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

se pide:

a) (1,5 puntos). Encontrar las condiciones que deben cumplir  $a$ ,  $b$ ,  $c$  para que se verifique  $AB=BA$ .

b) (1,5 puntos). Para  $a=b=c=1$ , calcular  $B^{10}$ .

4. (3 puntos). Sean los puntos  $A(\lambda, 2, \lambda)$ ,  $B(2, -\lambda, 0)$ ,  $C(\lambda, 0, \lambda+2)$ .

a) (1 punto). ¿Existe algún valor de  $\lambda$  para el que los puntos  $A$ ,  $B$  y  $C$  están alineados?

b) (1 punto). Comprobar que si  $A$ ,  $B$ ,  $C$  no están alineados el triángulo que forman es isósceles.

c) (1 punto). Calcular la ecuación del plano que contiene al triángulo  $ABC$  para el valor  $\lambda = 0$  y hallar la distancia de este plano al origen de coordenadas.

## MATEMÁTICAS II

### CRITERIOS ESPECÍFICOS DE CORRECCIÓN

#### OPCIÓN A

1. Planteamiento: 1 punto.  
Discusión de los rangos: 1 punto.
2. Planteamiento: 1 punto.  
Cálculo efectivo de la matriz  $X$ : 1 punto.
3. Apartado a): 1,5 puntos.  
Apartado b): 1,5 puntos.
4. Apartado a): 1,5 puntos.  
Apartado b): 1,5 puntos.

#### OPCIÓN B

1. Planteamiento y cálculo de los límites de integración: 1 punto.  
Cálculo del área: 1 punto.
2. Estudio de la función: 1,5 puntos.  
Dibujo de la gráfica: 0,5 puntos.
3. Apartado a): Planteamiento, 0,5 puntos. Resolución, 1 punto.  
Apartado b): 1,5 puntos.
4. Apartado a): 1 punto.  
Apartado b): 1 punto.  
Apartado c): 1 punto.

MATEMÁTICAS II  
SOLUCIONES

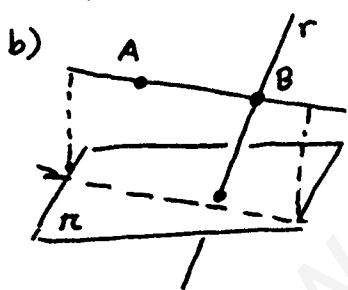
OPCIÓN A

1.  $\det(A) = \begin{vmatrix} m & m-1 & m(m-1) \\ m & 1 & m \\ m & 1 & m-1 \end{vmatrix} = m(m-2)$  
 $m \notin \{0, 2\} \Rightarrow \text{rg}(A) = 3$   
 $m = 0 \Rightarrow \text{rg}(A) = 2$   
 $m = 2 \Rightarrow \text{rg}(A) = 2$

2.  $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}; XA = BX \rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -9 \\ 6 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$   
 $\begin{pmatrix} 2a & -b \\ 2c & -d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8a-9c & 8b-9d \\ 6a-7c & 6b-7d \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2a = 3c \\ b = d \end{cases} \left\{ \text{por ejemplo} \right. \begin{cases} a=3 & c=2 \\ b=1 & d=1 \end{cases}$   
 $X = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$  (hay infinitas soluciones)

3.  $A(1, -2, -3)$   $r \begin{cases} x+y+1=0 \\ z=0 \end{cases} \rightarrow \vec{U}_r = (1, -1, 0)$   
 $\pi: x-2y-3z+1=0 \rightarrow \vec{n}_\pi = (1, -2, -3)$

a)  $\begin{vmatrix} x-1 & y+2 & z+3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & -3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \boxed{3x+3y-z=0}$



Plano por A, paralelo a  $\pi$ :  $(x-1) - 2(y+2) - 3(z+3) = 0$   
 $x - 2y + 3z - 14 = 0$

Punto B:  $r \begin{cases} y = -x-1 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+2(x+1)-14=0 \\ x=4 \\ y=-5 \\ z=0 \end{cases}$

B(4, -5, 0)  
 Recta AB:  $\vec{AB} = (3, -3, 3) = 3 \cdot (1, -1, 1)$

$\boxed{\frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z+3}{1}}$

4. a)  $f(x) = x^2 + m$   $f(a) = a^2 + m$  Recta tangente:  $y - a^2 - m = 2a(x - a)$   
 $f'(x) = 2x$   $f'(a) = 2a$   $x = y = 0 \Rightarrow a^2 = m \Rightarrow \boxed{a = \pm \sqrt{m}}$

b)  $2a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{m = a^2 = \frac{1}{4}}$

OPCIÓN B

$$1. \frac{x^2 - 12}{x^2 + 4} = 0 \Rightarrow x = \pm 2\sqrt{3}; \quad A = \left| \int_{-2\sqrt{3}}^{2\sqrt{3}} \frac{x^2 - 12}{x^2 + 4} dx \right| = \left| \int_{-2\sqrt{3}}^{2\sqrt{3}} \left( 1 - \frac{16}{x^2 + 4} \right) dx \right| =$$

$$= \left| x - 8 \operatorname{arctg} \frac{x}{2} \right|_{-2\sqrt{3}}^{2\sqrt{3}} = \boxed{\left( \frac{16\pi}{3} - 4\sqrt{3} \right) u^2}$$

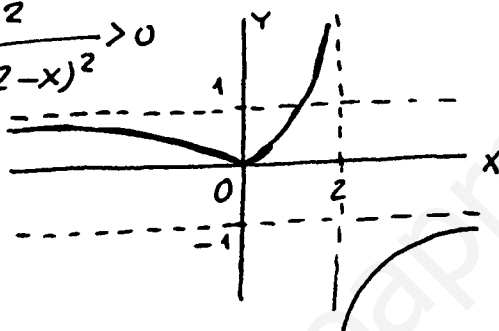
$$2. f(x) = \begin{cases} \frac{-x}{2-x} & \text{si } x < 0 \\ \frac{x}{2-x} & \text{si } x \geq 0, x \neq 2 \end{cases}$$

asintotas } vertical:  $x=2$   
 horizontales:  $\begin{cases} -\infty; y=1 \\ +\infty; y=-1 \end{cases}$

$$x < 0 \quad f'(x) = \frac{-2}{(2-x)^2} < 0$$

decreciente:  $(-\infty, 0)$   
 creciente:  $(0, 2)$  y en  $(2, +\infty)$

$$x > 0 \quad \left. \begin{matrix} \\ x \neq 2 \end{matrix} \right\} f'(x) = \frac{2}{(2-x)^2} > 0$$



$$3. a) B = A^{-1} \cdot B \cdot A \Rightarrow \boxed{a=b=c} \Rightarrow B = \begin{pmatrix} a & a & 0 \\ a & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$b) B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{B^{10} = \begin{pmatrix} 2^9 & 2^9 & 0 \\ 2^9 & 2^9 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

$$4. A(\lambda, 2, \lambda), B(2, -\lambda, 0), C(\lambda, 0, \lambda+2) \rightarrow \vec{AB} = (2-\lambda, -\lambda-2, -\lambda), \vec{AC} = (0, -2, 2)$$

$$\vec{BC} = (\lambda-2, \lambda, \lambda+2)$$

$$a) \vec{AB} = k \cdot \vec{AC} \Rightarrow 2-\lambda = 0 \Rightarrow \boxed{\lambda=2}; \quad \frac{-\lambda-2}{-2} = \frac{2}{-2}; \quad \frac{-\lambda}{2} = -1$$

$\exists \lambda \in \mathbb{R}$  para el cual A, B, C estén alineados.

$$b) d(A, B) = +\sqrt{3\lambda^2 + 8} = d(B, C)$$

los lados AB y BC son iguales

$$c) \lambda=0$$

Plano ABC:  $\begin{vmatrix} x & y-2 & z \\ 2 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0$

$$\pi: x + y + z - 2 = 0$$

$$d(0, \pi) = \frac{|-2|}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} u$$