INSTRUCCIONES GENERALES Y VALORACIÓN

Instrucciones: El examen presenta dos opciones A y B; el alumno deberá elegir una de ellas y contestar razonadamente a los cuatro ejercicios de que consta dicha opción. Para la realización de esta prueba puede utilizarse calculadora científica, siempre que no disponga de capacidad de representación gráfica o de cálculo simbólico.

Tiempo: Una hora y treinta minutos.

Calificación: La puntuación máxima de cada ejercicio se indica en el encabezamiento del mismo.

OPCIÓN A

Ejercicio 1. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Se considera el sistema lineal de ecuaciones, dependiente del parámetro real *a* :

$$\begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ 3x + 2y - 2z = 3 \\ 2x + 2y + az = 8 \end{cases}$$

(a) Discutir el sistema para los distintos valores de *a*.

(b) Resolver el sistema para *a* = 4.

Ejercicio 2. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Dada la función real de variable real definida por $f(x) = \dfrac{(x-3)^2}{x+3}$

(a) Determinar las asíntotas de la función.

(b) Calcular sus máximos y mínimos y determinar sus intervalos de crecimiento.

Ejercicio 3. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Según cierto estudio, el 40% de los hogares europeos tiene contratado el acceso a internet, el 33% tiene contratada la televisión por cable, y el 20% disponen de ambos servicios. Se selecciona un hogar europeo al azar.

(a) ¿Cuál es la probabilidad de que sólo tenga contratada la televisión por cable?

(b) ¿Cuál es la probabilidad de que no tenga contratado ninguno de los dos servicios?

Ejercicio 4. (Puntuación máxima: 2 puntos)

La edad a la que contraen matrimonio los hombres de la Isla Barataria es una variable aleatoria que se puede aproximar por una distribución normal de media 35 años y desviación típica de 5 años. Se elige aleatoriamente una muestra de 100 hombres de dicha isla. Sea $\overline{X}$ ***X*** **la media muestral de la edad de casamiento.**

(a) ¿Cuáles son la media y la varianza de $\overline{X}$ **?**

(b) ¿Cuál es la probabilidad de que la edad media de casamiento de la muestra esté comprendida entre 36 y 37 años?

OPCIÓN B

Ejercicio 1. (Puntuación máxima: 3 puntos)
Una empresa de instalaciones dispone de 195 kg de cobre, 20 kg de titanio y 14 kg de aluminio. Para fabricar 100 metros de cable de tipo A se necesitan 10 kg de cobre, 2 de titanio y 1 de aluminio, mientras que para fabricar l00 metros de cable de tipo B se necesitan 15 kg de cobre, 1 de titanio y 1 de aluminio. El beneficio que se obtiene por 100 metros de cable de tipo A es de 1500 euros, y por 100 metros de cable de tipo B, 1000 euros.
Calcular los metros de cable de cada tipo que hay que fabricar para maximizar el beneficio de la empresa.
Obtener dicho beneficio máximo.

Ejercicio 2. (Puntuación máxima: 3 puntos)
Representar gráficamente la región acotada limitada por las gráficas de las funciones

$$f(x)=\frac{5}{4}x^2 \quad , \quad g(x)=\frac{1}{2}(5x+20) \quad , \quad h(x)=\frac{1}{2}(-5x+20)$$

y obtener su área.

Ejercicio 3. (Puntuación máxima: 2 puntos)
Los pianistas de Isla Sordina se forman en tres conservatorios, Cl, C2 y C3, que forman al 40%, 35% Y 25% de los pianistas, respectivamente. Los porcentajes de pianistas virtuosos que producen estos conservatorios son del 5%, 3% Y 4%, respectivamente. Se selecciona un pianista al azar.
(a) Calcular la probabilidad de que sea virtuoso.
(b) El pianista resulta ser virtuoso. Calcular la probabilidad de que se haya formado en el primer conservatorio (CI).

Ejercicio 4. (Puntuación máxima: 2 puntos)
La duración de las rosas conservadas en agua en un jarrón es una variable aleatoria que se puede aproximar por una distribución normal con una desviación típica de 10 horas. Se toma una muestra aleatoria simple de 10 rosas y se obtienen las siguientes duraciones (en horas):

57, 49, 70, 40, 45, 44, 49, 32, 55, 45

Hallar un intervalo de confianza al 95% para la duración media de las rosas.

SOLUCIONES DE LA OPCIÓN A

Ejercicio 1.

a) La matriz de coeficientes del sistema viene dada por: $A=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & -2 & 3 \\ 2 & 2 & a & 8 \end{array}\right)$. Utilizaremos el método de Gauss para convertirla en una matriz triangular.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -2 & 3 \\ 2 & 2 & a & 8 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & -5 & 3 \\ 0 & 6 & -2+a & 8 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & -14-8a & -46 \end{array}\right)$$

Por tanto, Si $-14-8a=0 \rightarrow a=-\frac{7}{4} \Rightarrow$ sistema incompatible

Si $a \neq -\frac{7}{4} \Rightarrow$ sistema compatible determinado

b) Para resolverlo en el caso a = 4, sustituimos en la matriz triangular y obtenemos

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 8 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & -46 & -46 \end{array}\right) \Rightarrow z=1 \quad , \quad y=1 \quad , \quad x=1 .$$

Ejercicio 2.

a) Calculemos sus asíntotas:

VERTICALES: En x = - 3 hay una asíntota vertical ya que la función no está definida en ese punto y :

$lím_{x\to -3^+} f(x) = +\infty \quad y \quad lím_{x\to -3^-} f(x) = -\infty$

HORIZONTALES: $lím_{x\to -\infty} f(x) = -\infty \quad y \quad lím_{x\to\infty} f(x) = \infty$. Por tanto no hay asíntotas horizontales.

OBLÍCUAS: Dividimos los polinomios $f(x) = (x-9) + \frac{36}{x+3}$. Por tanto, y = x – 9 es la asíntota oblicua.

Otra manera sería:

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{(x-3)^2}{x+3}}{x} = 1 \quad y \quad n = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{(x-3)^2}{x+3} - x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-6x+9-x^2-3x}{x+3} = -9$$

Y por tanto la asíntota oblicua será y = x - 9

b) $f(x) = \frac{(x-3)^2}{x+3} \Rightarrow f'(x) = \frac{(x-3)(x+9)}{(x+3)^2} \Rightarrow f''(x) = \frac{72}{(x+3)^3}$

Calculamos los puntos críticos de la función $f'(x) = \frac{(x-3)(x+9)}{(x+3)^2} = 0 \Rightarrow x=3 \quad , \quad x=-9$.

Estudiamos el crecimiento de la función con el signo de la derivada:

$$\begin{cases} si \quad x \in (-\infty,-9) \cup (3,\infty) \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow f \quad creciente \\ si \quad x \in (-9,3) - \{-3\} \Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow f \quad decreciente \end{cases}$$

Máximos y mínimos: $\begin{cases} f''(3) = \frac{1}{3} > 0 \Rightarrow (3,0) Mínimo \\ f''(-9) = -\frac{1}{3} < 0 \Rightarrow (-9,-24) Máximo \end{cases}$

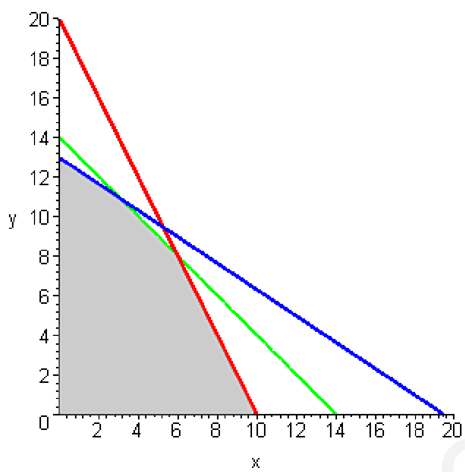
SOLUCIONES DE LA OPCIÓN B

Ejercicio 1.

Sean x e y los metros de cable de tipo A y B respectivamente expresados en cientos de metros.
El problema a resolver es:

$$\begin{cases} Max \quad f(x,y) = 1500x + 1000y \\ 10x + 15y \leq 195 \\ 2x + y \leq 20 \\ x + y \leq 14 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Con región factible



Los vértices son: (0,0) con f(0,0)=0
(10,0) con f(10,0)=15000
(0,13) con f(0,13)=13000
(3,11) con f(3,11)=15500
(6,8) con f(6,8)=17000

Por tanto, la función tiene su máximo en (6,8).

Es decir, se obtendrá beneficio máximo con 600 metros de cable tipo A y 800 metros de cable tipo B.

Ejercicio 4.

Sea X la variable aleatoria que mide la duración de las rosas conservadas en un jarrón, donde X~N($\bar{x}$,10).

Sabemos que el intervalo de confianza, viene dado por $IC = (\bar{x} - Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}})$, siendo σ la desviación típica poblacional, n el tamaño muestral y $Z_{\alpha/2}$ el valor correspondiente en la tabla normal para una confianza 1 – α.

En nuestro caso, para una confianza del 95%, α = 0,05, $Z_{\alpha/2}$ = 1,96, σ = 10 , $\bar{x} = 48{,}6$ (obtenido como la media aritmética de los valores del enunciado) y $n = 100$ tenemos el $IC = (48{,}6 - 1{,}96\frac{10}{\sqrt{10}}; 48{,}6 + 1{,}96\frac{10}{\sqrt{10}})$ = (42,4 ; 54,8).