

Junio de 2007

Soluciones de la Opción A

1.A.-Estudia el rango de la matriz: $A = \begin{pmatrix} m & m-1 & m(m-1) \\ m & 1 & m \\ m & 1 & m-1 \end{pmatrix}$

$$|A| = \begin{vmatrix} m & m-1 & m(m-1) \\ m & 1 & m \\ m & 1 & m-1 \end{vmatrix} = m \begin{vmatrix} 1 & m-1 & m(m-1) \\ 1 & 1 & m \\ 1 & 1 & m-1 \end{vmatrix} \Rightarrow$$

$$|A| = m[(m-1) + m(m-1) + m(m-1) - m(m-1) - m - (m-1)^2] = m[(m-1) + m(m-1) - m - (m-1)^2]$$

$$|A| = m(m-1 + m^2 - m - m - m^2 + 2m - 1) = m(m-2) \Rightarrow \text{Si } |A| = 0 \Rightarrow m(m-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m - 2 = 0 \Rightarrow m = 2 \end{cases}$$

$$\text{Si } \begin{cases} m \neq 0 \\ m \neq 2 \end{cases} \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow \text{rang}(A) = 3$$

$$\text{Si } m = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Rightarrow \text{rang}(A) = 2$$

$$\text{Si } m = 2 \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Rightarrow \text{rang}(A) = 2$$

2.A.-Sean las matrices: $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 8 & -9 \\ 6 & -7 \end{pmatrix}$

Hallar la matriz X tal que $XAX^{-1} = B$

$$XAX^{-1}X = BX \Rightarrow XAI = BX \xrightarrow{1 \text{ matriz identidad de orden } 2} XA = BX$$

$$\text{Siendo } X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -9 \\ 6 & -7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2a & -b \\ 2c & -d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8a-9c & 8b-9d \\ 6a-7c & 6b-7d \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2a = 8a - 9c \\ -b = 8b - 9d \\ 2c = 6a - 7c \\ -d = 6b - 7d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9c = 6a \\ -9b = -9d \\ 6b = 6d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{3}{2}c \\ b = d \end{cases} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} \frac{3}{2}\lambda & \mu \\ \lambda & \mu \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Comprobemos con } \begin{cases} \lambda = 2 \\ \mu = 1 \end{cases}$$

$$|X| = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \Rightarrow X^t = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{adj}(X^t) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow X^{-1} = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -9 \\ 6 & -7 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Comprobado}$$

3.A.-Dado el punto $A(1, -2, -3)$, la recta $r \equiv \begin{cases} x + y + 1 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$, el plano $\pi \equiv x - 2y - 3z + 1 = 0$,

se pide:

a) Ecuación del plano que pasa por A, es paralelo a r y perpendicular a p

b) Ecuación de la recta que pasa por A, corta a r y es paralela a p

a) Si es paralelo a r, el vector director de esta, está contenido en el plano, lo mismo que el del plano p que es perpendicular al pedido. Nos falta un tercer vector coplanario con ellos que es el formado por el punto genérico (x,y,z) y el punto A

$$r \equiv \begin{cases} x = -1 - \lambda \\ y = \lambda \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{v}_r = (-1, 1, 0) \\ \vec{v}_\pi = (1, -2, -3) \\ \vec{v}_{\text{genérico}} = (x, y, z) - (1, -2, -3) = (x-1, y+2, z+3) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y+2 & z+3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -3(x-1) + 2(z+3) - (z+3) - 3(y+2) = 0 \Rightarrow -3x + z - 3y = 0 \Rightarrow$$

$$\pi \equiv 3x + 3y - z = 0$$

b)

$$s \equiv \begin{cases} x = 1 + a\mu \\ y = -2 + b\mu \\ z = -3 + \mu \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1 - \lambda = 1 + a\mu \\ \lambda = -2 + b\mu \\ 0 = -3 + \mu \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \vec{v}_s = (a, b, 1) \\ \vec{v}_\pi = (1, -2, -3) \end{cases} \Rightarrow \vec{v}_s \perp \vec{v}_\pi \Rightarrow \vec{v}_s \cdot \vec{v}_\pi = 0 \Rightarrow (a, b, 1) \cdot (1, -2, -3) = 0$$

$$\begin{cases} \lambda + a\mu = -2 \\ \lambda - b\mu = -2 \\ \mu = 3 \\ a - 2b - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda + 3a = -2 \\ \lambda - 3b = -2 \\ a - 2b = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = -2 - 3a \\ \lambda = -2 + 3b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2 - 3a = -2 + 3b \\ a - 2b = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + b = 0 \\ a - 2b = 3 \end{cases} \Rightarrow -3b = 3 \Rightarrow$$

$$b = -1 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow s \equiv \begin{cases} x = 1 + \mu \\ y = -2 - \mu \\ z = -3 + \mu \end{cases}$$

4.A.-Se considera la función $f(x) = x^2 + m$, donde $m > 0$ es una constante

a) Para cada valor de m hallar el valor de $a > 0$ tal que la recta tangente a la grafica de f en el punto $[a, f(a)]$ pase por el origen de coordenadas

b) Hallar el valor de m para que la recta $y = x$ sea tangente a la grafica de $f(x)$

a) La recta pedida es de la forma $y = f'(a) x$

$$f'(x) = 2x \Rightarrow \begin{cases} f(x) = a^2 + m \\ f'(a) = 2a \end{cases} \Rightarrow a^2 + m = 2a \cdot a \Rightarrow a^2 + m = 2a^2 \Rightarrow a^2 = m \Rightarrow a = \pm\sqrt{m} \Rightarrow$$

$$\text{Como } a > 0 \Rightarrow a = \sqrt{m}$$

b)

$$\begin{cases} f(x) = a^2 + m \\ f'(a) = 2a = 1 \end{cases} \Rightarrow a = \frac{1}{2} \Rightarrow f(a) = 1 \cdot a \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^2 + m = \frac{1}{2} \Rightarrow m = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

Soluciones de la Opción B

1.B.-Dada la función $f(x) = \frac{x^2 - 12}{x^2 + 4}$ calcular el área de la región acotada encerrada por su gráfica y el eje OX

Es una función simétrica respecto al eje OY ya que $f(-x) = \frac{(-x)^2 - 12}{(-x)^2 + 4} = \frac{x^2 - 12}{x^2 + 4} = f(x)$

por lo tanto es el doble de la integral definida entre el origen de coordenadas y uno de los puntos de corte que tenga con el eje OX (tomaremos el positivo)

$$\text{Cuando } y = f(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 12 = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{12} = \pm 2\sqrt{3} \Rightarrow$$

$$A = 2 \cdot \left| \int_0^{2\sqrt{3}} \frac{x^2 - 12}{x^2 + 4} dx \right| = 2 \cdot \left| \int_0^{2\sqrt{3}} \left(1 - \frac{16}{x^2 + 4} \right) dx \right| = \left| 2 \cdot \int_0^{2\sqrt{3}} dx - 2 \cdot \int_0^{2\sqrt{3}} \frac{16}{x^2 + 4} dx \right| = \left| 2 \cdot [x]_0^{2\sqrt{3}} - \frac{32}{4} \int_0^{2\sqrt{3}} \frac{1}{\frac{x^2}{4} + 1} dx \right|$$

$$\frac{x^2 - 12}{x^2 + 4} = \frac{-x^2 - 4}{x^2 + 4} + \frac{16}{x^2 + 4}$$

$$A = \left| 2 \cdot (2\sqrt{3} - 0) - 8 \int_0^{2\sqrt{3}} \frac{1}{\left(\frac{x}{2}\right)^2 + 1} dx \right| = \left| 4\sqrt{3} - 8 \int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{t^2 + 1} 2dt \right| = \left| 4\sqrt{3} - 16 \cdot [\text{arc tg } x]_0^{\sqrt{3}} \right|$$

$$\frac{x}{2} = t \Rightarrow \begin{cases} x = 2\sqrt{3} \Rightarrow t = \sqrt{3} \\ x = 0 \Rightarrow t = 0 \end{cases} \Rightarrow dx = 2 dt \quad A = 4\sqrt{3} - 16 \cdot (\text{arc tg } \sqrt{3} - \text{arc tg } 0)$$

$$A = \left| 4\sqrt{3} - 16 \cdot \text{arc tg } \sqrt{3} \right| = \left(16 \cdot \frac{\pi}{3} - 4\sqrt{3} \right) u^2$$

2.B.- Dibujar la gráfica de la función $f(x) = \frac{|x|}{2-x}$ indicando su dominio, intervalos de crecimiento y decrecimiento y asíntotas

$$2 - x = 0 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow D(f) = \forall x \in \mathbb{R} - \{2\}$$

$$x > 0 \Rightarrow f(x) = \begin{cases} -\frac{x}{2-x} & \text{si } x < 0 \\ \frac{x}{2-x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Asíntotas verticales

$$x = 2 \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x}{2-x} = \frac{2}{0^+} = \infty \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x}{2-x} = \frac{2}{0^-} = -\infty \end{cases}$$

Asíntotas horizontales

$$y = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{2-x} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x}{x}}{\frac{2}{x} - \frac{x}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{2}{x} - 1} = \frac{1}{0-1} = -1 \Rightarrow y = -1 \text{ cuando } x \rightarrow \infty$$

$$y = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\frac{x}{2-x} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\frac{(-x)}{2-(-x)} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{2+x} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{x}{x}}{\frac{2}{x} + \frac{x}{x}} = \frac{1}{0+1} = 1 \Rightarrow$$

$$y = 1 \text{ cuando } x \rightarrow -\infty$$

Asíntotas oblicuas ó inclinadas

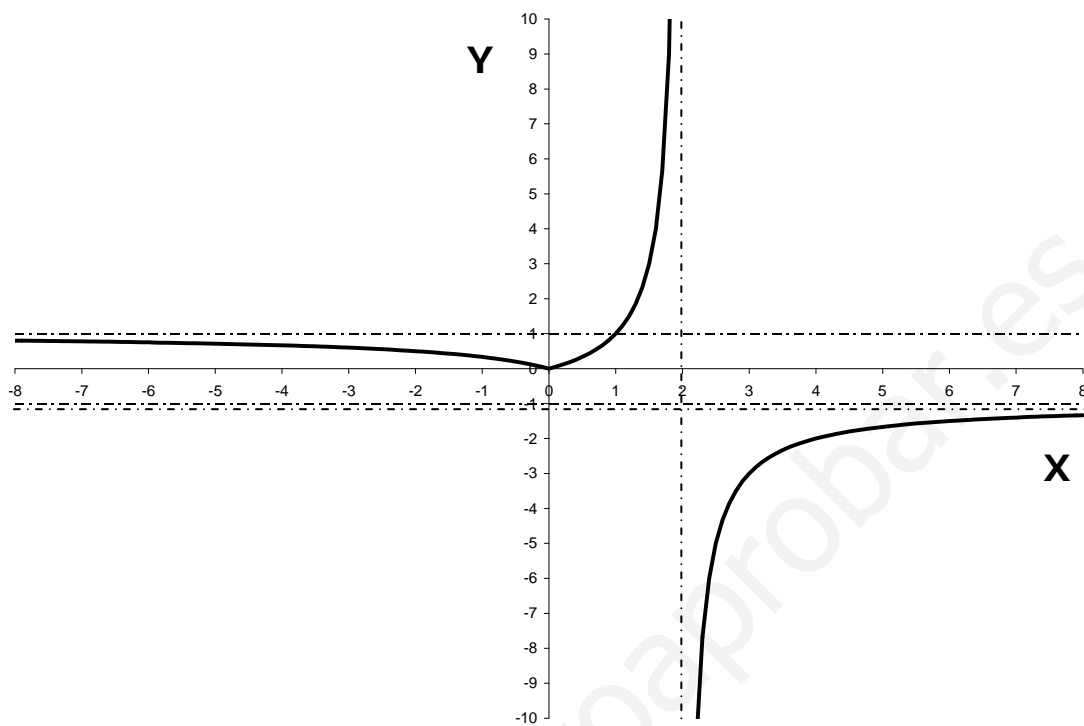
$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x}{2-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x(2-x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2-x} = \frac{1}{-\infty} = 0 \Rightarrow \exists \Rightarrow x \rightarrow \infty$$

$$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\frac{x}{2-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{x}{x(2-x)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\frac{1}{2-x} \right) = -\frac{1}{\infty} = 0 \Rightarrow \exists \Rightarrow x \rightarrow -\infty$$

$$f'(x) = \begin{cases} -\frac{(2-x)-x}{(2-x)^2} = -\frac{2}{(2-x)^2} & \text{si } x < 0 \\ \frac{(2-x)-x}{(2-x)^2} = \frac{2}{(2-x)^2} & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow \begin{cases} x < 0 \left\{ \begin{array}{l} -2 < 0 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} \\ (x-2)^2 > 0 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} \end{array} \right. \Rightarrow \text{Decreciente} \\ x > 0 \left\{ \begin{array}{l} 2 > 0 \Rightarrow \exists x \in \mathbb{R} \\ (x-2)^2 > 0 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} \end{array} \right. \Rightarrow \text{Creciente} \end{cases}$$

Continúa el problema 2.B.-

Gráfica de la función



3.B.- Dada las matrices $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, se pide:

a) Encontrar las condiciones que deben de cumplir a , b y c para que se verifique $AB = BA$

b) Para $a = b = c = 1$, calcular B^{10}

a)

$$\left\{ \begin{array}{l} AB = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5a+2c & 5b+2c & 0 \\ 2a+5c & 2b+5c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ BA = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5a+2b & 2a+5b & 0 \\ 5c+2c & 2c+5c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \right. \Rightarrow \begin{cases} 5a+2c = 5a+2b \\ 5b+2c = 2a+5b \\ 2a+5c = 7c \\ 2b+5c = 7c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2c = 2b \\ 2c = 2a \\ 2a = 2c \\ 2b = 2c \end{cases} \Rightarrow a = b = c$$

Tambien

$$AB = BA \Rightarrow A^{-1}AB = BA^{-1}A \Rightarrow B = B \Rightarrow a = b = c$$

b)

$$B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow B^3 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B^4 = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 8 & 0 \\ 8 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow B^5 = \begin{pmatrix} 8 & 8 & 0 \\ 8 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 16 & 0 \\ 16 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Progresión geométrica} \Rightarrow 1, 2, 4, 8, 16, \dots \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 1 \\ r = 2 \end{cases} \Rightarrow a_n = a_1 \cdot r^{n-1} \Rightarrow a_{10} = 1 \cdot 2^{10-1} = 2^9 = 512$$

$$B^5 = \begin{pmatrix} 512 & 512 & 0 \\ 512 & 512 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4.B.- Sean los puntos $A(\lambda, 2, \lambda)$; $B(2, -\lambda, 0)$ y $C(\lambda, 0, \lambda + 2)$.

a) ¿Existe un valor de λ para el que los puntos A, B y C están alineados?

b) Comprobar que si A, B y C no están alineados el triángulo que forman es isósceles

c) Calcular la ecuación del plano que contiene al triángulo ABC para el valor $\lambda = 0$ y hallar la distancia de este plano al origen de coordenadas

a) Si estuviesen alineados los vectores AB y AC serían proporcionales.

$$A(\lambda, 2, \lambda); B(2, -\lambda, 0) \text{ y } C(\lambda, 0, \lambda + 2) \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (2, -\lambda, 0) - (\lambda, 2, \lambda) = (2 - \lambda, -\lambda - 2, -\lambda) \\ \overrightarrow{AC} = (\lambda, 0, \lambda + 2) - (\lambda, 2, \lambda) = (0, -2, 2) \equiv (0, -1, 1) \end{array} \right. \Rightarrow$$

$$\text{Si } \overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{AC} \Rightarrow \frac{2 - \lambda}{0} = \frac{-\lambda - 2}{-1} = \frac{-\lambda}{1} \Rightarrow \begin{cases} -2 + \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 2 \\ -\lambda - 2 = \lambda \Rightarrow -2 = 2\lambda \Rightarrow \lambda = -1 \end{cases} \Rightarrow \text{Incompatible}$$

No estarán nunca alineados

b) Veamos si $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BC}|$ ya que \overrightarrow{AC} permanece invariable

$$\left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (2 - \lambda, -\lambda - 2, -\lambda) \\ \overrightarrow{AC} = (0, -2, 2) \Rightarrow |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \text{ u} \\ \overrightarrow{BC} = (\lambda, 0, \lambda + 2) - (2, -\lambda, 0) = (\lambda - 2, \lambda, \lambda + 2) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(2 - \lambda)^2 + (-2 - \lambda)^2 + (-\lambda)^2} = \sqrt{4 - 2\lambda + \lambda^2 + 4 + 2\lambda + \lambda^2 + \lambda^2} = \sqrt{3\lambda^2 + 8} \\ |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{(\lambda - 2)^2 + \lambda^2 + (\lambda + 2)^2} = \sqrt{\lambda^2 - 2\lambda + 4 + \lambda^2 + 4 + 2\lambda + \lambda^2} = \sqrt{3\lambda^2 + 8} \end{array} \right. \Rightarrow |\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BC}|$$

c)

$$\left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (2 - 0, -0 - 2, -0) = (2, -2, 0) \equiv (1, -1, 0) \\ \overrightarrow{AC} = (0, -1, 1) \\ \overrightarrow{AG} = (x, y, z) - (0, 2, 0) = (x, y - 2, z) \end{array} \right. \Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x & y - 2 & z \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$-x - z - (y - 2) = 0 \Rightarrow -x - y - z + 2 = 0 \Rightarrow \pi \equiv x + y + z - 2 = 0$$

$$d_{P,\pi} = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \Rightarrow d_{O,\pi} = \frac{|0 + 0 + 0 - 2|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{|-2|}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \text{ u}$$