OPCIÓN A

Ejercicio 1.- Calificación máxima: 3 puntos.

Dados el punto P(-1,0,2) y las rectas $r \equiv \begin{cases} x - z = 1, \\ y - z = -1, \end{cases}$ $s \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda, \\ y = \lambda, \\ z = 3, \end{cases}$ se pide:

a) (1 punto) Determinar la posición relativa de r y s.
b) (1 punto) Determinar la ecuación de la recta que pasa por P y corta a r y s.
c) (1 punto) Determinar la ecuación de la recta perpendicular común a r y s.

Solución

a) Analizaremos si las rectas tienen un punto común, si el sistema que resulta es compatible determinado son secantes, si es compatible indeterminado las rectas coinciden
Si el sistema es incompatible y hay igualdad o proporcionalidad entre los vectores directores las rectas son paralelas, de no serlo las rectas se cruzan en el espacio

$$\begin{cases} \begin{cases} x = 1 + z \\ y = -1 + z \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 1 + \mu \\ y = -1 + \mu \\ z = \mu \end{cases} \\ s \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = 3 \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 + \mu = 1 + \lambda \\ -1 + \mu = \lambda \\ \mu = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mu = 3 \\ 1 + \mu = 1 + \lambda \Rightarrow \mu = \lambda = 3 \end{cases} \Rightarrow -1 + 3 \neq 3 \Rightarrow$$

$$Sistema\ Incompatible \Rightarrow Las\ rectas\ no\ son\ coincidentes\ ni\ secantes\ (no\ se\ cortan)$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_r} = (1, 1, 1) \\ \overrightarrow{v_s} = (1, 1, 0) \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{1} = \frac{1}{1} \neq \frac{1}{0} \Rightarrow No\ son\ proporcionales \Rightarrow No\ son\ paralelas$$

Las rectas **r** y **s** se **cruzan en el espacio**

b) Es una recta **t** que se **apoya** en **r** y **s** y pasa por el punto **P**

$$\overrightarrow{v_t} = (1 + \mu - 1 - \lambda, -1 + \mu - \lambda, \mu - 3) = (\mu - \lambda, -1 + \mu - \lambda, \mu - 3)$$

$$Pasando\ por\ P \Rightarrow t \equiv \frac{1 + \lambda - (-1)}{\mu - \lambda} = \frac{\lambda - 0}{-1 + \mu - \lambda} = \frac{3 - 2}{\mu - 3} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{2 + \lambda}{\mu - \lambda} = \dfrac{1}{\mu - 3} \Rightarrow (\mu - 3) \cdot (2 + \lambda) = \mu - \lambda \\ \dfrac{\lambda}{-1 + \mu - \lambda} = \dfrac{1}{\mu - 3} \Rightarrow (\mu - 3) \cdot \lambda = -1 + \mu - \lambda \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2\mu - 6 + \lambda\mu - 3\lambda - \mu + \lambda = 0 \Rightarrow \mu - 2\lambda + \lambda u - 6 = 0 \\ \lambda\mu - 3\lambda + 1 - \mu + \lambda = 0 \Rightarrow -\mu - 2\lambda + \lambda u + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow 2\mu - 7 = 0 \Rightarrow 2\mu = 7 \Rightarrow \mu = \frac{7}{2} \Rightarrow$$

$$-4\lambda + 2\lambda\mu - 5 = 0 \Rightarrow \lambda(-4 + 2\mu) = 5 \Rightarrow \lambda = \frac{5}{-4 + 2\mu} = \frac{5}{-4 + 2 \cdot \frac{7}{2}} = \frac{5}{7 - 4} = \frac{5}{3}$$

$$\overrightarrow{v_t} = \left(\frac{7}{2} - \frac{5}{3}, -1 + \frac{7}{2} - \frac{5}{3}, \frac{7}{2} - 3\right) = \left(\frac{11}{6}, \frac{5}{6}, \frac{1}{2}\right) \equiv (11, 5, 3) \Rightarrow T\left(1 + \frac{5}{3}, \frac{5}{3}, 3\right) \Rightarrow t \equiv \begin{cases} x = \frac{8}{3} + 11\alpha \\ y = \frac{5}{3} + 5\alpha \\ z = 3 + 3\alpha \end{cases}$$

Continuación del Ejercicio 1 de la Opción A

c) Es una recta **u** que se **apoya** en **r** y **s** y es perpendicular a las dos, por ello su vector director y los de las dos rectas son perpendiculares y, por ello, sus productos escalares nulos.
La recta **u** buscada queda de finida por su vector y uno el punto **R** de corte de ella con la recta **r** (se podría haber tomado el de la recta s)

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_r} = (1,1,1) \\ \overrightarrow{v_s} = (1,1,0) \\ \overrightarrow{v_u} = \overrightarrow{v_t} = (\mu-\lambda\,,\,-1+\mu-\lambda\,,\,\mu-3) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{v_r} \perp \overrightarrow{v_u} \Rightarrow \overrightarrow{v_r}\cdot\overrightarrow{v_u} = 0 \Rightarrow (1,1,1)\cdot(\mu-\lambda\,,\,-1+\mu-\lambda\,,\,\mu-3) = 0 \\ \overrightarrow{v_s} \perp \overrightarrow{v_u} \Rightarrow \overrightarrow{v_s}\cdot\overrightarrow{v_u} = 0 \Rightarrow (1,1,0)\cdot(\mu-\lambda\,,\,-1+\mu-\lambda\,,\,\mu-3) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mu-\lambda-1+\mu-\lambda+\mu-3 = 0 \Rightarrow 3\mu-2\lambda-4 = 0 \Rightarrow \\ \mu-\lambda-1+\mu-\lambda = 0 \Rightarrow 2\mu-2\lambda-1 = 0 \Rightarrow \end{cases} \Rightarrow \mu-3=0 \Rightarrow \mu=3 \Rightarrow 2\cdot3-2\lambda-1=0 \Rightarrow 5-2\lambda=0$$

$$2\lambda = 5 \Rightarrow \lambda = \frac{5}{2}$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_t} = \left[3-\frac{5}{2}\,,\,-1+3-\frac{5}{2}\,,\,3-3\right] = \left(\frac{1}{2}\,,\,-\frac{1}{2}\,,\,0\right) \equiv (1\,,\,-1\,,\,0) \\ R\begin{cases} x = 1+3 \\ y = -1+3 \\ z = 3 \end{cases} \end{cases} \Rightarrow u \equiv \begin{cases} x = 4+\alpha \\ y = 2-\alpha \\ z = 3 \end{cases}$$

<u>Ejercicio</u> 2.- Calificación máxima: 3 puntos.

Dado el sistema de ecuaciones lineales: $\begin{cases} ax + 7y + 5z = 0, \\ x + y + z = 3, \\ y + z = -2, \end{cases}$ se pide:

a) (2 puntos) Discutirlo según los valores de a.
b) (0'5 puntos) Resolverlo en el caso a = 4.
c) (0'5 puntos) Resolverlo en el caso a = 2.

Solución

a)

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 7 & 5 \\ 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = a^2 + 5 - a - 7 = a^2 - a - 2 \Rightarrow Si\ |A| = 0 \Rightarrow a^2 - a - 2 = 0 \Rightarrow \Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 9 > 0$$

$$a = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 1} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1+3}{2} = 2 \\ a = \frac{1-3}{2} = -1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\forall a \in \Re - \{-1, 2\} \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow rang\ (A) = 3 = \textit{Número de incognitas} \Rightarrow \textit{Sistema Compatible Determinado}$$

$Si\ a = -1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 7 & 5 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 7 & 5 & 0 \\ 0 & 6 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 7 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & 4 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 7 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$rang\ (A) = 2 \neq rang\ (A/B) = 3 \Rightarrow \textit{Sistema Incompatible}$$

$Si\ a = 2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 7 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 7 & 5 & 0 \\ -2 & -4 & -2 & -6 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 7 & 5 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & -6 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 7 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 7 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$rang\ (A) = rang\ (A/B) = 2 < \textit{Número de incognitas} \Rightarrow \textit{Sistema Compatible Indeterminado}$$

b)

$Si\ a = 4 \Rightarrow \textit{Sistema Compatible Determinado}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 7 & 5 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 7 & 5 & 0 \\ -4 & -16 & -4 & -12 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 7 & 5 & 0 \\ 0 & -9 & 1 & -12 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 7 & 5 & 0 \\ 0 & -9 & 1 & -12 \\ 0 & 10 & 0 & 10 \end{array}\right) \Rightarrow 10y = 10 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow$$

$$-9 \cdot 1 + z = -12 \Rightarrow z = -3 \Rightarrow 4x + 7 \cdot 1 + 5 \cdot (-3) = 0 \Rightarrow 4x + 7 - 15 = 0 \Rightarrow 4x = 8 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow$$

$$Solución \Rightarrow (x, y, z) = (2, 1, -3)$$

c)

$Si\ a = 2 \Rightarrow \textit{Sistema Compatible Indeterminado}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 7 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow y + z = -2 \Rightarrow y = -2 - z \Rightarrow 2x + 7 \cdot (-2 - z) + 5z = 0 \Rightarrow 2x - 14 - 7z + 5z = 0 \Rightarrow$$

$$2x - 14 - 2z = 0 \Rightarrow 2x = 2z + 14 \Rightarrow x = 7 + z \Rightarrow Solución \Rightarrow (x, y, z) = (7 + \lambda, -2 - \lambda, \lambda)$$

Ejercicio 3.- Calificación máxima: 2 puntos.

Dada la función f(x) = $\frac{x^3}{(x-3)^2}$. Se pide:

a) (1 punto) Hallar las asíntotas de su gráfica.

b) (1 punto) Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f(x) en el punto de abscisa x = 2.

Solución

a)

$$x-3=0 \Rightarrow x=3 \Rightarrow f(3)=\frac{3^3}{(3-3)^2}=\frac{27}{0} \Rightarrow \textit{Sin solución} \Rightarrow \textit{Asíntota vertical en } x=3$$

Asíntotas horizontales

$$y=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{x^2-6x+9}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^3}{x^3}}{\frac{x^2}{x^3}-6\frac{x}{x^3}+\frac{9}{x^3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\frac{1}{x}-\frac{6}{x^2}+\frac{9}{x^3}}=\frac{1}{\frac{1}{\infty}-\frac{6}{\infty}+\frac{9}{\infty}}=\frac{1}{0-0+0}=\frac{1}{0}\Rightarrow$$

No existe asíntota horizontal cuando $x\to\infty$

$$y=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3}{x^2-6x+9}=\lim_{x\to\infty}\frac{(-x)^3}{(-x)^2-6\cdot(-x)+9}=\lim_{x\to\infty}\frac{-x^3}{x^2+6x+9}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{-\frac{x^3}{x^3}}{\frac{x^2}{x^3}+6\frac{x}{x^3}+\frac{9}{x^3}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-1}{\frac{1}{x}+\frac{6}{x^2}+\frac{9}{x^3}}=\frac{-1}{\frac{1}{\infty}+\frac{6}{\infty}+\frac{9}{\infty}}=\frac{-1}{0+0+0}=\frac{1}{0}\Rightarrow \textit{Sin solución}$$

No existe asíntota horizontal cuando $x\to-\infty$

Asíntotas oblicuas

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^3}{x^2-6x+9}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{x^3-6x^2+9x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2-6x+9}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}-6\frac{x}{x^2}+\frac{9}{x^2}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1-\frac{6}{x}+\frac{9}{x^2}}=\frac{1}{1-\frac{6}{\infty}+\frac{9}{\infty}}=\frac{1}{1-0+0}=1$$

Continuación del Ejercicio 3 de la Opción A

a)Continuación

Asíntotas oblicuas

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^3}{x^2-6x+9}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{x^3-6x^2+9x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2-6x+9}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}-6\frac{x}{x^2}+\frac{9}{x^2}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1-\frac{6}{x}+\frac{9}{x^2}}=\frac{1}{1-\frac{6}{\infty}+\frac{9}{\infty}}=\frac{1}{1-0+0}=1$$

$$n=\lim_{x\to\infty}\left[f(x)-mx\right]=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{x^2-6x+9}-1\cdot x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-x^3+6x^2-9x}{x^2-6x+9}=\lim_{x\to\infty}\frac{6x^2-9x}{x^2-6x+9}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{6\frac{x^2}{x^2}-9\frac{x}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}-6\frac{x}{x^2}+\frac{9}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{6-\frac{9}{x}}{1-\frac{6}{x}+\frac{9}{x^2}}=\frac{6-\frac{9}{\infty}}{1-\frac{6}{\infty}+\frac{9}{\infty}}=\frac{6-0}{1-0+0}=6$$

Existe asíntota inclinada u oblicua, $y=x+6$, *cuando* $x\to\infty$

$$m=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3}{x^3-6x^2+9x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x^2-6x+9}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2+6x+9}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}+6\frac{x}{x^2}+\frac{9}{x^2}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1+\frac{6}{x}+\frac{9}{x^2}}=\frac{1}{1+\frac{6}{\infty}+\frac{9}{\infty}}=\frac{1}{1+0+0}=1$$

$$n=\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-mx\right]=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^3}{x^2-6x+9}-x\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3-x^3+6x^2-9x}{x^2-6x+9}=\lim_{x\to-\infty}\frac{6x^2-9x}{x^2-6x+9}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{6x^2+9x}{x^2+6x+9}==\lim_{x\to\infty}\frac{6\frac{x^2}{x^2}+9\frac{x}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}+6\frac{x}{x^2}+\frac{9}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{6+\frac{9}{x}}{1+\frac{6}{x}+\frac{9}{x^2}}=\frac{6+\frac{9}{\infty}}{1+\frac{6}{\infty}+\frac{9}{\infty}}=\frac{6+0}{1+0+0}=6$$

Existe asíntota inclinada u oblicua, $y=x+6$, *cuando* $x\to-\infty$

b)

$$f'(x)=\frac{3x^2(x-3)^2-2(x-3)\,x^3}{(x-3)^4}=\frac{3x^2(x-3)-2\,x^3}{(x-3)^3}=\frac{3x^3-9x^2-2\,x^3}{(x-3)^3}=\frac{x^3-9x^2}{(x-3)^3}\Rightarrow$$

$$\begin{cases} f(2)=\dfrac{2^3}{(2-3)^2}=\dfrac{8}{(-1)^2}=8 \\ f'(2)=\dfrac{2^3-9\cdot 2^2}{(2-3)^3}=\dfrac{8-36}{(-1)^3}=\dfrac{-28}{-1}=28 \end{cases}\Rightarrow y-8=28\cdot(x-2)\Rightarrow y=28x-56+8\Rightarrow y=28x-48$$

<u>Ejercicio</u> 4.- Calificación máxima: 2 puntos.
Calcular las siguientes integrales:

a) (1 punto) $\int \frac{x-3}{x^2+9}dx.$ b) (1 punto) $\int_1^3 \frac{3-x^2+x^4}{x^3}dx.$

Solución

a)

$$I=\int \frac{x-3}{x^2+9}\,dx=\int \frac{x}{x^2+9}\,dx-\int \frac{3}{x^2+9}\,dx=\int \frac{\frac{dt}{2}}{t}-\int \frac{3}{9\left(\frac{x^2}{9}+1\right)}\,dx=\frac{1}{2}\int \frac{dt}{t}-\frac{1}{3}\int \frac{dx}{1+\left(\frac{x}{3}\right)^2}$$

$$x^2+9=t \Rightarrow 2x\,dx=dt \Rightarrow x\,dx=\frac{dt}{2} \qquad \frac{x}{3}=u \Rightarrow dx=3\,du$$

$$I=\frac{1}{2}\cdot \ln t-\frac{1}{3}\int \frac{3\,du}{1+u^2}=\frac{1}{2}\cdot \ln\left(x^2+9\right)-\int \frac{du}{1+u^2}=\ln\left(x^2+9\right)^{\frac{1}{2}}-arc\ tg\ u=\ln\sqrt{x^2+9}-arc\ tg\left(\frac{x}{3}\right)+K$$

b)

$$I=\int_1^2 \frac{3-x^2+x^4}{x^3}\,dx=\int_1^2 \frac{3}{x^3}\,dx-\int_1^2 \frac{x^2}{x^3}\,dx+\int_1^2 \frac{x^4}{x^3}\,dx=3\int_1^2 x^{-3}dx-\int_1^2 \frac{dx}{x}+\int_1^2 x\,dx$$

$$I=3\cdot\frac{1}{(-3+1)}\cdot\left[x^{-3+1}\right]_1^2-\left[\ln x\right]_1^2+\frac{1}{(1+1)}\cdot\left[x^{1+1}\right]_1^2=-\frac{3}{2}\cdot\left[\frac{1}{x^2}\right]_1^2-\left(\ln 2-\ln 1\right)+\frac{1}{2}\left(2^2-1^2\right)$$

$$I=-\frac{3}{2}\cdot\left(\frac{1}{2^2}-\frac{1}{1^2}\right)-\ln 2+0+\frac{3}{2}=-\frac{3}{2}\cdot\left(\frac{1}{4}-1\right)-\ln 2+\frac{3}{2}=-\frac{3}{2}\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)-\ln 2+\frac{3}{2}=\frac{9}{8}+\frac{3}{2}-\ln 2$$

$$I=\frac{21}{8}-\ln 2$$

OPCIÓN B

Ejercicio 1.- Calificación máxima: 3 puntos.
Dada la función f(x) = 2cos^2 x, se pide:

a) (1 punto) Determinar los extremos absolutos de f(x) en [-π/2, π/2].

b) (1 punto) Determinar los puntos de inflexión de f(x) en [-π/2, π/2]..

c) (1 punto) Calcular $\int_0^{\pi/2} f(x)dx$..

Solución

a)

$$f'(x)=2\cdot 2\cdot\cos x\cdot(-sen\ x)=-4\cdot\cos x\cdot sen\ x=-2\cdot sen\ 2x\Rightarrow f'(x)=0\Rightarrow -2\cdot sen\ 2x=0\Rightarrow$$

$$sen\ 2x=0\Rightarrow 2x=k\pi,\ k\in Z\Rightarrow x=\frac{k\pi}{2},\ k\in Z\Rightarrow\begin{cases}x=-\dfrac{\pi}{2}\\ x=0\\ x=\dfrac{\pi}{2}\end{cases}\Rightarrow$$

$$f''(x)=-2\cdot 2\cdot\cos 2x=-4\cos 2x\Rightarrow\begin{cases}f''\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)=-4\cos 2\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)=-4\cdot\cos(-\pi)=-4\cdot(-1)=4\Rightarrow Mín.\\ f''(0)=-4\cos 2\,.0=-4\cdot\cos 0=-4\cdot 1=-4\Rightarrow Máximo\\ f''\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=-4\cos 2\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=-4\cdot\cos\pi=-4\cdot(-1)=4\Rightarrow Mínimo\end{cases}$$

$$Mínimo\ absoluto\Rightarrow x=-\frac{\pi}{2}\Rightarrow f\left(-\frac{\pi}{2}\right)=2\cdot\cos^2\left(-\frac{\pi}{2}\right)=2\cdot 0^2=0$$

$$Mínimo\ absoluto\Rightarrow x=\frac{\pi}{2}\Rightarrow f\left(\frac{\pi}{2}\right)=2\cdot\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\right)=2\cdot 0^2=0$$

$$Máximo\ absoluto\Rightarrow x=0\Rightarrow f(0)=2\cdot\cos^2(0)=2\cdot 1^2=2$$

Continuación del Ejercicio 1 de la Opción B

b)

$$f''(x) = -4\cos 2x \Rightarrow f''(x) = 0 \Rightarrow -4\cdot\cos 2x = 0 \Rightarrow \cos 2x = 0 \Rightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k\in Z \Rightarrow$$

$$x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2},\ k\in Z \Rightarrow En\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} \\ x = \frac{\pi}{4} \end{cases} Posible\ \ punto\ de\ \mathrm{inf}\ lexión \Rightarrow$$

$$f'''(x) = -4\cdot 2\cdot(-sen\ 2x) = 8\ sen\ 2x \Rightarrow \begin{cases} f'''\left(-\frac{\pi}{4}\right) = 8\ sen\ 2\left(-\frac{\pi}{4}\right) = 8\ sen\ \left(-\frac{\pi}{2}\right) = 8\cdot(-1) = -8 \neq 0 \\ f'''\left(\frac{\pi}{4}\right) = 8\ sen\ 2\left(\frac{\pi}{4}\right) = 8\ sen\ \left(\frac{\pi}{2}\right) = 8\cdot 1 = 8 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$Punto\ de\ \mathrm{inf}\ lexión \Rightarrow x = -\frac{\pi}{4} \Rightarrow f\left(-\frac{\pi}{4}\right) = 2\cdot\cos^2\left(-\frac{\pi}{4}\right) = 2\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{4}{4} = 1$$

$$Punto\ de\ \mathrm{inf}\ lexión \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2\cdot\cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{4}{4} = 1$$

c)

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\ dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2x)\ dx =$$

$$\begin{cases} \cos^2 x + sen^2 x = 1 \\ \cos^2 x - sen^2 x = \cos(2x) \end{cases} \Rightarrow 2\cos^2 x = 1 + \cos(2x) \Rightarrow \cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{\cos(2x)}{2}$$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2x)\ dx = \frac{1}{2}\cdot[x]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \cos t\ \frac{dt}{2} = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) + \frac{1}{4}\cdot[-sen\ t]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{4}\cdot(sen\ \pi - sen\ 0)$$

$$2x = t \Rightarrow 2\ dx = dt \Rightarrow dx = \frac{dt}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = \pi \\ x = 0 \Rightarrow t = 0 \end{cases}$$

$$I = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{4}\cdot(0 - 0) = \frac{\pi}{2}\ u^2$$

<u>Ejercicio</u> 2.- Calificación máxima: 3 puntos.

Dadas las matrices: A = $\begin{pmatrix} 1 & \lambda & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, B = $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, se pide:

a) (1 punto) Hallar el valor de λ para el cual la ecuación matricial XA = B tiene solución única.

b) (1 punto) Calcular la matriz X para $\lambda = 4$.

c) (1 punto) Calcular el determinante de la matriz A^2B en función de λ.

Solución

a) Se cumplirá la ecuación matricial siempre que exista $\mathbf{A^{-1}}$, para ello el determinante de **A** no puede ser nulo

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & \lambda & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -1+\lambda+2 = \lambda+1 \Rightarrow Si\ |A| = 0 \Rightarrow \lambda+1=0 \Rightarrow \lambda=-1$$

$$\forall \lambda \in \Re - \{-1\} \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow Existe\ A^{-1} \Rightarrow Solución\ única$$

b)

$$XA = B \Rightarrow XAA^{-1} = BA^{-1} \Rightarrow XI = A^{-1}B \Rightarrow X = BA^{-1}$$

$$|A| = 4+1 = 5 \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot adj\ A^t \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow adj\ A^t = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 8 \\ 1 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 & 8 \\ 1 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 & 8 \\ 1 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 & 8 \\ 1 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & -5 \\ 2 & 3 & 11 \\ 3 & 7 & 14 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ \frac{2}{5} & \frac{3}{5} & \frac{11}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{7}{5} & \frac{14}{5} \end{pmatrix}$$

c)

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+\lambda & 2\lambda & 2\lambda \\ 2 & \lambda-1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$A^2B = \begin{pmatrix} 1+\lambda & 2\lambda & 2\lambda \\ 2 & \lambda-1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6\lambda & 1+3\lambda & 1-\lambda \\ \lambda-1 & 2 & 3-\lambda \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$|A^2B| = \begin{vmatrix} 6\lambda & 1+3\lambda & 1-\lambda \\ \lambda-1 & 2 & 3-\lambda \\ -2 & -2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6\lambda-2+2\lambda & 1+3\lambda-2+2\lambda & 1-\lambda \\ \lambda-1-6+2\lambda & 2-6+2\lambda & 3-\lambda \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8\lambda-2 & 5\lambda-1 & 1-\lambda \\ 3\lambda-7 & 2\lambda-4 & 3-\lambda \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$|A^2B| = (-1) \cdot \begin{vmatrix} 8\lambda-2 & 5\lambda-1 \\ 3\lambda-7 & 2\lambda-4 \end{vmatrix} = -2\,(4\lambda-1) \cdot 2 \cdot (\lambda-2) + (5\lambda-1) \cdot (3\lambda-7) =$$

$$|A^2B| = -4 \cdot (4\lambda^2 - 8\lambda - \lambda + 2) + (15\lambda^2 - 35\lambda - 3\lambda + 7) = -16\lambda^2 + 36\lambda - 8 + 15\lambda^2 - 38\lambda + 7 = -\lambda^2 - 2\lambda - 1$$

<u>Ejercicio</u> 3.- Calificación máxima: 2 puntos.

a) (1 punto) Halla los puntos de corte de la recta de dirección (2,1,1) y que pasa por el punto P(4,6,2), con la superficie esférica de centro C(1,2,-1) y radio $\sqrt{26}$.

b) (1 punto) Hallar la distancia del punto Q(-2,1,0) a la recta $r \equiv \frac{x-1}{2} = y+2 = \frac{z-3}{2}$.

Solución

a)Sean R y S los puntos buscados

$$\begin{cases} E \equiv (x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=\left(\sqrt{26}\right)^2 \\ r \equiv \begin{cases} x=4+2\lambda \\ y=6+\lambda \\ z=2+\lambda \end{cases} \end{cases} \Rightarrow (4+2\lambda-1)^2+(6+\lambda-2)^2+(2+\lambda+1)^2=26 \Rightarrow$$

$$(3+2\lambda)^2+(4+\lambda)^2+(3+\lambda)^2=26 \Rightarrow 9+12\lambda+4\lambda^2+16+8\lambda+\lambda^2+9+6\lambda+\lambda^2-26=0 \Rightarrow$$

$$6\lambda^2+26\lambda+8=0 \Rightarrow 2\cdot\left(3\lambda^2+13\lambda+4\right)=0 \Rightarrow 3\lambda^2+13\lambda+4=0 \Rightarrow \Delta=13^2-4\cdot3\cdot4=169-48=121\geq 0$$

$$\lambda=\frac{-13\pm\sqrt{121}}{2\cdot 3} \Rightarrow \begin{cases} \lambda=\frac{-13+11}{6}=-\frac{2}{6}=-\frac{1}{3} \\ \lambda=\frac{-13-11}{6}=-\frac{24}{6}=-4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R\begin{cases} x=4+2\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)=4-\frac{2}{3} \\ y=6+\left(-\frac{1}{3}\right)=6-\frac{1}{3} \\ z=2+\left(-\frac{1}{3}\right)=2-\frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow \\ S\begin{cases} x=4+2\cdot(-4)=4-8 \\ y=6+(-4)=6-4 \\ z=2+(-4)=2-4 \end{cases} \end{cases}$$

$$R\left(\frac{10}{3},\frac{17}{3},\frac{5}{3}\right) \quad y \quad S(-4,2,-2)$$

b) Hallaremos un plano π que contenga al punto **Q** y que sea perpendicular a la recta r, siendo el vector de esta el del plano a hallar y como, además, es perpendicular al vector **QG**, siendo **G** el punto genérico del plano, el producto escalar de ambos es nulo y la ecuación buscada.

La distancia pedida es la que hay entre el punto de intersección **T** de la recta y el plano y el punto dado **Q**

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_\pi}=\overrightarrow{v_r}=(2,1,2) \\ \overrightarrow{QG}=(x,y,z)-(-2,1,0)=(x+2,y-1,z) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{v_\pi}\perp\overrightarrow{QG} \Rightarrow \overrightarrow{v_\pi}\cdot\overrightarrow{QG}=0 \Rightarrow$$

$$(2,1,2)\cdot(x+2,y-1,z)=0 \Rightarrow 2x+4+y-1+2z=0 \Rightarrow \pi \equiv 2x+y+2z+3=0$$

$$r \equiv \begin{cases} x=1+2\lambda \\ y=-2+\lambda \\ z=3+2\lambda \end{cases} \Rightarrow 2\,(1+2\lambda)+(-2+\lambda)+2\,(3+2\lambda)+3=0 \Rightarrow 2+4\lambda-2+\lambda+6+4\lambda+3=0 \Rightarrow$$

$$9\lambda+9=0 \Rightarrow 9\lambda=-9 \Rightarrow \lambda=-1 \Rightarrow T\begin{cases} x=1+2\cdot(-1) \\ y=-2+(-1) \\ z=3+2\cdot(-1) \end{cases} \Rightarrow T(-1,-3,1) \Rightarrow$$

$$\overrightarrow{QT}=(-1,-3,1)-(-2,1,0)=(1,-4,1) \Rightarrow d(Q,r)=d(Q,T)=\left|\overrightarrow{QT}\right|=\sqrt{1^2+(-4)^2+1^2}=\sqrt{18}$$

$$d(Q,r)=3\sqrt{2}\ u$$

Ejercicio 4.- Calificación máxima: 2 puntos.

Dados el punto P(1,0,-1), el plano $\pi \equiv 2x - y + z + 1 = 0$, y la recta $r \equiv \begin{cases} -2x + y - 1 = 0, \\ 3x - z - 3 = 0, \end{cases}$ se pide:

a) (1'5 puntos) Determinar la ecuación del plano que pasa por P, es paralelo a la recta r y perpendicular al plano π.

b) (0'5 puntos) Hallar el ángulo entre r y π.

Solución

a) El plano α queda determinado por el vector del plano π, el de la recta r y por el vector PG, siendo G el punto genérico del plano. Estos tres vectores son coplanarios (pertenecen al mismo plano) y por ello el determinante de la matriz que forman es nulo y la ecuación pedida del plano.

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_\pi} = (2, -1, 1) \\ \begin{cases} y = 1 + 2x \\ z = -3 + 3x \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 + 2\lambda \\ z = -3 + 3\lambda \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{v_r} = (1, 2, 3) \Rightarrow \alpha \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y & z+1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \\ \overrightarrow{PG} = (x, y, z) - (1, 0, -1) = (x-1, y, z+1) \end{cases}$$

$$-3(x-1) + y + 4(z+1) + (z+1) - 2(x-1) - 6y = 0 \Rightarrow -5(x-1) - 5y + 5(z+1) = 0 \Rightarrow$$

$$-(x-1) - y + (z+1) = 0 \Rightarrow \alpha \equiv x + y - z - 2 = 0$$

b)

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_\pi} = (2, -1, 1) \\ \overrightarrow{v_r} = (1, 2, 3) \end{cases} \Rightarrow sen\ \beta = \frac{\left| \overrightarrow{v_\pi} \cdot \overrightarrow{v_r} \right|}{\left| \overrightarrow{v_\pi} \right| \cdot \left| \overrightarrow{v_r} \right|} = \frac{\left| (2, -1, 1) \cdot (1, 2, 3) \right|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 1^2} \cdot \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2}} = \frac{|2 - 2 + 3|}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{14}} = \frac{3}{\sqrt{84}} = \frac{3}{2\sqrt{21}}$$

$$sen\ \beta = \frac{3\sqrt{21}}{42} = \frac{\sqrt{21}}{14} \Rightarrow \beta = arc\ sen\left(\frac{\sqrt{21}}{14}\right) = 19^\circ 6' 23''$$