

OPCIÓN A

Ejercicio 1.- Calificación máxima 3 puntos

Dada la función: $f(x) = \frac{1}{x+1} + \frac{x}{x+4}$ se pide

- a) (1 punto) Determinar el dominio de f y sus asíntotas
- b) (1 punto) Calcular $f'(x)$ y determinar los extremos relativos de $f(x)$
- c) (1 punto) Calcular $\int_0^1 f(x) dx$

a)

$$\left\{ \begin{array}{l} x+1=0 \Rightarrow x=-1 \Rightarrow f(-1) = \frac{1}{-1+1} + \frac{-1}{(-1)+4} = \frac{1}{0} - \frac{1}{3} \Rightarrow \text{Sin solución} \\ x+4=0 \Rightarrow x=-4 \Rightarrow f(-4) = \frac{1}{(-4)+1} + \frac{(-4)}{(-4)+4} = -\frac{1}{3} + \frac{-4}{0} \Rightarrow \text{Sin solución} \end{array} \right.$$

$$\text{Dom}(f) = \forall x \in \mathbb{R} - \{-4, -1\} \Rightarrow \text{Asíntotas verticales} \Rightarrow \begin{cases} x = -4 \\ x = -1 \end{cases}$$

Asíntotas horizontales

$$y = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x+1} + \frac{x}{x+4} \right) = \frac{1}{\infty} + \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(0 + \frac{\frac{x}{x}}{\frac{x}{x} + \frac{4}{x}} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{4}{x}} = \frac{1}{1 + \frac{4}{\infty}} = \frac{1}{1+0} = 1 \Rightarrow$$

Existe a sin tota horizontal, $y = 1$, cuando $x \rightarrow \infty$

$$y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{x+1} + \frac{x}{x+4} \right) = \frac{1}{-\infty} + \frac{-\infty}{-\infty} = 0 + \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{x}{x}}{\frac{x}{x} + \frac{4}{x}} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{1 + \frac{4}{x}} = \frac{1}{1+0} = 1$$

Existe a sin tota horizontal, $y = 1$, cuando $x \rightarrow -\infty$

Asíntotas oblicuas

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{1}{x+1} + \frac{x}{x+4} \right)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x^2+x} + \frac{x}{x^2+4x} \right) = \frac{1}{\infty} + \frac{\infty}{\infty} = 0 + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x^2+4x} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} + 4 \frac{x}{x^2}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1 + \frac{4}{x}} = \frac{\frac{1}{\infty}}{1 + \frac{4}{\infty}} = \frac{0}{1+0} = 0 \Rightarrow \text{No existe a sin tota oblicua}$$

$$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{x^2+x} + \frac{x}{x^2+4x} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{x^2-x} + \frac{-x}{x^2-4x} \right) = \frac{1}{\infty} + \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x}{x^2-4x} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\frac{x}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} - 4 \frac{x}{x^2}} = 0$$

\Rightarrow No existe asíntota oblicua

Continuación del Ejercicio 1 de la opción A

b)

$$f(x) = \frac{1}{x+1} + \frac{x}{x+4} \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{(x+1)^2} - \frac{(x+4) - x}{(x+4)^2} \Rightarrow f'(x) = -\frac{(x+4)^2 + 4(x+1)^2}{(x+1)^2(x+4)^2}$$

$$f'(x) = -\frac{(x^2 + 8x + 16) - 4(x^2 + 2x + 1)}{(x+1)^2(x+4)^2} = -\frac{x^2 + 8x + 16 - 4x^2 - 8x - 4}{(x+1)^2(x+4)^2} = (-1) \frac{(-3)x^2 + 12}{(x+1)^2(x+4)^2}$$

$$f'(x) = \frac{3x^2 - 12}{(x+1)^2(x+4)^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{3(x^2 - 4)}{(x+1)^2(x+4)^2} = \frac{3(x+2)(x-2)}{(x+1)^2(x+4)^2}$$

$$\text{Crecimiento} \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow \frac{3(x+2)(x-2)}{(x+1)^2(x+4)^2} > 0 \Rightarrow \begin{cases} 3 > 0 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} \\ x+2 > 0 \Rightarrow x > -2 \\ x-2 > 0 \Rightarrow x > 2 \\ (x+1)^2 > 0 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} \\ (x+4)^2 > 0 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

	$-\infty$	-2	2	∞
3 > 0		(+)	(+)	(+)
x > -2		(-)	(+)	(+)
x > 2		(-)	(-)	(+)
(x+1)²		(+)	(+)	(+)
(x+4)²		(+)	(+)	(+)
Solución		(+)	(-)	(+)

Decrecimiento $\forall x \in \mathbb{R} / -2 < x < 2$

Crecimiento $\forall x \in \mathbb{R} / (x < -2) \cup (x > 2)$

Máximo relativo en $x = -2 \Rightarrow f(-2) = \frac{1}{-2+1} + \frac{-2}{-2+4} = -1 - 1 = -2$ **de crecimiento pasa a decrecimiento**

Mínimo relativo en $x = 2 \Rightarrow f(2) = \frac{1}{2+1} + \frac{2}{2+4} = \frac{1}{3} + \frac{2}{6} = \frac{2}{3}$ **de decrecimiento pasa a crecimiento**

$$I = \int_0^1 \left(\frac{1}{x+1} + \frac{x}{x+4} \right) dx = \int_0^1 \frac{1}{x+1} dx + \int_0^1 \frac{x}{x+4} dx = \int_1^2 \frac{dt}{t} dx = \int_1^2 \frac{1}{t} dt + \int_0^1 \frac{x+4-4}{x+4} dx =$$

$$x+1 = t \Rightarrow dx = dt \Rightarrow \begin{cases} x=1 \Rightarrow t=2 \\ x=0 \Rightarrow t=1 \end{cases}$$

$$I = [\ln t]_1^2 + \int_0^1 \frac{x+4}{x+4} dx - \int_0^1 \frac{4}{x+4} dx = (\ln 2 - \ln 1) + \int_0^1 1 \cdot dx - \int_0^1 \frac{4}{x+4} dx = (\ln 2 - 0) + [x]_0^1 - 4 \int_4^5 \frac{du}{u}$$

$$x+4 = u \Rightarrow dx = du \Rightarrow \begin{cases} x=1 \Rightarrow t=5 \\ x=0 \Rightarrow t=4 \end{cases}$$

$$I = \ln 2 + (1-0) - 4 \cdot [\ln u]_4^5 = \ln 2 + 1 - 4 \cdot (\ln 5 - \ln 4) = 1 + \ln 2 - 4 \cdot \ln 5 + 4 \cdot \ln 4 = 1 + \ln 2 - \ln 5^4 + \ln 4^4$$

$$I = 1 + \ln \frac{2 \cdot 4^4}{5^4} = 1 + \ln \frac{512}{625}$$

Ejercicio 2.- Calificación máxima 3 puntos

Dada las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ 1 & a & 1 \\ a-1 & a & 2 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$, $O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, se pide:

- a) (1 punto) Determinar el valor o valores de **a** para los cuales no existe la matriz inversa A^{-1}
 b) (1 punto) Para **a = -2**, hallar la matriz inversa A^{-1}
 c) (1 punto) Para **a = 1** calcular todas las soluciones del sistema lineal $AX = O$

a)

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & a & a \\ 1 & a & 1 \\ a-1 & a & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a \\ 0 & 0 & 1-a \\ a-2 & 0 & 2-a \end{vmatrix} = (-a) \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1-a \\ a-2 & 2-a \end{vmatrix} = (-a) \cdot [-(a-2) \cdot (1-a)] = a \cdot (1-a) \cdot (a-2)$$

$$\text{Si } |A| = 0 \Rightarrow a \cdot (1-a) \cdot (a-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ 1-a = 0 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow \forall a \in \mathbb{R} - \{0, 1, 2\} \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow \text{Existe } A^{-1} \\ a-2 = 0 \Rightarrow a = 2 \end{cases}$$

No existe cuando $a = 0$ ó $a = 1$ ó $a = 2$

b)

$$\text{Si } a = -2 \Rightarrow |A| = (-2) \cdot [1 - (-2)] \cdot (-2 - 2) = (-2) \cdot 3 \cdot (-4) = 24 \neq 0 \Rightarrow \text{Existe } A^{-1} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \text{adj } A'$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -3 & -2 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ -2 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{adj } A' = \begin{pmatrix} -2 & 8 & -6 \\ -5 & -4 & -3 \\ -8 & 8 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$A^{-1} = \frac{1}{24} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 8 & -6 \\ -5 & -4 & -3 \\ -8 & 8 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{12} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{5}{24} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{8} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

c) El sistema es homogéneo siendo compatible determinado para todo valor que haga que el determinante A, de los coeficientes no sea nulo y su solución es la trivial (0, 0, 0); cuando sea cero el determinante el sistema es compatible indeterminado de la que tendremos que hallar su solución paramétrica

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} \Rightarrow \text{rang}(A) = \text{rang}(A/B) = 2 < \text{Número de incógnitas} \Rightarrow$$

$$\text{Compatible Indeterminado} \Rightarrow y + 2z = 0 \Rightarrow y = -2z \Rightarrow x - 2z + z = 0 \Rightarrow x = z \Rightarrow$$

$$\text{Solución} \Rightarrow (x, y, z) = (\lambda, -2\lambda, \lambda)$$

Ejercicio 3.- Calificación máxima 2 puntos

Dado los puntos $A(2, 0, -2)$, $B(3, -4, -1)$, $C(5, 4, -3)$ y $D(0, 1, 4)$, se pide:

- a) (1 punto) Calcular el área del triángulo de vértices A , B y C
 b) (1 punto) Calcular el volumen del tetraedro $ABCD$

a) El área del triángulo ABC es igual a la mitad del módulo del vector que resulta al hallar el producto vectorial de los vectores \overrightarrow{AB} y \overrightarrow{AC} (al tratarse de valores numéricos no pueden simplificarse ambos vectores)

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (3, -4, -1) - (2, 0, -2) = (1, -4, 1) \\ \overrightarrow{AC} = (5, 4, -3) - (2, 0, -2) = (3, 4, -1) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -4 & 1 \\ 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 4\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k} + 12\vec{k} - 4\vec{i} + \vec{j} = 4\vec{j} + 16\vec{k} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = (0, 4, 16)$$

$$\text{Área} = \frac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}| \Rightarrow |\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}| = \sqrt{0^2 + 4^2 + 16^2} = \sqrt{16 + 256} = \sqrt{272} \Rightarrow \text{Área} = 4\sqrt{17} \text{ u}^2$$

b) El volumen del tetraedro es la sexta parte del valor calculado con el producto mixto de los tres vectores \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AC} y \overrightarrow{AD}

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (1, -4, 1) \\ \overrightarrow{AC} = (3, 4, -1) \\ \overrightarrow{AD} = (0, 1, 4) - (2, 0, -2) = (-2, -1, 6) \end{cases} \Rightarrow V = \frac{1}{6} \cdot |\overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AD})| \Rightarrow$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AD}) = \begin{vmatrix} -2 & -1 & 6 \\ 1 & -4 & 1 \\ 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} = -8 - 3 + 24 + 72 + 8 - 1 = 92 \Rightarrow V = \frac{1}{6} \cdot |92| = \frac{92}{6} = \frac{46}{3} \text{ u}^3$$

Ejercicio 4.- Calificación máxima 2 puntos

Dados los planos: $\pi_1 \equiv 2x + z - 1 = 0$, $\pi_2 \equiv x + z + 2 = 0$, $\pi_3 \equiv x + 3y + 2z - 3 = 0$, se pide:

- a) (1 punto) Obtener las ecuaciones paramétricas de la recta determinada por π_1 y π_2
 b) (1 punto) Calcular el seno del ángulo que la recta del plano anterior forma con el plano π_3

a)

$$\begin{cases} 2x + z - 1 = 0 \\ -x - z - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3 \Rightarrow 3 + z + 2 = 0 \Rightarrow z = -5 \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 3 \\ y = \lambda \\ z = -5 \end{cases}$$

b)

$$\begin{cases} \vec{v}_r = (0, 1, 0) \\ \vec{v}_{\pi_3} = (1, 3, 2) \end{cases} \Rightarrow \text{sen } \alpha = \frac{|\vec{v}_r \cdot \vec{v}_{\pi_3}|}{|\vec{v}_r| \cdot |\vec{v}_{\pi_3}|} = \frac{|(0, 1, 0) \cdot (1, 3, 2)|}{\sqrt{0^2 + 1^2 + 0^2} \cdot \sqrt{1^2 + 3^2 + 2^2}} = \frac{|0 + 3 + 0|}{\sqrt{1} \cdot \sqrt{14}} = \frac{3}{\sqrt{14}} = \frac{3\sqrt{14}}{14}$$

$$\alpha = \text{arc sen} \left(\frac{3\sqrt{14}}{14} \right) = 53^\circ 18' 2'' \quad (\text{no lo pide el problema})$$

OPCIÓN B

Ejercicio 1.- Calificación máxima 3 puntos

Dados el plano π y la recta r siguientes:

$$\pi \equiv 2x - y + 2z + 3 = 0, \quad r \equiv \begin{cases} x = 1 - 2t, \\ y = 2 - 2t, \\ z = 1 + t, \end{cases}$$

se pide:

- (1 punto) Estudiar la posición relativa de r y π .
- (1 punto) Calcular la distancia entre r y π .
- (1 punto) Obtener el punto P' simétrico de $P(3, 2, 1)$ respecto del plano π .

a) Una recta y un plano pueden ser paralelos, que la recta este contenida en el plano o, finalmente, que se corten en un punto.

Puesta la recta r en ecuación implícita analizaremos si el sistema es compatible determinado que nos diría que la recta y el plano se cortan en un punto; si el sistema es compatible indeterminado la recta está contenida en el plano y, finalmente, si el sistema es incompatible la recta y el plano son paralelos

$$r \equiv \frac{x-1}{-2} = \frac{y-2}{-2} = z-1 \Rightarrow \begin{cases} \frac{x-1}{-2} = \frac{y-2}{-2} \Rightarrow x-1 = y-2 \Rightarrow x-y+1=0 \\ \frac{x-1}{-2} = z-1 \Rightarrow x-1 = -2z+2 \Rightarrow x+2z-3=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-y=-1 \\ x+2z=3 \\ 2x-y+2z=-3 \end{cases} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -4+2+2=0 \Rightarrow \text{No se cortan el plano y la recta}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 2 & -3 \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{array} \right) \Rightarrow \text{rang}(A) = 2 \neq \text{rang}(A/B) = 3 \Rightarrow$$

Sistema Incompatible \Rightarrow El plano y la recta son paralelos

b) La distancia entre r y el plano π es la distancia de uno cualquiera de los puntos R de la recta (tomaremos el propuesto en su ecuación) al plano π .

$$\text{Siendo } R(1, 2, 1) \Rightarrow d(r, \pi) = d(R, \pi) = \frac{|2 \cdot 1 - 2 + 2 \cdot 1 + 3|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2}} = \frac{|5|}{\sqrt{9}} = \frac{5}{3} u$$

c) Hallaremos una recta s que contenga al punto P y que sea perpendicular al plano π , que tendrá como vector director el del plano. Hallada la recta calcularemos el punto Q de intersección de ella y el plano, punto que es el punto medio entre P y su simétrico P' .

$$\vec{v}_s = \vec{v}_\pi = (2, -1, 2) \Rightarrow s \equiv \begin{cases} x = 3 + 2\lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = 1 + 2\lambda \end{cases} \Rightarrow 2 \cdot (3 + 2\lambda) - (2 - \lambda) + 2 \cdot (1 + 2\lambda) + 3 = 0 \Rightarrow$$

$$6 + 4\lambda - 2 + \lambda + 2 + 4\lambda + 3 = 0 \Rightarrow 9\lambda + 9 = 0 \Rightarrow \lambda = -1 \Rightarrow Q \begin{cases} x = 3 + 2 \cdot (-1) \\ y = 2 - (-1) \\ z = 1 + 2 \cdot (-1) \end{cases} \Rightarrow Q(1, 3, -1)$$

Continuación del Ejercicio 1 de la opción B

$$\begin{cases} 1 = \frac{3+x_{P'}}{2} \Rightarrow 3+x_{P'} = 2 \Rightarrow x_{P'} = -1 \\ 3 = \frac{2+y_{P'}}{2} \Rightarrow 2+y_{P'} = 6 \Rightarrow y_{P'} = 4 \Rightarrow P'(-1, 4, -3) \\ -1 = \frac{1+z_{P'}}{2} \Rightarrow 1+z_{P'} = -2 \Rightarrow z_{P'} = -3 \end{cases}$$

Ejercicio 2.- Calificación máxima 3 puntos

Dada la función $f(x) = \begin{cases} \frac{5 \operatorname{sen} x}{2x} + \frac{1}{2} & \text{si } x < 0 \\ a & \text{si } x = 0 \\ xe^x + 3 & \text{si } x > 0 \end{cases}$, se pide:

a) (1 punto) Hallar, si existe, el valor de **a** para que **f(x)** sea continua

b) (1 punto) Decir si la función es derivable en **x = 0** para algún valor de **a**

c) (1 punto) Calcular la integral $\int_1^{\ln 5} f(x) dx$ en donde **ln** denota logaritmo neperiano

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \frac{5 \operatorname{sen} 0}{2x} + \frac{1}{2} = \frac{5 \cdot 0}{2 \cdot 0} + \frac{1}{2} = \frac{0}{0} + \frac{1}{2} = \frac{\text{Aplicando L'Hopital}}{\rightarrow} \frac{1}{2} + \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{5 \cos x}{2} = \frac{1}{2} + \frac{5 \cos 0}{2} = \frac{1}{2} + \frac{5 \cdot 1}{2} = \frac{6}{2} = 3 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0 \cdot e^0 + 3 = 0 \cdot 1 + 3 = 3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 3 \Rightarrow \text{Es continua cuando } a = 3$$

b)

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{5}{2} \cdot \frac{x \cos x - \operatorname{sen} x}{x^2} & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ e^x + xe^x & \text{si } x > 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \frac{5}{2} \cdot \frac{0 \cdot \cos 0 - \operatorname{sen} 0}{0^2} = \frac{0}{0} = \frac{\text{Aplicando L'Hopital}}{\rightarrow} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{5}{2} \cdot \frac{\cos x - x \operatorname{sen} x - \cos x}{2x} \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = e^0(1+0) = 1 \cdot 1 = 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} -\frac{5}{4} \cdot \frac{x \operatorname{sen} x}{x} = -\frac{5}{4} \cdot \frac{0 \cdot \operatorname{sen} 0}{0} = \frac{0}{0} = \frac{\text{Aplicando L'Hopital}}{\rightarrow} \lim_{x \rightarrow 0^-} -\frac{5}{4} \cdot \frac{\operatorname{sen} x + x \cos x}{1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = -\frac{5}{4} \cdot (\operatorname{sen} 0 + 0 \cdot \cos 0) = -\frac{5}{4} \cdot (0 + 0 \cdot 1) = 0 \Rightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = 0 \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = 1 \Rightarrow \text{No es derivable}$$

Continuación del Ejercicio 2 de la opción B

c)

$$\int_1^{\ln 5} (xe^x + 3) dx = \int_1^{\ln 5} 3 dx + \int_1^{\ln 5} xe^x dx = 3 \cdot [x]_1^{\ln 5} + [xe^x]_1^{\ln 5} - \int_1^{\ln 5} e^x dx = 3 \cdot (\ln 5 - 1) + (\ln 5 \cdot e^{\ln 5} - 1 \cdot e^1) - [e^x]_1^{\ln 5}$$

$$\begin{cases} x = u \Rightarrow dx = du \\ e^x dx = dv \Rightarrow v = \int e^x dx = e^x \end{cases}$$

$$u = e^{\ln 5} \Rightarrow \ln u = \ln e^{\ln 5} = \ln 5 \cdot \ln e = \ln 5 \Rightarrow u = e^{\ln 5} = 5$$

$$\int_1^{\ln 5} (xe^x + 3) dx = \int_1^{\ln 5} e^x dx = 3 \ln 5 - 3 + 5 \ln 5 - e - (e^{\ln 5} - e^1) = 8 \ln 5 - 3 - e - 5 + e = 8 \ln 5 - 8$$

$$\int_1^{\ln 5} (xe^x + 3) dx = 8(\ln 5 - 1)$$

Ejercicio 3. Calificación máxima: 2 puntos.

Dada la ecuación matricial:

$$\begin{pmatrix} a & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

donde B es una matriz cuadrada de tamaño 2×2 , se pide:

- (1 punto) Calcular el valor o valores de a para los que esta ecuación tiene solución.
- (1 punto) Calcular B en el caso $a = 1$.

a) Tiene solución siempre que la matriz que contiene a , tenga inversa, parq ello su matriz no puede ser nula.

$$\text{Llamando } A = \begin{pmatrix} a & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 2 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 7a - 6 \Rightarrow \text{Si } |A| = 0 \Rightarrow 7a - 6 = 0 \Rightarrow 7a = 6 \Rightarrow a = \frac{6}{7}$$

$$\forall a \in \mathbb{R} - \left\{ \frac{6}{7} \right\} \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow \text{Existe } A^{-1}$$

b)

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} \cdot A \cdot B = A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow I \cdot B = A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow B = A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|A| = 7 \cdot 1 - 6 = 1 \neq 0 \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \text{adj } A^t \Rightarrow A^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{adj } A^t = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$A^{-1} = \frac{1}{1} \cdot \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow B = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 4.- Calificación máxima 2 puntos

Estudiar el rango de la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 & 5 \\ 2 & 2 & -1 & a \\ 1 & 2 & 1 & 6 \\ 3 & 1 & -4 & a \end{pmatrix}$, según los valores del parámetro a

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -3 & 5 \\ 2 & 2 & -1 & a \\ 1 & 2 & 1 & 6 \\ 3 & 1 & -4 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -5 & -5 & -7 \\ 0 & -2 & -3 & a-12 \\ 1 & 2 & 1 & 6 \\ 0 & -5 & -7 & a-18 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -5 & -5 & -7 \\ -2 & -3 & a-12 \\ -5 & -7 & a-18 \end{vmatrix}$$

$$|A| = 15 \cdot (a-18) + 25 \cdot (a-12) - 98 + 105 - 35 \cdot (a-12) - 10 \cdot (a-18) = 5 \cdot (a-18) - 10 \cdot (a-12) + 7$$

$$|A| = 5a - 90 - 10a + 120 + 7 = -5a + 37 \Rightarrow \text{Si } |A| = 0 \Rightarrow -5a + 37 = 0 \Rightarrow 5a = 37 \Rightarrow a = \frac{37}{5}$$

$$\forall a \in \mathbb{R} - \left\{ \frac{37}{5} \right\} \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow \text{rang}(A) = 4$$

$$\text{Si } a = \frac{37}{5}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 & 5 \\ 2 & 2 & -1 & \frac{37}{5} \\ 1 & 2 & 1 & 6 \\ 3 & 1 & -4 & \frac{37}{5} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 & 5 \\ 10 & 10 & -5 & 37 \\ 1 & 2 & 1 & 6 \\ 15 & 5 & -20 & 37 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 & 5 \\ 10 & 10 & -5 & 37 \\ 2 & 4 & 2 & 12 \\ 30 & 10 & -40 & 74 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 & 5 \\ 0 & 15 & 10 & 12 \\ 0 & 5 & 5 & 7 \\ 0 & 25 & 5 & -1 \end{pmatrix} \equiv$$

$$\equiv \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & -5 & -9 \\ 0 & 5 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & -20 & -36 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & -5 & -9 \\ 0 & 5 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rang}(A) = 3$$