OPCIÓN A

Ejercicio 1.- Calificación máxima 3 puntos

Dado el sistema de ecuaciones lineales: $\begin{cases} -mx+my+z=0 \\ x-my+3z=4 \\ 2x-2y-z=0 \end{cases}$ se pide:

a) **(2 puntos)** Discutirlo según los valores del parámetro **m**.
b) **(0,5 puntos)** Resolverlo en el caso **m = 0**.
c) **(0,5 puntos)** Resolverlo en el caso **m = 2**

$a)$

$$|A|=\begin{vmatrix} -m & m & 1 \\ 1 & -m & 3 \\ 2 & -2 & -1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -m+2 & m-2 & 0 \\ 7 & -m-6 & 0 \\ 2 & -2 & -1 \end{vmatrix}=(-1)\cdot\begin{vmatrix} -m+2 & m-2 \\ 7 & -m-6 \end{vmatrix}$$

$$|A|=[-(m-2)]\cdot[-(m+6)]-7\cdot(m-2)=(m-2)\cdot(m+6)-7\cdot(m-2)=(m-2)\cdot(m+6-7)$$

$$|A|=(m-2)\cdot(m-1)\Rightarrow Si\ |A|=0\Rightarrow(m-2)\cdot(m-1)=0\Rightarrow\begin{cases} m-1=0 \\ m-2=0 \end{cases}$$

$$\forall m\in\Re-\{1\,,\,2\}\Rightarrow|A|\neq 0\Rightarrow rang\ (A)=3=Número\ de\ incognitas\Rightarrow Sist.\ Compatible\ Deter\min ado$$

$Si\ m=1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 4 \\ 2 & -2 & -1 & 0 \end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)\Rightarrow rang\ (A)=2\neq rang\ (A/B)=3$$

$Sistema\ Incompatible$

$Si\ m=2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & -2 & -1 & 0 \end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -2 & 7 & 8 \\ 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & -7 & -8 \end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -2 & 7 & 8 \\ 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)\Rightarrow$$

$$rang\ (A)=rang\ (A/B)=2<Número\ de\ incognitas\Rightarrow Sistema\ Compatible\ In\det er\min ado$$

$b)$

$Si\ m=0\Rightarrow Sistema\ Compatible\ Deter\min ado$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 4 \\ 2 & -2 & -1 & 0 \end{array}\right)\Rightarrow z=0\Rightarrow x+3\cdot 0=4\Rightarrow x=4\Rightarrow 2\cdot 4-2\cdot y-0=0\Rightarrow 2y=8\Rightarrow y=4\Rightarrow$$

Continuación del Ejercicio 1 de la opción A

$c)$

$Si\ m=2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -2 & 7 & 8 \\ 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow -2y-7z=8 \Rightarrow 2y=-8-7z \Rightarrow y=-4-\frac{7}{2}z \Rightarrow x-2\cdot\left(-4-\frac{7}{2}z\right)+z=4 \Rightarrow$$

$$x+8+7z+z=4 \Rightarrow x=-4-8z \Rightarrow Solución \Rightarrow (x\ ,\ y\ ,\ z)=\left(-4-8\lambda\ ,\ -4-\frac{7}{2}\lambda\ ,\ \lambda\right)$$

Ejercicio 2.- Calificación máxima 3 puntos

La recta **r** pasa por **P(2 , -1 , 0)** y tiene vector director **(1 , λ , -2);** la recta **s** pasa por **Q(1 , 0 , -1)** y tiene vector director **(2 , 4 , 2)**.

a) (2 puntos) Calcular λ > 0 para que la distancia entre r y s sea $\frac{9}{\sqrt{59}}$.

b) (1 punto) Calcular λ para que r sea perpendicular a la recta que pasa por P y Q.

a) Analizaremos cual es la posición relativa de las rectas; si son paralelas o coincidentes sus vectores directores son iguales o proporcionales, de no serlo se cruzan, ya que si se cortan su distancia es nula

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_r}=(1\ ,\ \lambda\ ,\ -2) \\ \overrightarrow{v_s}=(2\ ,\ 4\ ,\ 2) \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{2}=\frac{-2}{2}=\frac{\lambda}{4} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}=\frac{\lambda}{4} \Rightarrow 2\lambda=4 \Rightarrow \lambda=2 \\ \frac{-2}{2}=\frac{\lambda}{4} \Rightarrow 2\lambda=-8 \Rightarrow \lambda=-4 \end{cases} \Rightarrow No\ son\ paralelas, ni\ coincidentes$$

Para hallar la distancia entre las rectas hallamos un plano π que contenga a la recta **s** y sea paralelo a la recta **r**; para ello disponemos del vector director de la recta **r**, del vector director de la recta **s** y el vector **QG**, siendo **G** el punto genérico del plano, estos tres vectores son coplanarios y el producto mixto de los tres es nulo (ya que lo es el volumen del paralelepípedo que forman) y, además, la ecuación buscada del plano.

La distancia será la hallada desde el punto **P** al plano hallado

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_r}=(1\ ,\ \lambda\ ,\ -2) \\ \overrightarrow{v_s}=(2\ ,\ 4\ ,\ 2) \\ \overrightarrow{QG}=(x\ ,\ y\ ,\ z)-(1\ ,\ 0\ ,\ -1)=(x-1\ ,\ y\ ,\ z+1) \end{cases} \Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y & z+1 \\ 1 & \lambda & -2 \\ 2 & 4 & 2 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow$$

$$2\lambda\,(x-1)-4y+4\,(z+1)-2\lambda\,(z+1)+8\,(x-1)-2y=0 \Rightarrow (2\lambda+8)\,(x-1)-6y+(4-2\lambda)\,(z+1)=0$$

$$(2\lambda+8)\,x-6y+(4-2\lambda)\,z-2\lambda-8+4-2\lambda=0 \Rightarrow \pi \equiv (2\lambda+8)\,x-6y+(4-2\lambda)\,z-4\lambda-4=0$$

$$d(r\ ,\ s)=d(P\ ,\ \pi) \Rightarrow \frac{9}{\sqrt{59}}=\pm\frac{|(2\lambda+8)\cdot 2-6\cdot(-1)+(4-2\lambda)\cdot 0-4\lambda-4|}{\sqrt{(2\lambda+8)^2+(-6)^2+(4-2\lambda)^2}} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \frac{9}{\sqrt{59}}=+\frac{(4\lambda+16+6-4\lambda-4)}{\sqrt{4\lambda^2+32\lambda+64+36+16-16\lambda+4\lambda^2}} \Rightarrow \frac{9}{\sqrt{59}}=\frac{18}{\sqrt{8\lambda^2+16\lambda+116}} \\ \frac{9}{\sqrt{59}}=-\frac{(4\lambda+16+6-4\lambda-4)}{\sqrt{4\lambda^2+32\lambda+64+36+16-16\lambda+4\lambda^2}} \Rightarrow \frac{9}{\sqrt{59}}=\frac{-18}{\sqrt{8\lambda^2+16\lambda+116}} \end{cases}$$

Continuación del Ejercicio 2 de la opción A

$a)$ *Continuación*

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{59}} = \dfrac{2}{\sqrt{8\lambda^2+16\lambda+116}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{59}} = \dfrac{-2}{\sqrt{8\lambda^2+16\lambda+116}} \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{59} = \frac{2}{8\lambda^2+16\lambda+116} \Rightarrow 8\lambda^2+16\lambda+116 = 118 \Rightarrow 8\lambda^2+16\lambda-2=0 \Rightarrow$$

$$4\lambda^2+8\lambda-1=0 \Rightarrow \Delta = 8^2-4\cdot 4\cdot(-1) = 64+16 = 80 \Rightarrow \lambda = \frac{-8\pm\sqrt{80}}{2\cdot 4} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = \dfrac{-8+2\sqrt{20}}{8} = -1+\dfrac{\sqrt{20}}{4} \\ \lambda = \dfrac{-8+2\sqrt{20}}{8} = -1-\dfrac{\sqrt{20}}{4} \end{cases}$$

$$\lambda = \frac{\sqrt{20}-4}{4} > 0$$

b) El producto escalar de los vectores **PQ** y el vector director de la recta r, al ser perpendiculares, es nulo.

$$\begin{cases} \overrightarrow{PQ} = (1,0,-1)-(2,-1,0) = (-1,1,-1) \\ \qquad \overrightarrow{v_r} = (1,\lambda,-2) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{PQ} \perp \overrightarrow{v_r} \Rightarrow \overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{v_r} = 0 \Rightarrow$$

$$(-1,1,-1)\cdot(1,\lambda,-2) = 0 \Rightarrow -1+\lambda+2 = 0 \Rightarrow \lambda = -1$$

Ejercicio 3.- Calificación máxima 2 puntos

a) (0’5 puntos) Estudiar el crecimiento de la función **f(x) = 1 + 2x + 3x² + 4x³**.

b) (1’5 puntos) Demostrar que la ecuación **1 + 2x + 3x² + 4x³ = 0** tiene una única solución real y localizar un intervalo de longitud 1 que la contenga.

$a)$

$$f'(x) = 2+6x+12x^2 = 2\cdot(1+3x+6x^2) \Rightarrow 1+3x+6x^2 = 0 \Rightarrow \Delta = 3^2-4\cdot1\cdot6 = -15 < 0 \Rightarrow \textit{Sin solución}$$

$$\textit{Creciente} \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow 2\cdot(1+3x+6x^2) > 0 \Rightarrow \begin{cases} 2 > 0 \Rightarrow \forall x \in \Re \\ 1+3x+6x^2 > 0 \Rightarrow \forall x\in\Re \end{cases} \Rightarrow$$

$$\textit{Es estrictamente creciente} \Rightarrow \textit{Creciente} \Rightarrow \forall x \in \Re$$

b) Sea la función f(x) = 1 + 2x + 3x² + 4x³ que hemos visto que es estrictamente creciente y que

$$\begin{cases} f(-1) = 1+2\cdot(-1)+3\cdot(-1)^2+4\cdot(-1)^3 = 1-2+3-4 = -2 < 0 \\ \qquad f(0) = 1+2\cdot 0+3\cdot 0^2+4\cdot 0^3 = 1 > 0 \end{cases}$$

Aplicando el teorema de Bolzano en el intervalo **[-1 , 0]** y toma valores de distinto signo en los extremos del intervalo [sign f(-1) $\neq$ sign f(0)], entonces existe, al menos, un punto $c \in (-1, 0)$ tal que f(c) = 0, y como además es estrictamente creciente ese punto es único y por ello

1 + 2x + 3x² + 4x³ = 0

Ejercicio 4.- Calificación máxima 2 puntos

a) (1 punto) Calcular la integral definida : $\int_1^4 (1-x)\, e^{-x} dx$,

b) (1 punto) Calcular $\lim_{x\to+\infty} (1-x)\, e^{-x}$ y $\lim_{x\to-\infty} (1-x)\, e^{-x}$

$a)$

$$\int (1-x)\, e^{-x} dx = -(1-x)\, e^{-x} - \int \left(-e^{-x}\right)(-dx) = -(1-x)\, e^{-x} - \int e^{-x} dx = -(1-x)\, e^{-x} + e^{-x} = -(-x)\, e^{-x}$$

$$\begin{cases} 1-x = u \Rightarrow -dx = du \\ e^{-x} dx = dv \Rightarrow v = \int e^{-x} dx = \int e^{t}(-dt) = -\int e^{t} dt = -e^{t} = -e^{-x} \end{cases}$$

$$-x = t \Rightarrow -dx = dt \Rightarrow dx = -dt$$

$$\int_1^4 (1-x)\, e^{-x} dx = \left[x \cdot e^{-x}\right]_1^4 = \left(4 \cdot e^{-4} - 1 \cdot e^{-1}\right) = \frac{4}{e^4} - \frac{1}{e} = \frac{4-e^3}{e^4}$$

$b)$

$$\lim_{x\to+\infty} (1-x)\, e^{-x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1-x}{e^x} = \frac{\infty}{\infty} = \xrightarrow{Aplicando\ L'Hopital} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-1}{e^x} = \frac{-1}{\infty} = 0$$

$$\lim_{x\to-\infty} (1-x)\, e^{-x} = \lim_{x\to+\infty} \left[1-(-x)\right] e^{-(-x)} = \lim_{x\to+\infty} (1+x)\, e^{x} = \infty \cdot \infty = \infty$$

OPCIÓN B

Ejercicio 1.- Calificación máxima 3 puntos

Dada la función $f(x)=\begin{cases} a+x\ln x & si \quad x>0 \\ x^2e^x & si \quad x\le 0 \end{cases}$,(donde **ln** denota logaritmo neperiano y **a** es un número real) se pide:

a) (1 punto) Calcular el valor de a para que f(x) sea continua en todo $\Re$
b) (1 punto) Calcular f'(x) donde sea posible.

c) (1 punto) Calcular $\int_{-1}^{0} f(x)\,dx$

$a)$

$$Como \lim_{x\to 0^+} x\ln x = 0\cdot(-\infty) = \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \frac{\infty}{\infty} = \xrightarrow{Aplicando\ L'Hopital} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+}\frac{x^2}{-x} = \lim_{x\to 0^+}(-x) = 0$$

$$\begin{cases} \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} a + \lim_{x\to 0^+} x\ln x = a+0 = a \\ f(0) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = 0^2\cdot e^0 = 0\cdot 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow f(0) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) \Rightarrow a = 0$$

$b)$

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} \quad si \quad x>0 \\ 2xe^x + x^2e^x = e^x x\,(2+x) \quad si \quad x<0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x\to 0^-} f'(x) = \frac{1}{x} = \frac{1}{-\infty} = 0 \\ \lim_{x\to 0^-} f(x) = e^0\cdot 0\,(2+0) = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = 0 \Rightarrow Es\ derivable\ en\ \Re$$

$c)$

$$\int x^2e^x\,dx = x^2e^x - \int 2xe^x\,dx = x^2e^x - 2\int xe^x\,dx = x^2e^x - 2\left[xe^x - \int e^x\,dx\right] = x^2e^x - 2xe^x + 2\int e^x\,dx$$

$$\begin{cases} x^2 = u \Rightarrow du = 2xdx \\ e^xdx = dv \Rightarrow v = \int e^xdx = e^x \end{cases} \quad \begin{cases} x = u \Rightarrow du = dx \\ e^xdx = dv \Rightarrow v = \int e^xdx = e^x \end{cases}$$

$$\int x^2e^x\,dx = x^2e^x - 2xe^x + 2e^x = \left(x^2-2x+2\right)e^x + K$$

$$\int_{-1}^{0} x^2e^x\,dx = \left[\left(x^2-2x+2\right)e^x\right]_{-1}^{0} = \left(0^2-2\cdot 0+2\right)e^0 - \left[(-1)^2-2(-1)+2\right]e^{-1} = 2\cdot 1 - (1+2+2)e^{-1}$$

$$\int_{-1}^{0} x^2e^x\,dx = 2-\frac{5}{e} = \frac{2e-5}{e}$$

Ejercicio 2.- Calificación máxima 3 puntos

Dados los puntos **P(-1 , -1 , 1)**, **Q(1 , 0 , 2)** y los planos: $\pi_1 \equiv x - z = 0$, $\pi_2 \equiv my - 6z = 0$ y $\pi_3 \equiv x + y - mz = 0$, se pide:

a) (1 punto) Calcular los valores de **m** para los que los tres planos se cortan en una recta.

b) (1 punto) Para **m = 3**, hallar la ecuación del plano que contiene al punto P y es perpendicular a la recta de intersección de los planos $\pi_1 \ y \ \pi_2$.

c) (1 punto) Hallar la distancia entre los puntos Q y P', siendo P' el punto simétrico de P respecto al plano π_1

a) El sistema que forman debe de ser **Compatible Indeterminado**, ya que es un sistema homogéneo, y ello será cuando el determinante de las incógnitas sea nulo

$$\begin{cases} x - z = 0 \\ my - 6z = 0 \\ x + y - mz = 0 \end{cases} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & m & -6 \\ 1 & 1 & -m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & m & -6 \\ 0 & 1 & 1-m \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} m & -6 \\ 1 & 1-m \end{vmatrix} = m \cdot (1-m) + 6 = m - m^2 + 6 \Rightarrow$$

$$|A| = 0 \Rightarrow m - m^2 + 6 = 0 \Rightarrow m^2 - m - 6 = 0 \Rightarrow \Delta = (-1) - 4 \cdot 1 \cdot (-6) = 25 \Rightarrow m = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{2 \cdot 1} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} m = \frac{1+3}{2} \Rightarrow m = 3 \\ m = \frac{1-3}{2} \Rightarrow m = -1 \end{cases}$$

b) El vector director de los planos $\pi_1 \ y \ \pi_2$ es perpendicular a ellos y, se calcula como el producto vectorial de los vectores directores de ambos, el vector PG son perpendiculares entre si y su producto escalar es nulo y la ecuación del plano α buscado

$$\overrightarrow{v_{\pi_1}} \wedge \overrightarrow{v_{\pi_2}} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & -6 \end{vmatrix} = 3\vec{k} + 3\vec{i} + 6\vec{j} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{v_\alpha} = (3 , 6 , 3) \equiv (1 , 2 , 1) \\ \overrightarrow{PG} = (x , y , z) - (-1 , -1 , 1) = (x+1 , y+1 , z-1) \end{cases}$$

$$\overrightarrow{v_\alpha} \perp \overrightarrow{PG} \Rightarrow \overrightarrow{v_\alpha} \cdot \overrightarrow{PG} = 0 \Rightarrow (1 , 2 , 1) \cdot (x+1 , y+1 , z-1) = 0 \Rightarrow x + 1 + 2y + 2 + z - 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\alpha \equiv x + 2y + z + 2 = 0$$

c) Hallaremos una recta **r** que pasando por el punto P, sea perpendicular al plano π_1 , cuyo vector director es e del plano.

Se hallara el punto Q, de intersección de la recta con el plano y que es el punto medio entre P y su simétrico P'

$$\overrightarrow{v_r} = \overrightarrow{v_{\pi_1}} = (1 , 0 , -1) \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = -1 + \lambda \\ y = -1 \\ z = 1 - \lambda \end{cases} \Rightarrow (-1 + \lambda) - (1 - \lambda) = 0 \Rightarrow 2\lambda - 2 = 0 \Rightarrow \lambda = 1 \Rightarrow Q \begin{cases} x = -1 + 1 \\ y = -1 \\ z = 1 - 1 \end{cases}$$

$$Q(0 , -1 , 0) \Rightarrow \begin{cases} 0 = \frac{-1 + x_{P'}}{2} \Rightarrow -1 + x_{P'} = 0 \Rightarrow x_{P'} = 1 \\ -1 = \frac{-1 + y_{P'}}{2} \Rightarrow -1 + y_{P'} = -2 \Rightarrow y_{P'} = -1 \Rightarrow P'(1 , -1 , -1) \\ 0 = \frac{1 + z_{P'}}{2} \Rightarrow 1 + z_{P'} = 0 \Rightarrow z_{P'} = -1 \end{cases}$$

Ejercicio 3 : Calificación máxima: 2 puntos.

Sabiendo que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 3$ y usando las propiedades de los determinantes, calcular el valor de los siguientes determinantes:

a) (1 punto) $\begin{vmatrix} 2a-2b & c & 5b \\ 2d-2e & f & 5e \\ -2 & 3 & 10 \end{vmatrix}$ b) (1 punto) $\begin{vmatrix} a-1 & b-2 & 2c-6 \\ 2 & 4 & 12 \\ d & e & 2f \end{vmatrix}$

$a)$

$$\begin{vmatrix} 2a & c & 5b \\ 2d & f & 5e \\ 2 & 3 & 10 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -2b & c & 5b \\ -2e & f & 5e \\ -4 & 3 & 10 \end{vmatrix} = 2\cdot 5\cdot \begin{vmatrix} a & c & b \\ d & f & e \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} + (-2)\cdot 5\cdot \begin{vmatrix} b & c & b \\ e & f & e \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 10\cdot(-1)\cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} + (-10)\cdot 0 =$$

$$\begin{vmatrix} 2a-2b & c & 5b \\ 2d-2e & f & 5e \\ -2 & 3 & 10 \end{vmatrix} = (-10)\cdot 3 = -30$$

$b)$

$$\begin{vmatrix} a & b & 2c \\ 2 & 4 & 12 \\ d & e & 2f \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & -2 & -6 \\ 2 & 4 & 12 \\ d & e & 2f \end{vmatrix} = 2\cdot \begin{vmatrix} a & b & 2c \\ 1 & 2 & 6 \\ d & e & 2f \end{vmatrix} + 2\cdot \begin{vmatrix} -1 & -2 & -6 \\ 1 & 2 & 6 \\ d & e & 2f \end{vmatrix} = 2\cdot 2\cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 2 & 3 \\ d & e & f \end{vmatrix} + 2\cdot(-1)\cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 1 & 2 & 6 \\ d & e & 2f \end{vmatrix} =$$

$$= 4\cdot(-1)\cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} + (-2)\cdot 0 = (-4)\cdot 3 + 0 = -12$$

Ejercicio 4.- Calificación máxima 2 puntos

Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, hallar todas las matrices $B=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ que conmutan con **A**, es decir que cumplen **AB = BA**.

$$\begin{cases} A\cdot B=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3a+c & 3b+d\\ a & b\end{pmatrix} \\ B\cdot A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3a+b & a\\ 3c+d & c\end{pmatrix}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}3a+c=3a+b \Rightarrow b=c\\ 3b+d=a\\ 3c+d=a\\ c=b\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}3b+d=a\\ 3b+d=a\end{cases} \Rightarrow 0=0$$

$$B=\begin{pmatrix}\lambda & \beta\\ \beta & \gamma\end{pmatrix}$$