OPCIÓN A

Ejercicio 1.- Calificación máxima 3 puntos

Dada la función $f(x)=(6-x)\,e^{\frac{x}{3}}$, se pide:

a) **(1 punto)** Determinar su dominio, asíntotas y cortes con los ejes.
b) **(1 punto)** Calcular su derivada, intervalos de crecimiento y decrecimiento y extremos relativos.
c) **(1 punto)** Determinar el área del triángulo que forman los ejes coordenados con la tangente a la curva **y = f(x)** en el punto **x = 0**.

$a)$

$$\begin{cases} (6-x)\Rightarrow Existe\ en\ \forall x\in\Re \\ e^{\frac{x}{3}}\Rightarrow Existe\ en\ \forall x\in\Re \end{cases}\Rightarrow Dom\,(f)=\forall x\in\Re$$

No tiene asíntotas verticales

Asíntotas horizontales

$$y=\lim_{x\to\infty}(6-x)\,e^{\frac{x}{3}}=-\infty\cdot\infty=-\infty\Rightarrow No\ existe\ asíntota\ horizontal\ cuando\ x\to\infty$$

$$y=\lim_{x\to-\infty}(6-x)\,e^{\frac{x}{3}}=\lim_{x\to\infty}[6-(-x)]\cdot e^{-\frac{x}{3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{6+x}{e^{\frac{x}{3}}}=\frac{\infty}{\infty}=\xrightarrow{Utilizando\ L'Hopital}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\frac{1}{3}e^{\frac{x}{3}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{3}{e^{\frac{x}{3}}}=\frac{3}{\infty}=0$$

Existe asíntota horizontal, $y=0$ *cuando* $x\to-\infty$

Asíntotas oblicuas

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{(6-x)\,e^{\frac{x}{3}}}{x}=\frac{\infty}{\infty}=\xrightarrow{Utilizando\ L'Hopital}=\lim_{x\to\infty}\frac{-e^{\frac{x}{3}}+\frac{1}{3}(6-x)\,e^{\frac{x}{3}}}{1}=\lim_{x\to\infty}\frac{-e^{\frac{x}{3}}+\frac{1}{3}(6-x)\,e^{\frac{x}{3}}}{1}$$

$$m=\frac{-3e^{\frac{x}{3}}+(6-x)\,e^{\frac{x}{3}}}{3}=\frac{(3-x)\,e^{\frac{x}{3}}}{3}=\frac{\infty}{3}=\infty$$

No existe asíntota oblicua cuando $x\to\infty$

$$m=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{(6-x)\,e^{\frac{x}{3}}}{x}=\frac{\infty}{\infty}=\xrightarrow{Utilizando\ L'Hopital}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-e^{\frac{x}{3}}+\frac{1}{3}(6-x)\,e^{\frac{x}{3}}}{1}=$$

$$m=\lim_{x\to-\infty}\frac{-e^{\frac{x}{3}}+\frac{1}{3}(6-x)\,e^{\frac{x}{3}}}{1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-3e^{\frac{x}{3}}+(6-x)\,e^{\frac{x}{3}}}{3}=\lim_{x\to-\infty}\frac{(3-x)\,e^{\frac{x}{3}}}{3}=\lim_{x\to\infty}\frac{(3+x)\,e^{-\frac{x}{3}}}{3}=\lim_{x\to\infty}\frac{3+x}{3e^{\frac{x}{3}}}=$$

$$=\frac{\infty}{\infty}=\xrightarrow{Utilizando\ L'Hopital}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{3\cdot\frac{1}{3}e^{\frac{x}{3}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{e^{\frac{x}{3}}}=\frac{1}{\infty}=0\Rightarrow No\ existe\ asíntota\ oblicua\ cuando\ x\to-\infty$$

$$Corte\ con\ el\ eje\ OX\Rightarrow y=0\Rightarrow(6-x)\,e^{\frac{x}{3}}=0\Rightarrow 6-x=0\Rightarrow x=6$$

$$Corte\ con\ el\ eje\ OY\Rightarrow x=0\Rightarrow f(0)=(6-0)\,e^{\frac{0}{3}}=6\cdot e^{0}=6\cdot 1=6$$

Continuación del Ejercicio 1 de la opción A

$b)$

$$f'(x)=-e^{\frac{x}{3}}+\frac{1}{3}(6-x)e^{\frac{x}{3}}=\frac{1}{3}e^{\frac{x}{3}}(6-x-3)=\frac{1}{3}(3-x)\,e^{\frac{x}{3}}\Rightarrow Creciente\Rightarrow f'(x)>0\Rightarrow\frac{1}{3}(3-x)\,e^{\frac{x}{3}}>0\Rightarrow$$

$$\begin{cases}\frac{1}{3}>0\Rightarrow\forall x\in\Re\\ e^{\frac{x}{3}}>0\Rightarrow\forall x\in\Re\\ 3-x>0\Rightarrow -x>-3\Rightarrow x<3\end{cases}\Rightarrow Creciente\Rightarrow\forall x\in\Re/x<3\qquad Decreciente\Rightarrow\forall x\in\Re/x>3$$

$$Mínimo\ relativo\Rightarrow x=3\Rightarrow f(3)=(6-3)\,e^{\frac{3}{3}}=3e\qquad De\ creciente\ pasa\ a\ decreciente$$

$c)$

$$\begin{cases}f'(0)=\frac{1}{3}(3-0)\,e^{\frac{0}{3}}=\frac{1}{3}\cdot 3\cdot e^{0}=1\\ f(0)=(6-0)\,e^{\frac{0}{3}}=6\cdot e^{0}=6\end{cases}\Rightarrow y-6=1\cdot(x-0)\Rightarrow y-6=x\Rightarrow x-y+6=0$$

$$\begin{cases}Corte\ con\ OX\Rightarrow y=0\Rightarrow x+6=0\Rightarrow x=-6\\ Corte\ con\ OY\Rightarrow x=0\Rightarrow y-6=0\Rightarrow y=6\end{cases}\Rightarrow Área=\frac{1}{2}\cdot|x\cdot y|=\frac{1}{2}\cdot|(-6)\cdot 6|=\frac{36}{2}=18\,u^{2}$$

Ejercicio 2.- Calificación máxima 3 puntos

Dadas las rectas $r\equiv\begin{cases}x-2z-1=0\\ x+y+z-4=0\end{cases}$ y $s\equiv\{(2+\lambda\,,1-3\lambda\,,\lambda);\lambda\in\Re\}$ se pide:

a) (1 punto) Obtener la recta que pasa por el punto **P(1 , 0 , 5)** y corta perpendicularmente a **r**.
b) (1 punto) Obtener el plano que contiene a la recta **r** y es paralelo a **s**.
c) (1 punto) Hallar la distancia entre las rectas **r** y **s**.

a) El vector **PG**, donde **G** es el punto genérico de la recta **r** es perpendicular al vector director de dicha recta, el producto escalar de ambos es nulo.
Calculado **G**, la recta **t** queda determinada por **P** y el vector **PG** que será su director.

$$y+3z-3=0\Rightarrow y=3-3z\Rightarrow x=1+2z\Rightarrow r\equiv\begin{cases}x=1+2\mu\\ y=3-3\mu\\ z=\mu\end{cases}\Rightarrow$$

$$\begin{cases}\overrightarrow{v_r}=(2\,,-3\,,1)\\ \overrightarrow{PG}=(1+2\mu\,,3-3\mu\,,\mu)-(1\,,0\,,5)=(2\mu\,,3-3\mu\,,-5+\mu)\end{cases}\Rightarrow\overrightarrow{v_r}\perp\overrightarrow{PG}\Rightarrow\overrightarrow{v_r}\cdot\overrightarrow{PG}=0\Rightarrow$$

$$(2\mu\,,3-3\mu\,,-5+\mu)\cdot(2\,,-3\,,1)=0\Rightarrow 4\mu-9+9\mu-5+\mu=0\Rightarrow -14+14\mu=0\Rightarrow 14\mu=14\Rightarrow$$

$$\mu=1\Rightarrow\overrightarrow{PG}=(2\cdot 1\,,3-3\cdot 1\,,-5+1)=(2\,,0\,,-4)\Rightarrow t\equiv\begin{cases}x=1+2\beta\\ y=0\\ z=5-4\mu\end{cases}$$

Continuación del Ejercicio 1 de la opción A

b) Hallamos un plano π que contenga a la recta **r** y sea paralelo a la recta **s**; para ello disponemos del vector director de la recta **s**, del vector director de la recta **r** y el vector **RG**, siendo **G** el punto genérico del plano y **R** un punto cualquiera de la recta r (tomaremos el indicado en su ecuación), estos tres vectores son coplanarios y el producto mixto de los tres es nulo (ya que lo es el volumen del paralelepípedo que forman) y, además, la ecuación buscada del plano.

$$Siendo\ R(1\,,3\,,0) \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{v_r} = (2\,,-3\,,1) \\ \overrightarrow{v_s} = (1\,,-3\,,1) \\ \overrightarrow{RG} = (x\,,y\,,z) - (1\,,3\,,0) = (x-1\,,y-3\,,z) \end{cases} \Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y-3 & z \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$-3(x-1) + (y-3) - 6z + 3z + 3(x-1) - 2(y-3) = 0 \Rightarrow 0(x-1) - (y-3) - 3z = 0 \Rightarrow \pi \equiv y + 3z - 3 = 0$$

c) Hallado el plano π, paralelo a **s** y que contiene a **r**, se halla la distancia de un punto **S** cualquiera de la recta **s** (el indicado en su ecuación) al plano π que es la distancia entre las rectas **r** y **s**

$$Siendo\ S(2\,,1\,,0) \Rightarrow d(r\,,s) = d(R\,,\pi) = \frac{|1+3\cdot 0-3|}{\sqrt{1^2+3^2}} = \frac{|-2|}{\sqrt{10}} = \frac{2\sqrt{10}}{10} = \frac{\sqrt{10}}{5}\ u$$

Ejercicio 3.- Calificación máxima 2 puntos

a) (1 punto) Determine, si es posible, los parámetros α y β de modo que se verifique la igualdad:

$$\alpha\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 3 & -8 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}$$

b) (1 punto) Determine los posibles valores de λ para que el rango de la matriz **A** sea 2, donde

$$A = \lambda\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$a)$

$$\begin{pmatrix} 3\alpha & -4\alpha \\ 5\alpha & -\alpha \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -8 \\ -2 & -5 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3\alpha & -4\alpha \\ 5\alpha & -\alpha \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -8 \\ -2 & -5 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 3\alpha & -4\alpha \\ 5\alpha & -\alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta & 0 \\ 4\beta & \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -8 \\ -2 & -5 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 3\alpha + \beta = 3 \Rightarrow 3\cdot 2 + \beta = 3 \Rightarrow \beta = -3 \\ -4\alpha = -8 \Rightarrow \alpha = 2 \\ 5\alpha + 4\beta = -2 \Rightarrow 5\cdot 2 + 4\beta = -2 \Rightarrow 4\beta = -12 \Rightarrow \beta = -3 \\ -\alpha + \beta = -5 \Rightarrow -2 + \beta = -5 \Rightarrow \beta = -3 \end{cases}$$

$b)$

$$A = \begin{pmatrix} 2\lambda & 2\lambda \\ \lambda & 3\lambda \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\lambda+1 & 2\lambda \\ \lambda & 3\lambda+1 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} 2\lambda+1 & 2\lambda \\ \lambda & 3\lambda+1 \end{vmatrix} = (2\lambda+1)(3\lambda+1) - 2\lambda^2$$

$$|A| = 6\lambda^2 + 2\lambda + 3\lambda + 1 - 2\lambda^2 = 4\lambda^2 + 5\lambda + 1 \Rightarrow Si\ |A| = 0 \Rightarrow 4\lambda^2 + 5\lambda + 1 = 0 \Rightarrow \Delta = 5^2 - 4\cdot 1\cdot 4 = 9$$

$$\lambda = \frac{-5 \pm \sqrt{9}}{2\cdot 4} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = \frac{-5+3}{8} = -\frac{2}{8} = -\frac{1}{4} \\ \lambda = \frac{-5-3}{8} = -1 \end{cases} \Rightarrow \forall \lambda \in \Re - \left\{-1\,,-\frac{1}{4}\right\} \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow rang\ (A) = 2$$

Ejercicio 4.- Calificación máxima 2 puntos
Cierta fundación ha destinado 247 000 euros para la dotación de 115 becas de estudios. El importe de cada beca es de 3000 euros, si el estudiante cursa un grado universitario; de 2000 euros, si cursa formación profesional y de 1500 euros, si realiza estudios de postgrado. Sabiendo que la fundación ha concedido doble número de becas de formación profesional que de postgrado, ¿cuantas becas ha concedido a cada nivel de estudios?

Siendo **U** el número de becas de grado universitario, **F** para los alumnos de formación profesional y **P** para los que realizan estudios de postgrado

$$\begin{cases} U+F+P=115 \\ 3000\cdot U+2000\cdot F+1500\cdot P=247000 \\ F=2P \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} U+F+P=115 \\ 30U+20\cdot F+15\cdot P=2470 \\ F-2P=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} U+F+P=115 \\ 6U+4F+3P=494 \\ F-2P=0 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 115 \\ 6 & 4 & 3 & 494 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 115 \\ 0 & -2 & -3 & -196 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 115 \\ 0 & 0 & -7 & -196 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow -7P=-196 \Rightarrow P=\frac{196}{7}=28 \Rightarrow$$

$$F-2\cdot 28=0 \Rightarrow F=56 \Rightarrow U+56+28=115 \Rightarrow U=115-84=31 \Rightarrow$$

$$Solución \Rightarrow (U\ ,\ F\ ,\ P)=(31\ ,\ 56\ ,\ 28)\ alumnos$$

OPCIÓN B

Ejercicio 1.- Calificación máxima 3 puntos

Dado el sistema de ecuaciones siguiente: $\begin{cases} 2x+(a-1)\,y-2z=a \\ 2x+y-az=2 \\ -x+y+z=1-a \end{cases}$,se pide:

a) **(2 puntos)** Discutirlo según los valores del parámetro **a**.
b) **(1 punto)** Resolverlo cuando sea posible.

$a)$

$$|A|=\begin{vmatrix} 2 & a-1 & -2 \\ 2 & 1 & -a \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & a+1 & 0 \\ 0 & 3 & 2-a \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=(-1)\cdot\begin{vmatrix} a+1 & 0 \\ 3 & 2-a \end{vmatrix}=-(a+1)(2-a)\Rightarrow$$

$$Si\ |A|=0\Rightarrow(a+1)(a-2)=0\Rightarrow\begin{cases} a+1=0\Rightarrow a=-1 \\ a-2=0\Rightarrow a=2 \end{cases}$$

$$\forall a\in\Re-\{-1\,,2\}\Rightarrow|A|\neq0\Rightarrow rang\ (A)=3=Número\ de\ incógnitas\Rightarrow Sist.\,Compatible\ Deter\min ado$$

$Si\ a=-1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 3 & 6 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)\Rightarrow rang\ (A)=2\neq rang\ (A/B)=3\Rightarrow Sistema\ Incompatible$$

$Si\ a=2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right)\Rightarrow$$

$$rang\ (A)=rang\ (A/B)=2<Número\ de\ incógnitas\Rightarrow Sistema\ Compatible\ In\det er\min ado$$

$b)$

$Si\ a=2\Rightarrow Sistema\ Compatible\ In\det er\min ado$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right)\Rightarrow 3y=0\Rightarrow y=0\Rightarrow -x+0+z=-1\Rightarrow x=1+z\Rightarrow Solución\Rightarrow(x\,,\,y\,,\,z)=(1+\lambda\,,\,0\,,\,\lambda)$$

$$\forall a\in\Re-\{-1\,,2\}\Rightarrow Sistema\ Compatible\ Deter\min ado$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & a-1 & -2 & a \\ 2 & 1 & -a & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 1-a \end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & a+1 & 0 & a+2-2a \\ 0 & 3 & 2-a & 2+2-2a \\ -1 & 1 & 1 & 1-a \end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & a+1 & 0 & 2-a \\ 0 & 3 & 2-a & 4-2a \\ -1 & 1 & 1 & 1-a \end{array}\right)\Rightarrow(a+1)y=2-a$$

$$y=\frac{2-a}{a+1}\Rightarrow 3\cdot\frac{2-a}{a+1}+(2-a)z=4-2a\Rightarrow(2-a)z=4-2a-\frac{6-3a}{a+1}\Rightarrow$$

$$(2-a)z=\frac{4a+4-2a^2-2a-6+3a}{a+1}\Rightarrow(2-a)z=\frac{-2a^2+5a-2}{a+1}\Rightarrow z=\frac{-2a^2+5a-2}{(a+1)(2-a)}$$

Continuación del Ejercicio 1 de la opción A

$b)$ *Continuación*

$$-x+\frac{2-a}{a+1}+\frac{-2a^2+5a-2}{(a+1)(2-a)}=1-a \Rightarrow x=-1+a+\frac{4-4a+a^2-2a^2+5a-2}{(a+1)(2-a)}$$

$$x=-1+a+\frac{-a^2+a+2}{(a+1)(2-a)} \Rightarrow x=\frac{(a-1)(a+1)(2-a)}{(a+1)(2-a)}+\frac{-a^2+a+2}{(a+1)(2-a)} \Rightarrow$$

$$x=\frac{(a^2-1)(2-a)}{(a+1)(2-a)}+\frac{-a^2+a+2}{(a+1)(2-a)}=\frac{2a^2-2-a^3+a-a^2+a+2}{(a+1)(2-a)} \Rightarrow x=\frac{-a^3+a^2+2a}{(a+1)(2-a)}$$

$$Solución \Rightarrow (x\ ,\ y\ ,\ z)=\left(\frac{-a^3+a^2+2a}{(a+1)(2-a)}\ ,\ \frac{2-a}{a+1}\ ,\ \frac{-2a^2+5a-2}{(a+1)(2-a)}\right)$$

Ejercicio 2.- Calificación máxima 3 puntos

Dada la función: $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{5-x} & si \quad x\le 0\\ \dfrac{1}{5+x} & si \quad x>0\end{cases}$, se pide:

a) (1 punto) Estudiar la continuidad de **f** y determinar sus asíntotas.
b) (1 punto) Estudiar la derivabilidad de **f** y calcular **f'(x)** donde sea posible.
c) (1 punto) Calcular $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$

$a)$

$$f(x)=\begin{cases} f(0)=\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\dfrac{1}{5-0}=\dfrac{1}{5}\\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\dfrac{1}{5+0}=\dfrac{1}{5}\end{cases} \Rightarrow f(0)=\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^+} f(x)=\frac{1}{5} \Rightarrow Es\ continua\ en\ x=0$$

Es continua en todo su recorrido

$$\begin{cases}5-x=0 \Rightarrow x=5\notin \forall x\Re / x\le 0\\ 5+x=0 \Rightarrow x=-5\notin \forall x\Re / x>0\end{cases} \Rightarrow Dom\,(f)=\forall x\in \Re \Rightarrow No\ existen\ asíntotas\ verticales$$

Asíntotas horizontales

$$y=\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{5+x}=\frac{1}{\infty}=0 \Rightarrow Existe\ asíntota\ horizontal,\ y=0,\ cuando\ x\to\infty$$

$$y=\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{5-x}=\frac{1}{\infty}=0 \Rightarrow Existe\ asíntota\ horizontal,\ y=0,\ cuando\ x\to-\infty$$

No hay asíntotas oblicuas

$b)$

$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{(5-x)^2} & si \quad x<0\\ \dfrac{-1}{(5+x)^2} & si \quad x>0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\lim\limits_{x\to 0^-} f'(x)=\dfrac{1}{(5-0)^2}=\dfrac{1}{25}\\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\dfrac{-1}{(5+0)^2}=-\dfrac{1}{25}\end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to 0^-} f'(x)=\frac{1}{25}\ne \lim_{x\to 0^+} f(x)=-\frac{1}{25}$$

No es derivable en x = 0

Continuación del Ejercicio 2 de la opción A

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \int_{-1}^{0} \frac{1}{5-x}\,dx + \int_{0}^{1} \frac{1}{5+x}\,dx = -\int_{6}^{5} \frac{dt}{t} + \int_{5}^{6} \frac{du}{u} = -[\ln t]_6^5 + [\ln u]_5^6 = -(\ln 5 - \ln 6) + (\ln 6 - \ln 5)$$

$$\begin{cases} 5-x=t \Rightarrow -dx=dt \Rightarrow dx=-dt \Rightarrow \begin{cases} x=-1 \Rightarrow t=6 \\ x=0 \Rightarrow t=5 \end{cases} \\ 5+x=u \Rightarrow dx=du \Rightarrow \begin{cases} x=0 \Rightarrow u=5 \\ x=1 \Rightarrow t=6 \end{cases} \end{cases}$$

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = -\ln 5 - \ln 6 + \ln 6 - \ln 5 = 2\ln 6 - 2\ln 5 = \ln 6^2 - \ln 5^2 = \ln 36 - \ln 25 = \ln \frac{36}{25}$$

Ejercicio 3 : Calificación máxima: 2 puntos.
Sea π el plano que contiene a los puntos **A(0 , 2 , 1)**, **B(1 , 0 , 1)** y **C(-1 , -2 , -1)**. Calcule el volumen del tetraedro que forma el origen de coordenadas con los puntos de intersección de π con cada uno de los ejes coordenados.

Calcularemos el plano π mediante los vectores **AB**, **AC** y **AG**, siendo **G** el punto genérico del plano buscado; estos tres vectores son coplanarios y su producto mixto (que es el volumen del paralelepípedo que forman) es nulo y la ecuación pedida del plano
Una vez obtenido el plano π hallaremos los puntos de corte **D**, **E** y **F** del plano con los ejes **OX**, **OY** y **OZ** respectivamente, un sexto del módulo del producto mixto de los vectores **OD**, **OE** y **OF** es el valor del volumen pedido.(en este proceso no se pueden reducir o aumentar los vectores, hay que realizar el proceso tal como dan los valores de las componentes)

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (1,0,1)-(0,2,1)=(1,-2,0) \\ \overrightarrow{AC} = (-1,-2,-1)-(0,2,1)=(-1,-4,-2)\equiv(1,4,2) \Rightarrow \pi \equiv \left|\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right)\cdot\overrightarrow{AG}\right| = \begin{vmatrix} x & y-2 & z-1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \\ \overrightarrow{AG} = (x,y,z)-(0,2,1)=(x,y-2,z-1) \end{cases}$$

$$-4x+4(z-1)+2(z-1)-2(y-2)=0 \Rightarrow -4x-2(y-2)+6(z-1)=0 \Rightarrow 2x+(y-2)-3(z-1)=0 \Rightarrow$$

$$\pi \equiv 2x+y-3z+1=0$$

Intesección con los ejes

$$OX \equiv \begin{cases} x=\lambda \\ y=0 \Rightarrow 2\lambda+0-3\cdot 0+1=0 \Rightarrow 2\lambda+1=0 \Rightarrow 2\lambda=-1 \Rightarrow \lambda=-\frac{1}{2} \Rightarrow D\begin{cases} x=-\frac{1}{2} \\ y=0 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow D\left(-\frac{1}{2},0,0\right) \\ z=0 \end{cases}$$

$$OY \equiv \begin{cases} x=0 \\ y=\mu \Rightarrow 2\cdot 0+\mu-3\cdot 0+1=0 \Rightarrow \mu+1=0 \Rightarrow \mu=-1 \Rightarrow E\begin{cases} x=0 \\ y=-1 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow E(0,-1,0) \\ z=0 \end{cases}$$

$$OZ \equiv \begin{cases} x=0 \\ y=0 \Rightarrow 2\cdot 0+0-3\eta+1=0 \Rightarrow 3\eta+1=0 \Rightarrow 3\eta=-1 \Rightarrow \eta=-\frac{1}{3} \Rightarrow F\begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=-\frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow F\left(0,0,-\frac{1}{3}\right) \\ z=\eta \end{cases}$$

Continuación del Ejercicio 2 de la opción A

$$\begin{cases} \overrightarrow{OD} = \left(-\frac{1}{2}, 0, 0\right) - (0, 0, 0) = \left(-\frac{1}{2}, 0, 0\right) \\ \overrightarrow{OE} = (0, -1, 0) - (0, 0, 0) = (0, -1, 0) \\ \overrightarrow{OF} = \left(0, 0, -\frac{1}{3}\right) - (0, 0, 0) = \left(0, 0, -\frac{1}{3}\right) \end{cases} \Rightarrow V = \frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{OD} \wedge \overrightarrow{OE}\right) \cdot \overrightarrow{OF}\right| \Rightarrow$$

$$\left(\overrightarrow{OD} \wedge \overrightarrow{OE}\right) \cdot \overrightarrow{OF} = \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{vmatrix} = -\frac{1}{6} \Rightarrow V = \frac{1}{6} \cdot \left|-\frac{1}{6}\right| = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36} u^3$$

Ejercicio 4 : Calificación máxima: 2 puntos.

Dado el plano $\pi \equiv$ **3x + 3y + z - 9 = 0**, se pide:

a) **(1 punto)** Determinar la ecuación del plano perpendicular a π que contiene al eje **OX**.

b) **(1 punto)** Determinar el punto del plano π más cercano al origen de coordenadas.

a) Es un plano β determinado por el vector director del plano dado, por el vector director del eje OX y por el vector OG, siendo O el origen de coordenadas que contiene y G el punto generador del plano; estos tres vectores son coplanarios y su producto mixto (que es el volumen del paralelepípedo que forman) es nulo y la ecuación pedida del plano

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_\pi} = (3, 3, 1) \\ \overrightarrow{v_{OX}} = (1, 0, 0) \\ \overrightarrow{OG} = (x, y, z) - (0, 0, 0) = (x, y, z) \end{cases} \Rightarrow \beta \equiv \left(\overrightarrow{v_\pi} \wedge \overrightarrow{v_{OX}}\right) \cdot \overrightarrow{OG} = \begin{vmatrix} x & y & z \\ 3 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \beta \equiv y - 3z = 0$$

b) Hallaremos la ecuación de la recta **r** que es perpendicular al plano π, por ello tiene como vector director el de ese plano y contiene el origen de coordenadas **O**.

El punto de intersección **P** de la recta hallada y el plano π es el pedido en el problema

$$\overrightarrow{v_r} = \overrightarrow{v_\pi} = (3, 3, 1) \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 0 + 3\lambda \\ y = 0 + 3\lambda \\ z = 0 + \lambda \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 3\lambda \\ y = 3\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \Rightarrow$$

$$Intersección\ con\ el\ plano\ \pi \Rightarrow 3 \cdot 3\lambda + 3 \cdot 3\lambda + \lambda - 9 = 0 \Rightarrow 19\lambda - 9 = 0 \Rightarrow 19\lambda = 9 \Rightarrow \lambda = \frac{9}{19}$$

$$P\begin{cases} x = 3 \cdot \frac{9}{19} \\ y = 3 \cdot \frac{9}{19} \\ z = \frac{9}{19} \end{cases} \Rightarrow P\left(\frac{27}{19}, \frac{27}{19}, \frac{9}{19}\right)$$