OPCIÓN A

Ejercicio 1.- Calificación máxima 3 puntos

Dada la función $f(x) = \begin{cases} xe^{2x} & si \quad x < 0 \\ \dfrac{\ln(x+1)}{x+1} & si \quad x \geq 0 \end{cases}$, donde ln significa logaritmo neperiano, se pide:

a) **(1 punto)** Estudiar la continuidad y derivabilidad de **f(x)** en **x = 0**.

b) **(1 punto)** Calcular el $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

c) **(1 punto)** Calcula $\int_{-1}^{0} f(x)\,dx$

$a)$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 0\cdot e^{2\cdot 0} = 0\cdot e^0 = 0\cdot 1 = 0 \\ f(0) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \dfrac{\ln(0+1)}{0+1} = \dfrac{\ln 1}{1} = \dfrac{0}{1} = 0 \end{cases} \Rightarrow f(0) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = 0$$

Es continua en **x = 0**

$$f'(x) = \begin{cases} e^{2x} + 2xe^{2x} & si \quad x < 0 \\ \dfrac{\frac{1}{x+1}\cdot(x+1) - \ln(x+1)}{(x+1)^2} & si \quad x > 0 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} e^{2x}(1+2x) & si \quad x < 0 \\ \dfrac{1-\ln(x+1)}{(x+1)^2} & si \quad x > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^-} f'(x) = e^{2\cdot 0}(1+2\cdot 0) = e^0(1+0) = 1\cdot 1 = 1 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f'(x) = \dfrac{1-\ln(0+1)}{(0+1)^2} = \dfrac{1-\ln 1}{1^2} = \dfrac{1-0}{1} = 1 \end{cases}$$

Es derivable en **x = 0**

$b)$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} xe^{2x} = \lim_{x\to\infty}(-x)\cdot e^{2\cdot(-x)} = \lim_{x\to\infty}(-x)\cdot e^{-2x} = \lim_{x\to\infty}\frac{-x}{e^{2x}} = -\frac{\infty}{\infty} = \xrightarrow{\text{Utilizando L'Hopital}} =$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}\frac{-1}{e^{2x}} = \frac{-1}{\infty} = 0$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}\frac{\ln(x+1)}{x+1} = \frac{\infty}{\infty} = \xrightarrow{\text{Utilizando L'Hopital}} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x+1}}{1} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x+1} = \frac{1}{\infty} = 0$$

$c)$

$$\int xe^{2x}\,dx = x\cdot\frac{e^{2x}}{2} - \frac{1}{2}\int e^{2x}\,dx = \left(x-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{e^{2x}}{2} = \left(\frac{2x-1}{2}\right)\cdot\frac{e^{2x}}{2} = (2x-1)\cdot\frac{e^{2x}}{4} + K$$

$$\begin{cases} x = u \Rightarrow du = dx \\ e^{2x}\,dx = dv \Rightarrow v = \int e^{2x}\,dx = \int e^t\,\dfrac{dt}{2} = \dfrac{e^t}{2} = \dfrac{e^{2x}}{2} = \end{cases}$$

$$2x = t \Rightarrow 2\,dx = dt \Rightarrow dx = \frac{dt}{2}$$

$$\int_{-1}^{0} xe^{2x}\,dx = \left[(2x-1)\cdot\frac{e^{2x}}{4}\right]_{-1}^{0} = \left[(2\cdot 0-1)\cdot\frac{e^{2\cdot 0}}{4} - (2\cdot 1-1)\cdot\frac{e^{2\cdot 1}}{4}\right] = -\frac{e^0}{4} - \frac{e^2}{4} = -\frac{1}{4}\cdot\left(1+e^2\right)$$

Ejercicio 2.- Calificación máxima 3 puntos

Dadas las rectas $r_1 \equiv \begin{cases} 6x - y - z = 1 \\ 2x - y + z = 1 \end{cases}$ y $r_2 \equiv \begin{cases} 3x - 5y - 2z = 3 \\ 3x + y + 4z = 3 \end{cases}$ se pide:

a) (1 punto) Estudiar la posición relativa de $\mathbf{r_1}$ y $\mathbf{r_2}$
b) (1 punto) Calcular la distancia entre las dos rectas.
c) (1 punto) Hallar la ecuación del plano que contiene a $\mathbf{r_1}$ y al punto **P(1 , 2 , 3)**.

a) Puestas las rectas en ecuaciones paramétricas, e igualando los valores de los puntos generales, tendremos un sistema de tres ecuaciones con dos incógnitas. Si la matriz de los coeficientes ampliada es nula y hay algún valor de la matriz de los coeficientes, de grado 2, no nula, el sistema es Compatible Determinado y las rectas son secantes y se cortan en un punto, de no haber ningún determinante de la matriz de los coeficientes de orden 2, el sistema es Compatible Indeterminado y la rectas se confunden.
Si la matriz del determinante de los coeficientes ampliados no es nulo el sistema es incompatible, si los vectores directores de la rectas son iguales o proporcionales, las rectas son paralelas, de no ser así se cruzarán.

$$\begin{cases} 8x - 2y = 2 \Rightarrow 4x - y = 1 \Rightarrow y = -1 + 4x \Rightarrow 2x - (-1 + 4x) + z = 1 \Rightarrow z = -2x - 1 + 4x \Rightarrow z = 2x \\ 6y + 6z = 0 \Rightarrow y + z = 0 \Rightarrow y = -z \Rightarrow 3x - z + 4z = 3 \Rightarrow 3x + 3z = 3 \Rightarrow x + z = 1 \Rightarrow x = 1 - z \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} r_1 \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = -1 + 4\lambda \\ z = 2\lambda \end{cases} \\ r_2 \equiv \begin{cases} x = 1 - \mu \\ y = -\mu \\ z = \mu \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 1 - \mu \\ -1 + 4\lambda = -\mu \\ 2\lambda = -\mu \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda + \mu = 1 \\ 4\lambda + \mu = 1 \\ 2\lambda + \mu = 0 \end{cases} \Rightarrow |A/B| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$$

$$\textit{Las rectas son paralelas o se cruzan en el espacio}$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_{r_1}} = (1\,,4\,,2) \\ \overrightarrow{v_{r_2}} = (-1\,,-1\,,1) \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{-1} \neq \frac{4}{-1} \Rightarrow \textit{No son paralelas}$$

La rectas $\mathbf{r_1}$ y $\mathbf{r_2}$ se cruzan en el espacio

b) Trazaremos un plano π que contenga a $\mathbf{r_1}$ y sea paralelo a $\mathbf{r_2}$; queda determinado por los vectores directores de $\mathbf{r_1}$ y $\mathbf{r_2}$, y pro el vector $\mathbf{R_1G}$, siendo $\mathbf{R_1}$ un punto cualquiera de la recta $\mathbf{r_1}$ (tomaremos el indicado en su ecuación) y **G** el punto genérico del plano. Los tres vectores son coplanarios y su producto mixto (que es el volumen del tetraedro que determinan) nulo y la ecuación del plano que queríamos determinar.
Se hallara la distancia de un punto $\mathbf{R_2}$ cualquiera de la recta $\mathbf{r_2}$ (tomaremos el indicado en su ecuación) al plano π que es la distancia entre las dos rectas pedida.

$$\textit{Siendo } R_1(0\,,-1\,,0) \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{v_{r_1}} = (1\,,4\,,2) \\ \overrightarrow{v_{r_2}} = (-1\,,-1\,,1) \equiv (1\,,1\,,-1) \\ \overrightarrow{R_1G} = (x\,,y\,,z) - (0\,,-1\,,0) = (x\,,y+1\,,z) \end{cases} \Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x & y+1 & z \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$-4x + 2\cdot(y+1) + z - 4z - 2x + (y+1) = 0 \Rightarrow -6x + 3\cdot(y+1) - 3z = 0 \Rightarrow -2x + y + 1 - z = 0 \Rightarrow$$

$$\pi \equiv 2x - y + z - 1 = 0$$

$$\textit{Siendo } R_2(1\,,0\,,0) \Rightarrow d(r_1\,,r_2) = d(\pi\,,R_2) = \frac{|2\cdot 1 - 0 + 0 - 1|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 1^2}} = \frac{|1|}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{6}\,u$$

Continuación del Ejercicio 2 de la opción A

c) El plano β contiene al vector director de la recta $\mathbf{r_1}$, al vector PR_1, donde R_1 es un punto cualquiera de la recta $\mathbf{r_1}$ y el vector PG, siendo G el punto genérico del plano.
Los tres vectores son coplanarios y su producto mixto (que es el volumen del tetraedro que determinan) nulo y la ecuación del plano β que queríamos determinar.

$$Siendo\ R_1(0\,,-1\,,0)\Rightarrow\begin{cases}\overrightarrow{v_{r_1}}=(1\,,4\,,2)\\ \overrightarrow{PR_1}=(0\,,-1\,,0)-(1\,,2\,,3)=(-1\,,-3\,,-3)\equiv(1\,,3\,,3)\Rightarrow\beta\equiv\begin{vmatrix}x-1 & y-2 & z-3\\ 1 & 3 & 3\\ 1 & 4 & 2\end{vmatrix}=0\Rightarrow\\ \overrightarrow{PG}=(x\,,y\,,z)-(1\,,2\,,3)=(x-1\,,y-2\,,z-3)\end{cases}$$

$$6\,(x-1)+3\,(y-2)+4\,(z-3)-3\,(z-3)-12\,(x-1)-2\,(y-2)=0\Rightarrow-6\,(x-1)+(y-2)+(z-3)=0\Rightarrow$$
$$\beta\equiv 6x-y-z-1=0$$

Ejercicio 3.- Calificación máxima 2 puntos
Se dispone de tres aleaciones **A**, **B** y **C** que contienen entre otros metales, oro y plata en las proporciones indicadas en la tabla adjunta

	Oro (%)	Plata (%)
A	**100**	**0**
B	**75**	**15**
C	**60**	**22**

Se quiere obtener un lingote de 25 gramos con una proporción del 72% de oro y una proporción del 16% de plata, tomando **x** gramos de **A**, **y** gramos de **B** y **z** gramos de **C**. Determínese las cantidades **x**, **y** , **z**

$$\begin{cases}x+y+z=25\\ \dfrac{100}{100}x+\dfrac{75}{100}y+\dfrac{60}{100}z=\dfrac{72}{100}\cdot 25\\ \dfrac{15}{100}y+\dfrac{22}{100}z=\dfrac{16}{100}\cdot 25\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x+y+z=25\\ x+75y+60z=1800\\ 15y+22z=400\end{cases}\Rightarrow|A|=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 75 & 60\\ 0 & 15 & 22\end{vmatrix}=1650+15-900-22=743$$

$$x=\frac{\begin{vmatrix}25 & 1 & 1\\ 1800 & 75 & 60\\ 400 & 15 & 22\end{vmatrix}}{743}=\frac{41250+24000+27000-30000-22500-39600}{743}=\frac{92250-92100}{743}=\frac{150}{743}$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix}1 & 25 & 1\\ 1 & 1800 & 60\\ 0 & 400 & 22\end{vmatrix}}{743}=\frac{39600+400-24000-550}{743}=\frac{40000-24550}{743}=\frac{15450}{743}$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix}1 & 1 & 25\\ 1 & 75 & 1800\\ 0 & 15 & 400\end{vmatrix}}{743}=\frac{30000+375-27000-400}{743}=\frac{30375-27400}{743}=\frac{2975}{743}$$

$$Solución\Rightarrow(x\,,y\,,z)=\left(\frac{150}{743}\,,\frac{15450}{743}\,,\frac{2975}{743}\right)gr$$

Ejercicio 4.- Calificación máxima 2 puntos

Dados dos sucesos **A** y **B** de un experimento aleatorio, con probabilidades tales que $p(A)=\frac{4}{9}$, $p(B)=\frac{1}{2}$ y $p(A\cup B)=\frac{2}{3}$, se pide:

a) **(1 punto)** Comprobar si los sucesos **A** y **B** son independientes o no

b) **(1 punto)** Calcular $p(\overline{A}|B)$, donde $\overline{A}$ denota el suceso complementario de **A**

a)
Comprobar si los sucesos **A** y **B** son independientes o no

Nos dan p(A) = 4/9, p(B) = 1/2, y $p(A\cap B) = 2/3$.

Sabemos que A y B independientes si se verifica: $p(A\cap B) = p(A)\cdot p(B)$

De $p(A\cup B) = p(A) + p(B) - p(A\cap B)$, tenemos $p(A\cap B) = p(A) + p(B) – p(A\cup B) = 4/9 + 1/2 – 2/3 = 5/18$.

Como **$p(A\cap B) = 5/18 \neq p(A).p(B) =$**$(4/9)\cdot(1/2)$ **$= 2/9$, los sucesos A y B no son independientes.**

b)
Calcular $p(\overline{A}|B)$, donde $\overline{A}$ denota el suceso complementario de **A**

Me están pidiendo **$p(A^C/B)$ =** $\frac{p(A^C\cap B)}{p(B)}=\frac{p(A^C) - p(A\cap B)}{p(B)}=\frac{(1 - p(A)) - p(A\cap B)}{p(B)}=$

= [(1 – 4/9) – 5/18] /(1/2) **= 5/9**.

OPCIÓN B

Ejercicio 1.- Calificación máxima 3 puntos

Dada la matriz: $A=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$ y la matriz identidad $I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, se pide:

a) **(0,5 puntos)** Calcular la matriz **B = (A – I) (2I+2A).**
b) **(1,5 puntos)** Determinar el rango de las matrices **A – I**, **A^2 – I**, **A^3 – I**.
c) **(1 punto)** Calcular la matriz inversa de **A^6** en caso de que exista.

$a)$

$$B=(A-I)\cdot 2\cdot(A+I)=2\cdot(A-I)\cdot(A+I)=2\cdot\left(A^2-I^2\right)=2\cdot\left(A^2-I\right)$$

$$A^2=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\Rightarrow B=2\cdot\left[\begin{pmatrix}4&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right]=2\cdot\begin{pmatrix}4&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$b)$

$$A-I=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&1\\0&1&-1\end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&1\\0&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow rang\,(A-I)=2$$

$$A^2-I=\begin{pmatrix}4&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow rang\,\left(A^2-I\right)=1$$

$$A^3=A.A^2=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$A^3-I=\begin{pmatrix}8&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7&0&0\\0&-1&1\\0&1&-1\end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix}7&0&0\\0&-1&1\\0&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow rang\,\left(A^3-I\right)=2$$

$c)$

$$A^6=A^3\cdot A^3=\begin{pmatrix}8&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}8&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}64&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\Rightarrow\left|A^6\right|=\begin{vmatrix}64&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{vmatrix}=64\neq 0\Rightarrow Existe\ A^{-6}$$

$$A^{-6}=\frac{1}{\left|A^6\right|}\cdot adj\,\left(A^6\right)^t\Rightarrow\left(A^6\right)^t=\begin{pmatrix}64&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\Rightarrow adj\,\left(A^6\right)^t=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&64&0\\0&0&64\end{pmatrix}\Rightarrow A^{-6}=\frac{1}{64}\cdot\begin{pmatrix}1&0&0\\0&64&0\\0&0&64\end{pmatrix}$$

$$A^{-6}=\begin{pmatrix}\frac{1}{64}&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

Ejercicio 2.- Calificación máxima 3 puntos

Se considera la función: $f(x)=\frac{e^{-x}}{x^2+1}$,y se pide:

a) **(1 punto)** Obtener la ecuación de la recta tangente a la curva **y = f(x**) en el punto de abscisa **x = 0**.
b) **(1 punto)** Estudiar la existencia de aristas horizontales y verticales de la función **f** y, en su caso, determinarlas.
c) **(1 punto)** Hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función y sus extremos relativos en caso de que existan.

$a)$

$$f'(x)=\frac{-e^{-x}\left(x^2+1\right)-2xe^{-x}}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{-e^{-x}\left(x^2+2x+1\right)}{\left(x^2+1\right)^2}\Rightarrow\begin{cases} f(x)=\frac{e^{-0}}{0^2+1}=\frac{e^0}{1}=\frac{1}{1}=1 \\ f'(x)=-\frac{e^{-0}\left(0^2+2\cdot 0+1\right)}{\left(0^2+1\right)^2}=-\frac{1}{1^2}=-1\end{cases}\Rightarrow$$

$$y-1=-1\cdot(x-0)\Rightarrow y-1=-x\Rightarrow y=1-x\Rightarrow x+y-1=0$$

$b)$

$$f(x)=\frac{e^{-x}}{x^2+1}\Rightarrow\begin{cases} e^{-x}>0\Rightarrow\forall x\in\Re \\ x^2+1=0\Rightarrow x^2=-1\Rightarrow x=\pm\sqrt{-1}\Rightarrow Sin\ solución\end{cases}\Rightarrow Dom\,(f)=\forall x\in\Re\Rightarrow$$

No hay asíntotas verticales

Asíntotas horizontales

$$y=\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{e^{-x}}{x^2+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{e^{-x}\left(x^2+1\right)}=\frac{1}{\infty}=0\Rightarrow Existe\ asíntota\ horizontal,\ y=0, cuando\ x\to\infty$$

$$y=\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^{-x}}{x^2+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^{-(-x)}}{(-x)^2+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^{x}}{x^2+1}=\frac{\infty}{\infty}=\xrightarrow{Utilizando\ L'Hopital}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{2x}=\frac{\infty}{\infty}=$$

$$=\xrightarrow{Utilizando\ L'Hopital}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{2}=\frac{\infty}{2}=\infty\Rightarrow No\ existe\ asíntota\ horizontal\ cuando\ x\to-\infty$$

$c)$

$$f'(x)=(-1)\frac{e^{-x}\left(x^2+2x+1\right)}{\left(x^2+1\right)^2}=(-1)\frac{e^{-x}(x+1)^2}{\left(x^2+1\right)^2}\Rightarrow Creciente\Rightarrow f'(x)>0\Rightarrow\begin{cases} -1<0\Rightarrow\forall x\in\Re \\ e^{-x}>0\Rightarrow\forall x\in\Re \\ (x+1)^2>0\Rightarrow\forall x\in\Re \\ \left(x^2+1\right)^2>0\Rightarrow\forall x\in\Re\end{cases}$$

	$-\infty$ $\quad$ ∞
-1 < 0	**(-)**
$e^{-x}>0$	**(+)**
$(x+1)^2>0$	**(+)**
$(x^2+1)^2>0$	**(+)**
Solución	**(-)**

Decreciente $\forall x\in\Re$
No hay máximos ni mínimos relativos

Ejercicio 3 : Calificación máxima: 2 puntos.
Sea **r** la recta que pasa por los puntos **P_1(3 , 2 , 0)** y **P_2(7 , 0 , 2)**, se pide:
a) Hallar la distancia del punto **Q(3 , 5 , -3)** a la recta **r**
b) Halla el punto de corte de la recta **r** con el plano perpendicular a **r** que pasa por el punto **Q**

a) Para determinar la ecuación de la recta **r** hallaremos el vector **P_1 P_2,** que será el vector director de ella, y con uno de los puntos dados tendremos su ecuación (tomaremos **P_1**)
El vector **QG**, donde **G** es el punto genérico de la recta **r**, es perpendicular al vector director de ella y su producto escalar es nulo. El punto **G** que se calcule es el punto de intersección.
El módulo del vector **QG** es la distancia pedida

$$\overrightarrow{P_1P_2}=(7,0,2)-(3,2,0)=(4,-2,2)\equiv(2,-1,1)\Rightarrow r\equiv\begin{cases}x=3+2\lambda\\ y=2-\lambda\\ z=\lambda\end{cases}$$

$$\overrightarrow{QG}=(3+2\lambda,2-\lambda,\lambda)-(3,5,-3)=(2\lambda,-3-\lambda,\lambda+3)\Rightarrow$$

$$\overrightarrow{P_1P_2}\perp\overrightarrow{QG}\Rightarrow\overrightarrow{P_1P_2}\cdot\overrightarrow{QG}=0\Rightarrow(2,-1,1)\cdot(2\lambda,-3-\lambda,\lambda+3)=0\Rightarrow 4\lambda+3+\lambda+\lambda+3=0\Rightarrow 6\lambda+6=0\Rightarrow$$

$$6\lambda=-6\Rightarrow\lambda=-1\Rightarrow Punto\ de\ \text{int}er\text{sec}ción\Rightarrow G\begin{cases}x=3+2\cdot(-1)\\ y=2-(-1)\\ z=-1\end{cases}\Rightarrow G(1,3,-1)$$

$$\overrightarrow{QG}=(1,3,-1)-(3,5,-3)=(-2,-2,2)\Rightarrow\left|\overrightarrow{QG}\right|=\sqrt{(-2)^2+(-2)^2+2^2}=\sqrt{12}\Rightarrow d(r,Q)=\left|\overrightarrow{QG}\right|=2\sqrt{3}\ u$$

Las coordenadas del punto **G** son las pedidas en el apartado **b)**

Ejercicio 4 : Calificación máxima: 2 puntos.
Se considera el triángulo cuyos vértices son los puntos **A(1 , 3 , -1)**, **B(3 , 1 , 0)** y **C(2 , 5 , 1)** y se pide:
a) **(1 punto)** Determinar razonadamente si el triángulo es equilátero, isósceles o escaleno
b) **(1 punto)** Obtener la medida de sus tres ángulos.

a) Calcularemos los lados del triángulo que son los módulos de los vectores AB, BC y CA, de ser iguales el triángulo es equilátero, si hay dos iguales el triángulo es isósceles y si son distintos, los tres, el triángulo es escaleno

$$\begin{cases}\overrightarrow{AB}=(3,1,0)-(1,3,-1)=(2,-2,1)\Rightarrow\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{2^2+(-2)^2+1^2}=\sqrt{9}=3\,u\\ \overrightarrow{AC}=(2,5,1)-(1,3,-1)=(1,2,2)\Rightarrow\left|\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{1^2+2^2+2^2}=\sqrt{9}=3\,u\\ \overrightarrow{BC}=(2,5,1)-(3,1,0)=(-1,4,1)\Rightarrow\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{(-1)^2+4^2+1^2}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}\,u\end{cases}\Rightarrow Es\ isósceles$$

Continuación del Ejercicio 2 de la opción A

b) Calcularemos el ángulo A de los vectores AB y AC; el B con los vectores BC y BA y el ángulo C con los vectores CA y CB

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (3,1,0)-(1,3,-1) = (2,-2,1) \\ \overrightarrow{AC} = (2,5,1)-(1,3,-1) = (1,2,2) \end{cases} \Rightarrow \cos\hat{A} = \frac{|(2,-2,1)\cdot(1,2,2)|}{\sqrt{2^2+(-2)^2+1^2}\cdot\sqrt{1^2+2^2+2^2}} = \frac{|2-4+2|}{\sqrt{9}\cdot\sqrt{9}} = \frac{0}{9} = 0 \Rightarrow$$

$$\hat{A} = arc\cos(0) = 90^{\circ} = \frac{\pi}{2}$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{BA} = (1,3,-1)-(3,1,0) = (-2,2,-1) \\ \overrightarrow{BC} = (2,5,1)-(3,1,0) = (-1,4,1) \end{cases} \Rightarrow \cos\hat{B} = \frac{|(-2,2,-1)\cdot(-1,4,1)|}{\sqrt{2^2+(-2)^2+1^2}\cdot\sqrt{(-1)^2+4^2+1^2}} = \frac{|2+8-1|}{\sqrt{9}\cdot\sqrt{18}} =$$

$$\cos\hat{B} = \frac{9}{9\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \hat{B} = arc\cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 45^{\circ} = \frac{\pi}{4}$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{CA} = (1,3,-1)-(2,5,1) = (-1,-2,-2) \\ \overrightarrow{CB} = (3,1,0)-(2,5,1) = (1,-4,-1) \end{cases} \Rightarrow \cos\hat{C} = \frac{|(-1,-2,-2)\cdot(1,-4,-1)|}{\sqrt{(-1)^2+(-2)^2+(-2)^2}\cdot\sqrt{1^2+(-4)^2+(-1)^2}} =$$

$$\cos\hat{C} = \frac{|-1+8+2|}{\sqrt{9}\cdot\sqrt{18}} = \frac{9}{9\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \hat{C} = arc\cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 45^{\circ} = \frac{\pi}{4}$$