

## CONCAVIDAD. PUNTOS DE INFLEXIÓN

Estudiar la concavidad de la función  $f(x) = \frac{x^2}{1+x}$  y localizar sus puntos de inflexión.

### Solución

En primer lugar calcularemos las derivadas de primer y segundo orden de la función:

$$f'(x) = \frac{2x(1+x) - x^2}{(1+x)^2} = \frac{x^2 + 2x}{(1+x)^2}.$$
$$f''(x) = \frac{(2x+2)(1+x)^2 - (x^2+2x) \cdot 2(1+x)}{(1+x)^4}$$
$$= \frac{(2x+2)(1+x) - (x^2+2x) \cdot 2}{(1+x)^3} = \frac{2}{(1+x)^3}.$$

Para estudiar el signo de la segunda derivada, observamos que el numerador nunca se anula. En cambio, el denominador se anula en el punto de abscisa  $x = -1$ , que es precisamente el punto que no está en el dominio. Para estudiar el signo en los intervalos que este punto determina, construimos el siguiente diagrama de signos:

	$(-\infty, -1)$	$(-1, \infty)$
$f''(x)$	--	++

Al calcular  $f''(x)$  en un punto del intervalo  $(-\infty, -1)$  resultó un valor negativo y al sustituir en la función un punto del intervalo  $(-1, \infty)$  dió un valor positivo. Eso quiere decir que:

$f$  es cóncava hacia arriba en el intervalo  $(-1, \infty)$ ;  
 $f$  es cóncava hacia abajo en el intervalo  $(-\infty, -1)$ .

Sin embargo no hay punto de inflexión pues el punto  $x = -1$ , en donde cambia la concavidad, no está en el dominio.

Estudiar la concavidad de la función  $f(x) = 2 - |x^5 - 1|$  y localizar sus puntos de inflexión.

### Solución

Debemos descomponer en primer lugar la función para eliminar el valor absoluto.

Como  $x^5 - 1 = (x-1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$  y el segundo factor es siempre positivo, resulta que

$$f(x) = \begin{cases} 2 - (x^5 - 1) & \text{si } x \geq 1 \\ 2 + (x^5 - 1) & \text{si } x < 1 \end{cases} = \begin{cases} 3 - x^5 & \text{si } x \geq 1, \\ 1 + x^5 & \text{si } x < 1. \end{cases}$$

Debemos separar el estudio de la concavidad para cada uno de los intervalos  $(-\infty, 1)$  y  $(1, \infty)$ .

\* En  $(-\infty, 1)$ :  $f'(x) = 5x^4$  (siempre positiva; la función es creciente en ese intervalo).

$f''(x) = 20x^3$ . Realizamos el estudio de los signos como en los ejemplos anteriores:

	$(-\infty, 0)$	$(0, 1)$
$f''(x)$	--	++

\* En  $(1, \infty)$ :  $f'(x) = -5x^4$  (siempre negativa; la función es decreciente en ese intervalo).

$f''(x) = -20x^3$ . En este intervalo  $x$  es siempre positiva; de este modo  $f''(x)$  es negativa.

En definitiva llegamos al siguiente resultado:

$f$  es cóncava hacia arriba en  $(0, 1)$  y cóncava hacia abajo en  $(-\infty, 0)$  y en  $(1, \infty)$ .

Los puntos de abscisa  $x = 0$  y  $x = 1$  son de inflexión pues cambia la concavidad. Al sustituir dichos valores en la función se obtienen los puntos  $(0, 1)$  y  $(1, 2)$ .

Estudiar la concavidad y convexidad de la función

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

### Solución

Para esta función,

$$f'(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}; f''(x) = \frac{(1+x^2)^2(-2) + 2x \cdot [2(1+x^2) \cdot 2x]}{(1+x^2)^4} = \frac{2(3x^2-1)}{(1+x^2)^3}.$$

Observamos que el denominador de  $f''$  es siempre positivo y el numerador se anula cuando  $x = \pm\sqrt{1/3}$ , con lo que tenemos la siguiente tabla de signos:

	$x < -\sqrt{1/3}$	$-\sqrt{1/3} < x < \sqrt{1/3}$	$x > \sqrt{1/3}$
$3x^2 - 1$	++	--	++
$f''(x)$	++	--	++

De aquí deducimos que  $f$  es convexa en  $(-\infty, -\sqrt{1/3})$  y  $(\sqrt{1/3}, \infty)$ , mientras que es cóncava en  $(-\sqrt{1/3}, \sqrt{1/3})$ .