

MATEMÁTICAS II

TEMA 3: ESPACIO AFIN Y EUCLIDEO

- Junio, Ejercicio 4, Opción A
- Junio, Ejercicio 4, Opción B
- Reserva 1, Ejercicio 4, Opción A
- Reserva 1, Ejercicio 4, Opción B
- Septiembre, Ejercicio 4, Opción A
- Septiembre, Ejercicio 4, Opción B

www.yoquieroaprobar.es

Considera los puntos $P(1,0,-1)$, $Q(2,1,1)$ y la recta r dada por $x-5 = y = \frac{z+2}{-2}$.

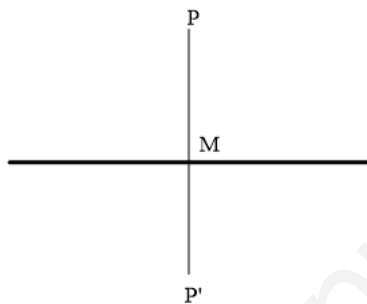
a) Determina el punto simétrico de P respecto de r .

b) Calcula el punto de r que equidista de P y Q .

MATEMÁTICAS II. 2018. JUNIO. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a)



Pasamos la recta a paramétricas: $x-5 = y = \frac{z+2}{-2} \Rightarrow \begin{cases} x = 5+t \\ y = t \\ z = -2-2t \end{cases}$.

Cualquier punto de la recta tendrá de coordenadas $M(5+t, t, -2-2t)$. Queremos que el vector $\overrightarrow{PM} = (5+t-1, t-0, -2-2t+1) = (4+t, t, -1-2t)$ sea perpendicular al vector director de la recta $\vec{u} = (1, 1, -2)$, luego, su producto escalar tiene que valer cero.

$$\overrightarrow{PM} \cdot \vec{u} = 0 \Rightarrow (4+t, t, -1-2t) \cdot (1, 1, -2) = 0 \Rightarrow -6-6t = 0 \Rightarrow t = -1$$

Luego, el punto M es: $M = (4, -1, 0)$.

Si llamamos al punto simétrico $P' = (a, b, c)$, se cumple que:

$$\frac{(1, 0, -1) + (a, b, c)}{2} = (4, -1, 0) \Rightarrow P' = (7, -2, 1)$$

b) Cualquier punto A de la recta tiene de coordenadas: $A(5+t, t, -2-2t)$. Buscamos el que equidista de P y Q , por lo tanto, el módulo del vector $\overrightarrow{PA} = (4+t, t, -1-2t)$ tiene que ser igual al módulo del vector $\overrightarrow{QA} = (3+t, t-1, -3-2t)$

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{PA}| &= |\overrightarrow{QA}| \Rightarrow \sqrt{(4+t)^2 + t^2 + (-1-2t)^2} = \sqrt{(3+t)^2 + (t-1)^2 + (-3-2t)^2} \Rightarrow \\ &\Rightarrow 16+t^2+8t+t^2+1+4t^2+4t = 9+t^2+6t+t^2+1-2t+9+4t^2+12t \Rightarrow \\ &\Rightarrow 6t^2+12t+17 = 6t^2+16t+19 \Rightarrow -4t = 2 \Rightarrow t = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Luego, el punto A de la recta que equidista de P y Q es: $A = \left(5 - \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -2 + 2 \cdot \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{9}{2}, -\frac{1}{2}, -1\right)$

Considera el punto $P(2,-1,3)$ y el plano π de ecuación $3x + 2y + z = 5$.

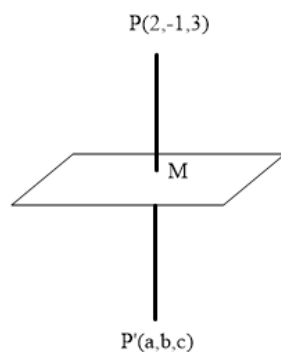
a) Calcula el punto simétrico de P respecto de π .

b) Calcula la distancia de P a π .

MATEMÁTICAS II. 2018. JUNIO. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.

RESOLUCIÓN

a)



Con el vector normal del plano $\vec{n} = (3, 2, 1)$ y el punto P , calculamos la recta que pasa por P y es perpendicular al plano.

$$r \equiv \begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = -1 + 2t \\ z = 3 + t \end{cases}$$

Calculamos el punto M , punto de corte de la recta con el plano

$$3 \cdot (2 + 3t) + 2 \cdot (-1 + 2t) + (3 + t) = 5 \Rightarrow 14t = -2 \Rightarrow t = -\frac{1}{7}$$

Luego, el punto M es: $M = \left(2 - \frac{3}{7}, -1 - \frac{2}{7}, 3 - \frac{1}{7}\right) = \left(\frac{11}{7}, -\frac{9}{7}, \frac{20}{7}\right)$

Calculamos las coordenadas del simétrico

$$M = \frac{P + P'}{2} \Rightarrow \left(\frac{11}{7}, -\frac{9}{7}, \frac{20}{7}\right) = \frac{(2, -1, 3) + (a, b, c)}{2} \Rightarrow \begin{cases} \frac{22}{7} = a + 2 \Rightarrow a = \frac{8}{7} \\ -\frac{18}{7} = b - 1 \Rightarrow b = -\frac{11}{7} \\ \frac{40}{7} = c + 3 \Rightarrow c = \frac{19}{7} \end{cases}$$

Luego, el punto simétrico es $P' \left(\frac{8}{7}, -\frac{11}{7}, \frac{19}{7}\right)$

b) La distancia es el módulo del vector $\vec{PM} = \left(\frac{11}{7} - 2, -\frac{9}{7} + 1, \frac{20}{7} - 3\right) = \left(-\frac{3}{7}, -\frac{2}{7}, -\frac{1}{7}\right)$

$$d(P, \pi) = \left| \vec{PM} \right| = \sqrt{\left(-\frac{3}{7}\right)^2 + \left(-\frac{2}{7}\right)^2 + \left(-\frac{1}{7}\right)^2} = \frac{\sqrt{14}}{7} = 0'534 \text{ u}$$

Se considera el plano π de ecuación $x + 2y + z = 6$.

- Determina la recta perpendicular a π que pasa por el origen de coordenadas.
- Halla el punto simétrico del origen de coordenadas con respecto de π .
- Calcula el volumen del tetraedro determinado por el origen de coordenadas y los puntos de corte de π con los ejes de coordenadas.

MATEMÁTICAS II. 2018. RESERVA 1. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Con el vector normal del plano $\vec{n} = (1, 2, 1)$ y el punto $O = (0, 0, 0)$, calculamos la recta que pasa por O y es perpendicular al plano.

$$r \equiv \begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = t \end{cases}$$

b) Calculamos el punto M , punto de corte de la recta con el plano

$$1 \cdot (t) + 2 \cdot (2t) + 1 \cdot (t) = 6 \Rightarrow 6t = 6 \Rightarrow t = 1$$

Luego, el punto M es: $M = (1, 2, 1)$

Calculamos las coordenadas del simétrico

$$M = \frac{O + O'}{2} \Rightarrow (1, 2, 1) = \frac{(0, 0, 0) + (a, b, c)}{2} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 4 \\ c = 2 \end{cases}$$

Luego, el punto simétrico es $O'(2, 4, 2)$.

c) Calculamos los puntos de corte del plano con los ejes coordenados.

Corte con el eje OX $\Rightarrow x = 6 \Rightarrow A(6, 0, 0)$

Corte con el eje OY $\Rightarrow y = 3 \Rightarrow B(0, 3, 0)$

Corte con el eje OZ $\Rightarrow z = 6 \Rightarrow C(0, 0, 6)$

El volumen del tetraedro es $\frac{1}{6}$ del volumen del paralelepípedo que determinan los tres vectores,

$\vec{OA} = (6, 0, 0)$; $\vec{OB} = (0, 3, 0)$; $\vec{OC} = (0, 0, 6)$, es decir:

$$V = \frac{1}{6} \text{ Valor absoluto de } \begin{vmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} = \frac{108}{6} = 18 u^3$$

Considera las rectas r y s dadas por

$$r \equiv x - 2 = y - 2 = z \quad \text{y} \quad s \equiv \begin{cases} x = 4 + t \\ y = 4 + t \\ z = mt \end{cases}$$

- a) Determina m para que r y s sean paralelas.
b) Halla, si existe, un valor de m para el que ambas rectas sean la misma.
c) Para $m = 1$, calcula la ecuación del plano que contiene a r y a s
- MATEMÁTICAS II. 2018. RESERVA 1. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.**

R E S O L U C I Ó N

a) Pasamos la recta r a paramétricas $r \equiv x - 2 = y - 2 = z \Rightarrow \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 2 + t \\ z = t \end{cases} \Rightarrow A = (2, 2, 0) ; \vec{u} = (1, 1, 1)$

$$s \equiv \begin{cases} x = 4 + t \\ y = 4 + t \\ z = mt \end{cases} \Rightarrow B = (4, 4, 0) ; \vec{v} = (1, 1, m)$$

Si las rectas son paralelas, los vectores tienen que ser linealmente dependientes, es decir, sus componentes tienen que ser proporcionales.

$$\frac{1}{1} = \frac{1}{1} = \frac{1}{m} \Rightarrow m = 1$$

b) Vemos que el punto $B = (4, 4, 0)$ de la recta s , no verifica la ecuación de la recta r

$$4 - 2 = 4 - 2 \neq 0$$

Por lo tanto, no hay ningún valor de m para el cual las rectas sean coincidentes.

c) El plano que nos piden viene definido por el punto $A = (2, 2, 0)$ y los vectores $\vec{u} = (1, 1, 1)$ y $\vec{AB} = (2, 2, 0)$. Luego, la ecuación del plano es:

$$\begin{vmatrix} x-2 & 1 & 2 \\ y-2 & 1 & 2 \\ z & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -2x + 2y - 8 = 0 \Rightarrow x - y + 4 = 0$$

Considera las rectas $r \equiv \frac{x+1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{3}$ y $s \equiv \begin{cases} 2x-3y = -5 \\ y-2z = -1 \end{cases}$

a) Estudia y determina la posición relativa de r y s .

b) Calcula la distancia entre r y s .

MATEMÁTICAS II. 2018. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

RESOLUCIÓN

a) Calculamos las ecuaciones implícitas de la recta r : $\frac{x+1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{3} \Rightarrow \begin{cases} x-2y = -1 \\ 3x-2z = -1 \end{cases}$

Formamos el sistema con las ecuaciones de las dos rectas: $\begin{cases} x-2y = -1 \\ 3x-2z = -1 \\ 2x-3y = -5 \\ y-2z = -1 \end{cases}$ y calculamos el rango de

la matriz de los coeficientes y el de la matriz ampliada del sistema.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & -2 \\ 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{F_2-3F_1 \\ F_3-2F_1}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 6 & -2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{F_2-6F_3 \\ F_4-F_3}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -26 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix} \Rightarrow R(A) = 3$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & -2 & -1 \\ 2 & -3 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{F_2-3F_1 \\ F_3-2F_1}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 6 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{F_2-6F_3 \\ F_4-F_3}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 20 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -2 & 20 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_4-F_3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -2 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & -18 \end{pmatrix} \Rightarrow R(M) = 4$$

Como sale que el rango(A) = 3 y el rango (M) = 4, las dos rectas se cruzan.

b) Calculamos un punto y el vector director de cada recta

$$r \equiv \begin{cases} A = (-1, 0, -1) \\ \vec{u} = (2, 1, 3) \end{cases} ; \quad s \equiv \begin{cases} x = -4 + 3t \\ y = -1 + 2t \\ z = t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = (-4, -1, 0) \\ \vec{v} = (3, 2, 1) \end{cases}$$

Aplicamos la fórmula: $d(r, s) = \frac{|\vec{AB} \cdot (\vec{u} \wedge \vec{v})|}{|\vec{u} \wedge \vec{v}|} = \frac{\begin{vmatrix} -3 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{9}{\sqrt{75}} = 1'039u$

Considera las rectas $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{m} = z$ y $s \equiv \begin{cases} x+nz = -2 \\ y-z = -3 \end{cases}$

a) Halla los valores de m y n para los que r y s se corten perpendicularmente.

b) Para $m = 3$ y $n = 1$, calcula la ecuación general del plano que contiene a r y a s .

MATEMÁTICAS II. 2018. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Escribimos las ecuaciones de las dos rectas en forma paramétrica.

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + mt \\ z = t \end{cases} \Rightarrow A = (1, -1, 0) ; \vec{u} = (2, m, 1)$$

$$s \equiv \begin{cases} x = -2 - ns \\ y = -3 + s \\ z = s \end{cases} \Rightarrow B = (-2, -3, 0) ; \vec{v} = (-n, 1, 1)$$

Los vectores \vec{u} y \vec{v} son perpendiculares, luego: $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow -2n + m + 1 = 0$

Las dos rectas se tienen que cortar en un punto, luego: $Rango(\vec{u}, \vec{v}) = Rango(\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{AB}) = 2$, por lo tanto:

$$\begin{vmatrix} 2 & m & 1 \\ -n & 1 & 1 \\ -3 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -3m + 2n + 3 + 4 = 0 \Rightarrow -3m + 2n + 7 = 0$$

Resolviendo el sistema formado por las dos ecuaciones, tenemos que:

$$\begin{cases} -2n + m + 1 = 0 \\ -3m + 2n + 7 = 0 \end{cases} \Rightarrow m = 4 ; n = \frac{5}{2}$$

b) Estudiamos la posición de las rectas cuando $m = 3$ y $n = 1$.

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + 3t \\ z = t \end{cases} \Rightarrow A = (1, -1, 0) ; \vec{u} = (2, 3, 1)$$

$$s \equiv \begin{cases} x = -2 - s \\ y = -3 + s \\ z = s \end{cases} \Rightarrow B = (-2, -3, 0) ; \vec{v} = (-1, 1, 1)$$

Calculamos el $Rango(\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{AB})$

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -3 & -2 & 0 \end{vmatrix} = -9 + 2 + 3 + 4 = 0 \Rightarrow Rango = 2 \Rightarrow \text{Se cortan en un punto}$$

Luego, el plano viene determinado por el punto A y los vectores \vec{u} y \vec{v}

$$\begin{vmatrix} x-1 & 2 & -1 \\ y+1 & 3 & 1 \\ z & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2x - 3y + 5z - 5 = 0$$