MATRICES

Suma de matrices

$$\mathcal{M}_{m\times n}\times\mathcal{M}_{m\times n}\xrightarrow{+}\mathcal{M}_{m\times n}$$
$$(A,B)\longrightarrow A+B$$

$$\left.\begin{array}{l}A=(a_{ij})\\B=(b_{ij})\end{array}\right\}\Rightarrow A+B=(a_{ij})+(b_{ij})=(a_{ij}+b_{ij})$$

Propiedades:

1. Conmutativa:
$$A+B=B+A$$
2. Asociativa:
$$(A+B)+C=A+(B+C)$$
3. Elemento neutro: La matriz nula, 0
$$A+0=0+A=A$$
4. Elemento simétrico: La matriz opuesta, –A
$$A+(-A)=-A+A=0$$

$(\mathcal{M}_{m\times n},+)$ es un grupo conmutativo

Producto de un número real por una matriz

$$\mathbb{R}\times\mathcal{M}_{m\times n}\xrightarrow{\cdot}\mathcal{M}_{m\times n}$$
$$(\lambda,A)\longrightarrow\lambda\cdot A$$

$$\left.\begin{array}{l}A=(a_{ij})\\\lambda\end{array}\right\}\Rightarrow \lambda\cdot A=\lambda\cdot(a_{ij})=(\lambda\cdot a_{ij})$$

Propiedades:

1. Seudoasociativa:
$$\lambda\cdot(\mu\cdot A)=(\lambda\cdot\mu)\cdot A$$
2. Distributiva respecto a la suma de matrices:
$$\lambda\cdot(A+B)=\lambda\cdot A+\lambda\cdot B$$
3. Distributiva respecto a la suma de números:
$$(\lambda+\mu)\cdot A=\lambda\cdot A+\mu\cdot A$$
4. Elemento unidad: $1\in\mathbb{R}$
$$1\cdot A=A$$

$(\mathcal{M}_{m\times n},\mathbb{R},+,\cdot)$ es un espacio vectorial

Producto de matrices

$$\mathcal{M}_{m\times n}\times\mathcal{M}_{n\times p}\xrightarrow{\cdot}\mathcal{M}_{m\times p}$$
$$(A,B)\longrightarrow A\cdot B$$

$$\left.\begin{array}{l}A=(a_{ij})\\B=(b_{jk})\end{array}\right\}\Rightarrow A\cdot B=C\quad \text{y}\quad c_{ik}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\cdot b_{jk}$$

Propiedades:

Asociativa:
$$(A\cdot B)\cdot C=A\cdot(B\cdot C)$$
Distributiva respecto a la suma por la izquierda:
$$A\cdot(B+C)=A\cdot B+A\cdot C$$
Distributiva respecto a la suma por la derecha:
$$(A+B)\cdot C=A\cdot C+B\cdot C$$
Seudoasociativa
$$\lambda\cdot(A\cdot B)=(\lambda\cdot A)\cdot B=A\cdot(\lambda\cdot B)$$
Matriz identidad
$$A\in M_{m\times n}\ e\ I_n\in M_n\quad\Rightarrow\quad A\cdot I_n=A$$
$$A\in M_{m\times n}\ e\ I_m\in M_m\quad\Rightarrow\quad I_m\cdot A=A$$

Determinante de un producto
$$|A\cdot B|=|A|\cdot|B|$$

Observaciones:

El producto de matrices no cumple la propiedad conmutativa.
$$A\cdot B\neq B\cdot A$$
$$A\cdot B=0\quad\not\Rightarrow\quad\left\{\begin{array}{c}A=0\\ó\\B=0\end{array}\right.$$
$$\left.\begin{array}{r}A\cdot C=B\cdot C\\C\neq 0\end{array}\right\}\quad\not\Rightarrow\quad A=B$$
$$(A+B)^2\neq A^2+2AB+B^2$$
$$(A-B)^2\neq A^2-2AB+B^2$$
$$(A+B)(A-B)\neq A^2-B^2$$

Traspuesta de una matriz es la matriz que se obtiene intercambiando las filas por las columnas	**Inversa de una matriz** A^{-1} es la inversa de $A\Leftrightarrow A\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot A=I$
$(A+B)^t=A^t+B^t$	A es regular $\Leftrightarrow$ A tiene inversa $\Leftrightarrow$ $\lvert A\rvert\neq 0$
$(\lambda\cdot A)^t=\lambda\cdot A^t$	$(\lambda\cdot A)^{-1}=\frac{1}{\lambda}\cdot A^{-1}\quad(\lambda\neq 0)$
$(A\cdot B)^t=B^t\cdot A^t$	$(A\cdot B)^{-1}=B^{-1}\cdot A^{-1}$
$(A^t)^t=A$	$(A^{-1})^{-1}=A$
$I^t=I$	$I^{-1}=I$
$(A^{-1})^t=(A^t)^{-1}$	$(A^t)^{-1}=(A^{-1})^t$
$\lvert A^t\rvert=\lvert A\rvert$	$\lvert A^{-1}\rvert=\frac{1}{\lvert A\rvert}$