Movimiento Ondulatorio

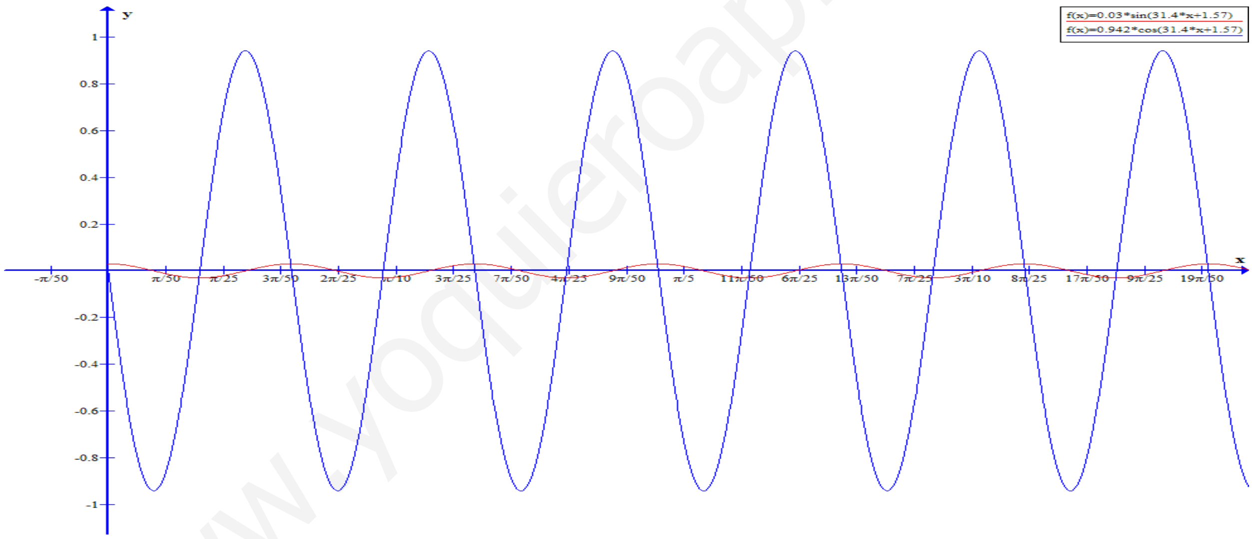
0. Una partícula vibra según la ecuación: $y = 0{,}03 \cdot sen\left(10\pi t + \frac{\pi}{2}\right)$ *(S.I.). Calcular:*

a) Amplitud, periodo y frecuencia del movimiento.
b) Tiempo mínimo que transcurre entre dos instantes en fase.
c) Posición y velocidad iniciales de la partícula.
d) Represente posición y velocidad de dicho movimiento en función del tiempo.

a) Por simple inspección sabemos que la amplitud es A=0,03 m; la pulsación es 10π rad/s; el periodo es 0,2 s y la frecuencia 5 Hz.
b) Entre dos puntos que están en fase el tiempo que transcurre es el periodo 0,2 seg.
c) La posición inicial se calcula sustituyendo t por 0, por tanto y_o=0,03 m, para la velocidad, derivamos la expresión de la elongación:

$$v = \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}\left[0{,}03 \cdot sen\left(10\pi t + \frac{\pi}{2}\right)\right] = 0{,}3\pi \cos\left(10\pi t + \frac{\pi}{2}\right)$$

Y en el instante inicial la velocidad será: v_o=0 m/s



1.- De un resorte elástico de constante K = 500 N/m, cuelga una masa puntual de 5 kg. Estando el conjunto en equilibrio, se desplaza la masa 10 cm, dejándola oscilar libremente a continuación. Calcule:
a) Ecuación de movimiento armónico que describe la masa puntual.
b) Puntos en los que la aceleración de dicha masa es nula.
c) Tiempo que transcurre entre dos instantes en oposición de fase.

a) La ecuación del movimiento ha de ser: $y = A \cdot sen(\omega t + \varphi_o)$

Como estiramos 10 cm, la elongación máxima será 10 cm, y por tanto:

$$A = 0{,}1 \text{ m}$$

Mediante la segunda ley de Newton:

$$\sum \vec{F} = m\cdot\vec{a} \quad \Rightarrow \quad -kx = m\cdot a$$

De donde:

$$-kx = -w^2 \cdot x$$

Y despejando ω, tenemos:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{500 N \cdot m^{-1}}{5 kg}} = 10 rad \cdot s^{-1}$$

Sustituyendo en la ecuación de un MAS:

$$y = 0{,}1 \cdot sen(10t + \varphi_o)$$

Como en el instante inicial $y = 0{,}1m$, quiere esto decir que:

$$sen(10t + \varphi_o) = 1$$

Por tanto el ángulo, ha de ser:

$$10t + \varphi_o = \frac{\pi}{2}$$

Si t= 0, entonces:

$$\varphi_o = \frac{\pi}{2}$$

Y la ecuación del más queda de la forma:

$$y = 0{,}1 \cdot sen\left(10t + \frac{\pi}{2}\right)$$

Si en vez de utilizar el seno, utilizamos el coseno, tendremos:

$$y = 0{,}1 \cdot \cos(10t + \varphi_0)$$

Y para que cumpla las condiciones iniciales, si t=0 y=0,1, entonces

$$\cos(10t + \varphi_o) = 1$$

Y esto ocurre si:

$$\varphi_o = 0$$

Por tanto:

$$y = 0{,}1 \cdot \cos(10t)$$

b) Calculamos la aceleración derivando dos veces la expresión de x:

$$a = \frac{d^2}{dt^2}\left[A \cdot sen\left(10t + \frac{\pi}{2}\right)\right] = -\omega^2 \cdot X$$

Si igualamos a cero, tenemos:

$$0 = -\omega^2 \cdot X$$

Por tanto, para que esto ocurra:

$$x = 0$$

c) El tiempo que transcurre entre dos puntos en oposición de fase es la mitad del periodo, como:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{10} = \frac{\pi}{5} seg$$

El tiempo t será:

$$t = \frac{T}{2} = \frac{\pi}{10} = 0{,}314 \ seg$$

2.- Una partícula de 0,5 kg, que describe un movimiento armónico simple de frecuencia 5/π Hz, tiene inicialmente una energía cinética de 0,2 J, y una energía potencial de 0,8 J.

a) Calcule la posición y velocidad iniciales, así como la amplitud de la oscilación y la velocidad máxima.

b) Haga un análisis de las transformaciones de energía que tienen lugar en un ciclo completo. ¿Cuál sería el desplazamiento en el instante en que las energías cinética y potencial son iguales?

a) La energía cinética viene dada por: $E_c = \frac{1}{2} m \cdot v^2$, si m=0,5 kg y Ec=0,2J, despejando v tenemos:

$$v_o = \sqrt{\frac{2 \cdot E_c}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 0,2}{0,5}} = 0,89\ m \cdot s^{-1}$$

Para calcular la posición inicial, utilizamos la ecuación de la energía potencial:

$$E_p = \frac{1}{2} k \cdot x^2$$

De donde despejando x, tenemos:

$$x = \sqrt{\frac{2 \cdot E_p}{k}}$$

Necesitamos la constante recuperadora, al tener la frecuencia, como esta se calcula mediante:

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

Despejando k, tenemos:

$$k = 4\pi^2 \cdot f^2 \cdot m = 4 \cdot \pi^2 \cdot \frac{25}{\pi^2} \cdot 0,5 = 50 N \cdot m^{-1}$$

Y si sustituimos en x, tenemos:

$$x_o = \sqrt{\frac{2 \cdot E_p}{k}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 0,8}{50}} = 0,18\ m$$

Como la frecuencia del movimiento también es $f = \frac{\omega}{2\pi}$ = 5/π Hz, *su frecuencia angular será:*

$$\omega = 2\pi \cdot f = 2\pi \cdot \frac{5}{\pi} = 10\ rad \cdot s^{-1}$$

La energía mecánica del movimiento es:

$$E_M = E_c + E_p = \frac{1}{2} m \cdot \omega^2 \cdot A^2 = 0,8 + 0,2 = 1\ J$$

Conocidas m y ω, despejamos la Amplitud A:

$$A = \sqrt{\frac{2}{m \cdot \omega^2}} = \sqrt{\frac{2}{0,5 \cdot 100}} = 0,2m$$

De forma que ya tenemos todos los ingredientes para escribir la ecuación del movimiento:

$$y = 0,2 \cdot sen(10t + \varphi_o)$$

Solo nos faltaría calcular la fase inicial, para ello, utilizamos que la energía cinética inicial es de 0,2 J:

$$\text{Como } E_c = \frac{1}{2} m \cdot A^2 \cdot \omega^2 \cdot \cos^2(\omega t + \varphi_o)$$

En nuestro caso, tendremos:

$$E_c = \frac{1}{2} 0,5 \cdot 0,2^2 \cdot 10^2 \cdot \cos^2(10t + \varphi_o) = 0,2 J$$

De donde, despejando la fase inicial:

$$\cos^2(10t + \varphi_o) = 0,2 \quad \Rightarrow \quad \cos(10t + \varphi_o) = 0,447$$

Como estamos en la posición inicial, aquí t=0, y nos queda:

$$\cos(\varphi_o) = 0,447 \quad \Rightarrow \quad \varphi_o = 63,44$$

Por tanto ya tenemos la expresión de la elongación:

$$y = 0,2 \cdot sen(10t + 63,44)$$

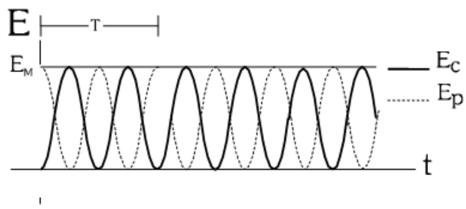
Para la velocidad, tendremos que derivar:

$$v = 2 \cdot \cos(10t + 63,44)$$

Y esta es máxima cuando el coseno es uno, por tanto:

$$v_{máx} = 2\ m \cdot s^{-1}$$

b) Como la E_M se mantiene constante, ocurrirá que $\Delta E_c = -\Delta E_{p_{el}}$, es decir, cuando la E_c es máxima, la E_p es nula, y viceversa, por tanto como la cinética comienza en 0,2J al final del ciclo completo tendrá el mismo valor, 0,2 J. E igual ocurrirá con la Potencial, como al principio vale 0,8J, al final valdrá lo mismo. La variación podemos verla en la siguiente gráfica, en la que hemos representado las energías cinética y potencial con respecto al tiempo.



Cuando ambas energías sean iguales, tendremos: $E_c = E_p$ por tanto:

$$\left.\begin{aligned} E_c &= \frac{1}{2} m \cdot \omega^2 \left(A^2 - X^2\right) \\ E_p &= \frac{1}{2} m \cdot \omega^2 \cdot x^2 \end{aligned}\right\} \frac{1}{2} m \cdot \omega^2 \left(A^2 - x^2\right) = \frac{1}{2} m \cdot \omega^2 \cdot x^2 \quad \Rightarrow \quad A^2 - x^2 = x^2 \quad \Rightarrow \quad A^2 = 2x^2$$

Y despejando x, tenemos:

$$x = \frac{A}{\sqrt{2}} = \frac{0,2}{\sqrt{2}} = 0,14m$$

3.- Un movimiento ondulatorio viene dado, en unidades del S.I., por $y = 5 \cdot \cos(4t + 10x)$; con "y" expresada en metros. Calcular:

a) λ, v, ω, A.
b) Velocidad de propagación de la onda.
c) Perturbación que sufre un punto situado a 3 m. del foco a los 20 s.
d) Expresiones generales de la velocidad y la aceleración de las partículas afectadas por la onda.

a) De la función de onda sabemos: A=5 m; k=10 m^{-1} y $\omega = 4\ rad \cdot s^{-1}$; sabemos además que:

$$k=\frac{2\pi}{\lambda} \quad \Rightarrow \quad \lambda=\frac{2\pi}{k}=\frac{2\pi}{10}=\frac{\pi}{5}\ m$$
$$\omega=4\ rad{\cdot}s^{-1}=\frac{2\pi}{T} \quad \Rightarrow \quad T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}\ seg \quad \Rightarrow \quad f=\frac{1}{T}=\frac{2}{\pi}=0{,}64\ Hz$$

b) La velocidad de propagación de la onda viene dada por: $\upsilon=\frac{\lambda}{T}=\lambda\cdot f=\frac{\pi}{5}\cdot\frac{2}{\pi}=\frac{2}{5}=0{,}4\ m{\cdot}s^{-1}$

c) La perturbación que sufre un punto situado a 3 metros del foco cuando han transcurrido 20 segundos se calcula sustituyendo directamente en la función de onda:

$$y(t,x)=5\cdot\cos(4t+10x) \quad \Rightarrow \quad y(20,3)=5\cdot\cos(4\cdot 20+10\cdot 3)=-5m$$

d) Las expresiones generales de la velocidad y de la aceleración, se obtienen haciendo la primera y las segunda derivada con respecto al tiempo respectivamente de la función de onda.

$$\upsilon=\frac{dy}{dt}=\frac{d}{dt}\left[5\cdot\cos(4t+10x)\right]=-20sen(4t+10x)$$
$$a=\frac{d\upsilon}{dt}=\frac{d}{dt}\left[-20\cdot sen(4t+10x)\right]=-80\cos(4t+10x)$$

4.- La ecuación de una onda es y = 2·sen [2π(5t+0,1x)], en unidades C.G.S. ("y" dada en cm).

a) Calcular: λ, υ, y velocidad de propagación de la onda.

b) ¿Cuál es la velocidad máxima que adquirirán los puntos afectados por la onda? ¿En qué instantes adquirirá dicha velocidad un punto situado a 10 cm de la fuente de perturbación?

a) Si reescribimos la ecuación tenemos: $y=2\cdot sen(10\pi t+0{,}2\pi x)$, como ya sabemos:

$$k=\frac{2\pi}{\lambda} \quad \Rightarrow \quad \lambda=\frac{2\pi}{k}=\frac{2\pi}{0{,}2\pi}=10\ cm=0{,}1\ m$$
$$\omega=10\pi\ rad{\cdot}s^{-1}=\frac{2\pi}{T} \quad \Rightarrow \quad T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2\pi}{10\pi}=\frac{1}{5}=0{,}2\ seg \quad \Rightarrow \quad f=\frac{1}{T}=5\ Hz$$

La velocidad de propagación de la onda viene dada por: $\upsilon=\frac{\lambda}{T}=\lambda\cdot f=0{,}1\cdot 5=0{,}5\ m{\cdot}s^{-1}$ hacia la izquierda, puesto que en la ecuación es de la forma $y=2\cdot sen(10\pi t+0{,}2\pi x)$

b) Para calcular la velocidad máxima, primero calculamos la velocidad de vibración de cualquier partícula haciendo la primera derivada con respecto al tiempo de la función de onda.

$$\upsilon=\frac{dy}{dt}=\frac{d}{dt}\left[2\cdot sen(10\pi t+0{,}2\pi x)\right]=20\pi\cdot\cos(10\pi t+0{,}2\pi x)$$

La velocidad máxima se obtendrá cuando el coseno sea uno, y por tanto:

$$\upsilon_{max}=20\pi\ cm{\cdot}s^{-1}=0{,}628\ m{\cdot}s^{-1}$$

Hemos dicho que para que la velocidad sea máxima, ha de ocurrir que: $\cos(10\pi t+0{,}2\pi x)=\pm 1$, por tanto:

$$10\pi t+0{,}2\pi x=n\cdot\pi$$

Y como dice que el punto está situado a 10 cm de la fuente, tenemos:

$$10\pi t + 0{,}2\pi \cdot 10 = 10\pi t + 2\pi = n \cdot \pi \quad \Rightarrow \quad 10t = n-2 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{n-2}{10} s$$

5. La ecuación de una onda que se propaga por una cuerda es: y(x,t) = 0,5 sen π (8 t - 4 x) (S.I.)

a) Determine la velocidad de propagación de la onda y la velocidad de un punto de la cuerda y explique el significado de cada una de ellas.

b) Represente gráficamente la posición de los puntos de la cuerda en el instante t = 0, y la elongación en x= 0 en función del tiempo.

a) La velocidad de propagación es la velocidad a la que se transmite la energía de una partícula a otra del medio y se calcula mediante: $v = \frac{\lambda}{T} = \lambda \cdot f$, mientras que la velocidad de oscilación de un punto de la cuerda es la velocidad con la que vibra dicho punto y se calcula haciendo la derivada de la elongación con respecto al tiempo: $v = \frac{dy}{dt}$.

Por tanto tendremos que para calcular la velocidad de propagación de la onda necesitamos:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{4\pi} = 0{,}5\ m$$

$$\omega = 8\pi\ rad \cdot s^{-1} = \frac{2\pi}{T} \quad \Rightarrow \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{8\pi} = \frac{1}{4} = 0{,}25\ seg \quad \Rightarrow \quad f = \frac{1}{T} = 4\ Hz$$

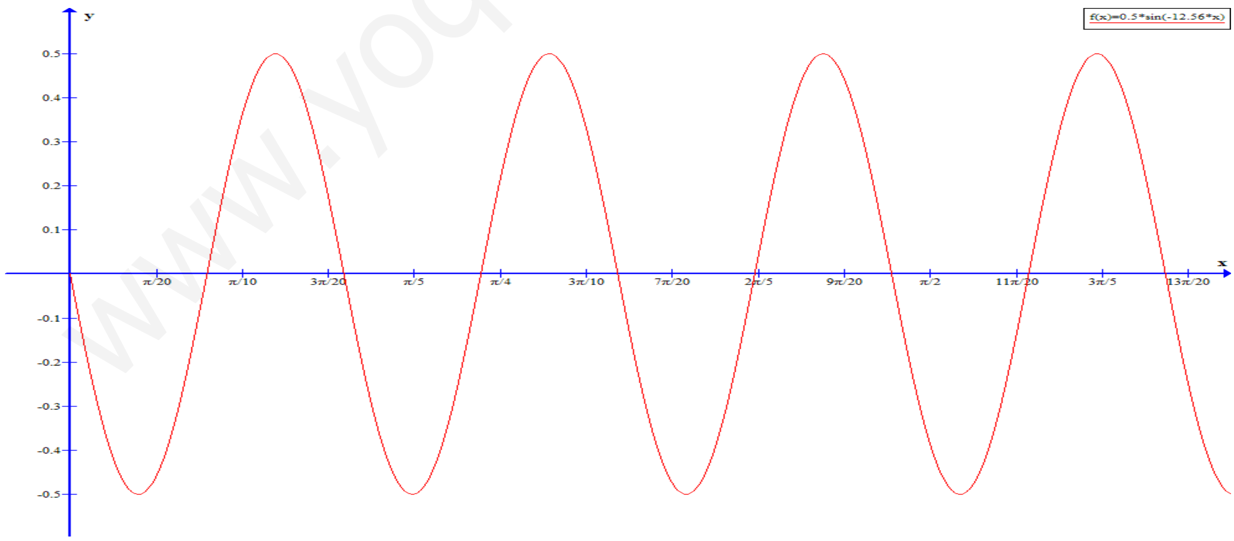
Así que sustituyendo en:

$$v = \frac{\lambda}{T} = \lambda \cdot f = 0{,}5 \cdot 4 = 2 m \cdot s^{-1}$$

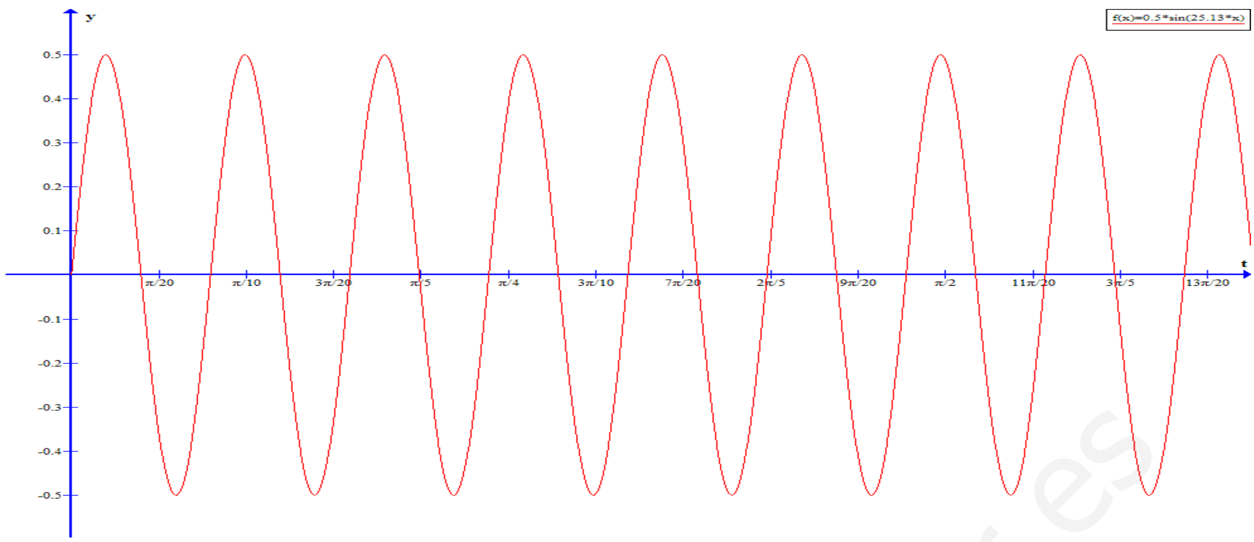
La velocidad de vibración será:

$$v = \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}\left[0{,}5 \cdot sen(8\pi t - 4\pi x)\right] = 4\pi \cdot \cos(8\pi t - 4\pi x) m \cdot s^{-1}$$

b) En t=0, tenemos que la ecuación de la función de onda queda: y(x) = 0,5 sen (-4πx), cuya gráfica es:



En x=0, la elongación será: y(t) = 0,5· sen(8πt), cuya gráfica es:



6.- La ecuación de un onda transversal es y = 10·sen(2πt-10πz) en el S.I.   Calcular:

a) Velocidad de propagación.

b) υ, ω, λ, T y k.

c) Velocidad y aceleración máximas de las partículas de la cuerda afectadas por la onda

a) Como ya sabemos:

$$k = 10\pi = \frac{2\pi}{\lambda} \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{10\pi} = 0{,}2\ m$$

$$\omega = 2\pi\ rad{\cdot}s^{-1} = \frac{2\pi}{T} \quad \Rightarrow \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{2\pi} = 1\ seg \quad \Rightarrow \quad f = \frac{1}{T} = 1\ Hz$$

La velocidad de propagación de la onda viene dada por: $\upsilon = \frac{\lambda}{T} = \lambda{\cdot}f = 0{,}2{\cdot}1 = 0{,}2\ m{\cdot}s^{-1}$ hacia la derecha, debido al valor negativo de k.

b) Hecho en el apartado anterior.

c) Para calcular la velocidad máxima, primero calculamos la velocidad de vibración de cualquier partícula haciendo la primera derivada con respecto al tiempo de la función de onda.

$$\upsilon = \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}\left[10{\cdot}sen(2\pi t - 10\pi z)\right] = 20\pi{\cdot}\cos(2\pi t - 10\pi z)$$

La velocidad máxima se obtendrá cuando el coseno sea uno, y por tanto:

$$\upsilon_{\max} = 20\pi\ m{\cdot}s^{-1} = 62{,}8\ m{\cdot}s^{-1}$$

Para calcular la aceleración máxima, calcularemos la aceleración de vibración de cualquier partícula haciendo la derivada con respecto al tiempo de la velocidad.

$$a = \frac{d\upsilon}{dt} = \frac{d}{dt}\left[20\pi{\cdot}\cos(2\pi t - 10\pi z)\right] = -40\pi{\cdot}sen(2\pi t - 10\pi z)$$

La velocidad máxima se obtendrá cuando el seno sea uno, y por tanto:

$$a_{\max} = -40\pi\ m{\cdot}s^{-2}$$

7.- Escribir la expresión de una onda sinusoidal que se propaga por una cuerda en el sentido positivo del eje OX. La amplitud es 0,02 m, la frecuencia 60 Hz y la velocidad de propagación 10 m/s.

Como la ecuación sinusoidal y se mueve en el sentido positivo del eje x, la función de onda será de la forma:

$$y = A{\cdot}sen\left(\omega t - kx + \varphi_o\right)$$

Si además la amplitud es de 0,02m y su frecuencia es de 60 Hz, podemos calcular la pulsación:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi{\cdot}f = 120\pi$$

Como la velocidad de propagación de la onda viene dada por: $\upsilon = \frac{\lambda}{T} = \lambda{\cdot}f$, podemos calcular la longitud de onda y de aquí el valor de k.

$$\upsilon = \frac{\lambda}{T} = \lambda{\cdot}f \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{\upsilon}{f} = \frac{10}{60} = \frac{1}{6}m$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{\frac{1}{6}} = 12\pi$$

Así que con todo esto podemos decir que la función de onda es:

$$y\left(t,x\right) = 0,02{\cdot}sen(120\pi t - 12\pi x)\ m$$

8.- El periodo de un movimiento ondulatorio que se propaga por el eje OX es $3{\cdot}10^{-3}$ s y la distancia entre los dos puntos más próximos con diferencia de fase $\pi/2$ rad. es de 30 cm en el eje X.

a) Calcular λ y la velocidad de propagación.

b) Si el periodo se duplicase ¿qué le ocurriría a las magnitudes del apartado anterior?

a) Si la distancia entre dos puntos cuya diferencia de fase es $\pi/2$ rad es de 30 cm, tenemos que:

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \frac{\pi}{2}$$

Como la fase de un movimiento ondulatorio es: $\omega t - kx$, tenemos que:

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \left(\omega t - kx_2\right) - \left(\omega t - kx_1\right) = \frac{\pi}{2}$$

Operando un poco llegamos a:

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \left(\omega t - kx_2\right) - \left(\omega t - kx_1\right) = k(x_1 - x_2) = \frac{\pi}{2}$$

Despejando k tenemos:

$$k = \frac{\pi}{2(x_1 - x_2)}$$

Y como la distancia entre esos puntos es de 30 cm, queda:

$$k = \frac{\pi}{2(x_1 - x_2)} = \frac{\pi}{2{\cdot}0,3} = \frac{\pi}{0,6} = \frac{10\pi}{6} = \frac{5\pi}{3}m^{-1}$$

Como además, sabemos que $k = \frac{2\pi}{\lambda}$

Despejando λ, nos queda: $\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{\frac{5\pi}{3}} = \frac{6}{5} = 1,2\ m$

La velocidad de propagación la calculamos mediante: $\upsilon = \frac{\lambda}{T} = \frac{1,2m}{3 \cdot 10^{-3} s} = 400\ m \cdot s^{-1}$

b) Si el periodo se duplicase, la longitud de onda sería la misma, mientras que la velocidad de propagación se reduciría a la mitad.

9.- Una onda sinusoidal se propaga a lo largo de una cuerda. El tiempo que transcurre entre el instante de elongación máxima y el de elongación nula en un punto de la cuerda es de 0,17 s. Calcular:

a) Periodo y frecuencia de la onda

b) Velocidad de propagación si λ = 1,4 m.

a) Si la onda es sinusoidal, su ecuación será: $y = A \cdot sen(\omega t - kx)$, en un punto de elongación máxima, tendremos que $sen(\omega t_1 - kx) = 1$, mientras que en un punto de elongación mínima ocurrirá que: $sen(\omega t_2 - kx) = 0$.

Si el $sen(\omega t_1 - kx) = 1$, es porque $\omega t_1 - kx = \frac{\pi}{2}$, y si el $sen(\omega t_2 - kx) = 0$, es porque $\omega t_2 - kx = 0$, por tanto, tenemos:

$\left.\begin{array}{l} \omega t_1 - kx = \frac{\pi}{2} \\ \omega t_2 - kx = 0 \end{array}\right\}$ sistema que resolvemos restando la segunda ecuación a la primera: $\omega(t_1 - t_2) = \frac{\pi}{2}$

Y de aquí si despejamos ω, nos queda: $\omega = \frac{\pi}{2(t_1 - t_2)} = \frac{\pi}{2 \cdot 0,17} = 9,23 rad \cdot s^{-1}$

$$\text{Como } \omega = \frac{2\pi}{T} \quad \Rightarrow \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{2 \cdot 0,17}} = 4 \cdot 0,17 = 0,68\ s$$

Como el periodo es la inversa de la frecuencia, tenemos que:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{0,68\ s} = 1,47\ Hz$$

b) La velocidad de propagación será:

$$\upsilon = \frac{\lambda}{T} = \frac{1,4m}{0,68s} = 2,06 m \cdot s^{-1}$$

10.- Una onda armónica se propaga por una cuerda tensa según y = 0,4·cos(50t-0,2x) (S.I). Calcular:

a) Longitud de onda λ, y periodo T.

b) Velocidad máxima de oscilación de los puntos de la cuerda.

c) Diferencia de fase, en el mismo instante, entre dos puntos separados 7,5 m.

a) Si k=0,2, entonces como $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ si despejamos de aquí la longitud de onda:

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{0,2} = 10\pi = 31,4\ m$$

como $\omega = \frac{2\pi}{T}$, si despejamos $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{50} = \frac{\pi}{25} = 0,125\ s$

b) Para calcular la velocidad máxima de oscilación, antes tenemos que calcular la velocidad de oscilación, y para ello derivamos la elongación con respecto al tiempo:

$$v=\frac{dy}{dt}=\frac{d}{dt}\left[0,4\cdot cos(50t-0,2x)\right]=-20\cdot sen(50t-0,2x)$$

La velocidad máxima se obtendrá cuando el seno sea uno, y por tanto:

$$v_{max}=-20\ m\cdot s^{-1}$$

$$\varphi_2-\varphi_1=\frac{\pi}{2}$$

c) Como la fase de un movimiento ondulatorio es: $\omega t-kx$, tenemos que la diferencia de fase será:

$$\varphi_2-\varphi_1=(\omega t-kx_2)-(\omega t-kx_1)$$

Operando un poco llegamos a:

$$\varphi_2-\varphi_1=(\omega t-kx_2)-(\omega t-kx_1)=k(x_1-x_2)$$

Por tanto:

$$\varphi_2-\varphi_1=k(x_1-x_2)=0,2\cdot 7,5=1,5\ rad$$

11.- Una onda longitudinal se propaga a lo largo de un resorte en el sentido negativo del eje OX y la distancia más próxima entre dos puntos en fase es de 20 cm. El foco emisor, fijo a un extremo del resorte, vibra con una amplitud de 3 cm y υ = 25 Hz. Determinar:

a) Velocidad de propagación de la onda.

b) Expresión de la onda sabiendo que la perturbación en el instante inicial en x = 0 es nula. Represente gráficamente la elongación en función de la distancia para el instante inicial.

c) Velocidad y aceleración máximas de un punto del resorte.

Si la onda se propaga en el sentido negativo del eje OX, su ecuación será de la forma: $y=A\cdot sen(\omega t+kx+\varphi_o)$, como dice que la distancia mínima entre dos puntos en fase es de 20 cm, y sabemos que dos puntos están en fase si su diferencia es de 2nπ rad, entonces tenemos que:

$$\varphi_2-\varphi_1=2\pi n$$

Como dice que es mínima, entonces n será uno:

$$\varphi_2-\varphi_1=2\pi$$

Como la fase de un movimiento ondulatorio es: $\omega t-kx$, tenemos que:

$$\varphi_2-\varphi_1=(\omega t-kx_2)-(\omega t-kx_1)=2\pi$$

Operando un poco llegamos a:

$$\varphi_2-\varphi_1=(\omega t-kx_2)-(\omega t-kx_1)=k(x_1-x_2)=2\pi$$

Despejando k tenemos:

$$k=\frac{2\pi}{x_1-x_2}=\frac{2\pi}{0,2}=10\pi\ \text{m}^{-1}$$

Como además, sabemos que $k=\frac{2\pi}{\lambda}$

Despejando λ , nos queda: $\lambda=\frac{2\pi}{k}=\frac{2\pi}{10\pi}=\frac{1}{5}=0,2\ m$

Por otra parte, como la frecuencia es 25 Hz,

a) La velocidad de propagación la calculamos mediante: $v = \frac{\lambda}{T} = \lambda \cdot f = 0,2 \cdot 25 = 5\ m \cdot s^{-1}$

Si la distancia mínima entre dos puntos en fase es de 0,2 m, en realidad nos están dando la longitud de onda que como vemos coincide con lo que hemos calculado (innecesariamente).

b) Conocida la amplitud A=0,03, conocido K=10π, solo necesitamos ω y φ_o, para calcular ω como conocemos la frecuencia, basta con: $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f = 50\pi\ rad \cdot s^{-1}$

Así que la ecuación de este movimiento atenderá a:

$$y(t,x) = 0,03 \cdot Sen(50\pi t + 10\pi x + \varphi_o)$$

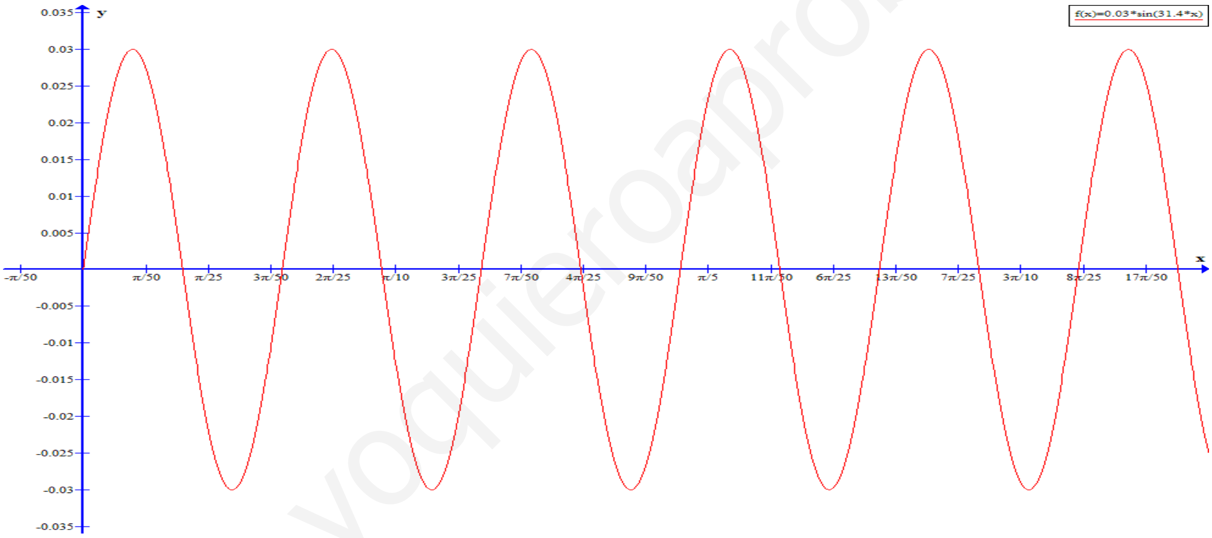
Como en x=0 la perturbación es cero, tenemos:

$$y(0,0) = 0,03 \cdot Sen(\varphi_o) = 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi_o = 0$$

Entonces:

$$y(t,x) = 0,03 \cdot Sen(50\pi t + 10\pi x)$$

Para el instante inicial $y(0,x) = 0,03 \cdot Sen(0 + 10\pi x)$



c) Para calcular la velocidad máxima, primero calculamos la velocidad de vibración de cualquier partícula haciendo la primera derivada con respecto al tiempo de la función de onda.

$$v = \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}\left[0,03 \cdot Sen(50\pi t + 10\pi x)\right] = 1,5\pi \cdot \cos\left(50\pi t + 10\pi x\right)$$

La velocidad máxima se obtendrá cuando el coseno sea uno, y por tanto:

$$v_{max} = 1,5\pi\ m \cdot s^{-1} = 4,712\ m \cdot s^{-1}$$

Para calcular la aceleración máxima, calcularemos la aceleración de vibración de cualquier partícula haciendo la derivada con respecto al tiempo de la velocidad.

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left[1,5\pi \cdot \cos\left(50\pi t + 10\pi x\right)\right] = -75\pi \cdot sen\left(50\pi t + 10\pi x\right)$$

La velocidad máxima se obtendrá cuando el seno sea uno, y por tanto:

$$a_{max} = -75\pi\ m{\cdot}s^{-2} = 235{,}619\ m{\cdot}s^{-2}$$

12.- Una onda transversal y sinusoidal tiene una frecuencia de 40 Hz y se desplaza en la dirección negativa del eje x con una velocidad de 28,8 cm/s. En el instante inicial, la partícula situada en el origen tiene un desplazamiento de 2 cm y su velocidad es de -377 cm/s. Encontrar la ecuación de la onda. ¿Qué datos pueden obtenerse de ella? Represente gráficamente la elongación en función de la distancia en el instante inicial.

Si su frecuencia es de 40 Hz, es porque su periodo es de 0,025 segundos, y su pulsación será:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi{\cdot}f = 80\pi\ rad{\cdot}s^{-1}$$

Si su velocidad de desplazamiento es de 28,8 metros por segundo, como:

$$\upsilon = \frac{\lambda}{T}$$

Despejando la longitud de onda:

$$\lambda = \upsilon{\cdot}T = 28{,}8{\cdot}0{,}025 = 0{,}72\ cm$$

Y como:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{0{,}0072} = \frac{2500}{9}\pi\ \ m^{-1}$$

Así que con todos estos datos la ecuación de este movimiento atenderá a:

$$y(t,x) = A{\cdot}Sen\left(80\pi t + \frac{2500}{9}\pi x + \varphi_o\right)$$

Como en t=0 la partícula situada en el origen está situada en 0,02, tenemos:

$$y(0,0) = A{\cdot}Sen(\varphi_o) = 0{,}02m$$

Y su velocidad es de -377 cm/s, como la velocidad es:

$$\upsilon = \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}\left[A{\cdot}Sen\left(80\pi t + \frac{2500}{9}\pi x + \varphi_o\right)\right] = 80A\pi Cos\left(80\pi t + \frac{2500}{9}\pi x + \varphi_o\right)$$

Tenemos:

$$\upsilon(0,0) = 80A\pi Cos(\varphi_o) = -3{,}77m{\cdot}s^{-1}$$

Según esto, tenemos:

$$\left.\begin{aligned} A{\cdot}Sen(\varphi_o) &= 0{,}02 \\ 80A\pi Cos(\varphi_o) &= -3{,}77 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} A{\cdot}Sen(\varphi_o) &= 0{,}02 \\ ACos(\varphi_o) &= \frac{-3{,}77}{80\pi} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} A^2{\cdot}Sen^2(\varphi_o) &= 4{\cdot}10^{-4} \\ A^2{\cdot}Cos^2(\varphi_o) &= 2{,}25{\cdot}10^{-4} \end{aligned}\right\}$$

Sumando ambas ecuaciones tenemos:

$$A^2 = \frac{1}{1600} \quad \Rightarrow \quad A = \sqrt{\frac{1}{1600}} = \frac{1}{40} = 0{,}025m$$

Y de aquí, como:

$$A{\cdot}Sen(\varphi_o) = 0{,}02 \quad \Rightarrow \quad 0{,}025{\cdot}Sen(\varphi_o) = 0{,}02 \quad \Rightarrow \quad Sen(\varphi_o) = \frac{4}{5} \quad \Rightarrow \quad \varphi_o = 0{,}3\pi\ rad$$

Que sería el ángulo en el primer cuadrante, pero como el ángulo ha de ser del segundo cuadrante ya que la velocidad es negativa, tenemos que:

$$\varphi_o = \pi - 0{,}3\pi = 0{,}7\pi \ rad$$

Y por tanto la función de onda sería:

$$y(t,x) = 0{,}025 \cdot Sen\left(80\pi t + \frac{2500}{9}\pi x + 0{,}7\pi\right)$$

De ella podemos obtener la longitud de onda y el periodo.

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad \Rightarrow \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{80\pi} = \frac{1}{40} = 0{,}025 \ s$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{2500\pi/9} = 0{,}0072 \ m$$

13.- Una onda estacionaria viene dada por y = 0,04 sen(0,4x) cos(25t) (S.I.). ¿Cuál es su velocidad de propagación?. Calcular υ, λ, A y la velocidad de propagación de las Ondas Viajeras.

La velocidad de propagación de una onda estacionaria es nula, ya que son dos ondas de iguales características, que se propagan en sentido contrario.

Sabemos que la ecuación de una onda estacionaria es de la forma: $Y = 2A\cos\frac{2\pi x}{\lambda} sen\frac{2\pi t}{T}$

Por tanto, en esta onda tenemos que A=0,02 m y además:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad \Rightarrow \quad T = \frac{2\pi}{25} = 0{,}2513 \ s \quad \Rightarrow \quad f = \frac{1}{T} = 3{,}98 \ Hz$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{0{,}4} = 5\pi = 15{,}7 \ m$$

La velocidad de propagación de las ondas viajeras vendrá dada por:

$$\upsilon = \frac{\lambda}{T} = \frac{15{,}7}{0{,}2513} = 62{,}475 \ m/s$$

14.- Un alambre vibra según y = 0,5·sen(π/3x)·cos(40πt) (C.G.S). Calcular:

a) υ, A, λ y velocidad de propagación de las ondas viajeras.
b) Distancia entre los nodos.
c) Velocidad de una partícula del alambre que está en x = 1,5 cm en el instante t = 9/8 s.

Sabemos que la ecuación de una onda estacionaria es de la forma:

$$Y = 2A\cos\frac{2\pi x}{\lambda} sen\frac{2\pi t}{T}$$

Por tanto, en esta onda tenemos que

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad \Rightarrow \quad T = \frac{2\pi}{40\pi} = 0{,}05 \ s \quad \Rightarrow \quad f = \frac{1}{T} = 20 \ Hz$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{3}} = 6 \ cm$$

A es la mitad de 0,5; por tanto: A=0,25 cm

La velocidad de propagación de las ondas viajeras vendrá dada por:

$$v = \frac{\lambda}{T} = \frac{6}{0,05} = 1,20\ m/s$$

a) La distancia entre dos nodos o entre dos vientres consecutivos será:

$$x_{n+1} - x_n = \frac{\lambda}{2}$$

Por tanto en nuestro caso será:

$$x_{n+1} - x_n = \frac{\lambda}{2} = 3\ cm$$

b) La velocidad de dicha partícula será:

$$v = \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}\left[0,5\cdot sen\left(\frac{\pi}{3}x\right)\cdot cos(40\pi t)\right] = -40\cdot\pi\cdot 0,5 sen\left(\frac{\pi}{3}x\right)\cdot sen(40\pi t) = -20\pi sen\left(\frac{\pi}{3}x\right)\cdot sen(40\pi t)$$

Para t=9/8 y x=1,5 cm, tenemos:

$$v = -20\pi sen\left(\frac{\pi}{3}\cdot\frac{3}{2}\right)\cdot sen\left(40\pi\frac{9}{8}\right) = -20\pi\cdot 1\cdot sen(45\pi) = 0\ m\cdot s^{-1}$$

15.- La ecuación de una onda transversal en una cuerda es y = 10·cos π(2x-10t) (C.G.S):
a) Escribir la expresión de la onda que, al interferir con ella, producirá una O.E.
b) Indicar la distancia entre los nodos en la O. E. y la amplitud que tendrán los antinodos.

a) Como sabemos para que se produzca una onda estacionaria debe de producirse una interferencia entre dos ondas iguales, pero con sentido opuesto, por tanto la ecuación de la onda que producirá una onda estacionaria con la que nos dan, será la misma pero con sentido contrario:

$$y = 10\cdot cos\ \pi(2x + 10t)$$

b) La distancia entre los nodos de una onda estacionaria viene dada por la mitad de la longitud de onda:

$$x_{n+1} - x_n = \frac{\lambda}{2} = \frac{1}{2} = 0,5\ cm$$

La amplitud de los antinodos o vientres será 2ª, por tanto:

$$A = 20\ cm$$

16.- Una onda viene dada por y = 10·cos(π/6 x)·cos(10t) (C.G.S). Calcular la A de las ondas viajeras y su velocidad de propagación, la distancia entre nodos y entre un nodo y un vientre.

La ecuación de una onda estacionaria atienda a:

$$y = 2A\cos\frac{2\pi x}{\lambda} sen\frac{2\pi t}{T}$$

Por tanto la amplitud de las ondas viajeras será:

$$A = \frac{10\ cm}{2} = 5\ cm$$

La velocidad de propagación de estas se calcula mediante:

$$v=\frac{\lambda}{T}$$

Como:

$$k=\frac{2\pi}{\lambda}=\frac{\pi}{6} \quad \Rightarrow \quad \lambda=\frac{2\pi}{k}=\frac{2\pi}{\frac{\pi}{6}}=12\ cm$$

Y

$$\omega=\frac{2\pi}{T}=10 \quad \Rightarrow \quad T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2\pi}{10}=\frac{\pi}{5}s$$

Y por tanto:

$$v=\frac{\lambda}{T}=\frac{12}{\pi/5}=\frac{60}{\pi}=19{,}09\ cm/s$$

La distancia entre los nodos de una onda estacionaria viene dada por la mitad de la longitud de onda:

$$d_{N-N}=x_{n+1}-x_n=\frac{\lambda}{2}=\frac{12}{2}=6\ cm$$

Y la distancia entre un nodo y un vientre es:

$$d_{N-V}=\frac{\lambda}{4}=\frac{12}{4}=3\ cm$$

17.- La ecuación de una onda es $y = 6\cdot\cos(0{,}2\pi x)\cdot \mathrm{sen}(4\pi t)$ (S.I). Calcular la amplitud de la onda estacionaria y de las ondas cuya superposición podría originarla; la posición de los nodos y antinodos; y la velocidad de una partícula situada en $x = 2$ m.

Por simple inspección, tenemos que:

$$A_{OE}=6\ m$$
$$A=3\ m$$

Los nodos son los puntos donde la amplitud es nula, como $A_r= 6\cdot\cos(0{,}2\pi x)$, tiene por tanto que ocurrir:

$$\cos(0{,}2\pi x)=0 \quad \Rightarrow \quad 0{,}2\pi x=n\frac{\pi}{2}$$

Despejando x, tenemos:

$$x=n\frac{\pi}{2\pi\cdot 0{,}2}=\frac{10}{4}n=\frac{5}{2}n$$

Como la distancia entre nodos es $\frac{\lambda}{2}$, entonces la posición de los nodos será:

$$x=\frac{5}{2}n+n\frac{\lambda}{2}=\frac{n}{2}(5+\lambda)\ m$$

Los vientres o antinodos son los puntos donde la amplitud es máxima, como $A_r= 6\cdot\cos(0{,}2\pi x)$, tiene por tanto que ocurrir:

$$\cos(0{,}2\pi x)=\pm 1 \quad \Rightarrow \quad 0{,}2\pi x=n\pi$$

Despejando x, tenemos:

$$x = n\frac{\pi}{\pi \cdot 0,2} = 5n$$

Como la distancia entre vientres es $\frac{\lambda}{2}$, entonces la posición de los vientres será:

$$x = 5n + n\frac{\lambda}{2} = n\left(5 + \frac{\lambda}{2}\right)\ m$$

Para calcular la velocidad de una partícula situada en x=2 m, tenemos que derivar la ecuación:

$$v = \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}\left[6 \cdot cos(0,2\pi x) \cdot sen(4\pi t)\right] = 24 \cdot \pi \cdot \cos(0,2\pi x) \cdot \cos(4\pi t)$$

Para x=2 m, tenemos:

$$v = 24 \cdot \pi \cdot \cos(0,2\pi 2) \cdot \cos(4\pi t) = 24 \cdot \pi \cdot \cos(0,4\pi) \cdot \cos(4\pi t) = 23,25 \cos(4\pi t)\ m \cdot s^{-1}$$

18.- La ecuación de una onda en una cuerda es y=0,2·cos(0,5πx)·sen(30πt) (S.I.). Determinar:

a) Magnitudes características

b) ¿En qué instantes será máxima la velocidad del punto x = 0,5 m?

c) Amplitud y velocidad de fase de las ondas cuya superposición podría producirla.

a)

En esta onda tenemos que:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad \Rightarrow \quad T = \frac{2\pi}{30\pi} = \frac{1}{15} = 0,067\ s \quad \Rightarrow \quad f = \frac{1}{T} = 15\ Hz$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = 0,5\pi \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{0,5\pi} = 4\ m$$

La Amplitud de la onda estacionaria es 0,2 m

b) La velocidad de un punto viene dada por:

$$v = \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}\left[0,2 \cdot cos(0,5\pi x) \cdot sen(30\pi t)\right] = 6\pi cos(0,5\pi x) \cdot \cos(30\pi t)$$

En x=0,5m, la velocidad será:

$$v = 6\pi\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \cos(30\pi t) = 3\sqrt{2}\pi \cos(30\pi t)$$

Esto será máximo si:

$$\cos(30\pi t) = \pm 1$$

De donde:

$$30\pi t = \pi n$$

Despejando t, tenemos:

$$t = \frac{\pi n}{30\pi} = \frac{n}{30} s$$

La amplitud de las ondas viajeras es 0,1 m, mientras que la velocidad de propagación de las ondas viajeras será:

$$v = \frac{\lambda}{T} = \frac{4}{0,067} = 60\ m/s$$

19.- Calcular la energía cinética de una partícula oscilante de 3 g de masa a su paso por la posición de equilibrio, siendo su periodo 0,2 s y su amplitud 4 cm. Representar dicha energía cinética en función del tiempo y de la elongación.

a) La energía cinética viene dada por: $E_c = \frac{1}{2} m \cdot v^2$, si m=3 g y necesitamos V:

Como el periodo es de 0,2 segundos, podemos calcular la pulsación: $\omega = \frac{2\pi}{0,2} = 10\pi$

La energía mecánica viene dada por: $E_M = \frac{1}{2} m \cdot \omega^2 \cdot A^2$

Sustituyendo los valores tenemos que:

$$E_M = \frac{1}{2} m \cdot \omega^2 \cdot A^2 = \frac{1}{2} 3 \cdot 10^{-3} \cdot (10\pi)^2 \cdot (0,04)^2 = 2,37 \cdot 10^{-3}\, J$$

Por tanto, en el punto donde la velocidad es máxima, tenemos que toda la energía es cinética, así que:

$$E_c = \frac{1}{2} m \cdot \omega^2 \cdot A^2 = \frac{1}{2} 3 \cdot 10^{-3} \cdot (10\pi)^2 \cdot (0,04)^2 = 2,37 \cdot 10^{-3}\, J$$

Sabemos también que la Energía cinética viene dada por:

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m [A \cdot \omega \cdot sen(wt + \varphi_o)] = \frac{1}{2} m \cdot A^2 \cdot \omega^2 \cdot sen^2 (wt + \varphi_o)$$

Si ha de ser máxima, entonces : $sen(wt + \varphi_o) = 1$, y esto ocurre si $\omega t + \varphi_0 = \frac{\pi}{2}$

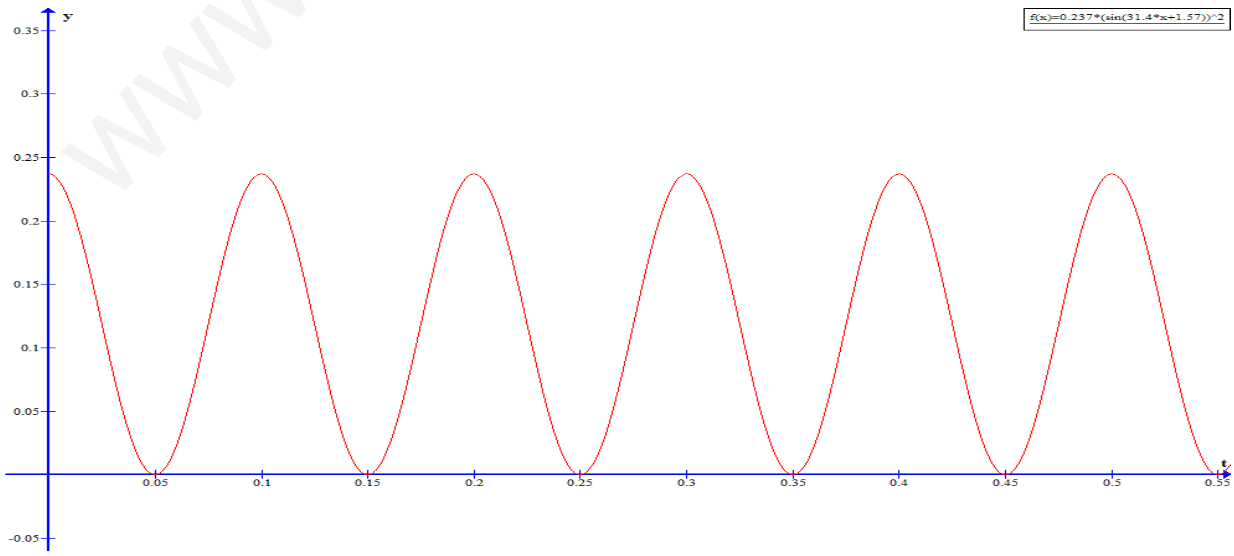
En t=0, tendremos que $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$

Por tanto, la energía cinética será:

$$E_c = \frac{1}{2} m \cdot A^2 \cdot \omega^2 \cdot sen^2 \left(wt + \frac{\pi}{2} \right)$$

Como A=4 cm y $\omega = \frac{2\pi}{0,2} = 10\pi$, nos queda: $E_c = 2,37 \cdot 10^{-3} \cdot sen^2 \left(10\pi t + \frac{\pi}{2} \right)$

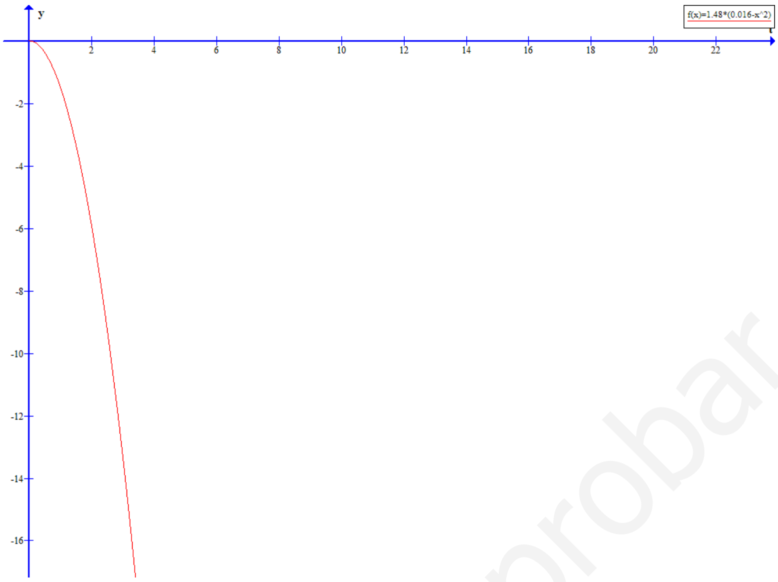
La energía en función del tiempo es:



En función de la elongación tenemos: $E_c = \frac{1}{2} m \cdot \omega^2 \left(A^2 - X^2 \right)$

Por tanto: $E_c = \frac{1}{2} m \cdot \omega^2 \left(A^2 - X^2 \right) = 1,48\left(0,016 - x^2\right)$

Y su dibujo será:

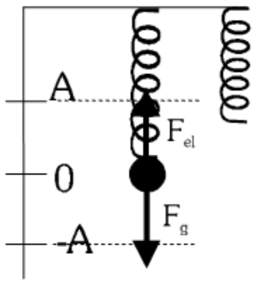


20.- Al suspender un cuerpo de 0,5 kg del extremo libre de un muelle que cuelga verticalmente, se observa un alargamiento de 5 cm. Si, a continuación, se tira hacia abajo del cuerpo, hasta alargar el muelle 2 cm más, y se suelta, comienza a oscilar.

a) Haga un análisis energético del problema y escriba la ecuación del movimiento de la masa.

b) Si, en lugar de estirar el muelle 2 cm, se estira 3 cm, ¿cómo se modificaría la ecuación de movimiento del cuerpo?

a) Una vez el sistema en equilibrio, estaremos en la posición O (Energía potencial cero), si tiramos del muelle 2 cm llegaremos a la posición –A y aquí tendremos energía potencial elástica. Cuando soltemos el cuerpo, el muelle tirará de él hacia arriba de forma que cuando pase por el punto O, toda su energía se habrá transformado en energía cinética. Una ve3z sobrepase el punto O, esta energía cinética volverá a transformarse poco a poco en energía potencial, de forma que en el punto A, volvemos a tener solo energía potencial, ahora el muelle empujará al cuerpo hacia abajo y otra vez la energía potencial elástica se transformará en energía cinética que volverá a ser máxima cuando el cuerpo pase por la posición O.



Para escribir la ecuación del movimiento del cuerpo, tenemos que A= 0,02 m porque es lo que estiramos el muelle. Para calcular la constante del muelle, nos fijamos en la posición de equilibrio, en este punto la suma de fuerzas será cero, y por un lado tendremos el peso y por otro la ley de Hooke. Por tanto:

$$m \cdot g - k \cdot x = 0 \quad \Rightarrow \quad m \cdot g = k \cdot x$$

Y despejando k, tendremos:

$$k = \frac{m \cdot g}{x} = \frac{0,5 \cdot 9,81}{0,05} = 98,1 N \cdot m^{-1}$$

Calculamos la pulsación angular mediante:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{98,1}{0,5}} = 14 rad \cdot s^{-1}$$

De forma que la ecuación del MAS será:

$$y = 0{,}02 \cdot sen(14t + \varphi_0)$$

Solo nos queda calcular la fase inicial:

Como al principio (t=0) tenemos que y=-0,02, entonces $sen(\varphi_0) = -1$ y de aquí que $\varphi_0 = \frac{3\pi}{2}$, por tanto la ecuación del movimiento quedará de la forma:

$$y = 0{,}02 \cdot sen\left(14t + \frac{3\pi}{2}\right) \text{ m}$$

b) Si estiráramos el muelle 3 cm solo cambiaría la amplitud del movimiento, de forma que ahora la ecuación sería:

$$y = 0{,}03 \cdot sen\left(14t + \frac{3\pi}{2}\right) \text{ m}$$

21.- Un objeto de 0,2 kg, unido al extremo de un resorte, efectúa oscilaciones armónicas de 0´1π s de periodo y su energía cinética máxima es de 0,5 J.

a) Escriba la ecuación de movimiento del objeto y determine la constante elástica del resorte.

b) Explique cómo cambiarían las características del movimiento si: i) se sustituye el resorte por otro de constante elástica doble; ii) se sustituye el objeto por otro de masa doble.

a) Conocido el periodo, podemos calcular la pulsación: $\omega = \frac{2\pi}{0{,}1\pi} = 20 \; rad \cdot s^{-1}$. Además, sabemos que la ecuación de un movimiento armónico atiende a: $x = A \cdot sen(\omega t + \varphi_o)$, y que la velocidad de oscilación de las partículas viene dada por su derivada con respecto al tiempo: $v = A \cdot \omega \cos(\omega t + \varphi_o)$, como la energía cinética viene dada por la mitad del producto de la masa por la velocidad al cuadrado: $E_c = \frac{1}{2} m \cdot v^2$, si sustituimos v por la derivada, tenemos $E_c = \frac{1}{2} m \cdot A^2 \omega^2 \cos^2(\omega t + \varphi_o)$.

Como nos dicen que la energía cinética es máxima, esta será máxima cuando el coseno cuadrado sea 1, por tanto, la energía cinética máxima será: $E_{c_{máx}} = \frac{1}{2} m \cdot A^2 \omega^2$, de donde si despejamos la amplitud obtenemos:

$$A = \sqrt{\frac{2E_c}{m\omega^2}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 0{,}5J}{0{,}2kg \cdot 400}} = 0{,}11 \; m$$

Por tanto la ecuación del movimiento será:

$$x = 0{,}11 \cdot Sen(20t + \varphi_o)$$

Para calcular el desfase inicial, suponemos que en el instante inicial, la partícula se encuentra en A, y por tanto:

$$A = A \cdot Sen(20t + \varphi_o)$$

Si: $A = A \cdot Sen(20t + \varphi_o) \quad \Rightarrow \quad Sen(20t + \varphi_o) = 1 \quad \Rightarrow \quad 20t + \varphi_o = \frac{\pi}{2}$

Y en t=0 ocurre que $\varphi_o = \frac{\pi}{2}$

Por tanto la ecuación del movimiento es: $x = 0{,}11 \cdot Sen\left(20t + \frac{\pi}{2}\right)$

Si la expresamos en función del coseno, tenemos:

$$x = 0{,}11 \cdot Cos(20t)$$

Si aplicamos la segunda ley de Newton, tenemos:

$$\sum F = m \cdot a \quad \Rightarrow \quad -kx = m \cdot a \quad \Rightarrow \quad -kx = -m \cdot \omega^2 \cdot x$$

Despejando k, tenemos:

$$k = m \cdot \omega^2 = 0,2 \cdot 400 = 80\ N \cdot m^{-1}$$

b) Como la amplitud es independiente del valor k y de m.

- Si la constante elástica se dobla, tenemos que K'=2K, y por tanto como $\omega' = \sqrt{\frac{2k}{m}} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{2} \cdot \omega$, así que la nueva pulsación aparece multiplicada por $\sqrt{2}$ y por tanto el nuevo periodo será: $T' = \frac{T}{\sqrt{2}}$

- Si por el contrario se dobla la masa, tenemos que m'=2m, y por tanto como $\omega'' = \sqrt{\frac{k}{2m}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \omega$, así que la nueva pulsación aparece dividida por $\sqrt{2}$ y por tanto el nuevo periodo será: $T'' = \sqrt{2} \cdot T$

22.- Sobre un plano horizontal sin rozamiento se encuentra un bloque de masa m = 1´5 kg, sujeto al extremo libre de un resorte horizontal fijo por el otro extremo. Se aplica al bloque una fuerza de 15 N, produciéndose un alargamiento del resorte de 10 cm y en esta posición se suelta el cuerpo, que inicia un movimiento armónico simple.

a) Escriba la ecuación de movimiento del bloque.

b) Calcule las energías cinética y potencial cuando la elongación es de 5 cm.

a) Sabemos que en los muelles la deformación está relacionada con la fuerza mediante la Ley de Hooke:

$$\vec{F} = -K \cdot \vec{x}$$

Así que conocidas la fuerza y el alargamiento, podemos calcular la constante recuperadora del muelle:

$$K = \frac{F}{x} = \frac{15N}{0,1m} = 150 N \cdot m^{-1}$$

Como además en este tipo de movimientos, la constante K está relacionada con la pulsación:

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{m}} = \sqrt{\frac{150}{1,5}} = 10 rad \cdot s^{-1}$$

Por tanto con todos estos datos ya podemos escribir la ecuación del movimiento, que atiende a:

$$x = 0,1 \cdot Sen(10t + \varphi_o)$$

Para calcular el desfase inicial, suponemos que en el instante inicial, la partícula se encuentra en 0,1 m y por tanto:

$$0,1 = 0,1 \cdot Sen\left(10t + \varphi_o\right)$$

Si: $0,1 = 0,1 \cdot Sen\left(10t + \varphi_o\right) \quad \Rightarrow \quad Sen\left(10t + \varphi_o\right) = 1 \quad \Rightarrow \quad 10t + \varphi_o = \frac{\pi}{2}$

Y en t=0 ocurre que $\varphi_o = \frac{\pi}{2}$

Por tanto la ecuación del movimiento es: $x = 0{,}1 \cdot Sen\left(10t + \frac{\pi}{2}\right)$

b) Cuando la elongación es x=0,05 m, como la energía potencial es $Ep = \frac{1}{2}k \cdot x^2$, entonces:

$$Ep = \frac{1}{2}k \cdot x^2 = \frac{1}{2}150 \cdot 0{,}05^2 = 0{,}1875\ J$$

Además, la energía cinética se puede calcular como $Ec = \frac{1}{2}m \cdot \omega^2 \cdot (A^2 - x^2)$, así que:

$$Ec = \frac{1}{2}m \cdot \omega^2 \cdot (A^2 - x^2) = \frac{1}{2}1{,}5 \cdot 100 \cdot (0{,}01 - 0{,}0025) = 0{,}5625\ J$$

23.- Una partícula de 50 g vibra a lo largo del eje X, alejándose como máximo 10 cm a un lado y a otro de la posición de equilibrio (x = 0). El estudio de su movimiento ha revelado que existe una relación sencilla entre la aceleración y la posición que ocupa en cada instante: a = - 16 π^2 x.

a) Escriba las expresiones de la posición y de la velocidad de la partícula en función del tiempo, sabiendo que este último se comenzó a medir cuando la partícula pasaba por la posición x = 10 cm.

b) Calcule las energías cinética y potencial de la partícula cuando se encuentra a 5 cm de la posición de equilibrio.

a) Sabemos que la aceleración de un MAS viene dada por la expresión $a = -\omega^2 \cdot x$, así que de aquí tenemos que $\omega = 4\pi$. Además, la amplitud es de 0,1 m puesto que se aleja como máximo 0,1m de la posición de equilibrio, por tanto la ecuación del movimiento será:

$$x = 0{,}1 \cdot Sen(4\pi t + \varphi_o)$$

Para calcular el desfase inicial, utilizamos que en el instante inicial, la partícula se encontraba en la posición 0,1m y por tanto:

$$0{,}1 = 0{,}1 \cdot Sen(4\pi t + \varphi_o)$$

Si: $0{,}1 = 0{,}1 \cdot Sen(4\pi t + \varphi_o) \quad \Rightarrow \quad Sen(4\pi t + \varphi_o) = 1 \quad \Rightarrow \quad 4\pi t + \varphi_o = \frac{\pi}{2}$

Y en t=0 ocurre que $\varphi_o = \frac{\pi}{2}$

Por tanto la ecuación del movimiento es: $x = 0{,}1 \cdot Sen\left(4\pi t + \frac{\pi}{2}\right)$

La ecuación de la velocidad la conseguimos haciendo su derivada con respecto al tiempo:

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\left[0{,}1 \cdot Sen\left(4\pi t + \frac{\pi}{2}\right)\right] = 0{,}4\pi \cos\left(4\pi t + \frac{\pi}{2}\right) m \cdot s^{-1}$$

b) Cuando la partícula se encuentra a 5 cm de la posición de equilibrio tenemos que la elongación es x=0,05 m, y como la energía potencial es $Ep = \frac{1}{2}k \cdot x^2$, entonces:

$$Ep = \frac{1}{2}m \cdot \omega^2 \cdot x^2 = \frac{1}{2}0{,}05 \cdot 16\pi^2 \cdot 0{,}05^2 = 9{,}87 \cdot 10^{-3}\ J$$

Además, la energía cinética se puede calcular como $Ec = \frac{1}{2}m \cdot \omega^2 \cdot (A^2 - x^2)$, así que:

$$Ec = \frac{1}{2}m \cdot \omega^2 \cdot (A^2 - x^2) = \frac{1}{2}0{,}05 \cdot 16\pi^2 \cdot (0{,}01 - 0{,}0025) = 0{,}03\ J$$

24.- Un bloque de 0´5 kg cuelga del extremo inferior de un resorte de constante elástica k = 72 N·m^{-1}. Al desplazar el bloque verticalmente hacia abajo de su posición de equilibrio comienza a oscilar, pasando por el punto de equilibrio con una velocidad de 6 m·s^{-1}.

a) Razone los cambios energéticos que se producen en el proceso.

b) Determine la amplitud y la frecuencia de oscilación.

a) En la oscilación vertical, y despreciando el rozamiento, la partícula sólo está sometida a dos fuerzas conservativas, el peso y la fuerza elástica. Por consiguiente, la energía mecánica del sistema se mantendrá constante. Las energías presentes (cinética, potencial elástica y potencial gravitatoria) varían de la siguiente forma durante una oscilación completa:

$$E_c = \frac{1}{2}m{\cdot}v_y^2 \qquad E_{p_e} = \frac{1}{2}K{\cdot}y^2 \qquad E_{p_g} = m{\cdot}g{\cdot}h$$

En el punto más alto de la oscilación, la energía potencial gravitatoria es máxima, así como la elástica, ya que el muelle sufre su máxima compresión. En este punto la velocidad de la partícula es nula, por lo que la energía cinética también lo es. Al descender, disminuyen las energías gravitatoria y cinética, al tiempo que aumenta la energía cinética, hasta pasar por la posición de equilibrio, donde la E_c es máxima y la E_p elástica es nula (estiramiento cero).

A partir de este momento, con el estiramiento del muelle, vuelve a aumentar la energía potencial elástica, a costa de la disminución de la cinética, que llega a anularse en el punto de máximo estiramiento (el más bajo de la trayectoria), siendo otra vez máxima la energía elástica. La energía gravitatoria alcanza su valor más bajo.

A partir de aquí, el proceso se repite a la inversa. Durante la subida disminuye la energía elástica almacenada, transformándose en energía cinética y energía gravitatoria. Al pasar por la posición de equilibrio, nuevamente la E_c es máxima y la elástica se anula. Finalmente, al seguir ascendiendo se comprime el muelle, con lo que la E_c disminuye hasta anularse en el punto más alto, al tiempo que la energía elástica vuelve a aumentar hasta su valor máximo.

b) La constante K está relacionada con la pulsación mediante:

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{m}} = \sqrt{\frac{72}{0,5}} = 12 rad{\cdot}s^{-1}$$

Si cuando pasa por el punto de equilibrio lleva una velocidad de 6m·s^{-1}, es porque esta es la velocidad máxima. En este punto la energía cinética es máxima y la potencial es cero, por tanto, como $E_c = \frac{1}{2}m{\cdot}v^2$

$$E_c = \frac{1}{2}m{\cdot}v^2 = \frac{1}{2}0,5{\cdot}36 = 9J$$

Como sabemos, en el punto de equilibrio la energía cinética es máxima, y coincide con la energía mecánica, por tanto, la energía cinética máxima será: $E_{c_{máx}} = \frac{1}{2}m{\cdot}A^2\omega^2$, de donde si despejamos la amplitud obtenemos:

$$A = \sqrt{\frac{2E_c}{m\omega^2}} = \sqrt{\frac{2{\cdot}9J}{0,5kg{\cdot}144}} = 0,5\ m$$

Como $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi{\cdot}f \quad \Rightarrow \quad f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{12}{2\pi} = 1,91\ Hz$

25.- Una partícula de 0,2 kg describe un movimiento armónico simple a lo largo del eje X, de frecuencia 20 Hz. En el instante inicial la partícula pasa por el origen, moviéndose hacia la derecha, y su velocidad es máxima. En otro instante de la oscilación la energía cinética es 0,2 J y la energía potencial es 0,6 J.

a) Escriba la ecuación de movimiento de la partícula y calcule su aceleración máxima.

b) Explique, con ayuda de una gráfica, los cambios de energía cinética y de energía potencial durante una oscilación.

a) Como la frecuencia del movimiento es $f=\frac{\omega}{2\pi}=20Hz$, *su frecuencia angular será:*

$$\omega=2\pi\cdot f=2\pi\cdot 20=40\pi\ rad\cdot s^{-1}$$

En un instante del movimiento la energía mecánica es 0,8 J, por tanto de aquí puedo despejar la amplitud:

$$E_M=\frac{1}{2}m\cdot A^2\cdot\omega^2 \quad\Rightarrow\quad A=\sqrt{\frac{2E_M}{m\cdot\omega^2}}=\sqrt{\frac{2\cdot 0,8}{0,2\cdot 1600\pi^2}}=0,023\ m$$

De forma que ya tenemos todos los ingredientes para escribir la ecuación del movimiento:

$$x=0,023\cdot sen(40\pi t+\varphi_o)$$

Solo nos faltaría calcular la fase inicial, para ello, utilizamos que en el instante inicial la partícula pasa por el origen: en t=0, x=0.

Si: $0=0,023\cdot Sen(40\pi t+\varphi_o) \quad\Rightarrow\quad Sen(40\pi t+\varphi_o)=1 \quad\Rightarrow\quad 40\pi t+\varphi_o=\frac{\pi}{2}$

Y en t=0 ocurre que $\varphi_o=\frac{\pi}{2}$

Por tanto la ecuación del movimiento es: $x=0,023\cdot Sen\left(40\pi t+\frac{\pi}{2}\right)$

La aceleración es la segunda derivada de la elongación con respecto al tiempo:

$$a=\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{d^2}{dt^2}\left[0,023\cdot Sen\left(40\pi t+\frac{\pi}{2}\right)\right]=\frac{d}{dt}\left[2,89\cdot\cos\left(40\pi t+\frac{\pi}{2}\right)\right]=-363,2sen\left(40\pi t+\frac{\pi}{2}\right)$$

Por tanto:

$$a=-363,2\cdot sen\left(40\pi t+\frac{\pi}{2}\right)m\cdot s^{-2}$$

Así que la aceleración será máxima cuando el seno sea menos uno.

$$a=363,2\ m\cdot s^{-2}$$

b) Durante una oscilación, y despreciando el rozamiento, la partícula sólo está sometida a dos fuerzas conservativas, el peso y la fuerza elástica. Por consiguiente, la energía mecánica del sistema se mantendrá constante. Las energías presentes (cinética y potencial elástica) varían de la siguiente forma durante una oscilación completa:

$$E_c=\frac{1}{2}m\cdot v_x^2 \qquad E_{p_e}=\frac{1}{2}K\cdot x^2$$

En el punto más a la derecha de la oscilación, la energía potencial es máxima, ya que el muelle sufre su máximo estiramiento. En este punto la velocidad de la partícula es nula, por lo que la energía cinética también lo es. Al desplazarse hacia la izquierda, disminuye la energía potencial, al tiempo que aumenta la energía cinética, hasta pasar por la posición de equilibrio, donde la E_c es máxima y la E_p elástica es nula (estiramiento cero).

A partir de este momento, con la compresión del muelle, vuelve a aumentar la energía potencial elástica, a costa de la disminución de la cinética, que llega a anularse en el punto de máxima compresión (el más a la izquierda de la trayectoria), siendo otra vez máxima la energía potencial elástica.

A partir de aquí, el proceso se repite a la inversa. Durante el estiramiento del muelle disminuye la energía elástica almacenada, transformándose en energía cinética. Al pasar por la posición de equilibrio, nuevamente la E_c es máxima y la potencial elástica se anula. Finalmente, al seguir estirándose el muelle, la E_c disminuye hasta anularse en el punto más a la derecha, al tiempo que la energía elástica vuelve a aumentar hasta su valor máximo.

26.- Un bloque de 0´5 kg se encuentra sobre una superficie horizontal sin rozamiento, sujeto al extremo de un resorte de constante elástica k = 200 $N{\cdot}m^{-1}$. Se tira del bloque hasta alargar el resorte 10 cm y se suelta.

a) Escriba la ecuación de movimiento del bloque y calcule su energía mecánica.

c) Explique cualitativamente las transformaciones energéticas durante el movimiento del bloque si existiera rozamiento con la superficie.

a) Se trata de un MAS del que conocemos la constante elástica K. A partir de ésta y conocida la masa podemos calcular la pulsación mediante:

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{m}} = \sqrt{\frac{200}{0,5}} = 20\ rad{\cdot}s^{-1}$$

Como también nos dicen que el muelle se estira hasta 0,1 m, ésta será la amplitud del movimiento. A=0,1m.

Por tanto con todos estos datos ya podemos escribir la ecuación del movimiento, que atiende a:

$$x = 0,1{\cdot}Sen(20t + \varphi_o)$$

Para calcular el desfase inicial, como nos dicen que en el instante inicial, la partícula se encuentra en 0,1 m y por tanto:

$$0,1 = 0,1{\cdot}Sen(20t + \varphi_o)$$

Si: $0,1 = 0,1{\cdot}Sen(20t + \varphi_o) \quad \Rightarrow \quad Sen(20t + \varphi_o) = 1 \quad \Rightarrow \quad 20t + \varphi_o = \frac{\pi}{2}$

Y en t=0 ocurre que $\varphi_o = \frac{\pi}{2}$

Por tanto la ecuación del movimiento es: $x = 0,1{\cdot}Sen\left(20t + \frac{\pi}{2}\right)$

La energía mecánica del bloque viene dada por:

$$E_M = \frac{1}{2}K{\cdot}A^2 = \frac{1}{2}200{\cdot}0,01 = 1J$$

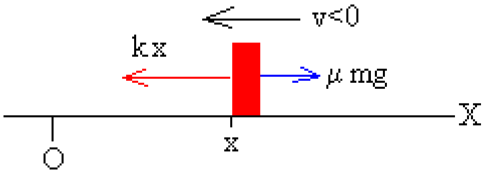
b) Durante una oscilación, la partícula está sometida al peso, la fuerza elástica y a la fuerza de rozamiento. Por consiguiente, la energía mecánica del sistema no se mantendrá constante. Las energías presentes (cinética, y potencial elástica) varían de la siguiente forma durante una oscilación completa:

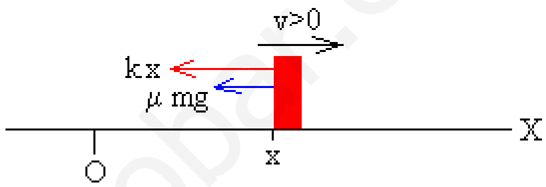
$$E_c = \frac{1}{2}m{\cdot}v_x^2 \qquad E_{p_e} = \frac{1}{2}K{\cdot}x^2$$

En el punto más a la derecha de la oscilación, la energía potencial es máxima, ya que el muelle sufre su máxima compresión. En este punto la velocidad de la partícula es nula, por lo que la energía cinética también lo es. Al desplazarse hacia la izquierda, disminuye la energía potencial, al tiempo que aumenta la energía cinética, hasta pasar por la posición de equilibrio, donde la E_c es máxima y la E_p elástica es nula (estiramiento cero).

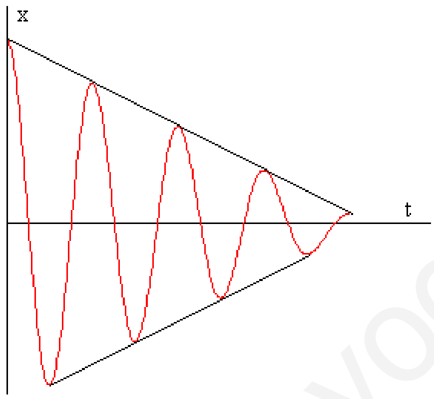
A partir de este momento, con la compresión, vuelve a aumentar la energía potencial elástica, a costa de la disminución de la cinética, que llega a anularse en el punto de máxima compresión (el más a la izquierda de la trayectoria), siendo otra vez máxima la energía elástica.

A partir de aquí, el proceso se repite a la inversa. Durante el estiramiento del muelle disminuye la energía elástica almacenada, transformándose en energía cinética. Al pasar por la posición de equilibrio, nuevamente la E_c es máxima y la elástica se anula. Finalmente, al seguir estirándose el muelle, la E_c disminuye hasta anularse en el punto más a la derecha, al tiempo que la energía elástica vuelve a aumentar hasta su valor máximo.





En todo este proceso no podemos olvidar el trabajo que hace la fuerza de rozamiento, desde el principio (máximo estiramiento) empieza a realizar trabajo la fuerza de rozamiento, que como sabemos siempre se opone al movimiento, de forma que toda la energía potencial elástica almacenada en el muelle no se transforma en energía cinética, sino que se pierde una parte en trabajo de rozamiento, de forma que la amplitud va a ir disminuyendo hasta el punto en que toda la energía se haya transformado en trabajo de rozamiento y el sistema se pare.



El bloque describe un MAS cuya amplitud permanece constante durante cada semiperiodo de la oscilación, pero que va disminuyendo con el tiempo.

La amplitud disminuye una cantidad constante entre dos semiperiodos consecutivos.

27.- Un cuerpo realiza un movimiento vibratorio armónico simple.

a) Escriba la ecuación de movimiento si la aceleración máxima es $5\pi^2$ $cm{\cdot}s^{-2}$, el periodo de las oscilaciones 2 s y la elongación del cuerpo al iniciarse el movimiento 2´5 cm.

b) Represente gráficamente la elongación y la velocidad en función del tiempo y comente la gráfica.

a) Si el periodo es de dos segundos, con $\omega = \frac{2\pi}{T}$ podemos calcular la frecuencia angular:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2} = \pi \ rad{\cdot}s^{-1}$$

Sabemos además que la aceleración de un MAS viene dada por la expresión $a = -\omega^2{\cdot}x$, como dicen que el valor de la aceleración máxima es $5\pi^2$ $cm{\cdot}s^{-2}$ y este valor se corresponde con $a_{máx} = -\omega^2{\cdot}A$. Conocida la pulsación angular, podemos calcular la amplitud:

$$A = -\frac{a_{máx}}{w^2} = \frac{5\pi^2}{\pi^2} = 5\ cm = 0{,}05\ m$$

Así que, conocidos estos datos la ecuación del movimiento será:

$$x = 5 \cdot 10^{-2} \cdot Sen(\pi t + \varphi_o)$$

Para calcular el desfase inicial, utilizamos que en el instante inicial, la partícula se encontraba en la posición 0,025m y por tanto:

$$0,025 = 0,05 \cdot Sen(\pi t + \varphi_o)$$

Por tanto: $Sen(\pi t + \varphi_o) = \dfrac{0,025}{0,05} = \dfrac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad Sen(\pi t + \varphi_o) = \dfrac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \pi t + \varphi_o = \dfrac{\pi}{6}$

Y en t=0 ocurre que $\varphi_o = \dfrac{\pi}{6}$

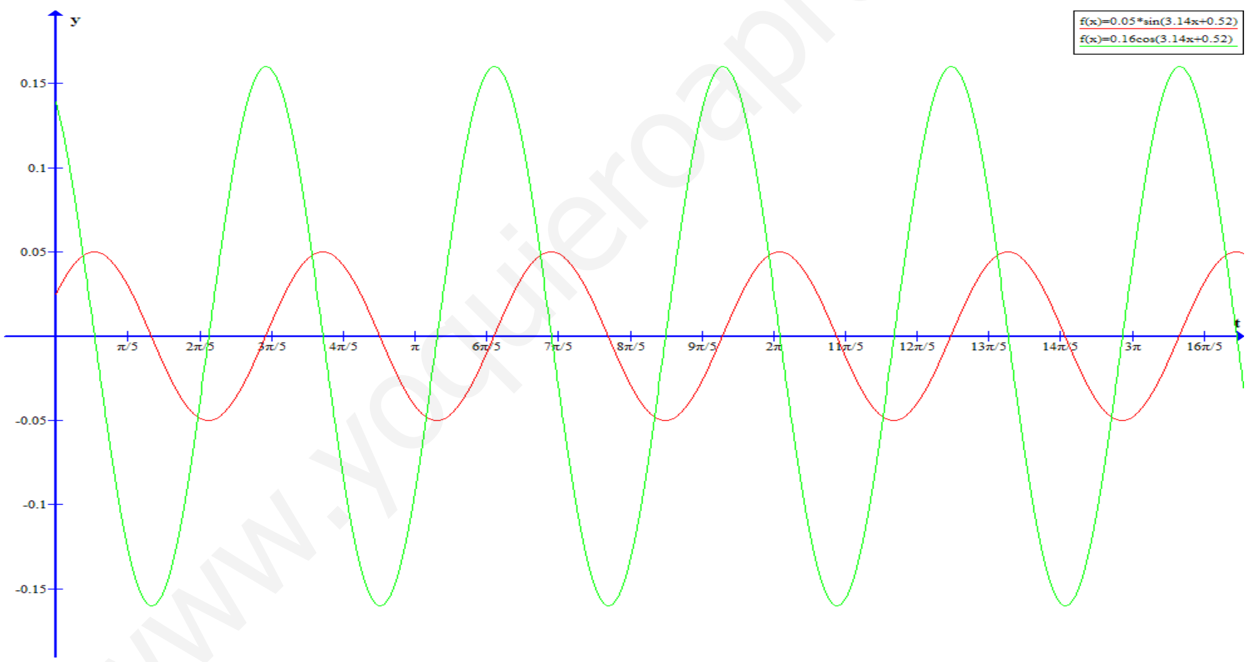
Por tanto la ecuación del movimiento es:

$$x = 0,05 \cdot Sen\left(\pi t + \frac{\pi}{6}\right) m$$

La ecuación de la velocidad la conseguimos haciendo su derivada con respecto al tiempo:

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\left[0,05 \cdot Sen\left(\pi t + \frac{\pi}{6}\right)\right] = 0,05\pi \cos\left(\pi t + \frac{\pi}{6}\right) m \cdot s^{-1}$$

La representación gráfica de ambas funciones es:



Podemos observar que en los puntos donde la velocidad es nula, la elongación es máxima y viceversa, los puntos donde la elongación es nula, la velocidad es máxima.

28.- Un cuerpo de 2 kg se encuentra sobre una mesa plana y horizontal sujeto a un muelle, de constante elástica k = 15 N·m^{-1}. Se desplaza el cuerpo 2 cm de la posición de equilibrio y se libera.

a) Explique cómo varían las energías cinética y potencial del cuerpo e indique a qué distancia de su posición de equilibrio ambas energías tienen igual valor.

b) Calcule la máxima velocidad que alcanza el cuerpo.

a) En cuanto a lo de la variación de las energías podemos hacer una explicación igual que en los ejercicios anteriores. Para calcular a que distancia del punto de equilibrio ambas energías tienen igual valor, lo que hacemos es igualar ambas energías.

La energía potencial viene dada por $E_p = \frac{1}{2}K \cdot x^2$, mientras que la energía cinética viene dada por $E_p = \frac{1}{2}K(A^2 - x^2)$, por tanto, igualando ambas, tenemos que:

$$\frac{1}{2}Kx^2 = \frac{1}{2}K(A^2 - x^2) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}Kx^2 = \frac{1}{2}KA^2 - \frac{1}{2}Kx^2 \quad \Rightarrow \quad Kx^2 = \frac{1}{2}KA^2 \quad \Rightarrow \quad x^2 = \frac{1}{2}A^2$$

Por tanto, despejando x tenemos que:

$$x = \sqrt{\frac{1}{2}A^2} = \pm\frac{A}{\sqrt{2}}$$

Como A=0,02, nos queda que $x = \pm\frac{0,02}{\sqrt{2}} = \pm 0,014\ m$

Por tanto a 14 mm a la izquierda y a la derecha de la posición de equilibrio (X=0) tenemos los puntos donde ambas energías se igualan.

b) Para calcular la velocidad máxima, necesitamos derivar con respecto al tiempo la expresión de la elongación del movimiento, así que primero vamos a calcular ésta:

Conocida la constante elástica K y la masa m, a partir de éstas podemos calcular la pulsación mediante:

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{m}} = \sqrt{\frac{15}{2}} = \frac{\sqrt{30}}{2} = 2,74\ rad \cdot s^{-1}$$

Como también nos dicen que el muelle se estira hasta 0,02 m, ésta será la amplitud del movimiento. A=0,02m.

Por tanto con todos estos datos ya podemos escribir la ecuación del movimiento, que atiende a:

$$x = 0,02 \cdot Sen(2,74t + \varphi_o)$$

Para calcular el desfase inicial, como nos dicen que en el instante inicial, la partícula se encuentra en 0,02 m y por tanto:

$$0,02 = 0,02 \cdot Sen(2,74t + \varphi_o)$$

Por tanto:

$$Sen(2,74t + \varphi_o) = 1 \quad \Rightarrow \quad 2,74t + \varphi_o = \frac{\pi}{2}$$

Y en t=0 ocurre que $\varphi_o = \frac{\pi}{2}$

Por tanto la ecuación del movimiento es:

$$x = 0,02 \cdot Sen\left(2,74t + \frac{\pi}{2}\right)$$

Derivando con respecto al tiempo, obtenemos la velocidad:

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\left[0,02 \cdot Sen\left(2,74t + \frac{\pi}{2}\right)\right] = 0,055 \cos\left(2,74t + \frac{\pi}{2}\right)\ m \cdot s^{-1}$$

Y la velocidad máxima se conseguirá cuando el coseno sea unitario, por tanto:

$$v_{máx} = 0,055\ m \cdot s^{-1} = 5,5\ cm \cdot s^{-1}$$

29.- Un bloque de 1 kg, apoyado sobre una mesa horizontal y unido a un resorte, realiza un movimiento armónico simple de 0´1 m de amplitud. En el instante inicial su energía cinética es máxima y su valor es 0´5 J.

a) Calcule la constante elástica del resorte y el periodo del movimiento.

b) Escriba la ecuación del movimiento del bloque, razonando cómo obtiene el valor de cada una de las variables que intervienen en ella.

Como nos dicen que la energía cinética es máxima al inicio del movimiento, ésta coincidirá con la energía mecánica:

Como $E_M = \frac{1}{2}K \cdot A^2$, si despejamos la constante elástica tenemos:

$$K = \frac{2 \cdot E_M}{A^2} = \frac{2 \cdot 0,5}{0,01} = 100\ N \cdot m^{-1}$$

Conocida K y m, podemos calcular la pulsación angular mediante: $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$, así que:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{100}{1}} = 10\ rad \cdot s^{-1}$$

Conocida la pulsación, el periodo lo obtenemos de:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad \Rightarrow \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{10} = \frac{\pi}{5}\ s$$

b) Con todos estos datos, la ecuación del movimiento del bloque será:

$$x = 0,1 \cdot Sen(10t + \varphi_o)$$

Para calcular el desfase inicial, como nos dice que en el instante inicial la energía cinética es máxima, y esto ocurre en el punto de equilibrio, tenemos que en X=0, t=0, y por tanto:

$$0,1 = 0,1 \cdot Sen(10t + \varphi_o)$$

Por tanto, operando, tenemos:

$$Sen(10t + \varphi_o) = 0 \quad \Rightarrow \quad 20t + \varphi_o = 0$$

Y en t=0 ocurre que $\varphi_o = 0$

Por tanto la ecuación del movimiento es:

$$x = 0,1 \cdot Sen(10t)\ m$$

30.- Un cuerpo, situado sobre una superficie horizontal lisa y unido al extremo de un resorte, efectúa un movimiento armónico simple y los valores máximos de su velocidad y aceleración son 0´6 m·s^{-1} y 7´2 m·s^{-2} respectivamente.

a) Determine el período y la amplitud del movimiento.

b) Razone cómo variaría la energía mecánica del cuerpo si se duplicara: i) la frecuencia; ii) la aceleración máxima.

a) Sabemos por el enunciado que V_{max}=0,6 m·s^{-1} y que a_{max}=7,2 m·s^{-2}, también sabemos que un cuerpo que efectúa un MAS tiene por ecuación de su movimiento:

$$x = A \cdot Sen(\omega t + \varphi_o)\ m$$

Por tanto, como la velocidad es la derivada de la elongación, tenemos que:

$$v=\frac{dx}{dt}=\frac{d}{dt}\left[A\cdot Sen\left(\omega t+\varphi_o\right)\right]=A\cdot\omega\cdot\cos\left(\omega t+\varphi_o\right)$$

La velocidad máxima se conseguirá cuando $\cos\left(\omega t+\varphi_o\right)=1$ y por tanto será: $V_{máx}=A\cdot\omega$, así que por un lado tenemos:

$$V_{máx}=A\cdot\omega=0,6m\cdot s^{-1}$$

La aceleración es la derivada con respecto al tiempo de la velocidad, por tanto:

$$a=\frac{dV}{dt}=\frac{d}{dt}\left[A\cdot\omega\cdot\cos\left(\omega t+\varphi_o\right)\right]=\text{-}\,A\cdot\omega^2\cdot sen\left(\omega t+\varphi_o\right)=-\omega^2\cdot X$$

La aceleración máxima se alcanzará cuando $sen\left(\omega t+\varphi_o\right)=1$ y por tanto $a_{máx}=-A\cdot\omega^2$, así que por otro lado tenemos:

$$a_{máx}=A\cdot\omega^2=7,2m\cdot s^{-1}$$

Tenemos un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas: $\begin{cases}A\cdot\omega=0,6m\cdot s^{-1}\\ A\cdot\omega^2=7,2m\cdot s^{-1}\end{cases}$, despejando A en ambas ecuaciones e igualando, tenemos:

$$\frac{0,6}{\omega}=\frac{7,2}{\omega^2}\quad\Rightarrow\quad 0,6=\frac{7,2}{\omega}\quad\Rightarrow\quad\omega=\frac{7,2}{0,6}=12\ rad\cdot s^{-1}$$

Por tanto, conocida la pulsación, podemos calcular el periodo:

$$T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2\pi}{12}=\frac{\pi}{6}s$$

Y de la primera ecuación, $A\cdot\omega=0,6$, despejamos la amplitud:

$$A=\frac{0,6}{\omega}=\frac{0,6}{12}=0,05\ m$$

b) En un movimiento de este tipo, la energía mecánica, suma de potencial y cinética, se calcula mediante:

$$E_M=\frac{1}{2}m\cdot\omega^2\cdot A^2=\frac{1}{2}m\cdot 4\pi^2\cdot f^2\cdot A^2=2\cdot m\cdot\pi^2\cdot f^2\cdot A^2$$

Así que si duplicamos la frecuencia, tenemos:

$$Si\ f'=2f\quad\Rightarrow\quad E'_M=2\cdot m\cdot\pi^2\cdot(f')^2\cdot A^2=2\cdot m\cdot\pi^2\cdot(2f)^2\cdot A^2=8\cdot m\cdot\pi^2\cdot f^2\cdot A^2=4\left(2\cdot m\cdot\pi^2\cdot f^2\cdot A^2\right)=4E_M$$

la energía mecánica se multiplica por 4.

Si duplicamos la aceleración máxima, como $E_M=\frac{1}{2}m\cdot\omega^2\cdot A^2=\frac{1}{2}m\cdot\left(\omega^2\cdot A\right)\cdot A=\frac{1}{2}m\cdot\left(a_{\max}\right)\cdot A$

$$Si\ a'_{\max}=2a'_{\max}\quad\Rightarrow\quad E'_M=\frac{1}{2}m\cdot\left(a'_{\max}\right)\cdot A=E'_M=\frac{1}{2}m\cdot\left(2a_{\max}\right)\cdot A=m\omega^2\cdot A^2=2\left(\frac{1}{2}m\cdot\omega^2\cdot A^2\right)=2E_M$$

La energía mecánica se multiplica por dos.

31.- Un bloque de 0´12 kg, situado sobre una superficie horizontal lisa y unido al extremo de un resorte, oscila con una amplitud de 0´20 m.

a) Si la energía mecánica del bloque es de 6 J, determine razonadamente la constante elástica del resorte y el periodo de las oscilaciones.

b) Calcule los valores de la energía cinética y de la energía potencial cuando el bloque se encuentra a 0´10 m de la posición de equilibrio.

a) Como la energía mecánica del bloque viene dada por: $E_M = \frac{1}{2} m \cdot \omega^2 \cdot A^2$, de aquí, despejando ω tenemos:

$$\omega = \sqrt{\frac{2 \cdot E_M}{m \cdot A^2}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 6}{0{,}12 \cdot (0{,}2)^2}} = 50 \ rad \cdot s^{-1}$$

Como además sabemos que:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \Rightarrow \quad k = m \cdot \omega^2 = 0{,}12 \cdot 2500 = 300 \ N \cdot m^{-1}$$

El periodo lo calcularemos mediante:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{50} = \frac{\pi}{25} s$$

b) En X=0,1 la energía potencial será:

$$E_p = \frac{1}{2} K \cdot x^2 = \frac{1}{2} 300 \cdot 0{,}01 = 1{,}5 \ J$$

Mientras que la energía cinética será:

$$E_c = E_M - E_p = 6 - 1{,}5 = 4{,}5 J$$