SOLUCIONARIO

matemáticas I

UNIDADES 1-7

1 bachillerato

índice

(*) Una pequeña cantidad de ejercicios o apartados de ejercicios han sido marcados porque tienen alguna corrección en su enunciado respecto del que aparece en el libro del alumno.

1 Números reales

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Ejercicio resuelto.

2. Halla la fracción irreducible que corresponde a los siguientes números racionales.

a) $25{,}25$ **b)** $25{,}\widehat{25}$ **c)** $25{,}2\hat{5}$ **d)** $25{,}25+25{,}\widehat{25}+25{,}2\hat{5}$

a) $25{,}25=\dfrac{2525}{100}=\dfrac{101}{4}$

b) $N=25{,}\widehat{25}=25{,}252\,525...\Rightarrow\begin{cases}100N=2525{,}252\,525...\\ N=25{,}252\,525\,2...\end{cases}\Rightarrow 99N=2500\Rightarrow N=\dfrac{2500}{99}$

c) $N=25{,}2\hat{5}=25{,}2555...\Rightarrow\begin{cases}100N=2525{,}555...\\ 10N=252{,}555...\end{cases}\Rightarrow 90N=2273\Rightarrow N=\dfrac{2273}{90}$

d) $25{,}25+25{,}\widehat{25}+25{,}2\hat{5}=\dfrac{101}{4}+\dfrac{2500}{99}+\dfrac{2273}{90}=\dfrac{150001}{1980}$

3. Realiza las siguientes operaciones y simplifica el resultado.

a) $\dfrac{15}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{2}}}$ **b)** $\dfrac{14}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{3}}}$

a) $\dfrac{15}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{2}}}=\dfrac{15}{1+\dfrac{1}{\dfrac{3}{2}}}=\dfrac{15}{1+\dfrac{2}{3}}=\dfrac{15}{\dfrac{5}{3}}=\dfrac{3\cdot 15}{5}=9$

b) $\dfrac{14}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{3}}}=\dfrac{14}{1+\dfrac{1}{\dfrac{4}{3}}}=\dfrac{14}{1+\dfrac{3}{4}}=\dfrac{14}{\dfrac{7}{4}}=\dfrac{4\cdot 14}{7}=8$

4. Razona con ejemplos si son ciertas las siguientes afirmaciones.

a) La suma de dos irracionales es siempre irracional.

b) El producto de dos irracionales es siempre un número irracional.

a) Es falso. Por ejemplo, $\sqrt{2}$ y $-\sqrt{2}$ son dos números irracionales, y su suma es 0, número racional.

b) Es falso. Por ejemplo, $\sqrt{2}$ y $-\sqrt{2}$ son dos números irracionales, y su producto es –2, número racional.

5. Se quiere vallar un campo rectangular. Se sabe que uno de sus lados mide tres quintas partes de la medida del otro. Además, la diagonal mide 30 m. Calcula el precio que se deberá pagar por hacer el vallado si cada metro de valla cuesta 25 € y se desperdicia un 10 % del material empleado.

Los lados miden a y $\dfrac{3a}{5}$, por tanto la diagonal es: $D=\sqrt{a^2+\left(\dfrac{3a}{5}\right)^2}=\sqrt{a^2+\dfrac{9a^2}{25}}=\sqrt{\dfrac{34a^2}{25}}=30\Rightarrow a=25{,}725$ m

El perímetro mide $2\left(a+\dfrac{3a}{5}\right)=82{,}32$ m, pero como se desperdicia el 10 % del material, necesitamos comprar $82{,}32 : 0{,}90 = 91{,}47$ m, con un coste de $91{,}47 \cdot 25 = 2286{,}75$ €.

6 y 7. Ejercicios resueltos.

8. Ordena de menor a mayor en cada caso.

a) $\frac{11}{4}$, $\frac{68}{25}$, $\frac{14}{5}$ y $\frac{27}{10}$

b) $1{,}23$, $1{,}2\widehat{3}$ y $1{,}\widehat{23}$

c) $\sqrt[4]{4}$, $\sqrt[3]{3}$ y $\sqrt{2}$

d) $2{,}\widehat{9}$, 3 y $3{,}0\widehat{1}$

a) $\frac{11}{4}=\frac{275}{100}$; $\frac{68}{25}=\frac{272}{100}$; $\frac{14}{5}=\frac{280}{100}$ y $\frac{27}{10}=\frac{270}{100}$ $\Rightarrow$ $\frac{27}{10}<\frac{68}{25}<\frac{11}{4}<\frac{14}{5}$

b) $1{,}23 < 1{,}232323\ldots < 1{,}2333\ldots \Rightarrow 1{,}23 < 1{,}\widehat{23} < 1{,}2\widehat{3}$

c) $\sqrt[4]{4}=\sqrt[4]{2^2}=\sqrt{2}=1{,}4142\ldots$, $\sqrt[3]{3}=1{,}4422\ldots \Rightarrow \sqrt[4]{4}=\sqrt{2}<\sqrt[3]{3}$

d) $2{,}\widehat{9}=\frac{29-2}{9}=3 \Rightarrow 2{,}\widehat{9}=3<3{,}0\widehat{1}$

9. Sean *a* y *b* dos números reales negativos. Si $a \le b$, demuestra que el inverso de *a* es mayor o igual que el inverso de *b*. ¿Qué pasaría si *a* fuera negativo y *b* positivo?

$$a \le b \Rightarrow a\cdot\frac{1}{a} \ge b\cdot\frac{1}{a} \Rightarrow 1 \ge \frac{b}{a} \Rightarrow 1\cdot\frac{1}{b} \le \frac{b}{a}\cdot\frac{1}{b} \Rightarrow \frac{1}{b} \le \frac{1}{a}$$

Si $a < 0$ y $b > 0$, entonces:

$$a < b \Rightarrow a\cdot\frac{1}{a} > b\cdot\frac{1}{a} \Rightarrow 1 > \frac{b}{a} \Rightarrow 1\cdot\frac{1}{b} > \frac{b}{a}\cdot\frac{1}{b} \Rightarrow \frac{1}{b} > \frac{1}{a}$$

Es decir, si *a* es negativo y *b* positivo y, por tanto, $a < b$, entonces el inverso de *a* es menor que el inverso de *b*.

Esto se podría haber deducido más fácilmente teniendo en cuenta que el inverso de *a* es negativo y el de *b* positivo y un número negativo es siempre menor que uno positivo.

10. A partir del desarrollo de $(x-y)^2$, siendo *x* e *y* dos números reales y $xy > 0$, demuestra que $\frac{x}{y}+\frac{y}{x} \ge 2$.

$$(x-y)^2 = x^2+y^2-2xy \ge 0 \Rightarrow x^2+y^2 \ge 2xy \Rightarrow \frac{x^2+y^2}{xy}=\frac{x^2}{xy}+\frac{y^2}{xy}=\frac{x}{y}+\frac{y}{x} \ge 2$$

11. Tres números reales positivos *a*, *b* y *c* pueden representar las medidas de los tres lados de un triángulo si y solo si verifican que la suma de los dos menores es mayor que el mayor. Indica los valores que puede tomar *a* para que los números naturales *a*, $2a+1$ y 10 sean las medidas de un triángulo.

Se distinguen dos posibilidades:

Si el lado mayor es $2a+1$. Entonces

$$\begin{cases} 2a+1 \ge 10 \\ a+10 > 2a+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \ge 4{,}5 \\ a < 9 \end{cases} \Rightarrow 4{,}5 \le a < 9$$

Si el lado mayor es 10. Entonces

$$\begin{cases} 2a+1 \le 10 \\ a+2a+1 > 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \le 4{,}5 \\ a > 3 \end{cases} \Rightarrow 3 < a \le 4{,}5$$

Luego $3 < a < 9$

12. Sean *p*, *q* y *M* números reales positivos con $q < 100$. Demuestra que el número obtenido al aumentar *M* en un *p* % y, posteriormente, disminuir el resultado en un *q* % es mayor que *M* si y solo si: $p > \dfrac{100q}{100-q}$

Para aumentar la cantidad *M* en un *p* % se multiplica dicha cantidad por $1+\dfrac{p}{100}$:

$$M \to M\left(1+\frac{p}{100}\right)$$

Para disminuir la cantidad $M\left(1+\dfrac{p}{100}\right)$ en un *q* % se multiplica dicha cantidad por $1-\dfrac{q}{100}$:

$$M\left(1+\frac{p}{100}\right) \to M\left(1+\frac{p}{100}\right)\left(1-\frac{q}{100}\right) = M\left(1-\frac{q}{100}+\frac{p}{100}-\frac{pq}{10000}\right)$$

Por tanto, $M\left(1-\dfrac{q}{100}+\dfrac{p}{100}-\dfrac{pq}{10000}\right) > M \Leftrightarrow 1-\dfrac{q}{100}+\dfrac{p}{100}-\dfrac{pq}{10000} > 1 \Leftrightarrow \dfrac{pq}{10000} < \dfrac{p-q}{100} \Leftrightarrow pq < 100p - 100q \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 100p - pq > 100q \Leftrightarrow p(100-q) > 100q$$

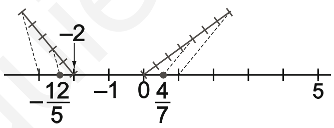
Y ya que $100 - q$ es un número positivo:

$$M\left(1-\frac{q}{100}+\frac{p}{100}-\frac{pq}{10000}\right) > M \Leftrightarrow p(100-q) > 100q \Leftrightarrow p > \frac{100q}{100-q}$$

13 y 14. Ejercicios resueltos.

15. Representa en la recta real los siguientes números.

a) 5 **b)** $\dfrac{4}{7}$ **c)** -2 **d)** $-\dfrac{12}{5}$



16. Representa en la recta real:

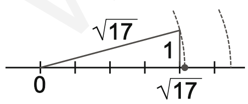
a) $\sqrt{17}$

b) $\sqrt{29}$

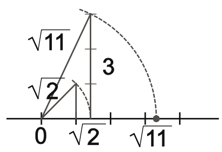
c) $\sqrt{11}$

d) $\sqrt{20}$

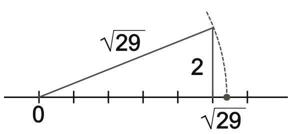
a) $17 = 4^2 + 1^2$



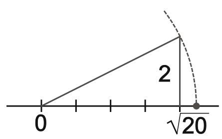
c) $11 = \left(\sqrt{2}\right)^2 + 3^2$



b) $29 = 5^2 + 2^2$



d) $20 = 2^2 + 4^2$



17 a 19. Ejercicios resueltos.

20. Desarrolla el valor de las expresiones.

a) $2x-3+|2x-3|$

b) $2-3x-|2-3x|$

Calcula el valor de las expresiones anteriores para los casos $x = -1$, $x = 0$ y $x = 2$.

a) $2x-3+|2x-3| = \begin{cases} 2x-3-(2x-3) & \text{si} \quad 2x-3<0 \\ 2x-3+(2x-3) & \text{si} \quad 2x-3\geq 0 \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x<\frac{3}{2} \\ 4x-6 & \text{si} \quad x\geq\frac{3}{2} \end{cases}$

b) $2-3x-|2-3x| = \begin{cases} 2-3x-(2-3x) & \text{si} \quad 2-3x>0 \\ 2-3x+(2-3x) & \text{si} \quad 2-3x\leq 0 \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x<\frac{2}{3} \\ -6x+4 & \text{si} \quad x\geq\frac{2}{3} \end{cases}$

Para $x = -1$, el valor de ambas expresiones es 0. Para $x = 0$, el valor de ambas expresiones es 0. Para $x = 2$, el valor de la primera expresión es 2, y el de la segunda es –8.

21. Desarrolla el valor de las siguientes expresiones.

a) $|x+2|+|x-3|$

b) $x+|x+2|+|x+3|$

Calcula el valor de las expresiones anteriores para los casos $x = -2$, $x = 0$ y $x = 3$.

a) Los valores absolutos que intervienen se anulan para $x = -2$ y $x = 3$.

$$|x+2|+|x-3| = \begin{cases} -(x+2)-(x-3) & \text{si} & x<-2 \\ x+2-(x-3) & \text{si} & -2\leq x<3 \\ x+2+x-3 & \text{si} & x\geq 3 \end{cases} = \begin{cases} -2x+1 & \text{si} & x<-2 \\ 5 & \text{si} & -2\leq x<3 \\ 2x-1 & \text{si} & x\geq 3 \end{cases}$$

b) Los valores absolutos que intervienen se anulan para $x = -3$ y $x = -2$.

$$x+|x+2|+|x+3| = \begin{cases} x-(x+2)-(x+3) & \text{si} & x<-3 \\ x-(x+2)+(x+3) & \text{si} & -3\leq x<-2 \\ x+(x+2)+(x+3) & \text{si} & x\geq -2 \end{cases} = \begin{cases} -x-5 & \text{si} & x<-3 \\ x+1 & \text{si} & -3\leq x<-2 \\ 3x+5 & \text{si} & x\geq -2 \end{cases}$$

Para $x = -2$, el valor de la primera expresión es 5, y el de la segunda es –1. Para $x = 0$, el valor de ambas expresiones es 5. Para $x = 3$, el valor de la primera expresión es 5, y el de la segunda es 14.

22 y 23. Ejercicios resueltos.

24. Dados $A = (2, 4)$, $B = (-2, 6]$ y $C = [-3, +\infty)$, calcula:

b) $A \cup B \cup C$

b) $A \cap B \cap C$

c) $(A \cap B) \cup C$

d) $(A \cup B) \cap C$

a) $A \cup B \cup C = C = [-3, +\infty)$

c) $(A \cap B) \cup C = [-3, +\infty)$

b) $A \cap B \cap C = A = (2, 4)$

d) $(A \cup B) \cap C = B = (-2, 6]$

25. Expresa como entorno los intervalos (–5, 2) y [–5, 2].

(–5, 2) es el entorno abierto de centro $-\frac{3}{2}$ y radio $\frac{7}{2}$ $\quad E\left(-\frac{3}{2}, \frac{7}{2}\right)$

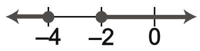
[–5, 2] Es el entorno cerrado de centro $-\frac{3}{2}$ y radio $\frac{7}{2}$ $\quad E\left[-\frac{3}{2}, \frac{7}{2}\right]$

26. Expresa mediante intervalos y gráficamente los siguientes conjuntos de números reales.

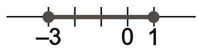
a) $|x-2|<2$ **b)** $|x+3|\geq 1$ **c)** $|x+1|\leq 2$

a) $(0, 4)$

b) $(-\infty,-4]\cup[-2,+\infty)$



c) $[-3,1]$



27. Ejercicio interactivo.

28 y 29. Ejercicios resueltos.

30. Calcula las mejores aproximaciones por defecto y por exceso y el redondeo de $\sqrt{2}$ a la unidad, la centésima y la diezmilésima.

	Unidad	Centésima	Diezmilésima
Defecto	1	1,41	1,4142
Exceso	2	1,42	1,4143
Redondeo	1	1,41	1,4142

31. Halla los errores absoluto y relativo que se cometen al utilizar 1,7 como aproximación de $\frac{12}{7}$.

Error absoluto: $E_a=\left|\frac{12}{7}-1{,}7\right|=\left|\frac{12}{7}-\frac{17}{10}\right|=\frac{1}{70}$

Error relativo: $E_r=\dfrac{\frac{1}{70}}{\frac{12}{7}}=\frac{1}{120}$

32. Halla aproximaciones por defecto y por exceso con una, dos y tres cifras decimales de:

a) $\sqrt{5}$ **b)** π

Utilizando las aproximaciones anteriores calcula $\sqrt{5}+\pi$. ¿En cuál de ellas el error absoluto es mayor?

$\sqrt{5}$	1 cifra	2 cifras	3 cifras
Defecto	2,2	2,23	2,236
Exceso	2,3	2,24	2,237

π	1 cifra	2 cifras	3 cifras
Defecto	3,1	3,14	3,141
Exceso	3,2	3,15	3,142

$\sqrt{5}+\pi$	1 cifra	2 cifras	3 cifras
Defecto	5,3	5,37	5,377
Exceso	5,5	5,39	5,379

El error absoluto es obviamente mayor en las aproximaciones con una cifra decimal.

33 y 34. Ejercicios resueltos.

35. Calcula las siguientes operaciones y da el resultado en notación científica.

a) 0,000 48 + 0,000 059

b) 35 000 000 – 720 000 000

c) 250 000 · 5,5·10^5

d) 0,000 000 15 : 0,000 003

e) 1,2 · 10^8 + 5000 · 2,4 · 10^5

f) $\frac{2{,}2\cdot 10^9 - 7{,}8\cdot 10^8}{7{,}1\cdot 10^{11}}$

g) $\frac{0{,}000\,16\left(25\cdot 10^3 + 2000\right)}{0{,}0025}$

h) $\frac{10^{23}\cdot 5{,}5\cdot 10^{-12}}{3{,}5\cdot 10^{22} + 4{,}3\cdot 10^{21}}$

a) 0,000 48 + 0,000 059 = 4,8 · 10^{-4} + 5,9 · 10^{-5} = 48 · 10^{-5} + 5,9 · 10^{-5} = 53,9 · 10^{-5} = 5,39 · 10^{-4}

b) 35 000 000 – 720 000 000 = 3,5 · 10^7 – 7,2 · 10^8 = 3,5 · 10^7 – 72 · 10^7 = –68,5 · 10^7 = –6,85 · 10^8

c) 250 000 · 5,5 · 10^5 = 2,5 · 10^5 · 5,5 · 10^5 = 13,75 · 10^{10} = 1,375 · 10^{11}

d) 0,000 000 15 : 0,000 003 = 1,5 · 10^{-7} : 3· 10^{-6} = 0,5 · 10^{-1} = 5 · 10^{-2}

e) 1,2 · 10^8 + 5000 · 2,4 · 10^5 = 1,2 · 10^8 + 5 · 10^3 · 2,4 · 10^5 = 1,2 · 10^8 + 12 · 10^8 = 13,2 · 10^8 = 1,32 · 10^9

f) $\frac{2{,}2\cdot 10^9 - 7{,}8\cdot 10^8}{7{,}1\cdot 10^{11}} = \frac{22\cdot 10^8 - 7{,}8\cdot 10^8}{7{,}1\cdot 10^{11}} = \frac{14{,}2\cdot 10^8}{7{,}1\cdot 10^{11}} = 2\cdot 10^{-3}$

g) $\frac{0{,}000\,16\left(25\cdot 10^3 + 2000\right)}{0{,}0025} = \frac{1{,}6\cdot 10^{-4}\left(25\cdot 10^3 + 2\cdot 10^3\right)}{2{,}5\cdot 10^{-3}} = \frac{1{,}6\cdot 10^{-4}\cdot 27\cdot 10^3}{2{,}5\cdot 10^{-3}} = 17{,}28\cdot 10^2 = 1{,}728\cdot 10^3$

h) $\frac{10^{23}\cdot 5{,}5\cdot 10^{-12}}{3{,}5\cdot 10^{22} + 4{,}3\cdot 10^{21}} = \frac{5{,}5\cdot 10^{11}}{35\cdot 10^{21} + 4{,}3\cdot 10^{21}} = \frac{5{,}5\cdot 10^{11}}{39{,}3\cdot 10^{21}} = 0{,}13995\cdot 10^{-10} = 1{,}3995\cdot 10^{-11}$

36. Un átomo de hidrógeno (H) tiene una masa de 1,66 · 10^{-24} g aproximadamente.

a) ¿Cuántos átomos de H se necesitan para obtener 20 kg de ese gas?

b) ¿Cuál es, aproximadamente, la masa de 2,524 · 10^{26} átomos de H?

c) Si 2 g de hidrógeno molecular ocupan un volumen de 22,4 L a 0 ºC y a la presión de 1 atm, ¿cuántas moléculas de hidrógeno contendría un recipiente de 5 L en estas condiciones?

a) $\frac{20000}{1{,}66\cdot 10^{-24}} = 1{,}205\cdot 10^{28}$ átomos de H serán necesarios para obtener una masa de 20 kg.

b) $2{,}524\cdot 10^{26}\cdot 1{,}66\cdot 10^{-24} = 419\text{ g} = 0{,}419\text{ kg}$

c) El recipiente de 5 litros contiene $\frac{2\cdot 5}{22{,}4}$ gramos de hidrógeno, es decir, $\frac{10}{22{,}4}:\left(1{,}66\cdot 10^{-24}\right) = 2{,}689\cdot 10^{23}$ átomos de hidrógeno. Como cada molécula está compuesta por dos átomos, habrá 1,345 · 10^{23} moléculas en total.

37. La masa de la Tierra es de 5,97 · 10^{24} kg, y la de Plutón, de 1,29 · 10^{22} kg.

a) ¿Cuál es la relación entre ambas masas?

b) Suponiendo que ambos cuerpos fueran esferas perfectas con radios de 6371 y 1160 km, respectivamente, calcula la densidad aproximada de cada uno de ellos.

a) La masa de la tierra es 5,97·10^{24} : 1,29 · 10^{22} = 463 veces mayor que la de Plutón.

b) Densidad de la Tierra $= \frac{\text{Masa}}{\text{Volumen}} = \frac{5{,}97\cdot 10^{24}\text{kg}}{\frac{4}{3}\pi\cdot 6371^3\text{ km}^3} = 5{,}5\cdot 10^{12}\text{ kg/km}^3 = \frac{5{,}5\cdot 10^{12}\cdot 1000}{10^{15}} = 5{,}5\text{ g/cm}^3$

Densidad de Plutón $= \frac{\text{Masa}}{\text{Volumen}} = \frac{1{,}29\cdot 10^{22}\text{kg}}{\frac{4}{3}\pi\cdot 1160^3\text{ km}^3} = 1{,}97\cdot 10^{12}\text{ kg/km}^3 = 1{,}97\text{ g/cm}^3$

38. Ejercicio resuelto.

39. Simplifica las siguientes expresiones.

a) $\sqrt{2}+\frac{3}{2}\sqrt{8}-\frac{1}{4}\sqrt{18}$

b) $\sqrt[4]{144a^2}-2\sqrt{\frac{27}{16}a}+\sqrt{3a}$

c) $\frac{\sqrt{8}+2\sqrt{32}+2\sqrt{128}}{\sqrt{2}}$

d) $\sqrt{\sqrt{\frac{\sqrt{2}+\sqrt{8}}{\sqrt{20}+\sqrt{5}}}}$

e) $\frac{a^4\cdot\sqrt[3]{a^2}\cdot\left(\sqrt{a}\right)^3}{\sqrt{\sqrt[3]{a^5}}}$

f) $\frac{\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt{a^3\sqrt{a}}}{\sqrt[6]{a\sqrt{a^3}}}:\sqrt[3]{\frac{1}{a}}$

a) $\sqrt{2}+\frac{3}{2}\sqrt{8}-\frac{1}{4}\sqrt{18}=\sqrt{2}+\frac{3\cdot 2}{2}\sqrt{2}-\frac{3}{4}\sqrt{2}=\sqrt{2}+3\sqrt{2}-\frac{3}{4}\sqrt{2}=\frac{13}{4}\sqrt{2}$

b) $\sqrt[4]{144a^2}-2\sqrt{\frac{27}{16}a}+\sqrt{3a}=\sqrt{12a}-2\cdot\frac{3}{4}\sqrt{3a}+\sqrt{3a}=2\sqrt{3a}-\frac{3}{2}\sqrt{3a}+\sqrt{3a}=\frac{3}{2}\sqrt{3a}$

c) $\frac{\sqrt{8}+2\sqrt{32}+2\sqrt{128}}{\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{2}+8\sqrt{2}+16\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{26\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=26$

d) $\sqrt{\sqrt{\frac{\sqrt{2}+\sqrt{8}}{\sqrt{20}+\sqrt{5}}}}=\sqrt[4]{\frac{\sqrt{2}+2\sqrt{2}}{2\sqrt{5}+\sqrt{5}}}=\sqrt[4]{\frac{3\sqrt{2}}{3\sqrt{5}}}=\sqrt[4]{\sqrt{\frac{2}{5}}}=\frac{\sqrt[8]{2}}{\sqrt[8]{5}}=\frac{\sqrt[8]{2}\,\sqrt[8]{5^7}}{\sqrt[8]{5}\,\sqrt[8]{5^7}}=\frac{\sqrt[8]{2\cdot 5^7}}{5}$

e) $\frac{a^4\,\sqrt[3]{a^2}\,(\sqrt{a})^3}{\sqrt{\sqrt[3]{a^5}}}=\frac{a^4\,a^{\frac{2}{3}}\,a^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{5}{6}}}=a^{4+\frac{2}{3}+\frac{3}{2}-\frac{5}{6}}=a^{\frac{16}{3}}=\sqrt[3]{a^{16}}$

f) $\frac{\sqrt[3]{a}\,\sqrt{a^3\sqrt{a}}}{\sqrt[6]{a\sqrt{a^3}}}:\sqrt[3]{\frac{1}{a}}=\frac{a^{\frac{1}{3}}\,\sqrt{\sqrt{a^6\,a}}}{\sqrt[6]{\sqrt{a^2\cdot a^3}}}:\frac{1}{a^{\frac{1}{3}}}=\frac{a^{\frac{1}{3}}\,\sqrt[4]{a^7}}{\sqrt[12]{a^5}}\,a^{\frac{1}{3}}=\frac{a^{\frac{1}{3}}\,a^{\frac{7}{4}}\,a^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{5}{12}}}=\frac{a^{\frac{29}{12}}}{a^{\frac{5}{12}}}=a^{\frac{24}{12}}=a^2$

40. Opera y simplifica las siguientes expresiones.

a) $128^{\frac{1}{2}}+162^{\frac{3}{2}}$

b) $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}$

a) $128^{\frac{1}{2}}+162^{\frac{3}{2}}=\sqrt{128}+\sqrt{162^3}=\sqrt{2^7}+\sqrt{2^3\cdot 3^{12}}=2^3\sqrt{2}+2\cdot 3^6\sqrt{2}=8\sqrt{2}+1458\sqrt{2}=1466\sqrt{2}$

b) $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}=\sqrt{\sqrt{2^3\sqrt{2}}}=\sqrt{\sqrt{\sqrt{2^7}}}=\sqrt[8]{2^7}$

41. Halla una expresión más simple para las siguientes.

a) $\frac{\sqrt{a}}{1-\frac{\sqrt{a}}{1+\sqrt{a}}}-\frac{\sqrt{a}}{1+\frac{\sqrt{a}}{1-\sqrt{a}}}$

b) $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{2}+2\sqrt{a}}-\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{2}-2\sqrt{a}}$

a) $\frac{\sqrt{a}}{1-\frac{\sqrt{a}}{1+\sqrt{a}}}-\frac{\sqrt{a}}{1+\frac{\sqrt{a}}{1-\sqrt{a}}}=\frac{\sqrt{a}}{\frac{1+\sqrt{a}-\sqrt{a}}{1+\sqrt{a}}}-\frac{\sqrt{a}}{\frac{1-\sqrt{a}+\sqrt{a}}{1-\sqrt{a}}}=\sqrt{a}(1+\sqrt{a})-\sqrt{a}(1-\sqrt{a})=\sqrt{a}+a-\sqrt{a}+a=2a$

b) $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{2}+2\sqrt{a}}-\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{2}-2\sqrt{a}}=\frac{\sqrt{a}\left(\sqrt{2}-2\sqrt{a}\right)}{\left(\sqrt{2}+2\sqrt{a}\right)\left(\sqrt{2}-2\sqrt{a}\right)}-\frac{\sqrt{a}\left(\sqrt{2}+2\sqrt{a}\right)}{\left(\sqrt{2}-2\sqrt{a}\right)\left(\sqrt{2}+2\sqrt{a}\right)}=\frac{\sqrt{2a}-2a}{2-4a}-\frac{\sqrt{2a}+2a}{2-4a}=$

$=\frac{\sqrt{2a}-2a-\sqrt{2a}-2a}{2-4a}\frac{-4a}{2-4a}=\frac{2a}{2a-1}$

42. Racionaliza los siguientes denominadores.

a) $\dfrac{5}{2\sqrt{5}}$ **c)** $\dfrac{5}{2\sqrt{5}+1}$ **e)** $\dfrac{\sqrt{6}}{2\sqrt{3}-3\sqrt{2}}$

b) $\dfrac{5}{2\sqrt[4]{5}}$ **d)** $\dfrac{3}{\sqrt{3}-2\sqrt{6}}$ **f)** $\dfrac{2\sqrt{3}-3\sqrt{2}}{\sqrt{8}-\sqrt{27}}$

a) $\dfrac{5}{2\sqrt{5}}=\dfrac{5\sqrt{5}}{2\sqrt{5}\sqrt{5}}=\dfrac{5\sqrt{5}}{10}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$

b) $\dfrac{5}{2\sqrt[4]{5}}=\dfrac{5\cdot\sqrt[4]{5^3}}{2\sqrt[4]{5}\cdot\sqrt[4]{5^3}}=\dfrac{5\cdot\sqrt[4]{5^3}}{2\cdot 5}=\dfrac{\sqrt[4]{5^3}}{2}$

c) $\dfrac{5}{2\sqrt{5}+1}=\dfrac{5\left(2\sqrt{5}-1\right)}{\left(2\sqrt{5}+1\right)\left(2\sqrt{5}-1\right)}=\dfrac{10\sqrt{5}-5}{\left(2\sqrt{5}\right)^2-1^2}=\dfrac{10\sqrt{5}-5}{4\cdot 5-1}=\dfrac{10\sqrt{5}-5}{19}$

d) $\dfrac{3}{\sqrt{3}-2\sqrt{6}}=\dfrac{3\left(\sqrt{3}+2\sqrt{6}\right)}{\left(\sqrt{3}-2\sqrt{6}\right)\left(\sqrt{3}+2\sqrt{6}\right)}=\dfrac{3\sqrt{3}+6\sqrt{6}}{3-4\cdot 6}=-\dfrac{3\sqrt{3}+6\sqrt{6}}{21}=-\dfrac{\sqrt{3}+2\sqrt{6}}{7}$

e) $\dfrac{\sqrt{6}}{2\sqrt{3}-3\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{6}\left(2\sqrt{3}+3\sqrt{2}\right)}{\left(2\sqrt{3}-3\sqrt{2}\right)\left(2\sqrt{3}+3\sqrt{2}\right)}=\dfrac{2\sqrt{18}+3\sqrt{12}}{4\cdot 3-9\cdot 2}=-\dfrac{6\sqrt{2}+6\sqrt{3}}{6}=-\sqrt{2}-\sqrt{3}$

f) $\dfrac{2\sqrt{3}-3\sqrt{2}}{\sqrt{8}-\sqrt{27}}=\dfrac{2\sqrt{3}-3\sqrt{2}}{2\sqrt{2}-3\sqrt{3}}=\dfrac{\left(2\sqrt{3}-3\sqrt{2}\right)\left(2\sqrt{2}+3\sqrt{3}\right)}{\left(2\sqrt{2}-3\sqrt{3}\right)\left(2\sqrt{2}+3\sqrt{3}\right)}=\dfrac{4\sqrt{6}+18-12-9\sqrt{6}}{8-27}=\dfrac{5\sqrt{6}-6}{19}$

43. Ejercicio interactivo.

44 a 48. Ejercicios resueltos.

49. Aplicando la definición, halla el valor de los logaritmos:

a) $\log_2 16$ **c)** $\log_7 \dfrac{1}{49}$ **e)** $\log_3 3\sqrt{3}$ **g)** $\log_3 0,\widehat{3}$

b) $\log_5 \sqrt[3]{25}$ **d)** $\log_9 \sqrt[3]{3}$ **f)** $\log_{\frac{1}{2}} \sqrt{8}$ **h)** $\log_8 0,125$

a) $\log_2 16=\log_2 2^4=4$

b) $\log_5 \sqrt[3]{25}=\log_5 \sqrt[3]{5^2}=\log_5 5^{\frac{2}{3}}=\dfrac{2}{3}$

c) $\log_7 \dfrac{1}{49}=x\Rightarrow 7^x=\dfrac{1}{49}=7^{-2}\Rightarrow x=-2\Rightarrow \log_7 \dfrac{1}{49}=-2$

d) $\log_9 \sqrt[3]{3}=x\Rightarrow 9^x=\sqrt[3]{3}=3^{\frac{1}{3}}\Rightarrow 3^{2x}=3^{\frac{1}{3}}\Rightarrow 2x=\dfrac{1}{3}\Rightarrow x=\dfrac{1}{6}\Rightarrow \log_9 \sqrt[3]{3}=\dfrac{1}{6}$

e) $\log_3 3\sqrt{3}=x\Rightarrow 3^x=3\sqrt{3}=3\cdot 3^{\frac{1}{2}}=3^{\frac{3}{2}}\Rightarrow x=\dfrac{3}{2}\Rightarrow \log_3 3\sqrt{3}=\dfrac{3}{2}$

f) $\log_{\frac{1}{2}} \sqrt{8}\Rightarrow \left(\dfrac{1}{2}\right)^x=\sqrt{8}\Rightarrow 2^{-x}=\sqrt{2^3}=2^{\frac{3}{2}}\Rightarrow x=-\dfrac{3}{2}\Rightarrow \log_{\frac{1}{2}} \sqrt{8}=-\dfrac{3}{2}$

g) $\log_3 0,\widehat{3}=x\Rightarrow 3^x=0,\widehat{3}=\dfrac{1}{3}=3^{-1}\Rightarrow x=-1\Rightarrow \log_3 0,\widehat{3}=-1$

h) $\log_8 0,125=x\Rightarrow 8^x=0,125\Rightarrow 2^{3x}=\dfrac{1}{8}=2^{-3}\Rightarrow 3x=-3\Rightarrow x=-1\Rightarrow \log_8 0,125=-1$

50. Tomando log 2 = 0,301 y que log 3 = 0,477, halla:

$\log_3 8$ **b)** $\log 60$ **c)** $\log\sqrt{0{,}012}$

a) $\log_3 8 = \frac{\log 8}{\log 3} = \frac{\log 2^3}{\log 3} = \frac{3\log 2}{\log 3} = 1{,}893$

b) $\log 60 = \log(2\cdot 3\cdot 10) = \log 2 + \log 3 + \log 10 = 0{,}301 + 0{,}477 + 1 = 1{,}778$

c) $\log\sqrt{0{,}012} = \log\sqrt{\frac{12}{1000}} = \log\left(\frac{12}{1000}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\log\frac{12}{1000} = \frac{1}{2}(\log 12 - \log 1000) = \frac{1}{2}(\log(2^2\cdot 3) - \log 10^3) =$

$= \frac{1}{2}(2\log 2 + \log 3 - 3) = \frac{1}{2}(2\cdot 0{,}301 + 0{,}477 - 3) = -0{,}9605$

51. Toma logaritmos en la expresión $A = (x^x)^x$.

$\log A = \log\left[\left(x^x\right)^x\right] = x\log\left(x^x\right) = x\cdot x\log x = x^2\log x$

52. Escribe en la forma algebraica las siguientes expresiones.

a) $\log A = 2 + 2\log x - \log y$

b) $\log B = 3(\log x - 1) - 2(1 - \log y)$

c) $\log C = 2\log\sqrt{x} - \log x - \log y + 3\log\sqrt[3]{y}$

d) $\log D = \log x^3 + 3\log y - \log x^4$

a) $\log A = \log 100 + \log x^2 - \log y \Rightarrow \log A = \log\frac{100x^2}{y} \Rightarrow A = \frac{100x^2}{y}$

b) $\log B = 3\log x + 2\log y - 5 = \log\frac{x^3y^2}{10^5} \Rightarrow B = \frac{x^3y^2}{10^5}$

c) $\log C = \log x - \log x - \log y + \log y = 0 = \log 1 \Rightarrow C = 1$

d) $\log D = \log x^3 + \log y^3 - \log x^4 = \log\frac{x^3y^3}{x^4} = \log\frac{y^3}{x} \Rightarrow D = \frac{y^3}{x}$

53. Halla el valor de los siguientes logaritmos utilizando para ello la calculadora.

a) $\log_3 21$ **b)** $\log_{0,01} 12$ **c)** $\log_{\sqrt{3}} 19$

a) $\log_3 21 = \frac{\ln 21}{\ln 3} = 2{,}771$ **b)** $\log_{0,01} 12 = \frac{\ln 12}{\ln 0{,}01} = -0{,}540$ **c)** $\log_{\sqrt{3}} 19 = \frac{\ln 19}{\ln\sqrt{3}} = 5{,}360$

54 a 56. Ejercicios resueltos.

57. En un cultivo de bacterias, el número se duplica cada dos días. Un día se contabilizan 3000 bacterias.

a) Calcula el número de bacterias que habrá 15 días después.

b) ¿Cuántos días han de pasar para que haya el triple de bacterias? ¿Y si el número inicial fuera de 6000 bacterias?

c) Se supone que la población se estabiliza al alcanzar las 20 000 bacterias. ¿Cuánto tiempo ha de pasar para ello?

El número de bacterias cuando han pasado *t* días es $N = 3000 \cdot 2^{\frac{t}{2}}$.

a) Para $t = 15 \Rightarrow N = 3000 \cdot 2^{7,5} = 543\,058$ bacterias

b) $3N = N \cdot 2^{\frac{t}{2}} \Rightarrow 2^{\frac{t}{2}} = 3 \Rightarrow \log 2^{\frac{t}{2}} = \log 3 \Rightarrow \frac{t}{2}\log 2 = \log 3 \Rightarrow t = 2 \cdot \frac{\log 3}{\log 2} = 3{,}17$ días

El resultado anterior es independiente del número inicial de bacterias.

c) $20000 = 3000 \cdot 2^{\frac{t}{2}} \Rightarrow 2^{\frac{t}{2}} = \frac{20000}{3000} \Rightarrow \log 2^{\frac{t}{2}} = \log\frac{20}{3} \Rightarrow \frac{t}{2}\log 2 = \log\frac{20}{3} \Rightarrow t = 2 \cdot \frac{\log\frac{20}{3}}{\log 2} = 5{,}47$ días

58. Cierta sustancia radiactiva tiene un período de semidesintegración de 1600 años. Calcula la cantidad de masa a la que se habrá reducido 1 kilogramo de esta sustancia al cabo de 10 000 años.

La masa al cabo de 10 000 años será: $1 \cdot 0{,}5^{\frac{10\,000}{1600}} = 0{,}01314 \text{ kg} = 13{,}14 \text{ g}$

59. Se depositan en un banco 5000 € durante 2 años. El banco informa de que el interés es del 3,5 % anual.

a) Calcula el capital acumulado suponiendo que la capitalización es anual.

b) ¿A cuánto asciende si es mensual?

c) ¿Cuál sería el capital acumulado con una capitalización diaria?

d) Interpreta los resultados obtenidos.

a) $C = 5000 \cdot 1{,}035^2 = 5356$ €

b) $C = 5000\left(1 + \frac{3{,}5}{1200}\right)^{2 \cdot 12} = 5362$ €

c) $C = 5000\left(1 + \frac{3{,}5}{36500}\right)^{2 \cdot 365} = 5362{,}5$ €

d) No se aprecian grandes diferencias al cambiar la acumulación anual por la mensual, y son casi insignificantes al cambiarla por acumulación diaria.

60. Ejercicio interactivo.

61 a 75. Ejercicios resueltos.

EJERCICIOS

Números reales

76. Escribe dos números comprendidos entre:

a) $\frac{19}{23}$ y $\frac{20}{23}$

b) $\frac{22}{7}$ y π

a) Respuesta abierta. $\frac{19}{23}=\frac{57}{69}$ y $\frac{20}{23}=\frac{60}{69}$. Entre estos dos números están $\frac{58}{69}$ y $\frac{59}{69}$.

b) Respuesta abierta. $\frac{22}{7}=3{,}1428...$, $\pi=3{,}1415...$ Entre ambos están 3,1416 y 3,1417.

77. Clasifica los siguientes números en racionales e irracionales. En el caso de los racionales, indica su expresión mediante una fracción irreducible.

a) 12,121 314 15…

b) 12,121 212…

c) 12,012 121 2…

d) 1,010 010 001…

e) 1,123 123 123…

f) 0,001 002 003 004…

a) 12,121 314 15… Irracional

b) 12,121 212… $= 12{,}\widehat{12}$ Racional $\begin{cases}100N = 1212{,}1212...\\ N = 12{,}121212...\end{cases} \Rightarrow 99N = 1200 \Rightarrow N = \frac{1200}{99} = \frac{400}{33}$

c) 12,012 121 2… $= 12{,}0\widehat{12}$ Racional $\begin{cases}1000N = 12012{,}1212...\\ 10N = 120{,}121212...\end{cases} \Rightarrow 990N = 11892 \Rightarrow N = \frac{11892}{990} = \frac{1982}{165}$

d) ,010010001… Irracional

e) 1,123 123 123… $= 1{,}\widehat{123}$ Racional $\begin{cases}1000N = 1123{,}123123...\\ N = 1{,}123123...\end{cases} \Rightarrow 999N = 1122 \Rightarrow N = \frac{1122}{999} = \frac{374}{333}$

f) 0,001 002 003 004… Irracional

78. Clasifica estos números indicando a qué conjuntos numéricos pertenecen.

a) 25,012 345 6…

b) 25,425 252 5…

c) –4

d) $\frac{3}{7}$

e) 2

f) $\sqrt{2{,}3}$

g) $-\sqrt{0{,}0625}$

h) $-\frac{65}{13}$

a) 25,012 345 6… es irracional y real.

b) 25,425 252 5… es racional y real.

c) –4 es entero, racional y real.

d) $\frac{3}{7}$ es racional y real.

e) 2 es natural, entero, racional y real.

f) $\sqrt{2{,}3}$ es irracional y real.

g) $-\sqrt{0{,}0625} = -0{,}25$ es racional y real.

h) $\frac{-65}{13} = -5$ es entero, racional y real.

79. Ordena de menor a mayor estos números.

25,0111… $\quad \mathbf{\frac{126}{5}} \quad$ **25,01** $\quad \mathbf{\frac{226}{9}}$

$\frac{126}{5} = 25{,}2$ y $\frac{226}{9} = 25{,}1111...$

El orden es: $25{,}01 < 25{,}0111... < \frac{226}{9} < \frac{126}{5}$

80. Calcula el valor de las expresiones y expresa el resultado mediante números decimales periódicos.

a) $\dfrac{2{,}23+2{,}2333...}{2{,}232323...}$ **b)** $1+1{,}12+1{,}1\widehat{2}+1{,}\widehat{12}$

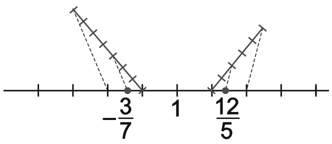
a) $\dfrac{2{,}23+2{,}2333...}{2{,}232\,323...}=\dfrac{\dfrac{223}{100}+\dfrac{223-22}{90}}{\dfrac{223-2}{99}}=\dfrac{\dfrac{1339}{300}}{\dfrac{221}{99}}=\dfrac{132\,561}{66\,300}=\dfrac{3399}{1700}=1{,}99\widehat{9411764705882352}$

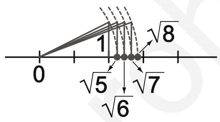
b) $1+1{,}12+1{,}1\widehat{2}+1{,}\widehat{12}=1+\dfrac{112}{100}+\dfrac{112-11}{90}+\dfrac{112-1}{99}=\dfrac{21\,599}{4950}=4{,}36\widehat{34}$

81. Representa los siguientes números reales.

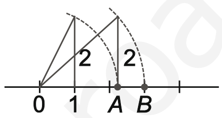
a) $\dfrac{12}{5}$ **c)** $\sqrt{5}$ **e)** $\sqrt{7}$

b) $-\dfrac{3}{7}$ **d)** $\sqrt{6}$ **f)** $\sqrt{8}$





82. Indica qué números reales representan los puntos *A* y *B* de la figura.



$A=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$ $B=\sqrt{2^2+\left(\sqrt{5}\right)^2}=\sqrt{4+5}=3$

Valor absoluto e intervalos

83. Desarrolla las siguientes expresiones.

a) $|\,2x-4\,|+x$ **b)** $|\,x\,|+|\,2x\,|$ **c)** $|\,x-1\,|+|\,x+1\,|$ **d)** $x+|\,x\,|+|\,x+2\,|$

a) $|2x-4|+x=\begin{cases}-2x+4+x & \text{si } x<2\\ 2x-4+x & \text{si } x\ge 2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}4-x & \text{si } x<2\\ 3x-4 & \text{si } x\ge 2\end{cases}$

b) $|x|+|2x|=\begin{cases}-x-2x & \text{si } x<0\\ x+2x & \text{si } x\ge 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-3x & \text{si } x<0\\ 3x & \text{si } x\ge 0\end{cases}$

Se podía haber hecho $|x|+|2x|=|x|+2|x|=3|x|$

c) $|x-1|+|x+1|=\begin{cases}-(x-1)-(x+1) & \text{si} & x\le -1\\ -(x-1)+x+1 & \text{si} & -1<x<1\\ x-1+x+1 & \text{si} & x\ge 1\end{cases}=\begin{cases}-2x & \text{si} & x\le -1\\ 2 & \text{si} & -1<x<1\\ 2x & \text{si} & x\ge 1\end{cases}$

d) $x+|x|+|x+2|=\begin{cases}x-x-x-2 & \text{si} & x<-2\\ x-x+x+2 & \text{si} & -2\le x\le 0\\ x+x+x+2 & \text{si} & x>0\end{cases}=\begin{cases}-x-2 & \text{si} & x<-2\\ x+2 & \text{si} & -2\le x\le 0\\ 3x+2 & \text{si} & x>0\end{cases}$

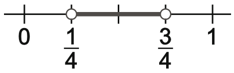
84. Dados los conjuntos *A* = (−2, +∞), *B* = (−2, 0] y *C* = [0, 4), calcula $A\cup B\cup C$ y $A\cap B\cap C$.

$A\cup B\cup C=A=(-2,+\infty)$ $A\cap B\cap C=\{0\}$

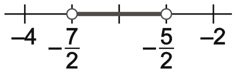
85. Expresa mediante un intervalo los siguientes conjuntos de números reales *x* y represéntalos en la recta real.

a) $\left|x-\frac{1}{2}\right|<\frac{1}{4}$ **b)** $|2x+6|<1$ **c)** $|x|<\frac{1}{3}$

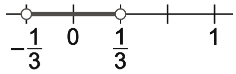
a) $\left(\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right)$



b) $|x+3|<\frac{1}{2}\Rightarrow\left(\frac{-7}{2},\frac{-5}{2}\right)$



c) $\left(\frac{-1}{3},\frac{1}{3}\right)$



Aproximaciones y errores

86. Da la expresión aproximada que se pide en cada caso.

a) $\frac{23}{7}$ por exceso con tres cifras decimales

b) $\sqrt{5}+\sqrt{125}$ por defecto con dos cifras decimales

c) $2\pi - 1$ redondeado a tres cifras decimales

a) $\frac{23}{7}\simeq 3{,}286$

b) $\sqrt{5}+\sqrt{125}\simeq 13{,}41$

c) $2\pi-1\simeq 5{,}283$

87. Acota el error relativo que se comete al tomar como aproximación del número áureo $\Phi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ el número racional 1,618.

Error relativo: $E_r=\frac{\left|\frac{1+\sqrt{5}}{2}-1{,}618\right|}{1{,}618}<\frac{0{,}000\,034}{1{,}618}<0{,}000\,022$

88. Escribe las aproximaciones hasta las milésimas, por exceso y por defecto, de los números $\sqrt{3}$ y 3π. Posteriormente, obtén aproximaciones por defecto y por exceso del producto $3\pi\cdot\sqrt{3}$.

Acota el error absoluto cometido en ambos casos.

$\sqrt{3}$	1 cifra	2 cifras	3 cifras
Defecto	1,7	1,73	1,732
Exceso	1,8	1,74	1,733

3π	1 cifra	2 cifras	3 cifras
Defecto	9,4	9,42	9,424
Exceso	9,5	9,43	9,425

$3\pi\sqrt{3}$	1 cifra	2 cifras	3 cifras
Defecto	16,3	16,32	16,324
Exceso	16,4	16,33	16,325

Aproximando con tres decimales por defecto tenemos:

para $\sqrt{3} = 1{,}732\ 050\ 8\ldots$: $E_a = 0{,}000\ 050\ 8\ldots < 0{,}000\ 051$

para $3\pi = 9{,}424\ 777\ 9\ldots$: $E_a = 0{,}000\ 777\ 9\ldots < 0{,}0008$

para $3\pi\sqrt{3} = 16{,}324\ 194\ 2\ldots$: $E_a = 0{,}000\ 194\ 2\ldots < 0{,}0002$

Aproximando con tres decimales por exceso tenemos:

para $\sqrt{3} = 1{,}732\ 050\ 8\ldots$: $E_a = 0{,}000\ 949\ 1\ldots < 0{,}000\ 95$

para $3\pi = 9{,}424\ 777\ 9\ldots$: $E_a = 0{,}000\ 222\ 0\ldots < 0{,}000\ 23$

para $3\pi\sqrt{3} = 16{,}324\ 194\ 2\ldots$: $E_a = 0{,}000\ 825\ 7\ldots < 0{,}000\ 83$

Notación científica

89. Realiza las siguientes operaciones y expresa el resultado en notación científica.

a) $10^8 - 4\cdot 10^6$

b) $0{,}000\ 25\cdot 0{,}0015$

c) $235\ 000\cdot 0{,}000\ 25$

d) $15\ 000\ 000 : 45\ 000$

e) $0{,}000\ 06 : 45\ 000\ 000$

f) $0{,}0025\cdot 10^{-13} : 10^{-23}$

g) $\dfrac{1{,}2\cdot 10^8 - 1{,}5\cdot 10^7 + 6\cdot 10^9}{0{,}000\ 003}$

h) $\dfrac{7\cdot 10^{-20} + 5\cdot 10^{-18}}{0{,}000\ 000\ 004}$

a) $10^8 - 4\cdot 10^6 = 9{,}6\cdot 10^7$

b) $0{,}000\ 25\cdot 0{,}0015 = 3{,}75\cdot 10^{-7}$

c) $235\ 000\cdot 0{,}000\ 25 = 5{,}875\cdot 10$

d) $150\ 000\ 000 : 450\ 000 = 3{,}333\ldots\cdot 10^2$

e) $0{,}000\ 06 : 45\ 000\ 000 = 1{,}333\ldots\cdot 10^{-12}$

f) $0{,}0025\cdot 10^{-13} : 10^{-23} = 2{,}5\cdot 10^7$

g) $\dfrac{1{,}2\cdot 10^8 - 1{,}5\cdot 10^7 + 6\cdot 10^9}{0{,}000\ 003} = 2{,}035\cdot 10^{15}$

h) $\dfrac{7\cdot 10^{-20} + 5\cdot 10^{-18}}{0{,}000\ 000\ 004} = 1{,}2675\cdot 10^{-9}$

Potencias y radicales

90. Simplifica las expresiones siguientes.

a) $\dfrac{3^{3+\sqrt{9}}\sqrt{2^2+5}}{2(-3)-5}$

b) $\dfrac{\left(2-\dfrac{3}{2}\right)^{-2}\left(4^3-4^2\right)^{-1}}{6^{-2}}$

c) $\dfrac{\left(\dfrac{3}{2}\right)^{-2}\left(\dfrac{4}{3}\right)^{-3}}{2^{-4}\cdot 3^{-3}}$

d) $\dfrac{27^{-15}(-75)^{40}}{45^{35}(-15)^{60}}$

e) $\sqrt{3}+2\sqrt{27}-\sqrt{12}$

f) $\sqrt[4]{390\,625\,a^5b^{16}}$

g) $\sqrt{x}\,\sqrt[3]{x}\,\sqrt[4]{x^3}$

h) $\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3}}}$

i) $\left(\dfrac{1}{2}-\sqrt{2-\dfrac{1}{2}}\right)^2$

j) $\dfrac{\sqrt{x\sqrt{x}}}{\sqrt[3]{x}}$

k) $16^{\frac{1}{2}}+9^{\frac{3}{2}}$

l) $\sqrt[3]{81a^3}+2a\sqrt[3]{24}$

m) $\sqrt[3]{\sqrt{2}\,\sqrt[3]{4}}$

n) $\sqrt{\dfrac{2}{3}}+\sqrt{\dfrac{3}{2}}$

a) $\dfrac{3^{3+\sqrt{9}}\sqrt{2^2+5}}{2(-3)-5}=\dfrac{3^6\cdot 3}{-11}=-\dfrac{3^7}{11}$

b) $\dfrac{\left(2-\dfrac{3}{2}\right)^{-2}\left(4^3-4^2\right)^{-1}}{6^{-2}}=\dfrac{2^2\cdot\dfrac{1}{48}}{2^{-2}\cdot 3^{-2}}=\dfrac{2^2\cdot 2^2\cdot 3^2}{2^4\cdot 3}=3$

c) $\dfrac{\left(\dfrac{3}{2}\right)^{-2}\left(\dfrac{4}{3}\right)^{-3}}{2^{-4}\cdot 3^{-3}}=\dfrac{\dfrac{2^2}{3^2}\cdot\dfrac{3^3}{2^6}}{2^{-4}\cdot 3^{-3}}=\dfrac{2^2\cdot 3^3\cdot 2^4\cdot 3^3}{3^2\cdot 2^6}=3^4=81$

d) $\dfrac{27^{-15}\cdot(-75)^{40}}{45^{35}\cdot(-15)^{60}}=\dfrac{\left(3^3\right)^{-15}\left(3\cdot 5^2\right)^{40}}{\left(3^2\cdot 5\right)^{35}\left(3\cdot 5\right)^{60}}=\dfrac{3^{-45}\cdot 3^{40}\cdot 5^{80}}{3^{70}\cdot 5^{35}\cdot 3^{60}\cdot 5^{60}}=3^{-135}\cdot 5^{-15}$

e) $\sqrt{3}+2\sqrt{27}-\sqrt{12}=\sqrt{3}+2\cdot 3\sqrt{3}-2\sqrt{3}=5\sqrt{3}$

f) $\sqrt[4]{390\,625\,a^5b^{16}}=\sqrt[4]{5^8a^5b^{16}}=5^2\,a\,b^4\,\sqrt[4]{a}=25ab^4\sqrt[4]{a}$

g) $\sqrt{x}\,\sqrt[3]{x}\,\sqrt[4]{x^3}=\sqrt[12]{x^6x^4x^9}=\sqrt[12]{x^{19}}=x\sqrt[12]{x^7}$

h) $\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3}}}=\sqrt[8]{3^43^23}=\sqrt[8]{3^7}$

i) $\left(\dfrac{1}{2}-\sqrt{2-\dfrac{1}{2}}\right)^2=\dfrac{1}{4}+2-\dfrac{1}{2}-2\cdot\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{3}{2}}=\dfrac{7}{4}-\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=\dfrac{7}{4}-\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

j) $\dfrac{\sqrt{x\sqrt{x}}}{\sqrt[3]{x}}=\dfrac{\sqrt[4]{x^3}}{\sqrt[3]{x}}=\sqrt[12]{\dfrac{\left(x^3\right)^3}{x^4}}=\sqrt[12]{x^5}$

k) $16^{\frac{1}{2}}+9^{\frac{3}{2}}=\sqrt{16}+\sqrt{3^6}=4+27=31$

l) $\sqrt[3]{81a^3}+2a\sqrt[3]{24}=3a\sqrt[3]{3}+4a\sqrt[3]{3}=7a\sqrt[3]{3}$

m) $\sqrt[3]{\sqrt{2}\,\sqrt[3]{4}}=\sqrt[3]{\sqrt[6]{2^3\cdot 4^2}}=\sqrt[18]{2^7}$

n) $\sqrt{\dfrac{2}{3}}+\sqrt{\dfrac{3}{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}+\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}\,\sqrt{2}+\sqrt{3}\,\sqrt{3}}{\sqrt{6}}=\dfrac{2+3}{\sqrt{6}}=\dfrac{5}{\sqrt{6}}=\dfrac{5\sqrt{6}}{6}$

91. Opera y simplifica.

a) $(-2)^0+(-2)^1+(-2)^2+\ldots+(-2)^8$ **b)** $\frac{1}{3}\sqrt[4]{80}-\frac{1}{2}\sqrt[4]{405}-\sqrt[4]{5}$ **c)** $2\left(2-3\sqrt{2}\right)^2+\left(2-3\sqrt{2}\right)\left(2+3\sqrt{2}\right)$

a) $(-2)^0+(-2)^1+(-2)^2+\ldots+(-2)^8=1-2+4-8+16-32+64-128+256=171$

b) $\frac{1}{3}\sqrt[4]{80}-\frac{1}{2}\sqrt[4]{405}-\sqrt[4]{5}=\frac{1}{3}\cdot 2\sqrt[4]{5}-\frac{1}{2}\cdot 3\sqrt[4]{5}-\sqrt[4]{5}=-\frac{11}{6}\sqrt[4]{5}$

c) $2\left(2-3\sqrt{2}\right)^2+\left(2-3\sqrt{2}\right)\left(2+3\sqrt{2}\right)=2\left(4+18-12\sqrt{2}\right)+4-18=30-24\sqrt{2}$

92. Racionaliza los denominadores.

a) $\frac{a}{a\sqrt[6]{a^8}}$ **d)** $\frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$ **g)** $\frac{1}{1-\sqrt{2}-\sqrt{3}}$

b) $\frac{3y}{2\sqrt[5]{y^2}}$ **e)** $\frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ **h)** $\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{8}+\sqrt{3}+\sqrt{2}}$

c) $\frac{x+2}{2\sqrt{x+2}}$ **f)** $\frac{6\sqrt{6}}{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}}$ **i)** $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}}$

a) $\frac{a}{a\sqrt[6]{a^8}}=\frac{a}{a^2\sqrt[6]{a^2}}=\frac{1}{a\sqrt[3]{a}}=\frac{\sqrt[3]{a^2}}{a\sqrt[3]{a}\sqrt[3]{a^2}}=\frac{\sqrt[3]{a^2}}{a^2}$

b) $\frac{3y}{2\sqrt[5]{y^2}}=\frac{3y\sqrt[5]{y^3}}{2\sqrt[5]{y^2}\cdot\sqrt[5]{y^3}}=\frac{3y\sqrt[5]{y^3}}{2y}=\frac{3\sqrt[5]{y^3}}{2}$

c) $\frac{x+2}{2\sqrt{x+2}}=\frac{(x+2)\sqrt{x+2}}{2\sqrt{x+2}\sqrt{x+2}}=\frac{(x+2)\sqrt{x+2}}{2(x+2)}=\frac{\sqrt{x+2}}{2}$

d) $\frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}\left(1-\sqrt{2}\right)}{\left(1+\sqrt{2}\right)\left(1-\sqrt{2}\right)}=\frac{\sqrt{2}-2}{1-2}=2-\sqrt{2}$

e) $\frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{6}\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}=\frac{2\sqrt{18}+2\sqrt{12}}{3-2}=6\sqrt{2}+4\sqrt{3}$

f) $\frac{6\sqrt{6}}{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}}=\frac{6\sqrt{6}\left(2\sqrt{3}-3\sqrt{2}\right)}{\left(2\sqrt{3}+3\sqrt{2}\right)\left(2\sqrt{3}-3\sqrt{2}\right)}=\frac{12\sqrt{18}-18\sqrt{12}}{12-18}=3\sqrt{12}-2\sqrt{18}=6\sqrt{3}-6\sqrt{2}$

g) $\frac{1-\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\left(1-\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)\left(1-\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)}=\frac{1-\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\left(1-\sqrt{2}\right)^2-3}=\frac{1-\sqrt{2}+\sqrt{3}}{1+2-2\sqrt{2}-3}=\frac{1-\sqrt{2}+\sqrt{3}}{-2\sqrt{2}}=-\frac{\left(1-\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\sqrt{2}}{2\sqrt{2}\sqrt{2}}=\frac{2-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

h) $\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{8}+\sqrt{3}+\sqrt{2}}=\frac{1+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{2}}=\frac{1+\sqrt{2}}{3\sqrt{2}+\sqrt{3}}=\frac{\left(1+\sqrt{2}\right)\left(3\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)}{\left(3\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\left(3\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)}=\frac{3\sqrt{2}-\sqrt{3}+6-\sqrt{6}}{18-3}=\frac{3\sqrt{2}-\sqrt{3}+6-\sqrt{6}}{15}$

i) $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}}=\frac{\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{6}\right)}{\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}\right)\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{6}\right)}=\frac{2+\sqrt{6}-\sqrt{12}+\sqrt{6}+3-\sqrt{18}}{\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2-6}=\frac{5+2\sqrt{6}-2\sqrt{3}-3\sqrt{2}}{2+3+2\sqrt{6}-6}=$

$=\frac{5+2\sqrt{6}-2\sqrt{3}-3\sqrt{2}}{2\sqrt{6}-1}=\frac{\left(5+2\sqrt{6}-2\sqrt{3}-3\sqrt{2}\right)\left(2\sqrt{6}+1\right)}{\left(2\sqrt{6}-1\right)\left(2\sqrt{6}+1\right)}=$

$=\frac{10\sqrt{6}+5+24+2\sqrt{6}-4\sqrt{18}-2\sqrt{3}-6\sqrt{12}-3\sqrt{2}}{24-1}=\frac{12\sqrt{6}+29-15\sqrt{2}-14\sqrt{3}}{23}$

Logaritmos

93. Aplicando la definición, calcula el valor de los siguientes logaritmos.

a) $\log_2 \frac{1}{8}$ **d)** $\log_{\frac{1}{3}} \sqrt{27}$ **g)** $\log_{\sqrt{2}} \left(2\sqrt{2}\right)^3$

b) $\log_{\frac{1}{9}} \frac{1}{3}$ **e)** $\log_{\sqrt{8}} \left(2\sqrt{2}\right)$ **h)** $\log_{\frac{1}{2}} \sqrt[3]{64}$

c) $\log \frac{1}{1000}$ **f)** $\log_{\sqrt{3}} \left(\frac{1}{9}\right)$ **i)** $\log_{0,001} 10\,000$

a) $\log_2 \frac{1}{8} = x \Rightarrow 2^x = \frac{1}{8} = 2^{-3} \Rightarrow x = -3$

b) $\log_{\frac{1}{9}} \frac{1}{3} = x \Rightarrow \left(\frac{1}{9}\right)^x = \frac{1}{3} \Rightarrow 9^{-x} = 3^{-1} \Rightarrow 3^{-2x} = 3^{-1} \Rightarrow 2x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$

c) $\log \frac{1}{1000} = x \Rightarrow 10^x = 10^{-3} \Rightarrow x = -3$

d) $\log_{\frac{1}{3}} \sqrt{27} = x \Rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^x = 27^{\frac{1}{2}} \Rightarrow 3^{-x} = 3^{\frac{3}{2}} \Rightarrow x = -\frac{3}{2}$

e) $\log_{\sqrt{8}} \left(2\sqrt{2}\right) = x \Rightarrow \left(\sqrt{8}\right)^x = 2\sqrt{2} \Rightarrow 2^{\frac{3x}{2}} = 2^{\frac{3}{2}} \Rightarrow \frac{3x}{2} = \frac{3}{2} \Rightarrow x = 1$

f) $\log_{\sqrt{3}} \left(\frac{1}{9}\right) = x \Rightarrow \left(\sqrt{3}\right)^x = \frac{1}{9} = 3^{-2} \Rightarrow 3^{\frac{x}{2}} = 3^{-2} \Rightarrow \frac{x}{2} = -2 \Rightarrow x = -4$

g) $\log_{\sqrt{2}} \left(2\sqrt{2}\right)^3 = x \Rightarrow \left(\sqrt{2}\right)^x = \left(2\sqrt{2}\right)^3 = \left(\sqrt{2^3}\right)^3 \Rightarrow 2^{\frac{x}{2}} = 2^{\frac{9}{2}} \Rightarrow x = 9$

h) $\log_{\frac{1}{2}} \sqrt[3]{64} = x \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^x = 2^{\frac{6}{3}} \Rightarrow 2^{-x} = 2^2 \Rightarrow x = -2$

i) $\log_{0,001} 10\,000 = x \Rightarrow 0{,}001^x = 10\,000 = 10^4 \Rightarrow 10^{-3x} = 10^4 \Rightarrow x = -\frac{4}{3}$

94. Calcula, si es posible, el valor de *x* en cada una de las siguientes expresiones.

a) $\log_x 8 = -3$ **c)** $\log_3 (-81) = x$ **e)** $\log_x \sqrt{2} = 0$ **g)** $\log_3 x = -1$

b) $\log_{-3} x = 9$ **d)** $\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}} x = -2$ **f)** $\log_1 2 = x$ **h)** $\log_{\frac{1}{a}} a^2 = x$

a) $\log_x 8 = -3 \Rightarrow x^{-3} = 8 = 2^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} \Rightarrow x = \frac{1}{2}$

b) $\log_{-3} x = 9$. No está definido.

c) $\log_3 (-81) = x$. No está definido.

d) $\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}} x = -2 \Rightarrow x = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{-2} = \left(\sqrt{2}\right)^2 = 2$

e) $\log_x \sqrt{2} = 0$. No existe *x*.

f) $\log_1 2 = x$. No está definido.

g) $\log_3 x = -1 \Rightarrow x = 3^{-1} = \frac{1}{3}$

h) $\log_{\frac{1}{a}} a^2 = x \Rightarrow \left(\frac{1}{a}\right)^x = a^2 \Rightarrow a^{-x} = a^2 \Rightarrow x = -2$

95. Considerando log 2 = 0,301 y que log 3 = 0,477 y log k = 0,778, calcula los siguientes logaritmos.

a) $\log 50$ **c)** $\log_k 3$ **e)** $\log_2 \sqrt[3]{6k}$

b) $\log 0,\widehat{3}$ **d)** $\log \sqrt{12k}$ **f)** $\log 7,2$

a) $\log 50 = \log \frac{100}{2} = \log 100 - \log 2 = 2 - 0,301 = 1,699$

b) $\log 0,\widehat{3} = \log \frac{1}{3} = \log 1 - \log 3 = 0 - 0,477 = -0,477$

c) $\log_k 3 = \frac{\log 3}{\log k} = \frac{0,477}{0,778} = 0,613$

d) $\log \sqrt{12k} = \frac{\log 12 + \log k}{2} = \frac{\log(2^2 \cdot 3) + \log k}{2} = \frac{2\log 2 + \log 3 + \log k}{2} = \frac{2 \cdot 0,301 + 0,477 + 0,778}{2} = 0,9285$

e) $\log_2 \sqrt[3]{6\text{k}} = \frac{\log \sqrt[3]{6\text{k}}}{\log 2} = \frac{\frac{\log 2 + \log 3 + \log k}{3}}{\log 2} = \frac{0,301 + 0,477 + 0,778}{3 \cdot 0,301} = 1,723$

f) $\log 7,2 = \log \frac{72}{10} = \log 72 - \log 10 = \log(2^3 \cdot 3^2) - 1 = 3\log 2 + 2\log 3 - 1 = 3 \cdot 0,301 + 2 \cdot 0,477 - 1 = 0,857$

96. Tomando $\log_3 2 = 0,631$ y $\log_3 5 = 1,465$, calcula el valor del logaritmo en base 3 de 150.

$\log_3 150 = \log_3 (2 \cdot 3 \cdot 5^2) = \log_3 2 + \log_3 3 + 2\log_3 5 = 0,631 + 1 + 2 \cdot 1,465 = 4,561$

97. Calcula el valor de x en cada caso.

a) $2500 = 2000 \cdot 1,05^x$ **c)** $2 \cdot 10^6 = x^{12}$ **e)** $3 \cdot 10^{-5} = 2^{-50x}$ **g)** $\log_x 5 + 1 = \log_x 2$

b) $20 = \log_x 5 + 15$ **d)** $0,025 = 0,5e^x$ **f)** $\ln \frac{x}{2e} = -\ln 2$ **h)** $\ln 3e^{2x} = 2$

a) $1,05^x = \frac{2500}{2000} = \frac{5}{4} \Rightarrow \log 1,05^x = \log 1,25 \Rightarrow x \log 1,05 = \log 1,25 \Rightarrow x = \frac{\log 1,25}{\log 1,05} = 4,574$

b) $5 = \log_x 5 \Rightarrow x^5 = 5 \Rightarrow x = \sqrt[5]{5} = 1,38$

c) $x = \sqrt[12]{2 \cdot 10^6} = 3,35$

d) $e^x = \frac{0,025}{0,5} = 0,05 \Rightarrow x = \ln 0,05 = -2,996$

e) $\log(3 \cdot 10^{-5}) = -50x \log 2 \Rightarrow x = \frac{\log(3 \cdot 10^{-5})}{-50 \log 2} = 0,3$

f) $\ln x - \ln 2 - \ln e = -\ln 2 \Rightarrow \ln x = \ln e \Rightarrow x = e$

g) $\log_x 5 + \log_x x = \log_x 2 \Rightarrow \log_x 5x = \log_x 2 \Rightarrow 5x = 2 \Rightarrow x = \frac{2}{5}$

h) $\ln 3 + 2x \ln e = 2 \Rightarrow 2x = 2 - \ln 3 \Rightarrow x = \frac{2 - \ln 3}{2} = 0,451$

98. Toma logaritmos decimales en las siguientes igualdades y desarrolla las expresiones.

a) $P = 10x^3yz^3$

b) $Q = \dfrac{100x^2}{x+y}$

c) $R = \sqrt[3]{\dfrac{2x^2y^5}{3z^3}}$

d) $x = a^4\ b^3\ c^{\frac{3}{2}}$

e) $y = \dfrac{\sqrt[3]{x^2}}{ax}$

f) $xy = \dfrac{(m+2n)n^2}{m-2n}$

a) $P = 10x^3yz^3 \Rightarrow \log P = 1 + 3\log x + \log y + 3\log z$

b) $Q = \dfrac{100x^2}{x+y} \Rightarrow \log Q = 2 + 2\log x - \log(x+y)$

c) $R = \sqrt[3]{\dfrac{2x^2y^5}{3z^3}} \Rightarrow \log R = \dfrac{\log 2 + 2\log x + 5\log y - \log 3 - 3\log z}{3}$

d) $x = a^4\ b^3\ c^{\frac{3}{2}} \Rightarrow \log x = 4\log a + 3\log b + \dfrac{3}{2}\log c$

e) $y = \dfrac{\sqrt[3]{x^2}}{ax} \Rightarrow \log y = \dfrac{2}{3}\log x - \log a - \log x = -\log a - \dfrac{1}{3}\log x$

f) $xy = \dfrac{(m+2n)n^2}{m-2n} \Rightarrow \log x + \log y = \log(m+2n) + 2\log n - \log(m-2n)$

99. Expresa el valor de *E* en cada caso sin que aparezcan logaritmos.

a) $\log E = 2 - 3\log x + \log y - 5\log z$

b) $\log E = 3\log 2 - 4\log x + 3\log y - 2\log z$

c) $\log E = \log(x - 2y) + \log(x + 2y)$

d) $\log E = 3\log(x + 10) - \log \dfrac{2x+20}{3} + \log \dfrac{3}{2}$

a) $\log E = \log 100 - \log x^3 + \log y - \log z^5 = \log \dfrac{100y}{x^3z^5} \Rightarrow E = \dfrac{100y}{x^3z^5}$

b) $\log E = \log 2^3 - \log x^4 + \log y^3 - \log z^2 = \log \dfrac{8y^3}{x^4z^2} \Rightarrow E = \dfrac{8y^3}{x^4z^2}$

c) $\log E = \log(x-2y)(x+2y) \Rightarrow E = (x-2y)(x+2y) = x^2 - 4y^2$

d) $\log E = \log(x+10)^3 - \log\dfrac{2x+20}{3} + \log\dfrac{3}{2} = \log\dfrac{(x+10)^3\,\frac{3}{2}}{\frac{2x+20}{3}} \Rightarrow E = \dfrac{9(x+10)^3}{2(2x+20)} = \dfrac{9}{4}(x+10)^2$

100. Con la ayuda de la calculadora, obtén aproximaciones decimales hasta las milésimas de los siguientes logaritmos.

a) $\log_3 20$

b) $\log_{\frac{1}{4}} \dfrac{7}{5}$

c) $\log_{0,5} 60$

d) $\log_{\sqrt{2}} 3$

e) $\log_{\frac{2}{5}} \sqrt[3]{2}$

f) $\log_{\sqrt{2}} \sqrt{3}$

a) $\log_3 20 = \dfrac{\log 20}{\log 3} = 2,727$

b) $\log_{\frac{1}{4}} \dfrac{7}{5} = \dfrac{\log\frac{7}{5}}{\log\frac{1}{4}} = -0,243$

c) $\log_{0,5} 60 = \dfrac{\log 60}{\log 0,5} = -5,907$

d) $\log_{\sqrt{2}} 3 = \dfrac{\log 3}{\log\sqrt{2}} = 3,17$

e) $\log_{\frac{2}{5}} \sqrt[3]{2} = \dfrac{\log\sqrt[3]{2}}{\log\frac{2}{5}} = -0,252$

f) $\log_{\sqrt{2}} \sqrt{3} = \dfrac{\log\sqrt{3}}{\log\sqrt{2}} = 1,585$

Síntesis

101. a) Demuestra que la suma de un número real positivo más su inverso es superior o igual a 2.

b) ¿En qué caso es exactamente 2?

c) Sin utilizar la calculadora, demuestra que $\log_2 3 + \log_3 2 > 2$.

a) Sea $a > 0$, $\left(\sqrt{a} - \dfrac{1}{\sqrt{a}}\right)^2 \geq 0 \Rightarrow a + \dfrac{1}{a} - 2 \geq 0 \Rightarrow a + \dfrac{1}{a} \geq 2$

b) Vale 2 cuando $a = 1$.

c) $\log_2 3 = \dfrac{\log 3}{\log 2} = \dfrac{1}{\dfrac{\log 2}{\log 3}} = \dfrac{1}{\log_3 2} \Rightarrow \log_2 3$ y $\log_3 2$ son números inversos y, por el apartado a, $\log_2 3 + \log_3 2 > 2$.

102. Calcula el valor de *x* en cada una de las expresiones dadas a continuación.

a) $\log_{\sqrt{3}} x + \log_{\sqrt{3}} x^2 = 9$

b) $\log_{\frac{1}{9}} x \cdot \log_{\frac{1}{27}} x^4 \cdot \log_{\frac{1}{81}} x^2 = -1$

a) $\log_{\sqrt{3}} x + \log_{\sqrt{3}} x^2 = 9 \Rightarrow \log_{\sqrt{3}} x^3 = 9 \Rightarrow \left(\sqrt{3}\right)^9 = x^3 \Rightarrow x = \sqrt[3]{3^{\frac{9}{2}}} = 3^{\frac{3}{2}} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$

b) $\log_{\frac{1}{9}} x \cdot \log_{\frac{1}{27}} x^4 \cdot \log_{\frac{1}{81}} x^2 = -1 \Rightarrow \dfrac{\log x}{\log \frac{1}{9}} \cdot \dfrac{\log x^4}{\log \frac{1}{27}} \cdot \dfrac{\log x^2}{\log \frac{1}{81}} = \dfrac{\log x \cdot 4\log x \cdot 2\log x}{(-2\log 3)(-3\log 3)(-4\log 3)} = -\dfrac{8\left(\log x\right)^3}{24\left(\log 3\right)^3} = -1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left(\frac{\log x}{\log 3}\right)^3 = 3 \Rightarrow (\log_3 x)^3 = 3 \Rightarrow \log_3 x = \sqrt[3]{3} \Rightarrow x = 3^{\sqrt[3]{3}}$$

103. Clasifica los siguientes números reales.

a) $\sqrt{5^{-\log_5 10}} - \dfrac{\sqrt{10}}{10}$ **b)** $\dfrac{\left(1+\sqrt{5}\right)^3}{8} - \dfrac{3+\sqrt{5}}{\sqrt{5}-1}$ **c)** $\dfrac{1 - \left(\frac{3}{2}\right)^{-\log_2 8}}{\left(3^2 + 2\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}\right)^{-1}}$ **d)** $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{\log_2\left(\dfrac{0,16}{10^{-2}}\right)}}}$

a) $\sqrt{5^{-\log_5 10}} - \dfrac{\sqrt{10}}{10} = \sqrt{\dfrac{1}{5^{\log_5 10}}} - \dfrac{\sqrt{10}}{10} = \sqrt{\dfrac{1}{10}} - \dfrac{\sqrt{10}}{10} = \dfrac{1}{\sqrt{10}} - \dfrac{\sqrt{10}}{10} = \dfrac{\sqrt{10}}{10} - \dfrac{\sqrt{10}}{10} = 0 \Rightarrow$Se trata de un número natural.

b) $\dfrac{\left(1+\sqrt{5}\right)^3}{8} - \dfrac{3+\sqrt{5}}{\sqrt{5}-1} = \dfrac{1+3\sqrt{5}+15+5\sqrt{5}}{8} - \dfrac{\left(3+\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{5}+1\right)}{\left(\sqrt{5}-1\right)\left(\sqrt{5}+1\right)} = \dfrac{16+8\sqrt{5}}{8} - \dfrac{3\sqrt{5}+3+5+\sqrt{5}}{4} = 2+\sqrt{5} - \left(2+\sqrt{5}\right) = 0$

Por tanto, se trata de un número natural.

c) $\dfrac{1 - \left(\frac{3}{2}\right)^{-\log_2 8}}{\left(3^2 + 2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}\right)^{-1}} = \dfrac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^3}{27^{-1}} = 3^3 \cdot \left(1 - \dfrac{2^3}{3^3}\right) = 3^3 - 2^3 = 27 - 8 = 19 \Rightarrow$Se trata de un número natural.

d) $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{\log_2\left(\dfrac{0,16}{10^{-2}}\right)}}} = \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{\log_2 16}}} = \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{4}}} = 2 \Rightarrow$Se trata de un número natural.

104. Calcula el valor de:

a) $\log_{\frac{1}{2}}\sqrt{\dfrac{16\sqrt{5}}{\sqrt{125}+\sqrt{45}}}$

b) $-\log_2\left(\log_2\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}\right)$

c) $\sqrt[3]{\left(2+\sqrt{2}\right)^{-\log_3\frac{1}{27}}}$

d) $\sqrt[6]{\dfrac{\log 2+\log 4+\log 8}{\log 2}}$

a) $\log_{\frac{1}{2}}\sqrt{\dfrac{16\sqrt{5}}{\sqrt{125}+\sqrt{45}}}=\log_{\frac{1}{2}}\sqrt{\dfrac{16\sqrt{5}}{5\sqrt{5}+3\sqrt{5}}}=l\,og_{\frac{1}{2}}\sqrt{\dfrac{16\sqrt{5}}{8\sqrt{5}}}=l\,og_{\frac{1}{2}}\sqrt{2}=-\dfrac{1}{2}$

b) $-\log_2\left(\log_2\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}\right)=-\log_2\left(\log_2 2^{\frac{1}{8}}\right)=-\log\dfrac{1}{8}=-\log_2 2^{-3}=3$

c) $\sqrt[3]{\left(2+\sqrt{2}\right)^{-\log_3\frac{1}{27}}}=\sqrt[3]{\left(2+\sqrt{2}\right)^{-\log_3 3^{-3}}}=\sqrt[3]{\left(2+\sqrt{2}\right)^{3}}=2+\sqrt{2}$

d) $\sqrt[6]{\dfrac{\log 2+\log 4+\log 8}{\log 2}}=\sqrt[6]{\dfrac{\log 2+2\log 2+3\log 2}{\log 2}}=\sqrt[6]{\dfrac{6\log 2}{\log 2}}=\sqrt[6]{6}$

105. Para *a* y *b* positivos y diferentes de la unidad, demuestra que $\log_a b\cdot\log_b a=1$.

$$\log_a b\cdot\log_b a=\frac{\log b}{\log a}\cdot\frac{\log a}{\log b}=1$$

CUESTIONES

106. Indica, razonadamente, si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

a) La suma de dos números irracionales es siempre un número irracional.

b) La suma de un número irracional con uno racional da como resultado un número irracional.

c) La suma de dos números racionales puede ser irracional.

a) Es falso. Por ejemplo, $\sqrt{2}$ y $-\sqrt{2}$ son dos números irracionales, y su suma es 0, número racional.

b) Verdadero, ya que si la suma de un irracional **I** más uno racional **R** diera como resultado otro racional **R′**, tendríamos que **I** = **R′** − **R** y esto no es posible, la resta de dos racionales es racional.

c) Falso, la suma de dos fracciones da siempre como resultado otra fracción.

107. Con la ayuda de ejemplos estudia si siempre se verifica las siguientes relaciones.

$$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\geq|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}| \qquad |\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|\leq|\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}|$$

No siempre son verdaderas:

$$a=3\quad b=-4\Rightarrow\begin{cases}|a+b|=|3+(-4)|=1\\|a|+|b|=|3|+|-4|=7\end{cases}\Rightarrow|a+b|<|a|+|b|$$

$$a=3\quad b=-4\Rightarrow\begin{cases}|a-b|=|3-(-4)|=7\\|a|-|b|=|3|-|-4|=-1\end{cases}\Rightarrow|a-b|>|a|-|b|$$

108. Encuentra el error en el siguiente razonamiento.

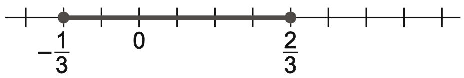
$$16 > 8 \Rightarrow 2^4 > 2^3 \Rightarrow \frac{1}{2^3} > \frac{1}{2^4} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^3 > \left(\frac{1}{2}\right)^4 \Rightarrow \log_2\left(\frac{1}{2}\right)^3 > \log_2\left(\frac{1}{2}\right)^4 \Rightarrow 3\log_2\left(\frac{1}{2}\right) > 4\log_2\left(\frac{1}{2}\right)$$

y simplificando: $3 > 4$.

Como $\log_2\left(\frac{1}{2}\right) < 0$ al simplificar esta cantidad negativa en los dos miembros de la inecuación, se debe cambiar su sentido, por lo que la conclusión valida sería $3\log_2\left(\frac{1}{2}\right) > 4\log_2\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow 3 < 4$

109. Representa en la recta real el conjunto de valores reales *x* tales que $\left|2x - \frac{1}{3}\right| \leq 1$ y determínala mediante un intervalo.

$$\left|2x - \frac{1}{3}\right| \leq 1 \Rightarrow \left|x - \frac{1}{6}\right| \leq \frac{1}{2} \Rightarrow x \in \left[-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$$



PROBLEMAS

110. Al realizar una encuesta sobre el interés de los habitantes de una localidad en relación con los equipos informáticos, se observó que exactamente el número de encuestados que contestaron que en su casa había más de un ordenador era el 40,454545… % del total.

¿Cuántas personas formaban parte de la muestra si se sabe que eran menos de 300?

$$N = \frac{40,4545...}{100} = 0,404\,545\,45... = 0,4\overparen{045} \Rightarrow \begin{cases} 10\,000N = 4045,454\,545... \\ 100N = 40,454\,545... \end{cases} \Rightarrow N = \frac{4005}{9900} = \frac{89}{220}$$

Para calcular el número de encuestados que contestaron que tenían más de un ordenador, se debe multiplicar el total por la fracción irreducible $\frac{89}{220}$.

Por tanto, el número total de encuestados debe ser múltiplo de 220 y, al ser menor que 300, es exactamente 220.

111. Juan ha comprado 2,320 kg de patatas a 0,65 €/kg, 4,035 kg de naranjas, a 2,15 €/kg, y 1,475 kg de manzanas, a 3,25 €/kg. Al hacer la cuenta, obviamente se debe redondear a los céntimos de euro.

a) ¿A cuánto ascenderá dicha cuenta si primero se suman los precios y después se redondea el precio total?

b) ¿Y si se hace a la inversa; es decir, se redondea cada precio parcial y después se suman los redondeos?

c) ¿Cuál es el porcentaje de aumento en el precio total al realizar la cuenta de la segunda forma con respecto a realizarla de la primera manera?

a) $2,320 \cdot 0,65 + 4,035 \cdot 2,15 + 1,475 \cdot 3,25 = 1,508 + 8,67525 + 4,79375 = 14,977 \simeq 14,98$ €

b) $2,320 \cdot 0,65 + 4,035 \cdot 2,15 + 1,475 \cdot 3,25 \simeq 1,51 + 8,68 + 4,79 = 14,98$ €

c) No hay variación de precio.

112. La máxima distancia de la Tierra a la Luna es de $4,07\cdot 10^8$ m y el radio de la Luna mide 1737,5 km. Calcula la distancia de la Tierra a la Luna tomando como unidad el diámetro de la Luna.

$$\frac{4,07\cdot 10^8\ \text{m}}{2\cdot 1737,5\ \text{km}}=\frac{4,07\cdot 10^8\ \text{m}}{3\,475\,000\ \text{m}}=117,12$$

La distancia de la Tierra a la Luna es de aproximadamente 117,12 diámetros lunares.

113. El nivel de intensidad del sonido puede ser expresado en decibelios mediante la fórmula $\beta = 10\log\left(\dfrac{I}{I_0}\right)$ donde β es el número de decibelios del sonido, I es la intensidad del sonido estudiado medido en vatios/cm^2 e I_0 indica la intensidad del sonido mínimo que puede ser oído por el ser humano (10^{-12} vatios/m^2)

a) Calcula los decibelios (dB) de una conversación normal que presenta una intensidad de 10^{-7} vatios/m^2.

b) ¿Cuántos decibelios corresponden al sonido mínimo que puede oír el ser humano?

c) ¿Cuál es la intensidad en vatios/cm^2 del umbral de dolor en el oído humano sabiendo que se corresponde con 120 dB?

d) Un sonido es de 30 dB. ¿Cuántas veces es más intenso que un sonido de 20 dB? ¿Y si se compara un sonido de 40 dB con uno de 30 dB?

a) $\beta = 10\log\left(\dfrac{10^{-7}}{10^{-12}}\right) = 10\log 10^5 = 10\cdot 5 = 50\ \text{dB}$

b) $\beta = 10\log\left(\dfrac{10^{-12}}{10^{-12}}\right) = 10\log 1 = 10\cdot 0 = 0\ \text{dB}$

c) $120 = 10\log\left(\dfrac{I}{10^{-12}}\right) \Rightarrow \log\left(\dfrac{I}{10^{-12}}\right) = 12 \Rightarrow \dfrac{I}{10^{-12}} = 10^{12} \Rightarrow I = 10^0 = 1\ \text{vatio/m}^2 = 10^{-4}\ \text{vatio/cm}^2$

d) $\beta = 10\log\left(\dfrac{I}{10^{-12}}\right) \Rightarrow \log\left(\dfrac{I}{10^{-12}}\right) = \dfrac{\beta}{10} \Rightarrow 10^{\frac{\beta}{10}} = \dfrac{I}{10^{-12}} \Rightarrow I = 10^{\frac{\beta}{10}}\cdot 10^{-12} \Rightarrow I = 10^{\frac{\beta}{10}-12}$

$\begin{cases} \beta = 30 \Rightarrow I(30) = 10^{\frac{30}{10}-12} = 10^{-9} \\ \beta = 20 \Rightarrow I(20) = 10^{\frac{20}{10}-12} = 10^{-10} \end{cases} \Rightarrow \dfrac{I(30)}{I(20)} = \dfrac{10^{-9}}{10^{-10}} = 10$, el sonido de 30 dB es 10 veces más intenso que el de 20 dB.

De igual manera, el sonido de 40 dB es 10 más intenso que el de 30 dB.

114. La población de bacterias inicial de un cultivo es de 6000. Se estima que dicha población aumenta en un 100 % cada 4 días. Calcula la población que habrá a los 12 días.

a) Si se cambia la estimación de crecimiento y se supone que cada dos días aumenta en un 50 %, ¿cuál será la población a los 12 días?

b) ¿Y si se supone que cada día aumenta en un 25 %?

El número de bacterias cuando han pasado t días es $P = 6000\cdot 2^{\frac{t}{4}}$, por tanto, para $t = 12$ días tendremos $P = 6000\cdot 2^{\frac{12}{4}} = 6000\cdot 2^3 = 48\,000$ bacterias.

a) Ahora $P = 6000\cdot 1,5^{\frac{t}{2}}$, con lo que si $t = 12$ tenemos $P = 6000\cdot 1,5^{\frac{12}{2}} = 6000\cdot 1,5^6 = 68\,344$ bacterias.

b) $P = 6000\cdot 1,25^t \Rightarrow P(12) = 6000\cdot 1,25^{12} = 87\,311$ bacterias.

115. Javier pretende colocar césped artificial en un jardín cuadrado, sabiendo que su lado tiene una longitud, en metros, comprendida entre 15 y 16.

El coste de cada metro cuadrado de dicho césped asciende a 30 € y 10 CENT, y el presupuesto con el que cuenta es de 7000 €.

Calcula los costes máximo y mínimo, y decide si habrá presupuesto para la obra.

$15 \le \text{lado} \le 16 \;\Rightarrow\; 225 \le \text{área} \le 256 \;\Rightarrow\; 6772{,}5 \le \text{coste} \le 7705{,}6$

Por tanto, el presupuesto podría ser insuficiente.

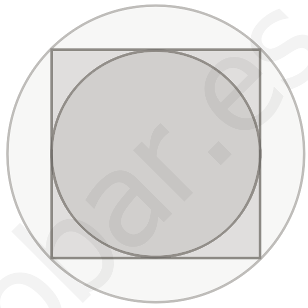
116. El área de un cuadrado es de 10,5 cm^2. Calcula las áreas de sus círculos inscrito y circunscrito, redondeando los resultados con dos cifras decimales.

El lado del cuadrado mide $x = \sqrt{10{,}5} = 3{,}24$ cm.

La diagonal del cuadrado mide $\sqrt{2 \cdot 10{,}5} = 4{,}58$ cm.

Área del círculo inscrito: $S = \pi r^2 = \pi\left(\dfrac{3{,}24}{2}\right)^2 = 8{,}24 \text{ cm}^2$

Área del círculo circunscrito: $S = \pi r^2 = \pi\left(\dfrac{4{,}58}{2}\right)^2 = 16{,}47 \text{ cm}^2$



117. Se han obtenido experimentalmente las siguientes fórmulas, que expresan el porcentaje *P* de altura de los niños y adolescentes de 6 a 15 años de edad en relación con la altura media de un adulto:

Para niñas $P = 31{,}1 \ln(\text{Edad}) + 16{,}3$

Para niños $P = 18{,}6 \ln(\text{Edad}) + 37$

a) Calcula el porcentaje de altura de los y las adolescentes de 6, 10 y 15 años de edad.

b) ¿Qué edad aproximada se puede esperar que, según este modelo, tenga una niña con 75 % de altura media de la edad adulta? ¿Y un niño?

c) Si este modelo fuera válido para los varones de 6 a 18 años, ¿qué edad tendrían al alcanzar la altura máxima del 100 %? Critica el resultado.

a) Para niñas $P(6)=72$ % $P(10)=88$ % $P(15)=100$ %

Para niños $P(6)=70$ % $P(10)=80$ % $P(15)=87$ %

b) Para niñas $\text{Edad} = e^{\frac{P-16{,}3}{31{,}1}} \Rightarrow \text{Edad} = e^{\frac{75-16{,}3}{31{,}1}} = 6{,}6$ años

Para niños $\text{Edad} = e^{\frac{P-37}{18{,}6}} \Rightarrow \text{Edad} = e^{\frac{75-16{,}3}{31{,}1}} = 7{,}7$ años

c) $\text{Edad} = e^{\frac{100-37}{18{,}6}} = 29{,}6$ años.

Obviamente, el modelo no sirve para los varones mayores de 15 años.

118. Demuestra que el número áureo $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ verifica las siguientes propiedades.

a) $\Phi^2 = \Phi + 1$ **b)** $\Phi - 1 = \frac{1}{\Phi}$ **c)** $\Phi^3 = \frac{\Phi+1}{\Phi-1}$

a) $\Phi^2 = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{1+5+2\sqrt{5}}{4} = \frac{6+2\sqrt{5}}{4} = \frac{3+\sqrt{5}}{2} = 1 + \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1+\Phi$

b) $\Phi^2 = 1+\Phi \Rightarrow \frac{\Phi^2}{\Phi} = \frac{1+\Phi}{\Phi} \Rightarrow \Phi = \frac{1}{\Phi} + 1 \Rightarrow \Phi - 1 = \frac{1}{\Phi}$

c) $\Phi^3 = \Phi^2\,\Phi = (1+\Phi)\Phi = \frac{1+\Phi}{\frac{1}{\Phi}} = \frac{\Phi+1}{\Phi-1}$

119. La escala cromática del piano está formada por las doce notas (doce semitonos) que aparecen en la figura.

El número de vibraciones por segundo de cada nota es igual al producto del número de vibraciones de la nota anterior por el número irracional $\sqrt[12]{2}$.

a) Encuentra una expresión que determine el número de vibraciones por segundo según el lugar que ocupe en la escala (por ejemplo el Do ocupa el lugar 0, el Si bemol, el lugar 10, y el Si, el lugar 11) y suponiendo que el número de vibraciones por segundo correspondientes a la nota Do es *n.*

b) Escribe las vibraciones por segundo correspondientes a cada nota sabiendo que las correspondientes a La son 440.

a) $N(k) = n\sqrt[12]{2^k}$ **b)** $N(9) = n\sqrt[12]{2^9} = 440 \Rightarrow n = \frac{440}{\sqrt[12]{2^9}} \simeq 262 \Rightarrow N(k) = 440\sqrt[12]{2^{k-9}}$

Do	Do sostenido	Re	Mi bemol	Mi	Fa	Fa sostenido	Sol	La bemol	La	Si bemol	Si
262	277	294	311	330	349	370	392	415	440	466	494

120. En una disolución de 5 L de $HClO_4$ hemos encontrado 0,2 moles de iones hidronio.

a) Calcula cuál es el pH de la disolución anterior.

b) Si queremos que el pH de la disolución anterior quede multiplicado por 2, ¿cuántos litros de disolvente necesitaríamos?

a) $\text{pH} = -\log\left[H_3O^+\right] = -\log\left(\frac{0,2}{5}\right) = -\log 0,04 = 1,4$

b) $\text{pH} = -\log\left[H_3O^+\right] = 2,8 \Rightarrow \left[H_3O^+\right] = 10^{-2,8} = 1,6\cdot 10^{-3}$ mol/L , luego necesitaremos $\frac{0,2}{1,6\cdot 10^{-3}} = 125$ L.

121. Un automóvil que costó 14 425 € se deprecia un 15 % anual.

a) ¿Cuánto valdrá a los 6 años?

b) ¿Cuántos años deben pasar para que su valor sea inferior a 3600 €?

a) A los 6 años, el coche valdrá $14\,425\cdot 0,85^6 = 5\,440,38$ €.

b) Para calcular dentro de cuántos años su valor será inferior a 3600 € se resuelve la siguiente inecuación:

$14\,425\cdot 0,85^t < 3\,600 \Rightarrow 0,85^t < \frac{3600}{14\,425} \Rightarrow t\log 0,85 < \log\frac{3\,600}{14\,425} \Rightarrow t > 8,54$. Deberán pasar al menos 9 años.

122. Una población de conejos aumenta anualmente en un 50 %. Si en el momento inicial había 100 conejos:

a) ¿Cuántos habrá al cabo de 10 años?

b) ¿Cuánto tiempo debe transcurrir para que su número sea de 30 000?

c) Si debido a una enfermedad, la tasa de crecimiento cayera al 10 %, ¿cuánto tiempo tardaría la población inicial en triplicarse?

a) $t = 10 \Rightarrow P(10) = 100 \cdot 1{,}5^{10} = 5766{,}5$. Habrá 5767 conejos.

b) $100 \cdot 1{,}5^t = 30\,000 \Rightarrow 1{,}5^t = 300 \Rightarrow t = \dfrac{\log 300}{\log 1{,}5} = 14{,}06$ años

c) $100 \cdot 1{,}1^t = 300 \Rightarrow 1{,}1^t = 3 \Rightarrow t = \dfrac{\log 3}{\log 1{,}1} = 11{,}53$ años

123. Debido a una fuerte crisis económica, el valor de una vivienda, cuando han pasado *t* años desde su adquisición, es $V = ke^{\alpha t}$. La vivienda se compró por 350 000 €, y a los 5 años valía 225 000 €.

a) Calcula el valor de k y α .

b) Calcula el valor de la vivienda a los 20 años si sigue la misma depreciación.

c) ¿Cuánto tiempo debe pasar desde la compra, para que el valor de la vivienda se haya reducido a la tercera parte?

d) Un trabajador que gana el salario medio puede comprar una vivienda de 90 metros cuadrados. Si el salario medio aumenta un 3 % cada año, al cabo de 10 años, ¿cuál será la superficie de la vivienda que podría comprar el mismo trabajador? (supón que el resto de sus condiciones de vida no han variado.)

a) $t = 0 \Rightarrow 350\,000 = ke^{0\alpha} \Rightarrow k = 350\,000$

$t = 5 \Rightarrow 225\,000 = ke^{5\alpha} \Rightarrow e^{5\alpha} = \dfrac{225\,000}{350\,000} = \dfrac{9}{14} \Rightarrow \alpha = \dfrac{1}{5}\ln\dfrac{9}{14}$

Por tanto, $V = 350\,000e^{\frac{t}{5}\ln\left(\frac{9}{14}\right)}$

b) $V = 350\,000e^{\frac{20}{5}\ln\left(\frac{9}{14}\right)} \simeq 59\,776$ €

c) $\dfrac{V}{3} = Ve^{\frac{t}{5}\ln\left(\frac{9}{14}\right)} \Rightarrow \dfrac{t}{5}\ln\left(\dfrac{9}{14}\right) = \ln\left(\dfrac{1}{3}\right) \Rightarrow t = \dfrac{5\ln\left(\dfrac{1}{3}\right)}{\ln\left(\dfrac{9}{14}\right)} \simeq 12{,}43$ años

d) Sea x € el precio inicial de cada m^2 de la vivienda.

El trabajador paga 90x, es decir el $\dfrac{90x}{S} \cdot 100 = \dfrac{9000x}{S}$ % de su salario. Se supone que este porcentaje se mantiene en el tiempo.

Al cabo de 10 años el trabajador gana S·1,03^{10} por lo que puede dedicar $\dfrac{90x}{S} S \cdot 1{,}03^{10} = 90x \cdot 1{,}03^{10}$ € para adquirir la vivienda.

Como el precio de cada metro cuadrado ha pasado a ser $xe^{\frac{10}{5}\ln\left(\frac{9}{14}\right)} = x\left(\dfrac{9}{14}\right)^2 = \dfrac{81}{196}x$, podrá comprar una vivienda de:

$$\frac{90x \cdot 1{,}03^{10}}{\dfrac{81}{196}x} = \frac{90 \cdot 196 \cdot 1{,}03^{10}}{81} = 293 \text{ m}^2$$

124. En la tabla siguiente aparecen las medidas de una niña y de una torre.

Altura	
Real	**Obtenida con instrumento de medida**
92 cm	**90 cm**
38 m	**37 m**

Indica cuál de las dos medidas ha sido más precisa y justifica tu respuesta.

En el primer caso, el error relativo es $\frac{2}{92}=\frac{1}{46}$. En el segundo, el error relativo es $\frac{1}{38}$. Por tanto, la medida de la niña es más precisa, ya que el error relativo es menor.

125. Se llama unidad astronómica (UA) a la distancia media que separa la Tierra del Sol y que equivale a $1{,}49598 \cdot 10^8$ km.

a) Sabiendo que el 1 de enero la distancia entre la Tierra y el Sol es de $1{,}471 \cdot 10^8$ km, exprésala en unidades astronómicas.

b) Sabiendo que la distancia media entre Júpiter y el Sol es de 5,2 UA, exprésala en kilómetros.

a) $\frac{1{,}471 \cdot 10^8}{1{,}49598 \cdot 10^8} = 0{,}9833$ UA

b) $5{,}2 \cdot 1{,}49598 \cdot 10^8 = 7{,}779 \cdot 10^8$ km

PARA PROFUNDIZAR

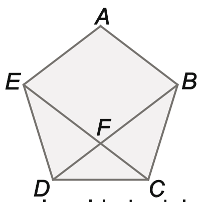
126. Demuestra que si *a*, *b* y *c* son números positivos y diferentes, entonces se verifica la siguiente desigualdad.

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) > 9$$

Utilizando el resultado del ejercicio 101.a):

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=\frac{a}{a}+\frac{a}{b}+\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+\frac{b}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{c}{b}+\frac{c}{c}=1+1+1+\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+\frac{a}{c}+\frac{c}{a}+\frac{b}{c}+\frac{c}{b}>3+2+2+2=9$$

127. Calcula de forma exacta el número irracional que representa la relación entre la diagonal de un pentágono regular y su lado. Comprueba que se trata del número áureo.



Para ello, sigue los siguientes pasos:

a) Demuestra que los triángulos *DFC* y *DBC* son semejantes calculando sus ángulos.

b) Demuestra que el triángulo *BFC* es isósceles.

c) Aplicando el teorema de Tales, calcula la relación entre los lados que corresponden a la diagonal y el lado del pentágono.

a) El ángulo interior de un pentágono regular es $\frac{(2\cdot 5-4)\cdot 90º}{5}=108º$.

El triángulo *DBC* es isósceles, y sus ángulos miden 108º, 36º y 36º.

El triángulo *DFC* es también isósceles, y sus ángulos miden 36º, 36º y 108º. *DFC* y *DBC* son semejantes.

b) El ángulo *BCF* mide 108º – 36º = 72º, el ángulo *BFC* también mide 180º – 108º = 72º. *BFC* es isósceles.

c) Suponiendo un pentágono regular de lado 1 y aplicando el teorema de Tales a los triángulos semejantes:

$$\frac{DB}{DC}=\frac{DC}{DF}\Rightarrow\frac{x}{1}=\frac{1}{x-1}\Rightarrow x^2-x=1\Rightarrow x^2-x-1=0\Rightarrow x=\frac{1+\sqrt{1+4}}{2}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Rightarrow x=\frac{DB}{DC}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}=\Phi$$

(En la ecuación de segundo grado, la otra solución es negativa y no tiene sentido)

128. Racionaliza el denominador de la expresión: $\dfrac{1}{2-\sqrt[3]{2}}$

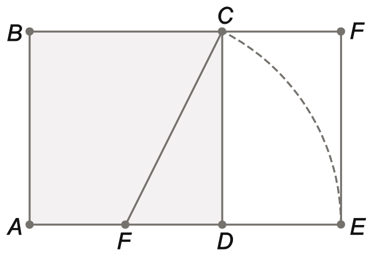
$$\frac{1}{2-\sqrt[3]{2}}=\frac{4+2\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}}{\left(2-\sqrt[3]{2}\right)\cdot\left(4+2\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}\right)}=\frac{4+2\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}}{8+4\sqrt[3]{2}+2\sqrt[3]{4}-4\sqrt[3]{2}-2\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{8}}=\frac{4+2\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}}{8-2}=\frac{4+2\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}}{6}$$

Se ha utilizado que $a^3 - b^3 = (a - b)\cdot(a^2 + ab + b^2)$.

ENTORNO MATEMÁTICO

Una piscina con estética

Mario y Priscila son una pareja muy moderna, con un buen nivel económico, una buena vida social y una familia envidiable; pero últimamente se encuentran algo aburridos. Deciden gastarse la herencia de la tía Edurne en la construcción de una piscina en la azotea de su ático del centro de la ciudad. Pero, ¡claro! no puede ser una piscina cualquiera.



Priscila se acuerda de haber leído que las proporciones para que un rectángulo sea lo más estético posible son aquellas que si al rectángulo total le quitas un cuadrado de lado la dimensión menor, el rectángulo pequeño que queda es proporcional a dicho rectángulo inicial. Esta propiedad, si mal no recuerda, la cumplen objetos tan cotidianos como el DNI o las innumerables tarjetas del banco con las que cuentan.

Mario no se lo cree mucho y mide su carnet de identidad. Resulta tener 8,6 cm de largo por 5,4 cm de ancho. Haz tú las cuentas que creas convenientes para comprobar si efectivamente Priscila tiene o no razón.

La piscina que quieren construir debe tener estas estéticas proporciones y su dimensión mayor debe ser de $2+2\sqrt{5}$ m. Además, quieren poner una franja de 1,5 m de césped artificial alrededor de todo el perímetro.

a) Calcula la dimensión menor de la piscina.

b) Calcula el área de césped que quieren poner.

c) Calcula el tiempo que tardarán en llenar la piscina si la altura en todos sus puntos es de $\sqrt{5}$ metros y el grifo surte 30 L cada minuto.

Si llamamos *a* y *b* al lado mayor y menor, respectivamente, de un rectángulo que cumpla las condiciones del enunciado tendremos:

$$\frac{a}{b}=\frac{b}{a-b}\Rightarrow a^2-ab=b^2\Rightarrow a^2-ab-b^2=0\Rightarrow\left(\frac{a}{b}\right)^2-\frac{a}{b}-1=0$$

Por tanto, el cociente entre el lado mayor y el menor debe ser $\frac{1+\sqrt{5}}{2}=\Phi\simeq 1{,}618$, por ello, los rectángulos que cumplen esta condición se llaman rectángulos áureos.

El cociente de las dimensiones del DNI es $\frac{8{,}6}{5{,}4}=1{,}593$ y, aunque se acerca, no es exactamente un rectángulo áureo.

a) $\dfrac{2+2\sqrt{5}}{b}=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\Rightarrow b=\dfrac{4\left(1+\sqrt{5}\right)}{1+\sqrt{5}}=4$ m.

b) La superficie del césped será: $S=7\left(5+2\sqrt{5}\right)-4\left(2+2\sqrt{5}\right)=35+14\sqrt{5}-8-8\sqrt{5}=27+6\sqrt{5}$ m^2.

c) El volumen de la piscina es $V=\sqrt{5}\cdot 4\cdot\left(2+2\sqrt{5}\right)=8\sqrt{5}+40$ m^3 $=\left(8\sqrt{5}+40\right)1000$ L.

El tiempo que se tardará en llenar será $\dfrac{\left(8\sqrt{5}+40\right)1000}{30}\simeq 1930$ minutos $\simeq 32$ horas.

Pinturas prehistóricas

La conservación en buenas condiciones de las pinturas prehistóricas de las cuevas exige, entre otros aspectos, el control de la temperatura en el interior de la gruta.

Para que dicha temperatura se mantenga entre unos límites aceptables, un equipo de ingenieros ha ideado un sistema de compuertas en el pasadizo que da la entrada a la cueva. La longitud total de dicho pasadizo se dividirá en compartimentos de 30 m de largo separados por puertas de cierre hermético de forma que la temperatura de cada compartimento será un 5 % más baja que la temperatura del compartimento inmediatamente anterior.

a) Calcula la temperatura del cuarto compartimento sabiendo que en el primero hay 25 ºC.

b) Calcula la temperatura en el octavo compartimento si en el quinto hay 21 ºC. En este caso, ¿cuál será la temperatura del primer compartimento?

c) Diseña una hoja de cálculo en el que se obtengan las temperaturas de los diferentes compartimentos en relación con la temperatura inicial.

d) ¿Cuántos compartimentos se han debido construir para que la temperatura del último baje por primera vez a la cuarta parte de la temperatura del compartimento inicial? En este caso, ¿cuál es la longitud total del pasadizo de entrada?

a) La temperatura en el compartimento k será $T_k = 25 \cdot 0{,}95^{k-1}$.

Por tanto: $T_4 = 25 \cdot 0{,}95^3 = 20{,}43$ ºC

b) $T_8 = T_5 \cdot 0{,}95^{8-5} = 21 \cdot 0{,}95^3 = 18$ ºC

$$T_5 = T_1 \cdot 0{,}95^{5-1} \Rightarrow T_1 = \frac{T_5}{0{,}95^4} = \frac{21}{0{,}95^4} = 25{,}78\,ºC$$

c)

	A	B
1	COMPARTIMENTO	TEMPERATURA
2	1	T_1
3	=A2+1	=B2*0,95
4	Copiar celda inmediatamente superior	Copiar celda inmediatamente superior
5	Copiar celda inmediatamente superior	Copiar celda inmediatamente superior
…	…	…

d) $\frac{T}{4} = T \cdot 0{,}95^{k-1} \Rightarrow 0{,}95^{k-1} = 0{,}25 \Rightarrow k = 1 + \frac{\log 0{,}25}{\log 0{,}95} \simeq 28$ compartimentos.

Por tanto, el pasadizo mide $28 \cdot 30 = 840$ m.

AUTOEVALUACIÓN

Comprueba qué has aprendido

1. Calcula el valor y simplifica.

a) $\dfrac{2,4555...+2,555...}{1,222...}$

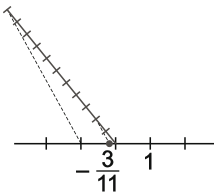
b) $\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{3+\dfrac{1}{4+\dfrac{1}{5}}}}$

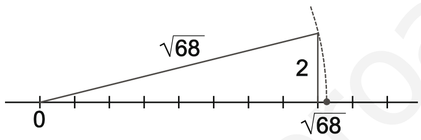
a) $\dfrac{2,4555...+2,555...}{1,222...}=\dfrac{\dfrac{221}{90}+\dfrac{23}{9}}{\dfrac{11}{9}}=\dfrac{41}{10}=4,1$

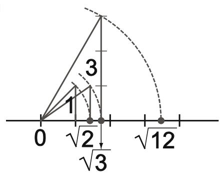
b) $\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{3+\dfrac{1}{4+\dfrac{1}{5}}}}=\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{3+\dfrac{5}{21}}}=\dfrac{1}{2+\dfrac{21}{68}}=\dfrac{68}{157}$

2. Representa los números $-\dfrac{3}{11}$, $\sqrt{68}$ *y* $\sqrt{12}$ en la recta real:

$-\dfrac{3}{11}$ $\qquad\qquad$ $\sqrt{68}=\sqrt{8^2+2^2}$ $\qquad\qquad$ $\sqrt{12}=\sqrt{3^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}$







3. Desarrolla la expresión: $2x-\dfrac{1}{2}-3\left|x+\dfrac{1}{2}\right|$

$$2x-\frac{1}{2}-3\left|x+\frac{1}{2}\right|=\begin{cases}2x-\dfrac{1}{2}+3x+\dfrac{3}{2} & \text{si} \quad x<-\dfrac{1}{2}\\ 2x-\dfrac{1}{2}-3x-\dfrac{3}{2} & \text{si} \quad x\geq-\dfrac{1}{2}\end{cases}=\begin{cases}5x+1 & \text{si} \quad x<-\dfrac{1}{2}\\ -x-2 & \text{si} \quad x\geq-\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

4. Expresa mediante unión de intervalos el conjunto:

$$\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R} \,/\, |\boldsymbol{x}+\mathbf{2}|<\mathbf{1}\}\cup\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R} \,/\, |\boldsymbol{x}-\mathbf{5}|<\mathbf{1}\}$$

$(-3,-1)\cup(4,6)$

5. La masa de la Tierra es aproximadamente de $6\cdot10^{24}$ kg, la de un átomo de oxígeno es, aproximadamente, de $2,65\cdot10^{-23}$ g, y la de Jorge, 75 kg. Calcula las relaciones entre las masas de la Tierra y de Jorge y entre las masas de Jorge y del átomo de oxígeno. ¿Cuál es mayor?

$\dfrac{m_T}{m_J}=\dfrac{6\cdot10^{24}}{75}=8\cdot10^{22}$ $\qquad\qquad$ $\dfrac{m_J}{m_O}=\dfrac{75}{2,65\cdot10^{-23}}=2,83\cdot10^{24}$

Por tanto, es superior la relación entre la masa de Jorge y la masa del átomo de oxígeno.

6. Halla los errores absoluto y relativo que se cometen al utilizar 2,5 como aproximación de $2,\widehat{5}$.

Error absoluto: $E_a = \left|2,\widehat{5} - 2,5\right| = \left|\frac{23}{9} - \frac{5}{2}\right| = \frac{1}{18}$ Error relativo: $E_r = \frac{\left|2,\widehat{5} - 2,5\right|}{2,\widehat{5}} = \frac{1}{18} : \frac{23}{9} = \frac{1}{46}$

7. Simplifica las siguientes expresiones.

a) $\frac{10^{-24}\cdot 5^{-12}\cdot 8^{7}}{25^{-18}}$ **b)** $\sqrt{\frac{3}{\sqrt{5}+\sqrt{20}}}$ **c)** $\sqrt{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{8}\sqrt{1024}}}$

a) $\frac{10^{-24}\cdot 5^{-12}\cdot 8^{7}}{25^{-18}} = \frac{(2\cdot 5)^{-24}\cdot 5^{-12}\cdot \left(2^3\right)^7}{\left(5^2\right)^{-18}} = \frac{2^{-24}\cdot 5^{-24}\cdot 5^{-12}\cdot 2^{21}}{5^{-36}} = 2^{-3}\cdot 5^{0} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$

b) $\sqrt{\frac{3}{\sqrt{5}+\sqrt{20}}} = \sqrt{\frac{3}{\sqrt{5}+2\sqrt{5}}} = \sqrt{\frac{3}{3\sqrt{5}}} = \sqrt{\frac{1}{\sqrt{5}}} = \frac{1}{\sqrt[4]{5}} = \frac{\sqrt[4]{5^3}}{\sqrt[4]{5}\cdot\sqrt[4]{5^3}} = \frac{\sqrt[4]{5^3}}{5} = \frac{\sqrt[4]{125}}{5}$

c) $\sqrt{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{8}\sqrt{1024}}} = \sqrt{\sqrt{\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^4\cdot\left(\frac{1}{2^3}\right)^2\cdot 2^{10}}}} = \sqrt[8]{\frac{2^{10}}{2^4\cdot 2^6}} = \sqrt[8]{\frac{2^{10}}{2^{10}}} = \sqrt[8]{1} = 1$

8. Racionaliza los denominadores y simplifica todo lo que puedas las expresiones resultantes.

a) $\frac{2\sqrt{3}-1}{\sqrt{54}}$ **b)** $\frac{1}{\sqrt[4]{54}}$ **c)** $\frac{\sqrt{54}}{2\sqrt{3}-1}$

a) $\frac{2\sqrt{3}-1}{\sqrt{54}} = \frac{\left(2\sqrt{3}-1\right)\sqrt{54}}{\sqrt{54}\sqrt{54}} = \frac{2\sqrt{162}-\sqrt{54}}{54} = \frac{2\cdot 9\sqrt{2}-3\sqrt{6}}{54} = \frac{18\sqrt{2}-3\sqrt{6}}{54} = \frac{6\sqrt{2}-\sqrt{6}}{18}$

b) $\frac{1}{\sqrt[4]{54}} = \frac{1}{\sqrt[4]{2\cdot 3^3}} = \frac{\sqrt[4]{2^3\cdot 3}}{\sqrt[4]{2\cdot 3^3}\cdot\sqrt[4]{2^3\cdot 3}} = \frac{\sqrt[4]{2^3\cdot 3}}{\sqrt[4]{2^4\cdot 3^4}} = \frac{\sqrt[4]{24}}{2\cdot 3} = \frac{\sqrt[4]{24}}{6}$

c) $\frac{\sqrt{54}}{2\sqrt{3}-1} = \frac{3\sqrt{6}\left(2\sqrt{3}+1\right)}{\left(2\sqrt{3}-1\right)\left(2\sqrt{3}+1\right)} = \frac{6\sqrt{18}+3\sqrt{6}}{12-1} = \frac{18\sqrt{2}+3\sqrt{6}}{11}$

9. Calcula el valor de *x* en:

a) $\log_{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}} = x$ **b)** $\log_x\frac{1}{3} = \frac{1}{3}$ **c)** $\log_{\frac{1}{8}}\frac{1}{4\cdot 2^x} = \frac{5}{3}$

a) $\log_{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}} = x \Rightarrow \left(\sqrt{2}\right)^x = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \left(\sqrt{2}\right)^x = \left(\sqrt{2}\right)^{-1} \Rightarrow x = -1$

b) $\log_x\frac{1}{3} = \frac{1}{3} \Rightarrow x^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} \Rightarrow x = \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$

c) $\log_{\frac{1}{8}}\frac{1}{4\cdot 2^x} = \frac{5}{3} \Rightarrow \left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{5}{3}} = \frac{1}{2^2\cdot 2^x} \Rightarrow 2^{-3\cdot\frac{5}{3}} = 2^{-2-x} \Rightarrow 5 = 2 + x \Rightarrow x = 3$

10. Sabiendo que log 2 = *a*, calcula, en función de *a* el valor de $\log\frac{50}{0,08}$.

$$\log\frac{50}{0,08}=\log 50-\log 0,08=\log\frac{100}{2}-\log\frac{8}{100}=\log 100-\log 2-\log 8+\log 100=2-\log 2-\log 2^3+2=$$

$$=4-\log 2-3\log 2=4-4\log 2=4-4a$$

11. Calcula el tiempo necesario para que un capital colocado al 5 % de interés anual compuesto aumente en un 50 %.

$$1{,}5C=C\cdot 1{,}05^t\Rightarrow 1{,}05^t=1{,}5\Rightarrow \log 1{,}05^t=\log 1{,}5\Rightarrow t\cdot\log 1{,}05=\log 1{,}5\Rightarrow t=\frac{\log 1{,}5}{\log 1{,}05}=8{,}31\text{ años.}$$

Relaciona y contesta

Elige la única respuesta correcta en cada caso

1. Si *a* y *b* son números reales estrictamente positivos y diferentes de la unidad, la expresión $\frac{1-\log_a b}{1+\log_a b}$ vale:

A. $\log_{ab}\left(\frac{a}{b}\right)$ **B.** $\log_{a+b}(ab)$ **C.** $\log_{ab}(ab)$ **D.** 1

$$\frac{1-\log_a b}{1+\log_a b}=\frac{1-\frac{\log b}{\log a}}{1+\frac{\log b}{\log a}}=\frac{\frac{\log a-\log b}{\log a}}{\frac{\log a+\log b}{\log a}}=\frac{\log a-\log b}{\log a+\log b}=\frac{\log\left(\frac{a}{b}\right)}{\log ab}=\log_{ab}\left(\frac{a}{b}\right)$$, la respuesta A.

2. Sean *a* y *b* dos números reales no nulos y tales que $a=b\sqrt{3}$. El valor de $\left(\frac{a-b}{3b-a}\right)^{-1}$ es:

A. 3 **B.** $\sqrt{3}$ **C.** $a+b\sqrt{3}$ **D.** $3-\sqrt{3}$

$$\left(\frac{a-b}{3b-a}\right)^{-1}=\left(\frac{b\sqrt{3}-b}{3b-b\sqrt{3}}\right)^{-1}=\frac{3-\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}=\frac{(3-\sqrt{3})(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}=\frac{3\sqrt{3}+3-3-\sqrt{3}}{3-1}=\sqrt{3}$$, respuesta B.

3. Si $\log_2\sqrt[n]{0{,}125}=x$, entonces el valor de *xn* es:

A. –1 **B.** 2 **C.** –3 **D.** x^n

$\log_2\sqrt[n]{0{,}125}=x\Rightarrow 2^x=\sqrt[n]{0{,}125}\Rightarrow 2^{xn}=0{,}125=\frac{1}{8}=2^{-3}\Rightarrow xn=-3$, respuesta –3, la C.

Señala, en cada caso, las respuestas correctas

4. Las siguientes igualdades son ciertas para cualesquiera valores reales estrictamente positivos:

A. $a^{(b^c)}=(a^b)^c$ **B.** $(a^b)^c=(a^c)^b$ **C.** $a^{bc}=(a^b)^c$ **D.** $a^{(b^c)}=a^b$

$(a^b)^c=a^{bc}=(a^c)^b$, por lo que B y C son ciertas.

En cambio A y D son falsas, por ejemplo, $2^{(2^3)}=2^8=256$ no coincide con $(2^2)^3=4^3=64$ ni con $2^2=4$.

5. El número $\sqrt{\frac{3}{2}+\sqrt{2}}+\sqrt{\frac{3}{2}-\sqrt{2}}$ pertenece al conjunto:

A. $\mathbb{N}$ **B.** $\mathbb{Z}$ **C.** $\mathbb{Q}$ **D.** $\mathbb{R}$

$$\left(\sqrt{\frac{3}{2}+\sqrt{2}}+\sqrt{\frac{3}{2}-\sqrt{2}}\right)^2=\frac{3}{2}+\sqrt{2}+2\left(\sqrt{\frac{3}{2}+\sqrt{2}}\right)\left(\sqrt{\frac{3}{2}-\sqrt{2}}\right)+\frac{3}{2}-\sqrt{2}=3+2\sqrt{\frac{9}{4}-2}=3+2\frac{1}{2}=3+1=4$$

Por tanto, el número dado es $\sqrt{4}=2$, natural, y, por tanto, todas las respuestas son válidas.

Elige la relación correcta entre las dos afirmaciones dadas

6. Sean los subconjuntos $M=[-2\ ,\ 3)\cup[6,\ 8)$, $N=[1\ ,\ 5]\cup(7,\ 9)$ y $P=[1\ ,\ 3)\cup(7,\ 10]$.

Se consideran las siguientes afirmaciones:

1. El número real x pertenece al conjunto $(M\cup N)\cap(M\cup P)$.

2. El número real x pertenece al conjunto $[-2\ ,\ 3)\cup(6,\ 9)$.

A. $1 \Leftrightarrow 2$

B. $1 \Rightarrow 2$ pero $2 \not\Rightarrow 1$

C. 1 y 2 son excluyentes entre sí.

D. Nada de lo anterior.

$(M\cup N)\cap(M\cup P)=[-2\ ,\ 3)\cup[6,\ 9)$, luego $2 \Rightarrow 1$ pero $1 \not\Rightarrow 2$ (para entender lo anterior basta pensar en $x=6$). La respuesta es la D.

Señala el dato innecesario para contestar

7. Se desea saber el rédito al que hay que colocar un capital a interés compuesto para que se doble. Para ello se dan los datos:

1. El capital invertido asciende a 12 000 €.

2. El tiempo que va a durar la inversión es de doce años.

3. La capitalización será mensual.

A. Puede eliminarse el dato 1.

B. Puede eliminarse el dato 2.

C. Puede eliminarse el dato 3.

D. No puede eliminarse ningún dato.

Claramente necesitamos conocer el tiempo que dura la inversión (t años) y el periodo de capitalización (n capitalizaciones al año) para calcular el rédito r %, pero no es necesario conocer el capital inicial C_0, ya que si queremos doblar el capital inicial

$$2C_0=C_0\left(1+\frac{r}{100n}\right)^{nt}\Rightarrow 2=\left(1+\frac{r}{100n}\right)^{nt}\Rightarrow 2^{\frac{1}{nt}}=1+\frac{r}{100n}\Rightarrow r=100n\cdot\left(2^{\frac{1}{nt}}-1\right)$$ que no depende de C_0.

La solución es la A.

2 Álgebra

EJERCICIOS PROPUESTOS

1 y 2. **Ejercicios resueltos.**

3. **Realiza las siguientes operaciones con polinomios.**

a) $(3x^2 + 2x - 5)(2x^2 + x - 3)$ **b)** $(2x - 3)(-2x^2 + 2) + x\,(-2x^2 + x + 1)$ **c)** $4(x^3 - x + 3) - 2(x^2 + 3x)(-2x + 5)$

a) $(3x^2 + 2x - 5)(2x^2 + x - 3) = 6x^4 + 3x^3 - 9x^2 + 4x^3 + 2x^2 - 6x - 10x^2 - 5x + 15 = 6x^4 + 7x^3 - 17x^2 - 11x + 15$

b) $(2x - 3)(-2x^2 + 2) + x\,(-2x^2 + x + 1) = -4x^3 + 4x + 6x^2 - 6 - 2x^3 + x^2 + x = -6x^3 + 7x^2 + 5x - 6$

c) $4(x^3 - x + 3) - 2(x^2 + 3x)(-2x + 5) = 4x^3 - 4x + 12 + 4x^3 - 10x^2 + 12x^2 - 30x = 8x^3 + 2x^2 - 34x + 12$

4. **Calcula los valores de *a* y *b* para que se verifiquen las siguientes igualdades.**

a) $(3x^2 - 5x + a)(2x^2 + bx) = 6x^4 - 19x^3 + 19x^2 - 6x$

b) $2(x + 3)^2 - 3(x + a) = 2x^2 + bx + 3$

a) $(3x^2 - 5x + a)(2x^2 + bx) = 6x^4 + (3b - 10)x^3 + (2a - 5b)x^2 + abx \Rightarrow \begin{cases} 3b - 10 = -19 \\ 2a - 5b = 19 \\ ab = -6 \end{cases} \Rightarrow a = 2,\ b = -3$

b) $2(x + 3)^2 - 3(x + a) = 2x^2 + 9x + (18 - 3a) \Rightarrow \begin{cases} 9 = b \\ 18 - 3a = 3 \end{cases} \Rightarrow a = 5,\ b = 9$

5. **Efectúa las siguientes divisiones.**

a) $(3x^3 + 2x^2 + x - 5) : (3x^2 + 2)$

b) $(3x^4 - 2x^2 - x + 4) : (x^2 + x + 2)$

c) $(x^3 - 3x^2 - x + 6) : (2x^3 - 2x + 3)$

a)
$$\begin{array}{l|l} 3x^3 + 2x^2 + x - 5 & 3x^2 + 2 \\ \cline{2-2} \underline{-3x^3 \qquad - 2x} & x + \frac{2}{3} \\ 2x^2 - x - 5 & \\ \underline{-2x^2 \qquad - \frac{4}{3}} & \\ -x - \frac{19}{3} & \end{array}$$

c)
$$\begin{array}{l|l} x^3 - 3x^2 - x + 6 & 2x^3 - 2x + 3 \\ \cline{2-2} \underline{-x^3 \qquad + x - \frac{3}{2}} & \frac{1}{2} \\ -3x^2 \qquad + \frac{9}{2} & \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{l|l} 3x^4 \qquad - 2x^2 - x + 4 & x^2 + x + 2 \\ \cline{2-2} \underline{-3x^4 - 3x^3 - 6x^2} & 3x^2 - 3x - 5 \\ -3x^3 - 8x^2 - x & \\ \underline{3x^3 + 3x^2 + 6x} & \\ -5x^2 + 5x + 4 & \\ \underline{5x^2 + 5x + 10} & \\ 10x + 14 & \end{array}$$

6. **Efectúa las siguientes divisiones aplicando la regla de Ruffini.**

a) $(3x^3 + 2x^2 + x - 5) : (x + 2)$

b) $(3x^4 - 2x^2 - x + 4) : (x + 2)$

c) $(x^3 - 3x^2 - x + 6) : (2x + 3)$

d) $(4x^4 - 3x^2 + 5) : (-x + 5)$

e) $(2x^5 - 12x^3 - 6x^2 - 117) : (x - 3)$

a)

	3	2	1	–5
–2		–6	8	–18
	3	–4	9	–23

Cociente: $3x^2 - 4x + 9$ Resto: –23

b)

	3	0	–2	–1	4
–2		–6	12	–20	42
	3	–6	10	–21	46

Cociente: $3x^3 - 6x^2 + 10x - 21$ Resto: 46

c) Como el divisor no es de la forma $x - a$, antes de aplicar Ruffini se dividen el dividendo y el divisor por 2.

	$\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	3
$-\frac{3}{2}$		$-\frac{3}{4}$	$\frac{27}{8}$	$-\frac{69}{16}$
	$\frac{1}{2}$	$-\frac{9}{4}$	$\frac{23}{8}$	$-\frac{21}{16}$

Cociente: $\frac{1}{2}x^2 - \frac{9}{4}x + \frac{23}{8}$ Resto: $2 \cdot \left(-\frac{21}{16}\right) = -\frac{21}{8}$

d) Como el divisor no es de la forma $x - a$, antes de aplicar Ruffini se cambia el signo al dividendo y al divisor.

	–4	0	3	0	–5
5		–20	–100	–485	–2425
	–4	–20	–97	–485	–2430

Cociente: $-4x^3 - 20x^2 - 97x - 485$ Resto: 2430

e)

	2	0	–12	–6	0	–117
3		6	18	18	36	108
	2	6	6	12	36	–9

Cociente: $2x^4 + 6x^3 + 6x^2 + 12x + 36$ Resto: –9

7. Utiliza Ruffini para calcular el valor de *a* y *b* que hace que las siguientes divisiones sean exactas.

a) $(2x^3 + 5x^2 - 2x + a) : (x + 3)$

b) $(3x^4 - 5x^2 - ax + 2) : (2x + 3)$

c) $(-6x^4 + x^3 + ax^2 - 16x + 4) : (-3x + 4)$

d) $(4x^4 + 3x^3 - 13x^2 + ax + b) : (x^2 - 2)$

a)

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & 5 & -2 & a \\ -3 & & -6 & 3 & -3 \\ \hline & 2 & -1 & 1 & a-3 \end{array} \qquad a - 3 = 0 \Rightarrow a = 3$$

b)

$$\begin{array}{r|rrrrr} & \frac{3}{2} & 0 & -\frac{5}{2} & -\frac{a}{2} & 1 \\ -\frac{3}{2} & & -\frac{9}{4} & \frac{27}{8} & -\frac{21}{16} & \frac{63+24a}{32} \\ \hline & \frac{3}{2} & -\frac{9}{4} & \frac{7}{8} & -\frac{21+8a}{16} & \frac{95+24a}{32} \end{array} \qquad \frac{95+24a}{16} = 0 \Rightarrow a = -\frac{95}{24}$$

c)

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 2 & -\frac{1}{3} & -\frac{a}{3} & \frac{16}{3} & -\frac{4}{3} \\ \frac{4}{3} & & \frac{8}{3} & \frac{28}{9} & \frac{112-12a}{27} & \frac{1024-48a}{81} \\ \hline & 2 & \frac{7}{3} & \frac{28-3a}{9} & \frac{256-12a}{27} & \frac{916-48a}{81} \end{array} \qquad \frac{48a-916}{27} = 0 \Rightarrow a = \frac{229}{12}$$

d) La división no se puede hacer utilizando Ruffini.

$$\begin{array}{l|l} 4x^4 + 3x^3 - 13x^2 + ax + b & x^2 - 2 \\ \cline{2-2} -4x^4 \qquad + 8x^2 & 4x^2 + 3x - 5 \\ \cline{1-1} \quad 3x^3 - 5x^2 + ax & \\ \quad -3x^3 \qquad + 6x & \\ \cline{1-1} \qquad -5x^2 + (a+6)x + b & \\ \qquad 5x^2 \qquad\quad - 10 & \\ \cline{1-1} \qquad\qquad (a+6)x + b - 10 & \end{array}$$

Para que el resto sea cero $a = -6$ y $b = 10$

8 y 9. Ejercicios resueltos.

10. Halla, sin hacer la división, el valor de *m* para que el polinomio $2x^4 + 9x^3 + 2x^2 - 6x + 3m$ tenga por resto 12 al dividirlo por $x + 2$.

Por el teorema del resto se tiene: $12 = 2(-2)^4 + 9(-2)^3 + 2(-2)^2 - 6(-2) + 3m = 3m - 20 \Rightarrow m = \frac{32}{3}$

11. Calcula el valor de *k* para que el polinomio:

a) $P(x) = x^3 + x^2 - 2x + k$ sea divisible por $x - 2$.

b) $P(x) = x^3 - 2x^2 + kx + 4$ sea divisible por $x + 2$.

c) $P(x) = (k - 3)x^3 - 5x + k$ sea divisible por $x + 4$.

d) $P(x) = x^3 - (k - 3)x^2 + (k - 5)x - 3$ sea divisible por $x - 3$.

a) Por el teorema del factor se tiene: $2^3 + 2^2 - 2\cdot 2 + k = 0 \Rightarrow k + 8 = 0 \Rightarrow k = -8$

b) Por el teorema del factor se tiene: $(-2)^3 - 2\cdot(-2)^2 + k\cdot(-2) + 4 = 0 \Rightarrow -2k - 12 = 0 \Rightarrow k = -6$

c) Por el teorema del factor se tiene: $(k - 3)\cdot(-4)^3 - 5\cdot(-4) + k = 0 \Rightarrow -63k + 212 = 0 \Rightarrow k = \frac{212}{63}$

d) Por el teorema del factor se tiene: $3^3 - (k - 3)\cdot 3^2 + (k - 5)\cdot 3\cdot - 3 = 0 \Rightarrow -6k + 36 = 0 \Rightarrow k = 6$

12. En cada caso, factoriza el polinomio dado y halla sus raíces entera.

a) $2x^3 + 5x^2 - x - 6$ **c)** $x^4 - 16$ **e)** $6x^3 + 11x^2 + 6x + 1$ **g)** $x^4 - 3x^3 - 3x + 2$

b) $9x^2 + 12x + 4$ **d)** $x^5 - x^4 - x^2 + x$ **f)** $x^4 + 4x^3 - 3x^2 - 11x - 6$ **h)** $x^6 - 9x^4$

a)

	2	5	–1	–6
1		2	7	6
	2	7	6	0

Se calculan las raíces del cociente $2x^2 + 7x + 6$: $x = \frac{-7 \pm \sqrt{49-48}}{4} = \frac{-7 \pm 1}{4} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{3}{2} \\ x = -2 \end{cases}$

Por tanto, $2x^3 + 5x^2 - x - 6 = 2(x-1)(x+2)(x+\frac{3}{2}) = (x-1)(x+2)(2x+3)$. Las raíces enteras son –2 y 1.

b) $x = \frac{-12 \pm \sqrt{144-144}}{18} = \frac{-12 \pm 0}{18} = -\frac{2}{3}$, así $9x^2 + 12x + 4 = 9\left(x + \frac{2}{3}\right)^2 = (3x+2)^2$. No tiene raíces enteras.

c) Usando las igualdades notables: $x^4 - 16 = (x^2 - 4)(x^2 + 4) = (x-2)(x+2)(x^2+4)$. Las raíces enteras son –2 y 2.

d) Se extrae factor común: $x^5 - x^4 - x^2 + x = x(x^4 - x^3 - x + 1)$. Ahora por Ruffini:

	1	–1	0	–1	1
1		1	0	0	–1
	1	0	0	–1	0

	1	0	0	–1
1		1	1	1
	1	1	1	0

$x^5 - x^4 - x^2 + x = x(x-1)^2(x^2 + x + 1)$. Las raíces enteras son 0 y 1.

e)

	6	11	6	1
–1		–6	–5	–1
	6	5	1	0

Se calculan las raíces del cociente $6x^2 + 5x + 1$: $x = \frac{-5 \pm \sqrt{25-24}}{12} = \frac{-5 \pm 1}{12} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ x = -\frac{1}{3} \end{cases}$

Por tanto, $6x^3 + 11x^2 + 6x + 1 = 6(x+1)\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{3}\right)$. La raíz entera es –1.

f) Es un ejemplo de polinomio sin raíces enteras y que no se puede factorizar de forma sencilla.

g) Es un ejemplo de polinomio sin raíces enteras y que no se puede factorizar de forma sencilla.

h) Se extrae factor común y se utilizan las identidades notables: $x^6 - 9x^4 = x^4(x^2 - 9) = x^4(x-3)(x+3)$. Las raíces enteras son –3, 0 y 3.

13. Ejercicio interactivo.

14 a 17. Ejercicios resueltos.

18. Simplifica la expresión: $\dfrac{\left[\binom{29}{3} + \binom{29}{25}\right]4!}{630}$

$$\frac{\left[\binom{29}{3} + \binom{29}{25}\right]4!}{630} = \frac{\left[\binom{29}{3} + \binom{29}{4}\right]4!}{630} = \frac{\binom{30}{4}4!}{630} = \frac{30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot 27}{630} = 1044$$

19. Desarrolla las siguientes potencias y halla su sexto término.

a) $\left(3-2\sqrt{3}\right)^4$ **b)** $\left(2x+\dfrac{4}{3x}\right)^5$ **c)** $\left(\sqrt{2}-2\sqrt{3}\right)^9$ **d)** $\left(3a^2+2ab\right)^8$

a) $\left(3-2\sqrt{3}\right)^4=\binom{4}{0}\cdot 3^4-\binom{4}{1}\cdot 3^3\cdot\left(2\sqrt{3}\right)+\binom{4}{2}\cdot 3^2\cdot\left(2\sqrt{3}\right)^2-\binom{4}{3}\cdot 3\cdot\left(2\sqrt{3}\right)^3+\binom{4}{4}\left(2\sqrt{3}\right)^4=$

$=81-4\cdot 27\cdot 2\sqrt{3}+6\cdot 9\cdot 12-4\cdot 3\cdot 24\sqrt{3}+144=873-504\sqrt{3}$. El desarrollo no tiene sexto término.

b) $\left(2x+\dfrac{4}{3x}\right)^5=\binom{5}{0}(2x)^5+\binom{5}{1}(2x)^4\dfrac{4}{3x}+\binom{5}{2}(2x)^3\left(\dfrac{4}{3x}\right)^2+\binom{5}{3}(2x)^2\left(\dfrac{4}{3x}\right)^3+\binom{5}{4}2x\left(\dfrac{4}{3x}\right)^4+\binom{5}{5}\left(\dfrac{4}{3x}\right)^5=$

$=32x^5+\dfrac{320}{3}x^3+\dfrac{1280x}{9}+\dfrac{2560}{27x}+\dfrac{2560}{81x^3}+\dfrac{1024}{243x^5}$. El sexto término del desarrollo es $T_6=\binom{5}{5}\left(\dfrac{4}{3x}\right)^5=\dfrac{1024}{243x^5}$.

c) $\left(\sqrt{2}-2\sqrt{3}\right)^9=\binom{9}{0}(\sqrt{2})^9-\binom{9}{1}(\sqrt{2})^8\left(2\sqrt{3}\right)+\binom{9}{2}(\sqrt{2})^7\left(2\sqrt{3}\right)^2-\binom{9}{3}(\sqrt{2})^6\left(2\sqrt{3}\right)^3+\binom{9}{4}(\sqrt{2})^5\left(2\sqrt{3}\right)^4-$

$-\binom{9}{5}(\sqrt{2})^4\left(2\sqrt{3}\right)^5+\binom{9}{6}(\sqrt{2})^3\left(2\sqrt{3}\right)^6-\binom{9}{7}(\sqrt{2})^2\left(2\sqrt{3}\right)^7+\binom{9}{8}(\sqrt{2})\left(2\sqrt{3}\right)^8-\binom{9}{9}\left(2\sqrt{3}\right)^9=16\sqrt{2}-$

$-288\sqrt{3}+3456\sqrt{2}-16128\sqrt{3}+72\,576\sqrt{2}-145\,152\sqrt{3}+290\,304\sqrt{2}-248\,832\sqrt{3}+186\,624\sqrt{2}-41\,472\sqrt{3}=$

$=552\,976\sqrt{2}-451\,872\sqrt{3}$. El sexto término del desarrollo es $T_6=-\binom{9}{5}\left(\sqrt{2}\right)^4\left(2\sqrt{3}\right)^5=-145\,152\sqrt{3}$.

d) $\left(3a^2+2ab\right)^8=\binom{8}{0}(3a^2)^8+\binom{8}{1}(3a^2)^7(2ab)+\binom{8}{2}(3a^2)^6(2ab)^2+\binom{8}{3}(3a^2)^5(2ab)^3+\binom{8}{4}(3a^2)^4(2ab)^4+$

$+\binom{8}{5}(3a^2)^3(2ab)^5+\binom{8}{6}(3a^2)^2(2ab)^6+\binom{8}{7}(3a^2)(2ab)^7+\binom{8}{8}(2ab)^8=6561a^{16}+34\,992a^{15}b+81\,648a^{14}b^2+$

$+108\,864a^{13}b^3+90\,720a^{12}b^4+48\,384a^{11}b^5+16\,128a^{10}b^6+3072a^9b^7+256a^8b^8$.

El sexto término del desarrollo es $T_6=\binom{8}{5}\left(3a^2\right)^3\left(2ab\right)^5=48\,384a^{11}b^5$.

20. Halla el término independiente del desarrollo de: $\left(\dfrac{3}{x^2}+5x\right)^{12}$.

$$T_k=\binom{12}{k-1}\left(\frac{3}{x^2}\right)^{13-k}(5x)^{k-1}=\binom{12}{k-1}\frac{3^{13-k}\cdot 5^{k-1}\cdot x^{k-1}}{x^{26-2k}}=\binom{12}{k-1}3^{13-k}\cdot 5^{k-1}\cdot x^{3k-27}$$

El término independiente cumple $3k-27=0\Rightarrow k=9$.

Por tanto, el término independiente es $T_9=\binom{12}{8}3^{13-9}\cdot 5^{9-1}=495\cdot 3^4\cdot 5^8$

21. Calcula el coeficiente de y^2 en el desarrollo: $\left(\dfrac{2y^2}{3}-\dfrac{3}{2y^2}\right)^7$.

$$T_k=(-1)^{k-1}\binom{7}{k-1}\left(\frac{2y^2}{3}\right)^{8-k}\left(\frac{3}{2y^2}\right)^{k-1}=(-1)^{k-1}\binom{7}{k-1}\frac{2^{8-k}\cdot 3^{k-1}\cdot y^{16-2k}}{2^{k-1}\cdot 3^{8-k}\cdot y^{2k-2}}=(-1)^{k-1}\binom{7}{k-1}2^{9-2k}\cdot 3^{2k-9}\cdot y^{-4k+18}$$

El término de y^2 cumple $-4k+18=2\Rightarrow k=4$. Por tanto, el coeficiente de y^2 es $(-1)^3\binom{7}{3}2^{9-8}\cdot 3^{8-9}=-\dfrac{70}{3}$

22. Ejercicio resuelto.

23. Calcula el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo de los siguientes polinomios.

a) $P(x) = x^3 + 3x^2 - 4$ y $Q(x) = x^2 - 2x + 1$

b) $P(x) = x^5 + 3x^4 - 2x^3 - 6x^2 + x + 3$ y $Q(x) = x^3 + 3x^2 - x - 3$

c) $P(x) = x$, $Q(x) = x^2 - x$ y $R(x) = x^3 - 2x^2 + x$

d) $P(x) = 12x^3 - 4x^2 - 3x + 1$ y $Q(x) = 12x^3 - 16x^2 + 7x - 1$

e) $P(x) = x^2 - 6x + 8$, $Q(x) = x^2 - 4$ y $R(x) = 2x^2 - 4x$

a) $P(x) = (x-1)(x+2)^2$, $Q(x) = (x-1)^2$

$\text{m.c.d.}[P(x), Q(x)] = x - 1$; $\text{m.c.m.}[P(x), Q(x)] = (x-1)^2(x+2)^2 = x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 4$

b) $P(x) = (x-1)^2(x+1)^2(x+3)$, $Q(x) = (x-1)(x+1)(x+3)$

$\text{m.c.d.}[P(x), Q(x)] = (x-1)(x+1)(x+3) = Q(x)$; $\text{m.c.m.}[P(x), Q(x)] = (x-1)^2(x+1)^2(x+3) = P(x)$

c) $P(x) = x$, $Q(x) = x(x-1)$, $R(x) = x(x-1)^2$

$\text{m.c.d.}[P(x), Q(x), R(x)] = x = P(x)$; $\text{m.c.m.}[P(x), Q(x), R(x)] = x(x-1)^2 = R(x)$

d) $P(x) = (2x+1)(2x-1)(3x-1)$, $Q(x) = (2x-1)^2(3x-1)$

$\text{m.c.d.}[P(x), Q(x)] = (2x-1)(3x-1) = 6x^2 - 5x + 1$

$\text{m.c.m.}[P(x), Q(x)] = (2x+1)(2x-1)^2(3x-1) = 24x^4 - 20x^3 - 2x^2 + 5x - 1$

e) $P(x) = (x-4)(x-2)$, $Q(x) = (x+2)(x-2)$, $R(x) = 2x(x-2)$

$\text{m.c.d.}[P(x), Q(x), R(x)] = x - 2$; $\text{m.c.m.}[P(x), Q(x), R(x)] = (x-2)(x+2)2x(x-4) = 2x^4 + 8x^3 + 8x^2 - 32x$

24. Simplifica las siguientes fracciones algebraicas.

a) $\dfrac{2x^4 + x^3 - 11x^2 + 11x - 3}{2x^3 + 3x^2 - 8x + 3}$ **b)** $\dfrac{x^3 - 2x^2 - 9x + 18}{x^3 - 7x^2 + 16x - 12}$ **c)** $\dfrac{x^4 - 5x^3 + 9x^2 - 7x + 2}{x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 12x + 4}$

a) $\dfrac{2x^4 + x^3 - 11x^2 + 11x - 3}{2x^3 + 3x^2 - 8x + 3} = \dfrac{(x+3)(x-1)^2(2x-1)}{(x-1)(x+3)(2x-1)} = x - 1$

b) $\dfrac{x^3 - 2x^2 - 9x + 18}{x^3 - 7x^2 + 16x - 12} = \dfrac{(x-2)(x+3)(x-3)}{(x-3)(x-2)^2} = \dfrac{x+3}{x-2}$

c) $\dfrac{x^4 - 5x^3 + 9x^2 - 7x + 2}{x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 12x + 4} = \dfrac{(x-1)^3(x-2)}{(x-1)^2(x-2)^2} = \dfrac{x-1}{x-2}$

25. Realiza las siguientes operaciones con fracciones algebraicas y simplifica el resultado.

a) $\dfrac{a^2}{a\cdot b}+\dfrac{a\cdot b^2}{b^4}-a$

b) $\dfrac{6}{2+x}-\dfrac{4}{2-x}+\dfrac{16}{x^2-4}$

c) $\dfrac{2x^2-7x+6}{x^2+2x+1}\cdot\dfrac{x^2+6x+5}{2x-3}$

d) $(x^2-y^2):\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right)$

e) $\dfrac{a+x}{x^2-a^2}\cdot\dfrac{x-a}{x+a}$

f) $1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}}}$

g) $\dfrac{\dfrac{1}{x+1}}{\dfrac{1}{x^2-1}+\dfrac{1-x}{x^2-2x+1}}+\dfrac{x+1}{x}$

h) $1+\dfrac{\dfrac{2x+1}{x-1}}{\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{x}{x+1}}$

a) $\dfrac{a^2}{a\cdot b}+\dfrac{a\cdot b^2}{b^4}-a=\dfrac{a^2b^3+a^2b^2-a^2b^4}{ab^4}=\dfrac{a^2b^2\left(b+1-b^2\right)}{ab^4}=\dfrac{ab+a-ab^2}{b^2}$

b) $\dfrac{6}{2+x}-\dfrac{4}{2-x}+\dfrac{16}{x^2-4}=\dfrac{6(x-2)+4(x+2)+16}{(x+2)(x-2)}=\dfrac{6x-12+4x+8+16}{(x+2)(x-2)}=\dfrac{10x+12}{x^2-4}$

c) $\dfrac{2x^2-7x+6}{x^2+2x+1}\cdot\dfrac{x^2+6x+5}{2x-3}=\dfrac{(x-2)(2x-3)}{(x+1)^2}\cdot\dfrac{(x+1)(x+5)}{2x-3}=\dfrac{(x-2)(x+5)}{x+1}=\dfrac{x^2+3x-10}{x+1}$

d) $(x^2-y^2):\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right)=\dfrac{(x-y)(x+y)}{\dfrac{x+y}{xy}}=\dfrac{xy(x-y)(x+y)}{x+y}=x^2y-xy^2$

e) $\dfrac{a+x}{x^2-a^2}\cdot\dfrac{x-a}{x+a}=\dfrac{(a+x)(x-a)}{(x-a)(x+a)^2}=\dfrac{1}{x+a}$

f) $1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}}}=1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{\dfrac{x+1}{x}}}=1+\dfrac{1}{1+\dfrac{x}{x+1}}=1+\dfrac{1}{\dfrac{2x+1}{x+1}}=1+\dfrac{x+1}{2x+1}=\dfrac{3x+2}{2x+1}$

g) $\dfrac{\dfrac{1}{x+1}}{\dfrac{1}{x^2-1}+\dfrac{1-x}{x^2-2x+1}}+\dfrac{x+1}{x}=\dfrac{1}{x+1}:\dfrac{-x}{(x+1)(x-1)}+\dfrac{x+1}{x}=\dfrac{1-x}{x}+\dfrac{x+1}{x}=\dfrac{2}{x}$

h) $1+\dfrac{\dfrac{2x+1}{x-1}}{\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{x}{x+1}}=1+\left(\dfrac{2x+1}{x-1}:\dfrac{x^2+1}{(x+1)(x-1)}\right)=1+\dfrac{(x+1)(2x+1)}{x^2+1}=\dfrac{3x^2+3x+2}{x^2+1}$

26 a 28. Ejercicios resueltos.

29. Resuelve las siguientes ecuaciones polinómicas.

a) $\frac{2x-3}{4}+\frac{x}{2}-\frac{3x-1}{5}=2x-1$

b) $2(3x-2)+x(x-1)=-4$

c) $(x+1)^3-(x-1)^3=7$

d) $\frac{x^2+1}{2}-\frac{2x-3}{4}+\frac{x^2}{6}=\frac{59}{12}$

e) $6x^4+13x^3-8x^2-17x+6=0$

f) $2x^4-x^3-3x-18=0$

a) $\frac{2x-3}{4}+\frac{x}{2}-\frac{3x-1}{5}=2x-1 \Rightarrow 10x-15+10x-12x+4=40x-20 \Rightarrow -32x=-9 \Rightarrow x=\frac{9}{32}$

b) $2(3x-2)+x(x-1)=-4 \Rightarrow 6x-4+x^2-x+4=0 \Rightarrow x^2+5x=0 \Rightarrow x(x+5)=0 \Rightarrow x=0,\ x=-5$

c) $(x+1)^3-(x-1)^3=7 \Rightarrow x^3+3x^2+3x+1-(x^3-3x^2+3x-1)=7 \Rightarrow 6x^2=5 \Rightarrow x=\sqrt{\frac{5}{6}},\ x=-\sqrt{\frac{5}{6}}$

d) $\frac{x^2+1}{2}-\frac{2x-3}{4}+\frac{x^2}{6}=\frac{59}{12} \Rightarrow 6x^2+6-6x+9+2x^2=59 \Rightarrow 8x^2-6x-44=0 \Rightarrow 4x^2-3x-22=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x=\frac{3\pm\sqrt{9+352}}{8}=\frac{3\pm 19}{8} \Rightarrow x=\frac{11}{4},\ x=-2$

e) $6x^4+13x^3-8x^2-17x+6=0 \Rightarrow (x-1)(x+2)(2x+3)(3x-1)=0 \Rightarrow x=1,\ x=-2,\ x=-\frac{3}{2},\ x=\frac{1}{3}$

f) $2x^4-x^3-3x-18=0 \Rightarrow (x-2)(x^2+3)(2x+3)=0 \Rightarrow x=2,\ x=-\frac{3}{2}$

30. Escribe una ecuación polinómica de tercer grado tal que una solución sea 2 y la suma y el producto de las otras dos valgan –4 y 5, respectivamente.

$(x-2)(x^2+4x+5)=0 \Rightarrow x^3+2x^2-3x-10=0$

Las soluciones no son todas reales.

31. Resuelve las siguientes ecuaciones.

a) $x^4-17x^2+16=0$

b) $2(x+1)^4-8x^3-8(x+3)+8=0$

c) $3x^4+x^3+73x^2+25x+16=0$

d) $\frac{9}{x^2}=10-x^2$

a) $\left.\begin{array}{l} z=x^2 \\ z^2=x^4 \end{array}\right\} \Rightarrow z^2-17z+16=0 \Rightarrow z=\frac{17\pm\sqrt{289-64}}{2}=\frac{17\pm 15}{2}=\begin{cases} z=16 \Rightarrow x=4,\ x=-4 \\ z=1 \Rightarrow x=1,\ x=-1 \end{cases}$

b) $2(x+1)^4-8x^3-8(x+3)+8=2x^4+8x^3+12x^2+8x+2-8x^3-8x-24+8=2x^4+12x^2-14=x^4+6x^2-7=0$

$\left.\begin{array}{l} z=x^2 \\ z^2=x^4 \end{array}\right\} \Rightarrow z^2+6z-7=0 \Rightarrow z=\frac{-6\pm\sqrt{36+28}}{2}=\frac{-6\pm 8}{2}=\begin{cases} z=1 \Rightarrow x=1,\ x=-1 \\ z=-7 \Rightarrow \text{No tiene solución real} \end{cases}$

c) El polinomio no tiene raíces enteras, por lo que no es sencillo de factorizar y, por tanto, la ecuación no se puede resolver de manera sencilla (de hecho, no tiene raíces reales).

d) $\frac{9}{x^2}=10-x^2 \Rightarrow 9=10x^2-x^4 \Rightarrow x^4-10x^2+9=0$

$\left.\begin{array}{l} z=x^2 \\ z^2=x^4 \end{array}\right\} \Rightarrow z^2-10z+9=0 \Rightarrow z=\frac{10\pm\sqrt{100+36}}{2}=\frac{10\pm 8}{2}=\begin{cases} z=9 \Rightarrow x=3,\ x=-3 \\ z=1 \Rightarrow x=1,\ x=-1 \end{cases}$

32 a 34. Ejercicios resueltos.

35. Resuelve las siguientes ecuaciones racionales.

a) $\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}=\frac{7}{8}$ **b)** $\frac{2x}{3}+\frac{2x+3}{x-1}=\frac{11}{3x-3}$ **c)** $\frac{2x}{x-2}+\frac{3x}{x+2}=\frac{6x^2}{x^2-4}$

a) $\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}=\frac{7}{8}\Rightarrow 8x^2+8x+8=7x^3\Rightarrow (x-2)(7x^2+6x+4)=0\Rightarrow x=2$ La solución es verdadera.

b) $\frac{2x}{3}+\frac{2x+3}{x-1}=\frac{11}{3x-3}\Rightarrow 2x(x-1)+3(2x+3)=11\Rightarrow 2x^2+4x-2=0\Rightarrow \begin{cases} x_1=-1+\sqrt{2} \\ x_2=-1-\sqrt{2}\end{cases}$ Ambas son verdaderas.

c) $\frac{2x}{x-2}+\frac{3x}{x+2}=\frac{6x^2}{x^2-4}\Rightarrow 2x(x+2)+3x(x-2)=6x^2\Rightarrow x^2+2x=0\Rightarrow \begin{cases} x=0 \text{ Verdadera} \\ x=-2 \text{ Falsa}\end{cases}$

36. Encuentra la solución de estas ecuaciones racionales.

a) $\frac{1}{1-\frac{1}{x+1}}=\frac{x+1}{x}$ **b)** $\frac{1+\frac{x+1}{x-1}}{2-\frac{x-1}{x+1}}=2$

a) $\frac{1}{1-\frac{1}{x+1}}=\frac{x+1}{x}\Rightarrow\frac{x+1}{x}=\frac{x+1}{x}$; $x\in\mathbb{R}-\{0,-1\}$, que anulan los denominadores de la ecuación, son soluciones.

b) $\frac{1+\frac{x+1}{x-1}}{2-\frac{x-1}{x+1}}=2\Rightarrow\frac{2x}{x-1}:\frac{x+3}{x+1}=2\Rightarrow\frac{2x^2+2x}{x^2+2x-3}=2\Rightarrow 2x^2+2x=2x^2+4x-6\Rightarrow 2x=6\Rightarrow x=3$

37 y 38. Ejercicios resueltos.

39. Resuelve las siguientes ecuaciones con radicales.

a) $\frac{x-1}{\sqrt{x}}=x-\frac{5}{2}$ **c)** $\sqrt{3(16-x)}-\sqrt{2x-5}=1$ **e)** $\sqrt{1-4x}-2\sqrt{3+x}=\sqrt{3+x}$

b) $\sqrt{x+4}+\sqrt{x-1}=5$ **d)** $\sqrt{x-7}+\sqrt{2x}=\sqrt{x+1}$

a) $\frac{x-1}{\sqrt{x}}=x-\frac{5}{2}\Rightarrow\frac{x-1}{\sqrt{x}}=\frac{2x-5}{2}\Rightarrow 2x-2=(2x-5)\sqrt{x}\Rightarrow(2x-2)^2=\left((2x-5)\sqrt{x}\right)^2\Rightarrow 4x^3-24x^2+33x-4=0\Rightarrow$

$\Rightarrow(x-4)(4x^2-8x+1)=0\Rightarrow x=4;\ x=1+\frac{\sqrt{3}}{2}$ (Falsa); $x=1-\frac{\sqrt{3}}{2}$

b) $\sqrt{x+4}+\sqrt{x-1}=5\Rightarrow\sqrt{x+4}=5-\sqrt{x-1}\Rightarrow\left(\sqrt{x+4}\right)^2=\left(5-\sqrt{x-1}\right)^2\Rightarrow x+4=25+x-1-10\sqrt{x-1}\Rightarrow$

$\Rightarrow 10\sqrt{x-1}=20\Rightarrow\sqrt{x-1}=2\Rightarrow x-1=4\Rightarrow x=5$

c) $\sqrt{3(16-x)}-\sqrt{2x-5}=1\Rightarrow\sqrt{48-3x}=1+\sqrt{2x-5}\Rightarrow 48-3x=1+2x-5+2\sqrt{2x-5}\Rightarrow 2\sqrt{2x-5}=-5x+52\Rightarrow$

$\Rightarrow 4(2x-5)=25x^2+2704-520x\Rightarrow 25x^2-528x+2724=0\Rightarrow x=\frac{264+2\sqrt{399}}{25}$ (Falsa); $x=\frac{264-2\sqrt{399}}{25}$

d) $\sqrt{x-7}+\sqrt{2x}=\sqrt{x+1}\Rightarrow x-7+2x+2\sqrt{(x-7)2x}=x+1\Rightarrow\sqrt{2x^2-14x}=4-x\Rightarrow 2x^2-14x=16+x^2-8x\Rightarrow$

$\Rightarrow x^2-6x-16=0\Rightarrow x=8$ (Falsa); $x=-2$ (Falsa) La ecuación no tiene solución.

e) $\sqrt{1-4x}-2\sqrt{3+x}=\sqrt{3+x}\Rightarrow\sqrt{1-4x}=3\sqrt{3+x}\Rightarrow 1-4x=9(3+x)\Rightarrow 1-4x=27+9x\Rightarrow 13x=-26\Rightarrow x=-2$

40. Resuelve las siguientes ecuaciones con radicales.

a) $\sqrt[3]{x^2-1}+1=x$

b) $\dfrac{\sqrt{3x+7}}{\sqrt[3]{x+1}}=\sqrt[3]{x^2+2x+1}$

a) $\sqrt[3]{x^2-1}+1=x \Rightarrow \sqrt[3]{x^2-1}=x-1 \Rightarrow x^2-1=(x-1)^3 \Rightarrow (x-1)(x+1)-(x-1)^3=0 \Rightarrow (x-1)(x+1-x^2+2x-1)=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (x-1)(3x-x^2)=0 \Rightarrow x(x-1)(3-x)=0 \Rightarrow x=0;\ x=1;\ x=3$

b) $\dfrac{\sqrt{3x+7}}{\sqrt[3]{x+1}}=\sqrt[3]{x^2+2x+1} \Rightarrow \sqrt{3x+7}=\sqrt[3]{x+1}\cdot\sqrt[3]{x^2+2x+1} \Rightarrow \sqrt{3x+7}=x+1 \Rightarrow 3x+7=x^2+2x+1 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2-x-6=0 \Rightarrow x=3;\ x=-2$ (Falsa)

41. Calcula el valor de un número tal que si se le suma una unidad y después se extrae la raíz cuadrada se obtiene el doble que al restarle once unidades y extraer la raíz cuadrada.

Número desconocido: x; $\sqrt{x+1}=2\sqrt{x-11} \Rightarrow x+1=4(x-11) \Rightarrow 3x=45 \Rightarrow x=15$

42 a 44. Ejercicios resueltos.

45. Resuelve las siguientes ecuaciones logarítmicas.

a) $\log(2x+3)-\log(x-1)=2\log 2+2\log 3$

b) $\log\dfrac{2x-2}{x}=2\log(x-1)-\log x$

c) $\log(4-5x)+\log(2x-2)=\log(2x-x^2)+1$

d) $\dfrac{\log(4-x)}{\log(x+2)}=2$

a) $\log(2x+3)-\log(x-1)=2\log 2+2\log 3 \Rightarrow \log\dfrac{2x+3}{x-1}=\log\left(2^2\cdot 3^2\right) \Rightarrow \dfrac{2x+3}{x-1}=36 \Rightarrow 2x+3=36x-36 \Rightarrow x=\dfrac{39}{34}$

b) $\log\dfrac{2x-2}{x}=2\log(x-1)-\log x \Rightarrow \log[2(x-1)]-\log x=2\log(x-1)-\log x \Rightarrow \log 2+\log(x-1)=2\log(x-1) \Rightarrow$

$\Rightarrow \log(x-1)=\log 2 \Rightarrow x-1=2 \Rightarrow x=3$

c) $\log(4-5x)+\log(2x-2)=\log(2x-x^2)+1 \Rightarrow \log(4-5x)(2x-2)=\log 10(2x-x^2) \Rightarrow$

$\Rightarrow 8x-8-10x^2+10x=20x-10x^2 \Rightarrow -2x=8 \Rightarrow x=-4$ (Falsa) La ecuación no tiene solución.

d) $\dfrac{\log(4-x)}{\log(x+2)}=2 \Rightarrow \lg(4-x)=2\log(x+2) \Rightarrow \log(4-x)=\log(x+2)^2 \Rightarrow 4-x=x^2+4x+4 \Rightarrow\Rightarrow x=0;\ x=-5$ (Falsa)

46. Resuelve las siguientes ecuaciones logarítmicas.

a) $\log_x 3=\ln\sqrt{3}$

b) $\log_3 32+\log_{\frac{1}{3}}(6-x)=\log_{\sqrt{3}} x$

a) $\log_x 3=\ln\sqrt{3} \Rightarrow \dfrac{\ln 3}{\ln x}=\dfrac{\ln 3}{2} \Rightarrow \ln x=2 \Rightarrow x=e^2$

b) $\log_3 32+\log_{\frac{1}{3}}(6-x)=\log_{\sqrt{3}} x \Rightarrow \dfrac{\log 32}{\log 3}+\dfrac{\log(6-x)}{\log\left(\frac{1}{3}\right)}=\dfrac{\log x}{\log\sqrt{3}} \Rightarrow \dfrac{\log 32}{\log 3}-\dfrac{\log(6-x)}{\log 3}=\dfrac{2\log x}{\log 3} \Rightarrow$

$\Rightarrow \log 32-\log(6-x)=2\log x \Rightarrow \log\dfrac{32}{6-x}=\log x^2 \Rightarrow x^2=\dfrac{32}{6-x} \Rightarrow 6x^2-x^3=32 \Rightarrow \begin{cases} x=4 \\ x=-2 \text{ (Falsa)} \end{cases}$

47. Halla el número que cumple que al añadir a su logaritmo decimal el valor del logaritmo decimal de 2, el resultado es 1.

Número desconocido: x

$\log x + \log 2 = 1 \Rightarrow \log 2x = \log 10 \Rightarrow 2x = 10 \Rightarrow x = 5$

48. Calcula el valor de un número sabiendo que el doble de su logaritmo decimal es igual a la suma de los logaritmos decimales de 4 y de 9.

Número desconocido: x

$$2\log x = \log 4 + \log 9 \Rightarrow \log x^2 = \log 36 \Rightarrow x^2 = 36 \Rightarrow \begin{cases} x = 6 \\ x = -6 \ \text{(Falsa)} \end{cases}$$

49 a 51. Ejercicios resueltos.

52. Resuelve las ecuaciones exponenciales.

a) $\frac{1}{2^x} = 16^{\frac{x(x-1)}{2}}$ **b)** $3 \cdot 2^x = 2 \cdot 3^x$ **c)** $13^{x^2+2x} - \frac{1}{13} = 0$ **d)** $2^{2x^2-3x-5} = 16$

a) $\frac{1}{2^x} = 16^{\frac{x(x-1)}{2}} \Rightarrow 2^{-x} = 2^{\frac{4x(x-1)}{2}} \Rightarrow -x = 2x(x-1) \Rightarrow 2x^2 - x = 0 \Rightarrow x(2x-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{1}{2} \end{cases}$

b) $3 \cdot 2^x = 2 \cdot 3^x \Rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{2}{3} \Rightarrow x = 1$

c) $13^{x^2+2x} - \frac{1}{13} = 0 \Rightarrow 13^{x^2+2x} = 13^{-1} \Rightarrow x^2 + 2x = -1 \Rightarrow x^2 + 2x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$

d) $2^{2x^2-3x-5} = 16 \Rightarrow 2^{2x^2-3x-5} = 2^4 \Rightarrow 2x^2 - 3x - 5 = 4 \Rightarrow 2x^2 - 3x - 9 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = -\frac{3}{2} \end{cases}$

53. Resuelve las ecuaciones.

a) $2^{x+4} - 8^x = 0$ **b)** $3^{2x} - 3^{x-1} = 3^{x+1} - 1$ **c)** $5^{x+3} - 5^{x-1} - 3120 = 0$ **d)** $2 \cdot 10^{2x+4} + 3 \cdot 10^{x+2} - 5 = 0$

a) $2^{x+4} - 8^x = 0 \Rightarrow 2^{x+4} - 2^{3x} = 0 \Rightarrow 2^{x+4} = 2^{3x} \Rightarrow x + 4 = 3x \Rightarrow x = 2$

b) Aplicando el cambio de variable $z = 3^x$

$$3^{2x} - 3^{x-1} = 3^{x+1} - 1 \Rightarrow \left(3^x\right)^2 - \frac{1}{3}3^x = 3 \cdot 3^x + 1 = 0 \Rightarrow z^2 - \frac{1}{3}z = 3z + 3 = 0 \Rightarrow 3z^2 - 10z + 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} z = 3 \\ z = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3^x = 3 \Rightarrow x = 1 \\ 3^x = \frac{1}{3} \Rightarrow x = -1 \end{cases}$$

c) $5^{x+3} - 5^{x-1} - 3120 = 0 \Rightarrow 5^x \cdot 5^3 - \frac{5^x}{5} - 3120 = 0 \Rightarrow \cdot(5^3 - \frac{1}{5})5^x = 3120 \Rightarrow 5^x = \frac{5 \cdot 3120}{5^4 - 1} = 25 \Rightarrow x = 2$

d) Aplicando el cambio de variable $z = 10^x$

$$2 \cdot 10^{2x+4} + 3 \cdot 10^{x+2} - 5 = 0 \Rightarrow 2 \cdot 10^4 \cdot \left(10^x\right)^2 + 3 \cdot 10^2 \cdot 10^x - 5 = 0 \Rightarrow 20000z^2 + 300z - 5 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4000z^2 + 60z - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} z = 0{,}01 \Rightarrow 10^x = 10^{-2} \Rightarrow x = -2 \\ z = -0{,}025 \Rightarrow 10^x = -0.025 \text{ sin solución real} \end{cases}$$

54. Ejercicio interactivo.

55 a 57. Ejercicios resueltos.

58. Estudia el número de soluciones que tienen los siguientes sistemas lineales y, en los casos en los que existan, hállalas.

a) $\begin{cases} x+y-2z=0 \\ 2x-3y+3z=4 \\ 5x-5y+4z=8 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 5x+2y-2z=0 \\ 3x-y+3z=0 \\ 8x+y+z=-1 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} x+3y-2z=0 \\ x-y+3z=0 \\ 2x+2y+z=0 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} 2y-z=-1 \\ 5x-y-3z=2 \\ x-y+2z=-2 \end{cases}$

a) $\begin{cases} x+y-2z=0 \\ 2x-3y+3z=4 \\ 5x-5y+4z=8 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} E_2 \to E_2-2E_1 \\ E_3 \to E_3-5E_1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} x+y-2z=0 \\ -5y+7z=4 \\ -10y+14z=8 \end{cases} \Rightarrow \; E_3 \to \dfrac{E_3}{2}-E_2 \; \Rightarrow \begin{cases} x+y-2z=0 \\ -5y+7z=4 \\ 0=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y-2z=0 \\ -5y+7z=4 \end{cases}$

Infinitas soluciones: $\begin{cases} z=t \\ 5y=7z-4=7t-4 \Rightarrow y=\dfrac{7t-4}{5} \\ x=2z-y=2t-\dfrac{7t-4}{5}=\dfrac{3t+4}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{3t+4}{5} \\ y=\dfrac{7t-4}{5} \\ z=t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbb{R}$

b) $\begin{cases} 5x+2y-2z=0 \\ 3x-y+3z=0 \\ 8x+y+z=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} E_2 \to 5E_2-3E_1 \\ E_3 \to 5E_3-8E_1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} 5x+2y-2z=0 \\ -11y+21z=0 \\ -11y+21z=-5 \end{cases} \Rightarrow \; E_3 \to E_3-E_2 \; \Rightarrow \begin{cases} 5x+2y-2z=0 \\ -11y+21z=0 \\ 0=-5 \end{cases}$

El sistema no tiene solución.

c) $\begin{cases} x+3y-2z=0 \\ x-y+3z=0 \\ 2x+2y+z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} E_2 \to E_2-E_1 \\ E_3 \to E_3-2E_1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} x+3y-2z=0 \\ -4y+5z=0 \\ -4y+5z=0 \end{cases} \Rightarrow \; E_3 \to E_3-E_2 \; \Rightarrow \begin{cases} x+3y-2z=0 \\ -4y+5z=0 \\ 0=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+3y-2z=0 \\ -4y+5z=0 \end{cases}$

Infinitas soluciones: $\begin{cases} y=t \\ 5z=4y=4t \Rightarrow z=\dfrac{4t}{5} \\ x=-3y+2z=-3t+\dfrac{8t}{5}=-\dfrac{7t}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-\dfrac{7t}{5} \\ y=t \\ z=\dfrac{4t}{5} \end{cases} \quad \forall t \in \mathbb{R}$

d) Intercambiamos la primera ecuación con la y tercera.

$\begin{cases} x-y+2z=-2 \\ 5x-y-3z=2 \\ 2y-z=-1 \end{cases} \Rightarrow \; E_2 \to E_2-5E_1 \; \Rightarrow \begin{cases} x-y+2z=-2 \\ 4y-13z=12 \\ 2y-z=-1 \end{cases} \Rightarrow \; E_3 \to 2E_3-E_2 \; \Rightarrow \begin{cases} x-y+2z=-2 \\ 4y-13z=12 \\ 11z=-14 \end{cases}$

Una única solución: $\begin{cases} x=-2-\dfrac{25}{22}+\dfrac{28}{11}=-\dfrac{13}{22} \\ y=3-\dfrac{182}{44}=-\dfrac{25}{22} \\ z=-\dfrac{14}{11} \end{cases}$

59. Resuelve y clasifica en función del número de soluciones los siguientes sistemas lineales.

a) $\begin{cases} x+2y-2z=2 \\ 3x-3y+z=-14 \\ 5x-y-2z=-15 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 2x+4y-z=0 \\ 3x-3y-2z=-1 \\ 3x-3y+2z=5 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} 2x+y-z=11 \\ 2x-2y-z=8 \\ x+y-z=7 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} 4x+y-5z=5 \\ 5x-y-z=13 \\ 4x-2y-3z=14 \end{cases}$

a) $\begin{cases} x+2y-2z=2 \\ 3x-3y+z=-14 \\ 5x-y-2z=-15 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} E_2 \to E_2-3E_1 \\ E_3 \to E_3-5E_1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} x+2y-2z=2 \\ -9y+7z=-20 \\ -11y+8z=-25 \end{cases} \Rightarrow_{E_3 \to 9E_3-11E_2} \Rightarrow \begin{cases} x+2y-2z=2 \\ -9y+7z=-20 \\ -5z=-5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=3 \\ z=1 \end{cases}$

Sistema compatible determinado.

b) $\begin{cases} 2x+4y-z=0 \\ 3x-3y-2z=-1 \\ 3x-3y+2z=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} E_2 \to 2E_2-3E_1 \\ E_3 \to 2E_3-3E_1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x+4y-z=0 \\ -18y-z=-2 \\ -18y+7z=10 \end{cases} \Rightarrow_{E_3 \to E_3-E_2} \Rightarrow \begin{cases} 2x+4y-z=0 \\ -18y-z=-2 \\ 8z=12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{25}{36} \\ y=\dfrac{1}{36} \\ z=\dfrac{3}{2} \end{cases}$

Sistema compatible determinado.

c) $\begin{cases} 2x+y-z=11 \\ 2x-2y-z=8 \\ x+y-z=7 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} E_2 \to E_2-E_1 \\ E_3 \to 2E_3-E_1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x+y-z=11 \\ -3y=-3 \\ y-z=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=1 \\ z=-2 \end{cases}$

Sistema compatible determinado.

d) $\begin{cases} 4x+y-5z=5 \\ 5x-y-z=13 \\ 4x-2y-3z=14 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} E_2 \to 4E_2-5E_1 \\ E_3 \to E_3-E_1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} 4x+y-5z=5 \\ -9y+21z=27 \\ -3y+2z=9 \end{cases} \Rightarrow_{E_3 \to 3E_3-E_2} \Rightarrow \begin{cases} 4x+y-5z=5 \\ -9y+21z=27 \\ -15z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=-3 \\ z=0 \end{cases}$

Sistema compatible determinado.

60 a 62. Ejercicios resueltos.

63. Resuelve los siguientes sistemas.

a) $\begin{cases} 2x+y=8 \\ 2x+3y^2=22 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 2x+5y=-8 \\ xy-3x=-5 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} x+y=0 \\ xy=1 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} 2x-y=3 \\ x^2-y^2=3 \end{cases}$

Despejaremos en una de las ecuaciones y sustituiremos en la otra:

a) $y=8-2x \Rightarrow 2x+3(8-2x)^2=22 \Rightarrow 2x+192+12x^2-96x=22 \Rightarrow 6x^2-47x+85=0 \Rightarrow \begin{cases} x=5, \quad y=-2 \\ x=\dfrac{17}{6}, \quad y=\dfrac{7}{3} \end{cases}$

b) $y=\dfrac{-8-2x}{5} \Rightarrow x\cdot\left(\dfrac{-8-2x}{5}\right)-3x=-5 \Rightarrow -8x-2x^2-15x=-25 \Rightarrow 2x^2+23x-25=0 \Rightarrow \begin{cases} x=1, \quad y=-2 \\ x=-\dfrac{25}{2}, \quad y=\dfrac{17}{5} \end{cases}$

c) $y=-x \Rightarrow -x^2=1 \Rightarrow x^2=-1 \Rightarrow$ No tiene soluciones reales.

d) $y=2x-3 \Rightarrow x^2-(2x-3)^2=3 \Rightarrow x^2-4x^2-9+12x=3 \Rightarrow 3x^2-12x+12=0 \Rightarrow x^2-4x+4=0 \Rightarrow x=2, \ y=1$

64. Halla la solución de los siguientes sistemas.

a) $\begin{cases} x+y=11 \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{6}{y+1}=1 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} xy=-3 \\ x^2+2y^2=19 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} 2x^2+3y^2=32 \\ -3x^2+4y^2=-48 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} x^2-2xy=16-y^2 \\ x^2-y^2=72 \end{cases}$

a) $x=11-y \Rightarrow \dfrac{1}{11-y}+\dfrac{6}{y+1}=1 \Rightarrow y+1+66-6y=11y+11-y^2-y \Rightarrow y^2-15y+56=0 \Rightarrow \begin{cases} y=8,\ x=3 \\ y=7,\ x=4 \end{cases}$

b) $y=-\dfrac{3}{x} \Rightarrow x^2+\dfrac{18}{x^2}=19 \Rightarrow x^4-19x^2+18=0 \Rightarrow \left.\begin{matrix} z=x^2 \\ z^2=x^4 \end{matrix}\right\} \Rightarrow z^2-19z+18=0 \Rightarrow \begin{cases} z=18 \Rightarrow \begin{cases} x=3\sqrt{2},\ y=-\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ x=-3\sqrt{2},\ y=\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \\ z=1 \Rightarrow \begin{cases} x=1,\ y=-3 \\ x=-1,\ y=3 \end{cases} \end{cases}$

c) Multiplicando la primera ecuación por 3, la segunda por 2 y sumando obtenemos:

$17y^2=0 \Rightarrow y=0 \Rightarrow \begin{cases} x=4,\ y=0 \\ x=-4,\ y=0 \end{cases}$

d) $x^2-2xy=16-y^2 \Rightarrow x^2-2xy+y^2=16 \Rightarrow (x-y)^2=16 \Rightarrow x-y=\pm 4$

Distinguimos, por tanto, dos casos:

Caso 1: $x-y=4 \Rightarrow x=y+4 \Rightarrow (y+4)^2-y^2=72 \Rightarrow y^2+16+8y-y^2=72 \Rightarrow 8y=56 \Rightarrow y=7,\ x=11$

Caso 2: $x-y=-4 \Rightarrow x=y-4 \Rightarrow (y-4)^2-y^2=72 \Rightarrow y^2+16-8y-y^2=72 \Rightarrow -8y=56 \Rightarrow y=-7,\ x=-11$

65 a 67. Ejercicios resueltos.

68. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones exponenciales.

a) $\begin{cases} 2^x+5^y=9 \\ 2^{x+2}+5^{y+1}=41 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 2^x-2^y=1016 \\ 2^{x-y}=128 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} 3^x+7^y=16 \\ 3^{x-1}-7^{y+2}=-340 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} \dfrac{1}{2^x}+\dfrac{3}{2^y}=\dfrac{x+y}{8} \\ x+y=5 \end{cases}$

a) $u=2^x$, $v=5^y \Rightarrow \begin{cases} 2^x+5^y=9 \\ 2^{x+2}+5^{y+1}=41 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2^x+5^y=9 \\ 4\cdot 2^x+5\cdot 5^y=41 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u+v=9 \\ 4u+5v=41 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u=4 \Rightarrow 2^x=4 \Rightarrow x=2 \\ v=5 \Rightarrow 5^y=5 \Rightarrow y=1 \end{cases}$

b) $2^{x-y}=128 \Rightarrow 2^{x-y}=2^7 \Rightarrow x-y=7 \Rightarrow x=y+7$

$2^x-2^y=1016 \Rightarrow 2^{7+y}-2^y=1016 \Rightarrow 128\cdot 2^y-2^y=1016 \Rightarrow 127\cdot 2^y=1016 \Rightarrow 2^y=8 \Rightarrow y=3,\ x=10$

c) Hacemos el cambio: $u=3^x$, $v=7^y$

$\begin{cases} 3^x+7^y=16 \\ 3^{x-1}-7^{y+2}=-340 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3^x+7^y=16 \\ \dfrac{3^x}{3}-49\cdot 7^y=-340 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u+v=16 \\ u-147v=-1020 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u=9 \Rightarrow 3^x=9 \Rightarrow x=2 \\ v=7 \Rightarrow 7^y=7 \Rightarrow y=1 \end{cases}$

d) $x+y=5 \Rightarrow y=5-x$

$\dfrac{1}{2^x}+\dfrac{3}{2^y}=\dfrac{x+y}{8} \Rightarrow \dfrac{1}{2^x}+\dfrac{3}{2^{5-x}}=\dfrac{5}{8} \Rightarrow \dfrac{1}{2^x}+\dfrac{3}{32}2^x=\dfrac{5}{8} \Rightarrow 32+3\cdot\left(2^x\right)^2=20\cdot 2^x$

Aplicando el cambio de variable $z=2^x$ obtenemos:

$3z^2-20z+32=0 \Rightarrow \begin{cases} z=4 \Rightarrow 2^x=4 \Rightarrow x=2,\ y=3 \\ z=\dfrac{8}{3} \Rightarrow 2^x=\dfrac{8}{3} \Rightarrow x=\log_2\dfrac{8}{3}=3-\log_2 3,\ y=2+\log_2 3 \end{cases}$

69. Halla las soluciones de los siguientes sistemas de ecuaciones logarítmicas.

a) $\begin{cases}\log x + 3\log y = 5\\ \log x - \log y = 3\end{cases}$ **b)** $\begin{cases}\log_3 x = 7 - \log_3 y\\ x - 2y = 27\end{cases}$ **c)** $\begin{cases}3x + 2y = 64\\ \log x - \log y = 1\end{cases}$ **d)** $\begin{cases}\log x^2 - 2\log y = 6\\ 2\log x + \log y^2 = 2\end{cases}$

a) Restando las ecuaciones se obtiene: $4\log y = 2 \Rightarrow \log y = \frac{1}{2} \Rightarrow y = 10^{\frac{1}{2}} = \sqrt{10}$

Sustituyendo en la segunda ecuación: $\log x - \frac{1}{2} = 3 \Rightarrow \log x = \frac{7}{2} \Rightarrow x = 10^{\frac{7}{2}} = 10^3\sqrt{10} = 1000\sqrt{10}$

b) $\begin{cases}\log_3 x = 7 - \log_3 y\\ x - 2y = 27\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\log_3(xy) = 7\\ x = 2y + 27\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x \cdot y = 2187\\ x = 2y + 27\end{cases} \Rightarrow 2y^2 + 27y - 2187 = 0 \Rightarrow\Rightarrow \begin{cases}y = 27,\ x = 81\\ y = -40{,}5 \text{ No válida}\end{cases}$

c) $\log x - \log y = 1 \Rightarrow \log(\frac{x}{y}) = 1 \Rightarrow \frac{x}{y} = 10 \Rightarrow x = 10y$

Sustituyendo en la segunda ecuación: $30y + 2y = 64 \Rightarrow 32y = 64 \Rightarrow y = 2,\ x = 20$

d) $\begin{cases}\log x^2 - 2\log y = 6\\ 2\log x + \log y^2 = 2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\frac{x^2}{y^2} = 10^6\\ x^2y^2 = 10^2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x^2 = 10^6y^2\\ x^2y^2 = 10^2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x^2 = 10^6y^2\\ 10^6y^4 = 10^2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x^2 = 10^6y^2\\ y = \frac{1}{10}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x = 100\\ y = \frac{1}{10}\end{cases}$

70. Comprueba si los números reales indicados pertenecen a la solución de las inecuaciones correspondientes.

a) $x = -2$ de la inecuación $x^3 + x^2 + x \le 6$

b) $x = \frac{1}{e}$ de la inecuación $x + \ln x \ge 0$

c) $x = -0{,}5$ de la inecuación $2^x + x - 2 < 3^x$

a) Sí forma parte de la solución de la inecuación, ya que $(-2)^3 + (-2)^2 - 2 = -8 + 4 - 2 = -6 \le 6$.

b) No forma parte de la solución de la inecuación, ya que $\frac{1}{e} + \ln\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e} - 1 = \frac{1-e}{e} < 0$.

c) Sí forma parte de la solución de la inecuación, ya que $2^{-0{,}5} - 0{,}5 - 2 - 3^{-0{,}5} = \frac{1}{\sqrt{2}} - 2{,}5 - \frac{1}{\sqrt{3}} < 0$

71. Resuelve las siguientes inecuaciones.

a) $\frac{x-3}{2} - \frac{x-2}{8} \le \frac{x}{2}$

b) $2x - 3 - \frac{x}{2} > x + \frac{3x+1}{6}$

c) $x + 2(x+1) + 3(x+2) < \frac{x+38}{2}$

d) $\frac{x^2-1}{2} - \frac{3x-2}{3} \le \frac{(x+1)^2}{6}$

a) $\frac{x-3}{2} - \frac{x-2}{8} \le \frac{x}{2} \Rightarrow 4x - 12 - x + 2 \le 4x \Rightarrow -x \le 10 \Rightarrow x \ge -10 \Rightarrow$ Solución: $x \in [-10, +\infty)$

b) $2x - 3 - \frac{x}{2} > x + \frac{3x+1}{6} \Rightarrow 12x - 18 - 3x > 6x + 3x + 1 \Rightarrow 0 > 19 \Rightarrow$ La inecuación no tiene solución.

c) $x + 2(x+1) + 3(x+2) < \frac{x+38}{2} \Rightarrow 2x + 4x + 4 + 6x + 12 < x + 38 \Rightarrow 11x < 22 \Rightarrow x < 2 \Rightarrow$ Solución: $x \in (-\infty, 2)$

d) $\frac{x^2-1}{2} - \frac{3x-2}{3} \le \frac{(x+1)^2}{6} \Rightarrow 3x^2 - 3 - 6x + 4 \le x^2 + 2x + 1 \Rightarrow 2x^2 - 8x \le 0 \Rightarrow 2x(x-4) \le 0$

Solución: $x \in [0, 4]$

	$-\infty$ a 0	0 a 4	4 a $+\infty$
x	–	+	+
$x - 4$	–	–	+
Polinomio	+	–	+

72. Halla la solución de las siguientes inecuaciones polinómicas.

a) $-2x^3+3x>0$ **c)** $x^3-4x>0$ **e)** $3x(2x-1)+x^2\geq 5x-1$ **g)** $x^4-1>0$

b) $3x^2+x-24\geq 0$ **d)** $x^3+x^2-x-1\leq 0$ **f)** $-x^3-2x^2-x\leq 0$ **h)** $(x-1)(x+4)<-6$

a) $-2x^3+3x>0 \Rightarrow x(-2x^2+3)>0 \Rightarrow$
$\Rightarrow x\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}x\right)\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}x\right)>0$

$-\infty \quad -\sqrt{\frac{3}{2}} \quad 0 \quad \sqrt{\frac{3}{2}} \quad +\infty$

$x+2$	–	–	+	+
x	–	+	+	+
$x-2$	+	+	+	–
Polinomio	+	–	+	–

Solución: $x\in\left(-\infty, -\sqrt{\frac{3}{2}}\right)\cup\left(0, \sqrt{\frac{3}{2}}\right)$

b) $3x^2+x-24\geq 0 \Rightarrow (x+3)(3x-8)\geq 0$

$-\infty \quad -3 \quad \frac{8}{3} \quad +\infty$

$x+3$	–	+	+
$3x-8$	–	–	+
Polinomio	+	–	+

Solución: $x\in(-\infty, -3]\cup\left[\frac{8}{3}, +\infty\right)$

c) $x^3-4x>0 \Rightarrow x(x-2)(x+2)>0$

$-\infty \quad -2 \quad 0 \quad 2 \quad +\infty$

$x+2$	–	+	+	+
x	–	–	+	+
$x-2$	–	–	–	+
Polinomio	–	+	–	+

Solución: $x\in(-2, 0)\cup(2, +\infty)$

d) $x^3+x^2-x-1\leq 0 \Rightarrow (x-1)(x+1)^2\leq 0$

$-\infty \quad -1 \quad 1 \quad +\infty$

$(x+1)^2$	+	+	+
$x-1$	–	–	+
Polinomio	–	–	+

Solución: $x\in(-\infty, 1]$

e) $3x(2x-1)+x^2\geq 5x-1 \Rightarrow (x-1)(7x-1)\geq 0$

$-\infty \quad \frac{1}{7} \quad 1 \quad +\infty$

$7x-1$	–	+	+
$x-1$	–	–	+
Polinomio	+	–	+

Solución: $x\in\left(-\infty, \frac{1}{7}\right]\cup[1, +\infty)$

f) $-x^3-2x^2-x\leq 0 \Rightarrow -x(x+1)^2\leq 0$

$-\infty \quad -1 \quad 0 \quad +\infty$

$(x+1)^2$	+	+	+
$-x$	+	+	–
Polinomio	+	+	–

Solución: $x\in\{-1\}\cup[0, +\infty)$

g) $x^4-1>0 \Rightarrow (x-1)(x+1)(x^2+1)>0$

$-\infty \quad -1 \quad 1 \quad +\infty$

$x+1$	–	+	+
$x-1$	–	–	+
x^2+1	+	+	+
Polinomio	+	–	+

Solución: $x\in(-\infty, -1)\cup(1, +\infty)$

h) $(x-1)(x+4)<-6 \Rightarrow (x+1)(x+2)<0$

$-\infty \quad -2 \quad -1 \quad +\infty$

$x+2$	–	+	+
$x+1$	–	–	+
Polinomio	+	–	+

Solución: $x\in(-2, -1)$

73. Resuelve las inecuaciones racionales siguientes.

a) $\frac{5x-2}{2x+1} \geq 0$ **c)** $\frac{4x-5}{4x^2-x-5} < 0$ **e)** $\frac{x^2+4x-5}{x^3-x} \geq 0$

b) $\frac{x^2-x-2}{x^2+x-2} \geq 0$ **d)** $\frac{x^3}{x^2-9} \geq 0$ **f)** $\frac{2x+3}{x^3+1} \geq 0$

a) $\frac{5x-2}{2x+1} \geq 0$

	$-\infty$ a $-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$ a $\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$ a $+\infty$
$2x+1$	–	+	+
$5x-2$	–	–	+
Fracción	+	–	+

Solución: $x \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup \left[\frac{2}{5}, +\infty\right)$

b) $\frac{x^2-x-2}{x^2+x-2} \geq 0 \Rightarrow \frac{(x+1)(x-2)}{(x-1)(x+2)} \geq 0$

	$-\infty$ a -2	-2 a -1	-1 a 1	1 a 2	2 a $+\infty$
$x+2$	–	+	+	+	+
$x+1$	–	–	+	+	+
$x-1$	–	–	–	+	+
$x-2$	–	–	–	–	+
Fracción	+	–	+	–	+

Solución: $x \in (-\infty, -2) \cup [-1, 1) \cup [2, +\infty)$

c) $\frac{4x-5}{4x^2-x-5} < 0 \Rightarrow \frac{4x-5}{(4x-5)(x+1)} < 0 \Rightarrow \frac{1}{x+1} < 0$

Observa que $4x-5$ no se puede anular, por lo que se puede simplificar y la solución es $x \in (-\infty, -1)$.

d) $\frac{x^3}{x^2-9} \geq 0 \Rightarrow \frac{x^3}{(x-3)(x+3)} \geq 0$

	$-\infty$ a -3	-3 a 0	0 a 3	3 a $+\infty$
$x+3$	–	+	+	+
x^3	–	–	+	+
$x-3$	–	–	–	+
Fracción	–	+	–	+

Solución: $x \in (-3, 0] \cup (3, +\infty)$

e) $\frac{x^2+4x-5}{x^3-x} \geq 0 \Rightarrow \frac{(x+5)(x-1)}{x(x+1)(x-1)} \geq 0 \Rightarrow \frac{x+5}{x(x+1)} \geq 0$

	$-\infty$ a -5	-5 a -1	-1 a 0	0 a $+\infty$
$x+5$	–	+	+	+
$x+1$	–	–	+	+
x	–	–	–	+
Fracción	–	+	–	+

Solución: $x \in [-5, -1) \cup (0, +\infty) - \{1\}$

Hay que excluir el valor $x = 1$ de la solución porque es una raíz del denominador y la expresión no está definida para él.

f) $\frac{2x+3}{x^3+1} \geq 0 \Rightarrow \frac{2x+3}{(x+1)(x^2-x+1)} \geq 0$

	$-\infty$ a $-\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{2}$ a -1	-1 a $+\infty$
$2x+3$	–	+	+
$x+1$	–	–	+
x^2-x+1	+	+	+
Fracción	+	–	+

Solución: $x \in \left(-\infty, -\frac{3}{2}\right] \cup (-1, +\infty)$

74. Ejercicio interactivo.

75 y 76. Ejercicios resueltos.

77. Resuelve los sistemas de inecuaciones:

a) $\begin{cases} 2x+1 < x+2 \\ 3x-1 \le 4x \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 3x-4 > x \\ x > 2x-1 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} x^2+2x-3 \ge 0 \\ 2(x-3) > -6 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} \dfrac{x-1}{x+2} > 0 \\ x^2 \ge 1 \end{cases}$

a) $\begin{cases} 2x+1 < x+2 \\ 3x-1 \le 4x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 1 \\ x \ge -1 \end{cases} \Rightarrow$ Solución: $x \in [-1, 1)$

b) $\begin{cases} 3x-4 > x \\ x > 2x-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x > 4 \\ x < 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 2 \\ x < 1 \end{cases} \Rightarrow$ Sin solución

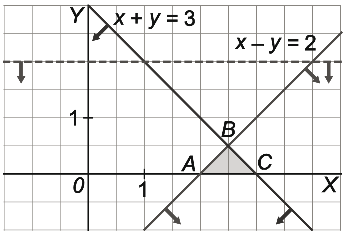
c) $\begin{cases} x^2+2x-3 \ge 0 \\ 2(x-3) > -6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x-1)\cdot(x+3) \ge 0 \\ x > 0 \end{cases} \Rightarrow$ Solución: $x \in [1, +\infty)$

d) $\begin{cases} \dfrac{x-1}{x+2} > 0 \\ x^2 \ge 1 \end{cases} \Rightarrow$ Solución: $x \in (-\infty, -2) \cup (1, +\infty)$

78. Resuelve los sistemas de inecuaciones:

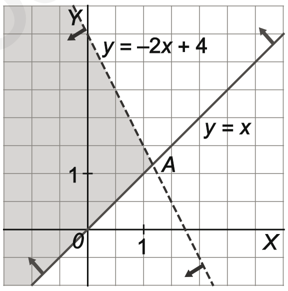
a) $\begin{cases} 0 \le y < 2 \\ x+y \le 3 \\ x-y \ge 2 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} y < -2x+4 \\ y \ge x \end{cases}$

a)



Vértices $A(2, 0)$ $B(2{,}5\ ;\ 0{,}5)$ $C(3, 0)$

b)



Vértices: $A\left(\dfrac{4}{3}, \dfrac{4}{3}\right)$

79 a 91. Ejercicios resueltos.

EJERCICIOS

Polinomios

92. Simplifica las siguientes expresiones polinómicas.

a) $2(x-2)^2-3(3x+2)-2(3x-2)(3x+2)$

b) $(3x+2)^2+2(2x-3)^2-(2x-5)(x-5)$

c) $(2x^2-2x-13)(3x^2-2x)-3x$

d) $(2x^2-3x+2)(-3x^2+x+1)+(6x-10)x^3$

e) $\left(\frac{2}{3}x-\frac{3}{5}\right)\left(\frac{3}{2}x^2+\frac{2}{5}\right)+\frac{6}{25}$

f) $\left(x^2+4\right)\left(x^2-4\right)(x-2)+2x(x^3-10)x$

g) $(x^3+2x^2+3x+4)(5x-2)$

a) $2(x-2)^2-3(3x+2)-2(3x-2)(3x+2)=2x^2-8x+8-9x-6-18x^2+8=-16x^2-17x+10$

b) $(3x+2)^2+2(2x-3)^2-(2x-5)(x-5)=9x^2+12x+4+8x^2-24x+18-2x^2+10x+5x-25=15x^2+3x-3$

c) $(2x^2-2x-13)(3x^2-2x)-3x=6x^4-4x^3-6x^3+4x^2-39x^2+26x-3x=6x^4-10x^3-35x^2+23x$

d) $(2x^2-3x+2)(-3x^2+x+1)+(6x-10)x^3=-6x^4+2x^3+2x^2+9x^3-3x^2-3x-6x^2+2x+2+6x^4-10x^3=$

$=x^3-7x^2-x+2$

e) $\left(\frac{2}{3}x-\frac{3}{5}\right)\left(\frac{3}{2}x^2+\frac{2}{5}\right)+\frac{6}{25}=x^3+\frac{4}{15}x-\frac{9}{10}x^2-\frac{6}{25}+\frac{6}{25}=x^3-\frac{9}{10}x^2+\frac{4}{15}x$

f) $\left(x^2+4\right)\left(x^2-4\right)(x-2)+2x(x^3-10)x=(x^4-16)(x-2)+2x^5-20x^2=x^5-2x^4-16x+32+2x^5-20x^2=$

$=3x^5-2x^4-20x^2-16x+32$

g) $(x^3+2x^2+3x+4)(5x-2)=5x^4-2x^3+10x^3-4x^2+15x^2-6x+20x-8=5x^4+8x^3+11x^2+14x-8$

93. Demuestra la igualdad algebraica:

$$(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2yz$$

$(x+y+x)^2=(x+y+z)(x+y+z)=x^2+xy+xz+yx+y^2+yz+zx+zy+z^2=x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2yz$

94. Calcula el cociente y el resto de las siguientes divisiones de polinomios.

a) $\left(6x^4+7x^3-5x^2-6x-6\right):\left(3x^2+2x+1\right)$

b) $\left(6x^4+7x^3-x^2+11x-8\right):\left(3x^2+x-2\right)$

c) $\left(6x^5-10x^4-15x^3-7x^2+3\right):\left(4x^2-4x-4\right)$

a) Cociente: $2x^2+x-3$

Resto: $-x-3$

b) Cociente: $2x^2+\frac{5}{3}x+\frac{4}{9}$

Resto: $\frac{125x}{9}-\frac{64}{9}$

c) Cociente: $\frac{3}{2}x^3-x^2-\frac{13}{4}x-6$

Resto: $-37x-21$

95. Aplica la regla de Ruffini para resolver las siguientes divisiones.

a) $\left(-3x^3+2x^2+x-3\right):\left(x+\frac{1}{2}\right)$

b) $\left(2x^4+2x^3+2x^2-2\right):(-x+3)$

c) $\left(x^5+2x^3-2x-1\right):(2x+4)$

d) $\left(x^5+3x^4-3x^3-x^2-4x+2\right):(2x+4)$

e) $\left(-2x^4-x^3-2x^2+x+1\right):(2x-3)$

a) Cociente: $-3x^2+\frac{7}{2}x-\frac{3}{4}$

Resto: $-\frac{21}{8}$

b) Cociente: $-2x^3-8x^2-26x-78$

Resto: 232

c) Cociente: $\frac{1}{2}x^4-x^3+3x^2-6x+11$

Resto: -45

d) Cociente: $\frac{1}{2}x^4+\frac{1}{2}x^3-\frac{5}{2}x^2+\frac{9}{2}x-11$

Resto: 46

e) Cociente: $-x^3-2x^2-4x-\frac{11}{2}$

Resto: $-\frac{31}{2}$

96. Determina, si existen, las raíces enteras de cada uno de los siguientes polinomios y factorízalos.

a) $P(x)=x^3-2x^2-5x+6$

b) $P(x)=x^3+x^2-5x+3$

c) $P(x)=2x^4-x^3-5x^2+x+3$

d) $P(x)=4x^3-4x^2-11x+6$

e) $P(x)=x^4-4x^2$

f) $P(x)=6x^5+11x^4+3x^3-3x^2-x$

g) $P(x)=x^6-4x^4-x^2+4$

h) $P(x)=\frac{x^4}{4}+\frac{3}{4}x^2+\frac{9}{16}$

a) $P(x)=x^3-2x^2-5x+6=(x-1)(x+2)(x-3)$. Las raíces enteras son $x=1$, $x=-2$ y $x=3$.

b) $P(x)=x^3+x^2-5x+3=(x-1)^2(x+3)$. Las raíces enteras son $x=1$ y $x=-3$.

c) $P(x)=2x^4-x^3-5x^2+x+3=2(x-1)(x+1)^2\left(x-\frac{3}{2}\right)$. Las raíces enteras son $x=1$ y $x=-1$.

d) $P(x)=4x^3-4x^2-11x+6=4(x-2)\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{3}{2}\right)$. La única raíz entera es $x=2$.

e) $P(x)=x^4-4x^2=x^2(x+2)(x-2)$. Las raíces enteras son $x=0$, $x=-2$ y $x=2$.

f) $P(x)=6x^5+11x^4+3x^3-3x^2-x=6x(x+1)^2\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{3}\right)$. Las raíces enteras son $x=0$ y $x=-1$.

g) $P(x)=x^6-4x^4-x^2+4=(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)(x^2+1)$. Las raíces enteras son $x=1$, $x=-1$, $x=2$ y $x=-2$.

h) $P(x)=\frac{x^4}{4}+\frac{3}{4}x^2+\frac{9}{16}=\left(\frac{x^2}{2}\right)^2+2\cdot\frac{x^2}{2}\cdot\frac{3}{4}+\left(\frac{3}{4}\right)^2=\left(\frac{x^2}{2}+\frac{3}{4}\right)^2$. No tiene raíces enteras.

97. En cada caso, calcula el m.c.d. y el m.c.m de los polinomios dados.

a) $P(x) = x^2 + x - 2$ y $Q(x) = x^2 + 2x - 3$

b) $P(x) = 2x^2 - 2$ y $Q(x) = 4x - 4$

c) $P(x) = x - 1$, $Q(x) = 2x + 2$ y $R(x) = 3x^2 - 3$

d) $P(x) = x^2(x-2)$, $Q(x) = x \cdot \left(x^2 - 4\right)$ y $R(x) = x^3 - 2x^2$

a) $P(x) = (x-1)(x+2) \qquad Q(x) = (x-1)(x+3)$

m.c.d.$\left[P(x), Q(x)\right] = x - 1 \qquad$ m.c.m.$\left[P(x), Q(x)\right] = (x-1)(x+2)(x+3) = x^3 + 4x^2 + x - 6$

b) $P(x) = 2(x-1)(x+1) \qquad Q(x) = 4(x-1)$

m.c.d.$\left[P(x), Q(x)\right] = 2(x-1) = 2x - 2 \qquad$ m.c.m.$\left[P(x), Q(x)\right] = 4(x-1)(x+1) = 4x^2 - 4$

c) $P(x) = x - 1 \qquad Q(x) = 2(x+1) \qquad R(x) = 3(x-1)(x+1)$

m.c.d.$\left[P(x), Q(x), R(x)\right] = 1 \qquad$ m.c.m.$\left[P(x), Q(x), R(x)\right] = 6(x-1)(x+1) = 6x^2 - 6$

d) $P(x) = x^2(x-2) \qquad Q(x) = x(x-2)(x+2) \qquad R(x) = x^2(x-2)$

m.c.d.$\left[P(x), Q(x), R(x)\right] = x(x-2) = x^2 - 2x \qquad$ m.c.m.$\left[P(x), Q(x), R(x)\right] = x^2(x-2)(x+2) = x^4 - 4x^2$

98. Calcula el valor de *k* para que $x^3 - (3k+2)x^2 - 3$ entre $x + 3$:

a) Sea exacta.

b) Tenga resto 15.

a) Por el teorema del resto se tiene: $0 = (-3)^3 - (3k+2)(-3)^2 - 3 \Rightarrow 0 = -27 - 27k - 18 - 3 \Rightarrow k = -\dfrac{16}{9}$

b) Por el teorema del resto se tiene: $15 = (-3)^3 - (3k+2)(-3)^2 - 3 \Rightarrow 15 = -27 - 27k - 18 - 3 \Rightarrow k = -\dfrac{7}{3}$

Números combinatorios. Binomio de Newton

99. Calcula las siguientes operaciones.

a) $\dbinom{252}{250}$

b) $\dbinom{25}{3} + \dbinom{25}{4}$

c) $\dbinom{4}{0} + \dbinom{4}{1} + \dbinom{4}{2} + \dbinom{4}{3}$

d) $\dbinom{n+2}{2} + \dbinom{n+2}{n-1}$

a) $\dbinom{252}{250} = \dbinom{252}{2} = \dfrac{252 \cdot 251}{2 \cdot 1} = 31626$

b) $\dbinom{25}{3} + \dbinom{25}{4} = \dbinom{26}{4} = \dfrac{26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 14\,950$

c) $\dbinom{4}{0} + \dbinom{4}{1} + \dbinom{4}{2} + \dbinom{4}{3} = 1 + 4 + 6 + 4 = 15$

d) $\dbinom{n+2}{2} + \dbinom{n+2}{n-1} = \dbinom{n+2}{2} + \dbinom{n+2}{3} = \dbinom{n+3}{3} = \dfrac{(n+3)(n+2)(n+1)}{6} = \dfrac{n^3 + 6n^2 + 11n + 6}{6}$

100. Simplifica las siguientes expresiones y calcula el resultado.

a) $\dfrac{6!}{5!}+\dfrac{8!}{6!}$ **b)** $\dfrac{n!}{(n-1)!}+\dfrac{(n+2)!}{n!}$ **c)** $\dfrac{\binom{n+3}{n}+\binom{n+2}{n}}{\frac{n+6}{6}}$ **d)** $\dfrac{2^{n-3}(n+2)!}{2^{n-1}\binom{n+2}{2}}$

a) $\dfrac{6!}{5!}+\dfrac{8!}{6!}=6+8\cdot 7=6+56=62$

b) $\dfrac{n!}{(n-1)!}+\dfrac{(n+2)!}{n!}=n+(n+2)(n+1)=n+n^2+3n+2=n^2+4n+2$

c) $\dfrac{\binom{n+3}{n}+\binom{n+2}{n}}{\frac{n+6}{6}}=\dfrac{\binom{n+3}{3}+\binom{n+2}{2}}{\frac{n+6}{6}}=\dfrac{\frac{n^3+6n^2+11n+6}{6}+\frac{n^2+3n+2}{2}}{\frac{n+6}{6}}=\dfrac{n^3+6n^2+11n+6+3n^2+9n+6}{n+6}=$

$=\dfrac{n^3+9n^2+20n+12}{n+6}=\dfrac{(n+1)(n+2)(n+6)}{n+6}=(n+1)(n+2)=n^2+3n+2$

d) $\dfrac{2^{n-3}(n+2)!}{2^{n-1}\binom{n+2}{2}}=\dfrac{2^{n-3-n+1}(n+2)!}{\frac{(n+2)!}{2!n!}}=2^{-2}\cdot 2\cdot n!=\dfrac{n!}{2}$

101. Desarrolla los binomios siguientes.

a) $(2+x)^4$ **c)** $\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{2}{x^2}\right)^5$ **e)** $\left(1+2\sqrt{2}\right)^2$ **g)** $\left(\dfrac{2}{\sqrt{2}}+\sqrt{2}\right)^4$

b) $\left(2-\dfrac{x}{3}\right)^3$ **d)** $\left(2x^2-\dfrac{3}{x}\right)^6$ **f)** $\left(2-3\sqrt{3}\right)^3$ **h)** $\left(5\sqrt{2}-2\sqrt{3}\right)^3$

a) $(2+x)^4=\binom{4}{0}2^4+\binom{4}{1}2^3x+\binom{4}{2}2^2x^2+\binom{4}{3}2x^3+\binom{4}{4}x^4=16+32x+24x^2+8x^3+x^4$

b) $\left(2-\dfrac{x}{3}\right)^3=\binom{3}{0}2^3-\binom{3}{1}2^2\cdot\dfrac{x}{3}+\binom{3}{2}2\left(\dfrac{x}{3}\right)^2-\binom{3}{3}\left(\dfrac{x}{3}\right)^3=8-4x+\dfrac{2}{3}x^2-\dfrac{1}{27}x^3$

c) $\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{2}{x^2}\right)^5=\binom{5}{0}\left(\dfrac{x}{2}\right)^5+\binom{5}{1}\left(\dfrac{x}{2}\right)^4\cdot\dfrac{2}{x^2}+\binom{5}{2}\left(\dfrac{x}{2}\right)^3\left(\dfrac{2}{x^2}\right)^2+\binom{5}{3}\left(\dfrac{x}{2}\right)^2\left(\dfrac{2}{x^2}\right)^3+\binom{5}{4}\cdot\dfrac{x}{2}\left(\dfrac{2}{x^2}\right)^4+\binom{5}{5}\left(\dfrac{2}{x^2}\right)^5=$

$=\dfrac{x^5}{32}+5\cdot\dfrac{x^4}{16}\cdot\dfrac{2}{x^2}+10\cdot\dfrac{x^3}{8}\cdot\dfrac{4}{x^4}+10\cdot\dfrac{x^2}{4}\cdot\dfrac{8}{x^6}+5\cdot\dfrac{x}{2}\cdot\dfrac{16}{x^8}+\dfrac{32}{x^{10}}=\dfrac{x^5}{32}+\dfrac{5x^2}{8}+\dfrac{5}{x}+\dfrac{20}{x^4}+\dfrac{40}{x^7}+\dfrac{32}{x^{10}}$

d) $\left(2x^2-\dfrac{3}{x}\right)^6=\binom{6}{0}(2x^2)^6-\binom{6}{1}(2x^2)^5\cdot\dfrac{3}{x}+\binom{6}{2}(2x^2)^4\left(\dfrac{3}{x}\right)^2-\binom{6}{3}(2x^2)^3\left(\dfrac{3}{x}\right)^3+\binom{6}{4}(2x^2)^2\left(\dfrac{3}{x}\right)^4-\binom{6}{5}2x^2\left(\dfrac{3}{x}\right)^5+\binom{6}{6}\left(\dfrac{3}{x}\right)^6=$

$=64x^{12}-576x^9+2160x^6-4320x^3+4860-\dfrac{2916}{x^3}+\dfrac{729}{x^6}$

e) $\left(1+2\sqrt{2}\right)^2=1+4\sqrt{2}+(2\sqrt{2})^2=9+4\sqrt{2}$

f) $\left(2-3\sqrt{3}\right)^3=8-3\cdot 2^2\cdot 3\sqrt{3}+3\cdot 2\cdot(3\sqrt{3})^2-(3\sqrt{3})^3=8-36\sqrt{3}+162-81\sqrt{3}=170-117\sqrt{3}$

g) $\left(\dfrac{2}{\sqrt{2}}+\sqrt{2}\right)^4=\left(\dfrac{2+\sqrt{2}\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right)^4=\left(\dfrac{4}{\sqrt{2}}\right)^4=\dfrac{256}{4}=64$

h) $\left(5\sqrt{2}-2\sqrt{3}\right)^3=\left(5\sqrt{2}\right)^3-3\left(5\sqrt{2}\right)^2 2\sqrt{3}+35\sqrt{2}\left(2\sqrt{3}\right)^2-\left(2\sqrt{3}\right)^3=250\sqrt{2}-300\sqrt{3}+180\sqrt{2}-24\sqrt{3}=$

$=430\sqrt{2}-324\sqrt{3}$

Fracciones algebraicas

102. Simplifica las siguientes fracciones algebraicas.

a) $\dfrac{x^3-5x^2+8x-4}{x^3-x^2-8x+12}$ **c)** $\dfrac{x^4-1}{x^4-2x^3+2x^2-2x+1}$ **e)** $\dfrac{xy-3y+x-3}{xy-3y}$

b) $\dfrac{-2x^4+5x^3-5x+2}{2x^4+7x^3+3x^2-8x-4}$ **d)** $\dfrac{x^3-y^3}{\left(x^2-y^2\right)\left(x^2+xy+y^2\right)}$ **f)** $\dfrac{x^2y+y^2x+x^2-y^2}{x^2y-xy^2+x^2y^2}$

a) $\dfrac{x^3-5x^2+8x-4}{x^3-x^2-8x+12}=\dfrac{(x-1)(x-2)^2}{(x+3)(x-2)^2}=\dfrac{x-1}{x+3}$

b) $\dfrac{-2x^4+5x^3-5x+2}{2x^4+7x^3+3x^2-8x-4}=\dfrac{-(x+1)(x-1)(x-2)(2x-1)}{(x-1)(x+2)^2(2x+1)}=-\dfrac{(x+1)(x-2)(2x-1)}{(x+2)^2(2x+1)}=\dfrac{-2x^3+3x^2+3x-2}{2x^3+9x^2+12x+4}$

c) $\dfrac{x^4-1}{x^4-2x^3+2x^2-2x+1}=\dfrac{(x-1)(x+1)\left(x^2+1\right)}{(x-1)^2\left(x^2+1\right)}=\dfrac{x+1}{x-1}$

d) $\dfrac{x^3-y^3}{\left(x^2-y^2\right)\left(x^2+xy+y^2\right)}=\dfrac{(x-y)\left(x^2+xy+y^2\right)}{(x-y)(x+y)\left(x^2+xy+y^2\right)}=\dfrac{1}{x+y}$

e) $\dfrac{xy-3y+x-3}{xy-3y}=\dfrac{x(y+1)-3(y+1)}{y(x-3)}=\dfrac{(y+1)(x-3)}{y(x-3)}=\dfrac{y+1}{y}$

f) $\dfrac{x^2y+y^2x+x^2-y^2}{x^2y-xy^2+x^2y^2}=\dfrac{xy(x+y)+(x-y)(x+y)}{xy(x-y+xy)}=\dfrac{(xy+x-y)(x+y)}{xy(x-y+xy)}=\dfrac{x+y}{xy}=\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{x}$

103. Realiza las siguientes sumas y restas de fracciones algebraicas y simplifica los resultados al máximo.

a) $\dfrac{x^2+1}{x^2+2x+1}+\dfrac{x^2}{x+1}$ **c)** $\dfrac{2x^2-x}{x+3}+\dfrac{2x}{x-3}+\dfrac{12x}{9-x^2}$

b) $\dfrac{x}{x-5}-\dfrac{2x-1}{x+5}-\dfrac{50}{x^2-25}$ **d)** $\dfrac{1}{x-3}+\dfrac{3x-10}{x^2-6x+8}-\dfrac{2x-7}{x-4}$

a) $\dfrac{x^2+1}{x^2+2x+1}+\dfrac{x^2}{x+1}=\dfrac{x^2+1}{(x+1)^2}+\dfrac{x^2}{x+1}=\dfrac{x^2+1+x^3+x^2}{(x+1)^2}=\dfrac{x^3+2x^2+1}{(x+1)^2}$

b) $\dfrac{x}{x-5}-\dfrac{2x-1}{x+5}-\dfrac{50}{x^2-25}=\dfrac{x}{x-5}-\dfrac{2x-1}{x+5}-\dfrac{50}{(x-5)(x+5)}=\dfrac{x(x+5)-(2x-1)(x-5)-50}{(x-5)(x+5)}=\dfrac{-x^2+16x-55}{(x-5)(x+5)}=$

$=\dfrac{-(x-11)(x-5)}{(x-5)(x+5)}=\dfrac{11-x}{x+5}$

c) $\dfrac{2x^2-x}{x+3}+\dfrac{2x}{x-3}+\dfrac{12x}{9-x^2}=\dfrac{2x^2-x}{x+3}+\dfrac{2x}{x-3}-\dfrac{12x}{(x+3)(x-3)}=\dfrac{(2x^2-x)(x-3)+2x(x+3)-12x}{(x+3)(x-3)}=\dfrac{2x^3-5x^2-3x}{(x+3)(x-3)}=$

$=\dfrac{x(x-3)(2x+1)}{(x+3)(x-3)}=\dfrac{2x^2+x}{x+3}$

d) $\dfrac{1}{x-3}+\dfrac{3x-10}{x^2-6x+8}-\dfrac{2x-7}{x-4}=\dfrac{(x-4)(x-2)+(3x-10)(x-3)-(2x-7)(x-3)(x-2)}{(x-3)(x-4)(x-2)}=\dfrac{-2x^3+21x^2-72x+80}{(x-3)(x-4)(x-2)}=$

$=\dfrac{(x-4)^2(-2x+5)}{(x-3)(x-4)(x-2)}=\dfrac{-2x^2+13x-20}{x^2-5x+6}$

104. Realiza los siguientes productos y cocientes de fracciones algebraicas y simplifica al máximo los resultados.

a) $\frac{x^2-1}{x+3}\cdot\frac{x^2-4}{x-1}\cdot\frac{x^2-9}{x+2}$

b) $\frac{3x^2y}{x-y}\cdot\frac{x^2-y^2}{6xy^2(x+y)}$

c) $\frac{x^3-x}{2x-4}:\frac{4x+4}{3x-6}$

d) $\frac{1}{x-y}:\frac{1}{x^2+y^2-2xy}$

a) $\frac{x^2-1}{x+3}\cdot\frac{x^2-4}{x-1}\cdot\frac{x^2-9}{x+2}=\frac{(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)(x-3)(x+3)}{(x+3)(x-1)(x+2)}=(x+1)(x-2)(x-3)=x^3-4x^2+x+6$

b) $\frac{3x^2y}{x-y}\cdot\frac{x^2-y^2}{6xy^2(x+y)}=\frac{3x^2y(x-y)(x+y)}{(x-y)6xy^2(x+y)}=\frac{x}{2y}$

c) $\frac{x^3-x}{2x-4}:\frac{4x+4}{3x-6}=\frac{x(x-1)(x+1)3(x-2)}{2(x-2)4(x+1)}=\frac{3x(x-1)}{8}=\frac{3x^2-3x}{8}$

d) $\frac{1}{x-y}:\frac{1}{x^2+y^2-2xy}=\frac{(x-y)^2}{x-y}=x-y$

Ecuaciones polinómicas

105. Resuelve estas ecuaciones de primer grado.

a) $2x-2(3x-1)+4(2x-5)-10=8x$

b) $2x-\frac{3x-1}{3}=x+\frac{1}{3}$

c) $\frac{3x-1}{4}-2x=\frac{2x-\frac{7}{4}}{2}-(3x-1)$

d) $\frac{x+10}{2}+\frac{2(x-2)}{5}=\frac{5x-15}{3}$

e) $\frac{2x}{3}-\frac{x-2}{12}+\frac{x+3}{2}=2x-\frac{1}{6}$

a) $2x-2(3x-1)+4(2x-5)-10=8x\Rightarrow 2x-6x+2+8x-20-10=8x\Rightarrow -4x=28\Rightarrow x=-7$

b) $2x-\frac{3x-1}{3}=x+\frac{1}{3}\Rightarrow 6x-3x+1=3x+1\Rightarrow 0x=0\Rightarrow$ Todos los números reales son solución.

c) $\frac{3x-1}{4}-2x=\frac{2x-\frac{7}{4}}{2}-(3x-1)\Rightarrow 3x-1-8x=4x-\frac{7}{2}-12x+4\Rightarrow 3x=\frac{3}{2}\Rightarrow x=\frac{1}{2}$

d) $\frac{x+10}{2}+\frac{2(x-2)}{5}=\frac{5x-15}{3}\Rightarrow 15x+150+12x-24=50x-150\Rightarrow -23x=-276\Rightarrow x=12$

e) $\frac{2x}{3}-\frac{x-2}{12}+\frac{x+3}{2}=2x-\frac{1}{6}\Rightarrow 8x-x+2+6x+18=24x-2\Rightarrow 11x=22\Rightarrow x=2$

106. Resuelve las siguientes ecuaciones polinómicas.

a) $4x^2-7x-2=0$

b) $-7x^2+12x-5=0$

c) $x(2x-1)-3x(x+1)=0$

d) $\frac{x(x-1)}{15}+\frac{(x-6)^2}{5}+\frac{(x+2)^2}{3}=\frac{(3x-2)(3x-4)}{15}$

e) $x^4-x^3-5x^2-x-6=0$

f) $6x^3-7x^2-14x+15=0$

g) $x^4-125x^2+484=0$

a) $4x^2-7x-2=0 \Rightarrow x=\frac{7\pm\sqrt{49+32}}{8}=\frac{7\pm 9}{8}\Rightarrow x=2,\ x=-\frac{1}{4}$

b) $-7x^2+12x-5=0 \Rightarrow\Rightarrow x=\frac{-12\pm\sqrt{144-140}}{-14}=\frac{-12\pm 2}{-14}\Rightarrow x=\frac{5}{7},\ x=1$

c) $x(2x-1)-3x(x+1)=0\Rightarrow 2x^2-x-3x^2-3x=0\Rightarrow -x^2-4x=0\Rightarrow -x(x+4)=0\Rightarrow x=0\quad x=-4$

d) $x^2-x+3(x^2+36-12x)+5(x^2+4+4x)=9x^2-18x+8\Rightarrow 9x^2-17x+128=9x^2-18x+8\Rightarrow x=-120$

e) $x^4-x^3-5x^2-x-6=0\Rightarrow (x+2)(x-3)(x^2+1)=0\Rightarrow x=-2,\ x=3$

f) $6x^3-7x^2-14x+15=0\Rightarrow 6(x-1)\left(x+\frac{3}{2}\right)\left(x-\frac{5}{3}\right)=0\Rightarrow x=1,\ x=-\frac{3}{2},\ x=\frac{5}{3}$

g) $x^4-125x^2+484=0\Rightarrow \left.\begin{matrix} z=x^2\\ z^2=x^4\end{matrix}\right\}\Rightarrow z^2-125z+484=0\Rightarrow z=\frac{125\pm\sqrt{15625-1936}}{2}=\frac{125\pm 117}{2}=\begin{cases} z=121\Rightarrow x=11,\ x=-11\\ z=4\Rightarrow x=2,\ x=-2\end{cases}$

Ecuaciones racionales e irracionales

107. Resuelve las ecuaciones racionales siguientes.

a) $2x-\frac{12}{2-x}=7+\frac{11x+11}{9}$

b) $\frac{4}{x}+\frac{4}{x+2}=3$

c) $\frac{x+9}{x}-\frac{5+x}{x+2}=\frac{12x+12}{x^2+2x}$

d) $\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x+a}=\frac{1}{x^2-a^2}$

e) $\frac{x+1}{x-1}=\frac{4x+12}{3x+3}$

f) $\frac{x+2}{x+1}-\frac{x+1}{x+2}=\frac{9}{20}$

g) $\frac{x^2+1}{x}+\frac{x}{x^2+1}=x+\frac{7}{6}$

a) $2x-\frac{12}{2-x}=7+\frac{11x+11}{9}\Rightarrow 9(2-x)2x-108=63(2-x)+(2-x)(11x+11)\Rightarrow 7x^2-88x+256=0\Rightarrow x=8,\ x=\frac{32}{7}$

b) $\frac{4}{x}+\frac{4}{x+2}=3\Rightarrow 4(x+2)+4x=3x(x+2)\Rightarrow 3x^2-2x-8=0\Rightarrow x=2,\ x=-\frac{4}{3}$

c) $\frac{x+9}{x}-\frac{5+x}{x+2}=\frac{12x+12}{x^2+2x}\Rightarrow (x+9)(x+2)-x(5+x)=12x+12\Rightarrow -6x+6=0\Rightarrow x=1$

d) $\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x+a}=\frac{1}{x^2-a^2}\Rightarrow x+a+x-a=1\Rightarrow 2x=1\Rightarrow x=\frac{1}{2}$

e) $\frac{x+1}{x-1}=\frac{4x+12}{3x+3}\Rightarrow (x+1)(3x+3)=(4x+12)(x-1)\Rightarrow x^2+2x-15=0\Rightarrow x=3,\ x=-5$

f) $\frac{x+2}{x+1}-\frac{x+1}{x+2}=\frac{9}{20}\Rightarrow 20(x+2)^2-20(x+1)^2=9(x+1)(x+2)\Rightarrow 9x^2-13x-42=0\Rightarrow x=3,\ x=-\frac{14}{9}$

g) $\frac{x^2+1}{x}+\frac{x}{x^2-1}=x+\frac{7}{6}\Rightarrow 6(x^2+1)(x^2-1)+6x^2=6x^2(x^2-1)+7x(x^2-1)\Rightarrow 7x^3-12x^2-7x+6=0\Rightarrow x=2, x=\frac{-1\pm\sqrt{22}}{7}$

108. Resuelve estas ecuaciones irracionales.

a) $2-3\sqrt{x}=-x$

b) $3x+\sqrt{2x-2}=2\sqrt{2x-2}+23$

c) $\sqrt{x+1}+\sqrt{2x+3}=5$

d) $3\sqrt{3x-1}=2\sqrt{3(2x-1)}$

e) $\sqrt{x+5}+\sqrt{x}=\sqrt{7x-3}$

f) $\dfrac{2\sqrt{x}}{4+\sqrt{x-5}}=\dfrac{4-\sqrt{x-5}}{\sqrt{x-5}}$

a) $2-3\sqrt{x}=-x \Rightarrow 3\sqrt{x}=x+2 \Rightarrow 9x=x^2+4x+4 \Rightarrow x^2-5x+4=0 \Rightarrow x=4,\ x=1$

b) $3x+\sqrt{2x-2}=2\sqrt{2x-2}+23 \Rightarrow 3x-23=\sqrt{2x-2} \Rightarrow 9x^2-138x+529=2x-2 \Rightarrow\Rightarrow x=9,\ x=\dfrac{59}{9}$ (Falsa)

c) $\sqrt{x+1}+\sqrt{2x+3}=5 \Rightarrow \sqrt{x+1}=5-\sqrt{2x+3} \Rightarrow x+1=25+2x+3-10\sqrt{2x+3} \Rightarrow 10\sqrt{2x+3}=x+27 \Rightarrow$

$\Rightarrow 200x+300=x^2+729+54x \Rightarrow x^2-146x+429=0 \Rightarrow x=143$ (Falsa), $x=3$

d) $3\sqrt{3x-1}=2\sqrt{3(2x-1)} \Rightarrow 9(3x-1)=4\cdot 3(2x-1) \Rightarrow 3x=-3 \Rightarrow x=-1$ (Falsa). La ecuación no tiene solución.

e) $\sqrt{x+5}+\sqrt{x}=\sqrt{7x-3} \Rightarrow x+5+x+2\sqrt{x^2+5x}=7x-3 \Rightarrow 2\sqrt{x^2+5x}=5x-8 \Rightarrow 4x^2+20x=25x^2+64-80x \Rightarrow$

$\Rightarrow 21x^2-100x+64=0 \Rightarrow x=4,\ x=\dfrac{16}{21}$ (Falsa)

f) $\dfrac{2\sqrt{x}}{4+\sqrt{x-5}}=\dfrac{4-\sqrt{x-5}}{\sqrt{x-5}} \Rightarrow 2\sqrt{x^2-5x}=21-x \Rightarrow 4x^2-20x=441+x^2-42x \Rightarrow\Rightarrow x=9,\ x=-\dfrac{49}{3}$ (Falsa)

Ecuaciones logarítmicas y exponenciales

109. Resuelve las siguientes ecuaciones logarítmicas.

a) $2\log(2x-2)-\log(x-1)=1$

b) $\log(65-x^3)=3\log(5-x)$

c) $\log 10^{\sqrt{20x+320}}=10\sqrt{x}$

d) $3\log_x 2+\log_x 4=-5$

e) $\log\sqrt{7x+51}-1=\log 9-\log\sqrt{2x+67}$

f) $\log_3(x-1)-\log_3(x+2)=1-\log_3(x+6)$

g) $\log_x 25+\log_{x^2}\dfrac{1}{5}=\log_{\sqrt{5}} x$

a) $2\log(2x-2)-\log(x-1)=1 \Rightarrow \log\dfrac{(2x-2)^2}{x-1}=\log 10 \Rightarrow \dfrac{(2x-2)^2}{x-1}=10 \Rightarrow \dfrac{4(x-1)^2}{x-1}=10 \Rightarrow 4(x-1)=10 \Rightarrow x=\dfrac{7}{2}$

b) $\log(65-x^3)=3\log(5-x) \Rightarrow \log(65-x^3)=\log(5-x)^3 \Rightarrow 65-x^3=(5-x)^3 \Rightarrow 65-x^3=125-75x+15x^2-x^3 \Rightarrow$

$\Rightarrow 15x^2-75x+60=0 \Rightarrow x^2-5x+4=0 \Rightarrow x=4,\ x=1$

c) $\log 10^{\sqrt{20x+320}}=10\sqrt{x} \Rightarrow \sqrt{20x+320}=10\sqrt{x} \Rightarrow 20x+320=100x \Rightarrow x=4$

d) $3\log_x 2+\log_x 4=-5 \Rightarrow \log_x(2^3\cdot 4)=-5 \Rightarrow x^{-5}=32=2^5=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-5} \Rightarrow x=\dfrac{1}{2}$

e) $\log\sqrt{7x+51}-1=\log 9-\log\sqrt{2x+67} \Rightarrow \log\dfrac{\sqrt{7x+51}}{10}=\log\dfrac{9}{\sqrt{2x+67}} \Rightarrow \dfrac{\sqrt{7x+51}}{10}=\dfrac{9}{\sqrt{2x+67}} \Rightarrow$

$\Rightarrow 14x^2+571x+3417=8100 \Rightarrow 14x^2+571x-4683=0 \Rightarrow x=7,\ x=-\dfrac{669}{14}$ (Falsa)

f) $\log_3(x-1)-\log_3(x+2)=1-\log_3(x+6) \Rightarrow \log_3\dfrac{x-1}{x+2}=\log_3\dfrac{3}{x+6} \Rightarrow \dfrac{x-1}{x+2}=\dfrac{3}{x+6} \Rightarrow x^2+5x-6=3x+6 \Rightarrow$

$x^2+2x-12=0 \Rightarrow x=-1+\sqrt{13},\ x=-1-\sqrt{13}$ (Falsa)

g) $\log_x 25+\log_{x^2}\dfrac{1}{5}=\log_{\sqrt{5}} x \Rightarrow \dfrac{\log 25}{\log x}+\dfrac{\log\frac{1}{5}}{\log x^2}=\dfrac{\log x}{\log\sqrt{5}} \Rightarrow \dfrac{2\log 5}{\log x}-\dfrac{\log 5}{2\log x}=\dfrac{2\log x}{\log 5} \Rightarrow \dfrac{3\log 5}{2\log x}=\dfrac{2\log x}{\log 5} \Rightarrow$

$\Rightarrow 3(\log 5)^2=4(\log x)^2 \Rightarrow \log x=\dfrac{\sqrt{3}\log 5}{2}=\log\sqrt{5^{\sqrt{3}}} \Rightarrow x=\sqrt{5^{\sqrt{3}}}$

110. Resuelve estas ecuaciones exponenciales.

a) $4^{x^2+1} = 2^{5x+5}$

b) $4^{(x-2)^2} = 262144$

c) $9^x + 5\cdot 3^x - 24 = 0$

d) $3^{x+2} + 9^{x-1} = 90$

e) $9^x + 3^{2x-1} + 3^{x-1} = 111$

f) $2^{2x-4} - 5\cdot 2^{x-3} + 1 = 0$

g) $9^{x+2} + 3^{x+3} - 810 = 0$

h) $\sqrt[x]{27} = 3^{x+2}$

i) $49^{\frac{x-5}{3}} = \dfrac{1}{\sqrt{7^{x-1}}}$

a) $4^{x^2+1} = 2^{5x+5} \Rightarrow 2^{2(x^2+1)} = 2^{5x+5} \Rightarrow 2x^2+2 = 5x+5 \Rightarrow 2x^2-5x-3=0 \Rightarrow x=3,\ x=-\dfrac{1}{2}$

b) $4^{(x-2)^2} = 262\,144 \Rightarrow 4^{(x-2)^2} = 4^9 \Rightarrow (x-2)^2 = 9 \Rightarrow \begin{cases} x-2=3 \Rightarrow x=5 \\ x-2=-3 \Rightarrow x=-1 \end{cases}$

c) Aplicando el cambio $z=3^x \Rightarrow 9^x + 5\cdot 3^x - 24 = 0 \Rightarrow z^2+5z-24=0 \Rightarrow \begin{cases} z=3 \Rightarrow 3^x = 3 \Rightarrow x=1 \\ z=-8 \Rightarrow 3^x=-8 \text{ sin solución real} \end{cases}$

d) Aplicando el cambio de variable $z=3^x$

$$3^{x+2}+9^{x-1}=90 \Rightarrow 9z+\frac{z^2}{9}=90 \Rightarrow z^2+81z-810=0 \Rightarrow \begin{cases} z=9 \Rightarrow 3^x=9 \Rightarrow x=2 \\ z=-90 \Rightarrow 3^x=-90 \text{ sin solución real} \end{cases}$$

e) Aplicando el cambio de variable $z=3^x$

$$9^x+3^{2x-1}+3^{x-1}=111 \Rightarrow z^2+\frac{z^2}{3}+\frac{z}{3}=111 \Rightarrow 4z^2+z-333=0 \Rightarrow \begin{cases} z=9 \Rightarrow 3^x=9 \Rightarrow x=2 \\ z=-\dfrac{37}{4} \Rightarrow 3^x=-\dfrac{37}{4} \text{ sin solución real} \end{cases}$$

f) Aplicando el cambio de variable $z=2^x$

$$2^{2x-4}-5\cdot 2^{x-3}+1=0 \Rightarrow \frac{z^2}{16}-\frac{5z}{8}+1=0 \Rightarrow z^2-10z+16=0 \Rightarrow \begin{cases} z=8 \Rightarrow 2^x=8 \Rightarrow x=3 \\ z=2 \Rightarrow 2^x=2 \Rightarrow x=1 \end{cases}$$

g) Con el cambio $z=3^x \Rightarrow 9^{x+2}+3^{x+3}-810=0 \Rightarrow 3z^2+z-30=0 \Rightarrow \begin{cases} z=3 \Rightarrow 3^x=3 \Rightarrow x=1 \\ z=-\dfrac{10}{3} \Rightarrow 3^x=-\dfrac{10}{3} \text{ sin solución real} \end{cases}$

h) $\sqrt[x]{27} = 3^{x+2} \Rightarrow 3^{\frac{3}{x}} = 3^{x+2} \Rightarrow \dfrac{3}{x} = x+2 \Rightarrow x^2+2x-3=0 \Rightarrow x=1,\ x=-3$

i) $49^{\frac{x-5}{3}} = \dfrac{1}{\sqrt{7^{x-1}}} \Rightarrow 7^{\frac{2x-10}{3}} = 7^{\frac{1-x}{2}} \Rightarrow \dfrac{2x-10}{3} = \dfrac{1-x}{2} \Rightarrow 4x-20=3-3x \Rightarrow 7x=23 \Rightarrow x=\dfrac{23}{7}$

Sistemas de ecuaciones

111. Resuelve los siguientes sistemas de dos ecuaciones lineales.

a) $\begin{cases} y=\dfrac{x+1}{2}+3 \\ y=2x+10 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2(2x+y)-3(3x-2y)=-34 \\ \dfrac{x}{2}-\dfrac{y}{3}=2 \end{cases}$

a) $\begin{cases} y=\dfrac{x+1}{2}+3 \\ y=2x+10 \end{cases} \Rightarrow \dfrac{x+1}{2}+3=2x+10 \Rightarrow x+1+6=4x+20 \Rightarrow 3x=-13 \Rightarrow x=-\dfrac{13}{3},\ y=\dfrac{4}{3}$

b) $\begin{cases} 2(2x+y)-3(3x-2y)=-34 \\ \dfrac{x}{2}-\dfrac{y}{3}=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x+2y-9x+6y=-34 \\ 3x-2y=12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -5x+8y=-34 \\ 3x-2y=12 \end{cases} \Rightarrow x=2,\ y=-3$

112. Indica si los siguientes sistemas de ecuaciones lineales son compatibles o incompatibles y calcula, según el caso, todas sus soluciones.

a) $\begin{cases} x+3y-2z=6 \\ 2x+3y-2z=8 \\ 4x+2y-6z=6 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x+2y-3z=3 \\ 3x-2y+z=7 \\ 5x+2y-5z=1 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} 2x+y-2z=8 \\ 2x-4y+3z=-2 \\ 4x-y+6z=-4 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} x+3y-2z=-6 \\ 2x-3y+5z=6 \\ 5x-3y+8z=6 \end{cases}$

a) $\begin{cases} x+3y-2z=6 \\ 2x+3y-2z=8 \\ 4x+2y-6z=6 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} E_2 \to E_2-2E_1 \\ E_3 \to E_3-4E_1 \end{array} \Rightarrow \begin{cases} x+3y-2z=6 \\ -3y+2z=-4 \\ -10y+2z=-18 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} \\ E_3 \to E_3-E_2 \end{array} \Rightarrow \begin{cases} x+3y-2z=6 \\ -3y+2z=-4 \\ -7y=-14 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=2 \\ z=1 \end{cases}$

Sistema compatible determinado.

b) $\begin{cases} x+2y-3z=3 \\ 3x-2y+z=7 \\ 5x+2y-5z=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} E_2 \to E_2-3E_1 \\ E_3 \to E_3-5E_1 \end{array} \Rightarrow \begin{cases} x+2y-3z=3 \\ -8y+10z=-2 \\ -8y+10z=-14 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} \\ E_3 \to E_3-E_2 \end{array} \Rightarrow \begin{cases} x+2y-3z=3 \\ -8y+10z=-2 \\ 0=-12 \end{cases}$

Sistema incompatible. No tiene solución.

c) $\begin{cases} 2x+y-2z=8 \\ 2x-4y+3z=-2 \\ 4x-y+6z=-4 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} E_2 \to E_2-E_1 \\ E_3 \to E_3-2E_1 \end{array} \Rightarrow \begin{cases} 2x+y-2z=8 \\ -5y+5z=-10 \\ -3y+10z=-20 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} \\ E_3 \to 5E_3-3E_2 \end{array} \Rightarrow \begin{cases} 2x+y-2z=8 \\ -5y+5z=-10 \\ 35z=-70 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=0 \\ z=-2 \end{cases}$

Sistema compatible determinado.

d) $\begin{cases} x+3y-2z=-6 \\ 2x-3y+5z=6 \\ 5x-3y+8z=6 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} E_2 \to E_2-2E_1 \\ E_3 \to E_3-5E_1 \end{array} \Rightarrow \begin{cases} x+3y-2z=-6 \\ -9y+9z=18 \\ -18y+18z=36 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} \\ E_3 \to E_3-2E_2 \end{array} \Rightarrow \begin{cases} x+3y-2z=-6 \\ -9y+9z=18 \\ 0=0 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} x+3y-2z=-6 \\ -y+z=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-t \\ y=t-2 \quad \forall t \in \mathbb{R} \\ z=t \end{cases}$ Sistema compatible indeterminado

113. Estudia la compatibilidad de estos sistemas y halla, en su caso, sus soluciones.

a) $\begin{cases} x+2y-2z=4 \\ 2x+5y-2z=10 \\ 4x+9y-6z=18 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x+2y-z=-5 \\ 5x-y+2z=11 \\ 6x+y+z=5 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} 2x+y+z=0 \\ 3x+2y-2z=15 \\ x+y-z=7 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} x+3y-2z=4 \\ 2x+2y+z=3 \\ 3x+2y+z=5 \end{cases}$

a) $\begin{cases} x+2y-2z=4 \\ 2x+5y-2z=10 \\ 4x+9y-6z=18 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} E_2 \to E_2-2E_1 \\ E_3 \to E_3-4E_1 \end{array} \Rightarrow \begin{cases} x+2y-2z=4 \\ y+2z=2 \\ y+2z=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} \\ E_3 \to E_3-E_2 \end{array} \Rightarrow \begin{cases} x+2y-2z=4 \\ y+2z=2 \\ 0=0 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} x+2y-2z=4 \\ y+2z=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=6t \\ y=2-2t \quad \forall t \in \mathbb{R} \\ z=t \end{cases}$ Sistema compatible indeterminado

b) $\begin{cases} x+2y-z=-5 \\ 5x-y+2z=11 \\ 6x+y+z=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} E_2 \to E_2-5E_1 \\ E_3 \to E_3-6E_1 \end{array} \Rightarrow \begin{cases} x+2y-z=-5 \\ -11y+7z=36 \\ -11y+7z=35 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} \\ E_3 \to E_3-E_2 \end{array} \Rightarrow \begin{cases} x+2y-z=-5 \\ -11y+7z=36 \\ 0=-1 \end{cases}$

Sistema incompatible. No tiene solución.

c) $\begin{cases} 2x+y+z=0 \\ 3x+2y-2z=15 \\ x+y-z=7 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} E_2 \to 2E_2-3E_1 \\ E_3 \to 2E_3-E_1 \end{array} \Rightarrow \begin{cases} 2x+y+z=0 \\ y-7z=30 \\ y-3z=14 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} \\ E_3 \to E_3-E_2 \end{array} \Rightarrow \begin{cases} 2x+y+z=0 \\ y-7z=30 \\ 4z=-16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=2 \\ z=-4 \end{cases}$

Sistema compatible determinado.

d) $\begin{cases} x+3y-2z=4 \\ 2x+2y+z=3 \\ 3x+2y+z=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} E_2 \to E_2-2E_1 \\ E_3 \to E_3-3E_1 \end{array} \Rightarrow \begin{cases} x+3y-2z=4 \\ -4y+5z=-5 \\ -7y+7z=-7 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} \\ E_3 \to 4E_3-7E_2 \end{array} \Rightarrow \begin{cases} x+3y-2z=4 \\ -4y+5z=-5 \\ -7z=7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=0 \\ z=-1 \end{cases}$

Sistema compatible determinado.

114. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones de segundo grado.

a) $\begin{cases} x-6y=-6 \\ 2x^2+y^2=76 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3xy-2x^2=-26 \\ 4x+5y=-7 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x+\dfrac{y}{2}=15 \\ \dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{y}=1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x+4y=10 \\ x^2+3xy=-8 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 3x^2+5y^2=20 \\ 4x^2-y^2=-4 \end{cases}$

f) $\begin{cases} x^2-2(x-y)^2=36 \\ \dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}=5 \end{cases}$

a) $x=6y-6 \Rightarrow 2(6y-6)^2+y^2=76 \Rightarrow 73y^2-144y-4=0 \Rightarrow \begin{cases} y=2,\ x=6 \\ y=-\dfrac{2}{73},\ x=-\dfrac{450}{73} \end{cases}$

b) $y=-\dfrac{4x+7}{5} \Rightarrow -3x\cdot\dfrac{4x+7}{5}-2x^2=-26 \Rightarrow -22x^2-21x+130=0 \Rightarrow \begin{cases} x=-\dfrac{65}{22},\ y=\dfrac{53}{55} \\ x=2,\ y=-3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x+\dfrac{y}{2}=15 \\ \dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{y}=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6x+y=30 \\ 2y+3x=xy \end{cases}$

$y=30-6x \Rightarrow 60-12x+3x=30x-6x^2 \Rightarrow 2x^2-13x+20=0 \Rightarrow \begin{cases} x=4,\ y=6 \\ x=\dfrac{5}{2},\ y=15 \end{cases}$

d) $y=\dfrac{5-x}{2} \Rightarrow x^2+3x(\dfrac{5-x}{2})=-8 \Rightarrow x^2-15x-16=0 \Rightarrow \begin{cases} x=16,\ y=-\dfrac{11}{2} \\ x=-1,\ y=3 \end{cases}$

e) Multiplicando la segunda ecuación por 5 y sumándole la primera obtenemos:

$23x^2=0 \Rightarrow x=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0,\ y=2 \\ x=0,\ y=-2 \end{cases}$

f) $\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}=5 \Rightarrow 3x+2y=30 \Rightarrow y=15-\dfrac{3}{2}x$

$x^2-2\left(\dfrac{5}{2}x-15\right)^2=36 \Rightarrow 23x^2-300x+972=0 \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{162}{23},\ y=\dfrac{102}{23} \\ x=6,\ y=6 \end{cases}$

115. Resuelve los siguientes sistemas exponenciales y logarítmicos.

a) $\begin{cases} 2^x + 3^y = 11 \\ 4^x + 9^y = 85 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} x + y = 33 \\ \log x - \log y = 1 \end{cases}$ **e)** $\begin{cases} 2\log(x-2) + 3\log(y+2) = 2 \\ 4\log(x-2) + 5\log(y+2) = -1 \end{cases}$ **g)** $\begin{cases} 15\cdot 5^x - 6^{y+1} = 339 \\ 3\cdot 5^{x+1} + 2\cdot 6^{y+2} = 807 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2^x + 2\cdot 3^{y+1} = 8 \\ 5\cdot 2^{x-1} + 9^y = 6 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} 3^x + 3^{y+1} = 18 \\ x - y = -1 \end{cases}$ **f)** $\begin{cases} \log x^2 + \log y^2 = 2 \\ x^2 + y^2 = 29 \end{cases}$ **h)** $\begin{cases} \log x - \log y = 1 \\ 2^{x-24} = 4^y \end{cases}$

a) Hacemos el cambio: $u = 2^x$, $v = 3^y$: $\begin{cases} u + v = 11 \\ u^2 + v^2 = 85 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = 2,\ v = 9 \Rightarrow x = 1,\ y = 2 \\ u = 9,\ v = 2 \Rightarrow x = \dfrac{\log 9}{\log 2},\ y = \dfrac{\log 2}{\log 3} \end{cases}$

b) Hacemos el cambio: $u = 2^x$, $v = 3^y$: $\begin{cases} u + 6v = 8 \\ \dfrac{5}{2}u + v^2 = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = 2,\ v = 1 \Rightarrow x = 1,\ y = 0 \\ u = -76,\ v = 14 \text{ sin solución real} \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + y = 33 \\ \log x - \log y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 33 \\ \log \dfrac{x}{y} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 33 \\ \dfrac{x}{y} = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 33 \\ x = 10y \end{cases} \Rightarrow x = 30,\ y = 3$

d) $x = y - 1 \Rightarrow 3^{y-1} + 3^{y+1} = 18 \Rightarrow \dfrac{3^y}{3} + 3\cdot 3^y = 18 \Rightarrow \dfrac{10}{3}3^y = 18 \Rightarrow 3^y = \dfrac{27}{5} \Rightarrow y = \dfrac{\log \frac{27}{5}}{\log 3} = 3 - \dfrac{\log 5}{\log 3},\ x = 2 - \dfrac{\log 5}{\log 3}$

e) Hacemos el cambio: $u = \log(x-2)$, $v = \log(y+2)$

$\begin{cases} 2u + 3v = 2 \\ 4u + 5v = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = -\dfrac{13}{2} \Rightarrow \log(x-2) = -\dfrac{13}{2} \Rightarrow x = 2 + 10^{-\frac{13}{2}} \\ v = 5 \Rightarrow \log(y+2) = 5 \Rightarrow y = 10^5 - 2 \end{cases}$

f) $\begin{cases} \log x^2 + \log y^2 = 2 \\ x^2 + y^2 = 29 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2y^2 = 100 \\ x^2 + y^2 = 29 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 5,\ y = 2 \quad x = -5,\ y = 2 \quad x = 2,\ y = 5 \quad x = -2,\ y = 5 \\ x = 5,\ y = -2 \quad x = -5,\ y = -2 \quad x = 2,\ y = -5 \quad x = -2,\ y = -5 \end{cases}$

g) Hacemos el cambio: $u = 5^x$, $v = 6^y$: $\begin{cases} 15u - 6v = 339 \\ 15u + 72v = 807 \end{cases} \Rightarrow u = 25,\ v = 6 \Rightarrow x = 2,\ y = 1$

h) $\begin{cases} \log x - \log y = 1 \\ 2^{x-24} = 4^y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x}{y} = 10 \\ 2^{x-24} = 2^{2y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 10y \\ x - 24 = 2y \end{cases} \Rightarrow x = 30,\ y = 3$

Inecuaciones y sistemas de inecuaciones

116. Resuelve las siguientes inecuaciones de primer grado.

a) $3x + 3(2x-5) - 4(x-2) \le 2 - x$ **c)** $\dfrac{x+1}{3} - \dfrac{x+2}{4} + \dfrac{x-3}{18} \ge -\dfrac{8}{9}$

b) $\dfrac{x}{2} - \dfrac{x-1}{6} > 1 - \dfrac{2x-5}{2}$ **d)** $\dfrac{2x-3}{4} - \dfrac{x}{2} \le 2(x-1) - \dfrac{35}{4}$

a) $3x + 3(2x-5) - 4(x-2) \le 2 - x \Rightarrow 3x + 6x - 15 - 4x + 8 \le 2 - x \Rightarrow 6x \le 9 \Rightarrow x \le \dfrac{3}{2} \Rightarrow$ Solución: $x \in \left(-\infty, \dfrac{3}{2}\right]$

b) $\dfrac{x}{2} - \dfrac{x-1}{6} > 1 - \dfrac{2x-5}{2} \Rightarrow 3x - x + 1 > 6 - 6x + 15 \Rightarrow 8x > 20 \Rightarrow x > \dfrac{5}{2} \Rightarrow$ Solución: $x \in \left(\dfrac{5}{2}, +\infty\right)$

c) $\dfrac{x+1}{3} - \dfrac{x+2}{4} + \dfrac{x-3}{18} \ge -\dfrac{8}{9} \Rightarrow 12x + 12 - 9x - 18 + 2x - 6 \ge -32 \Rightarrow 5x \ge -20 \Rightarrow x \ge -4 \Rightarrow$ Solución: $x \in [-4, +\infty)$

d) $\dfrac{2x-3}{4} - \dfrac{x}{2} \le 2(x-1) - \dfrac{35}{4} \Rightarrow 2x - 3 - 2x \le 8x - 8 - 35 \Rightarrow 40 \le 8x \Rightarrow x \ge 5 \Rightarrow$ Solución: $x \in [5, +\infty)$

117. Calcula las soluciones de las inecuaciones polinómicas siguientes.

a) $x^2+x-12\geq 0$

b) $-2x^2+3x>0$

c) $4x^2-1\leq 0$

d) $6x^2+x-1<0$

e) $x^3-4x\leq 0$

f) $x^3-3x-2<0$

g) $x^2-1\geq 0$

h) $x^3-7x+6\leq 0$

a) $x^2+x-12\geq 0 \Rightarrow (x+4)(x-3)\geq 0 \Rightarrow$ Las raíces son $x=-4$ y $x=3$.

Construyendo la tabla de signos correspondiente obtenemos que la solución es $x\in(-\infty,-4]\cup[3,+\infty)$

b) $-2x^2+3x>0 \Rightarrow x(-2x+3)>0 \Rightarrow$ Las raíces son $x=0$ y $x=\frac{3}{2}$.

Construyendo la tabla de signos correspondiente obtenemos que la solución es $x\in\left(0,\frac{3}{2}\right)$

c) $4x^2-1\leq 0 \Rightarrow (2x+1)(2x-1)\leq 0 \Rightarrow$ Las raíces son $x=-\frac{1}{2}$ y $x=\frac{1}{2}$.

Construyendo la tabla de signos correspondiente obtenemos que la solución es $x\in\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$

d) $6x^2+x-1<0 \Rightarrow (3x-1)(2x+1)<0 \Rightarrow$ Las raíces son $x=-\frac{1}{2}$ y $x=\frac{1}{3}$.

Construyendo la tabla de signos correspondiente obtenemos que la solución es $x\in\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right)$

e) $x^3-4x\leq 0 \Rightarrow x(x+2)(x-2)\leq 0 \Rightarrow$ Las raíces son $x=-2$, $x=0$ y $x=2$.

Construyendo la tabla de signos correspondiente obtenemos que la solución es $x\in(-\infty,-2]\cup[0,2]$

f) $x^3-3x-2<0 \Rightarrow (x+1)^2(x-2)<0 \Rightarrow$ Las raíces son $x=-1$ y $x=2$.

Construyendo la tabla de signos correspondiente obtenemos que la solución es $x\in(-\infty,2)$

g) $x^2-1\geq 0 \Rightarrow (x+1)(x-1)\geq 0 \Rightarrow$ Las raíces son $x=-1$ y $x=1$.

Construyendo la tabla de signos correspondiente obtenemos que la solución es $x\in(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$

h) $x^3-7x+6\leq 0 \Rightarrow (x-1)(x-2)(x+3)\leq 0 \Rightarrow$ Las raíces son $x=-3$, $x=1$ y $x=2$.

Construyendo la tabla de signos correspondiente obtenemos que la solución es $x\in(-\infty,-3]\cup[1,2]$

118. Resuelve las siguientes inecuaciones racionales.

a) $\frac{5x-2}{2x+1} \le 0$

b) $\frac{3x-1}{5-10x} > 0$

c) $\frac{x^2-1}{x+2} \le 0$

d) $\frac{x^3-1}{4-x^2} \le 0$

e) $\frac{x^2-5x+4}{x^2-5x+6} > 0$

f) $\frac{x^3+x^2-5x+3}{x^3+5x^2+3x-9} < 0$

g) $\frac{x-8}{3-x} \le -4-x$

h) $\frac{4x^3-4x-x+1}{x^2+2x+1} \le 0$

a) $\frac{5x-2}{2x+1} \le 0 \Rightarrow$ Las raíces son $x=-\frac{1}{2}$ y $x=\frac{2}{5}$.

Construyendo la tabla de signos correspondiente obtenemos que la solución es: $x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{2}{5}\right]$

b) $\frac{3x-1}{5-10x} > 0 \Rightarrow$ Las raíces son $x=\frac{1}{3}$ y $x=\frac{1}{2}$.

Construyendo la tabla de signos correspondiente obtenemos que la solución es: $x \in \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$

c) $\frac{x^2-1}{x+2} \le 0 \Rightarrow \frac{(x-1)(x+1)}{x+2} \le 0 \Rightarrow$ Las raíces son $x=-2$, $x=-1$ y $x=1$.

Construyendo la tabla de signos correspondiente obtenemos que la solución es: $x \in (-\infty, -2) \cup [-1, 1]$

d) $\frac{x^3-1}{4-x^2} \le 0 \Rightarrow \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(2-x)(2+x)} \le 0 \Rightarrow \frac{x-1}{(x-2)(x+2)} \ge 0 \Rightarrow$ Las raíces son $x=-2$, $x=1$ y $x=2$.

Construyendo la tabla de signos correspondiente obtenemos que la solución es: $x \in (-2, 1] \cup (2, +\infty)$

(Observemos que x^2+x+1 es siempre positivo)

e) $\frac{x^2-5x+4}{x^2-5x+6} > 0 \Rightarrow \frac{(x-1)(x-4)}{(x-2)(x-3)} > 0 \Rightarrow$ Las raíces son $x=1$, $x=2$, $x=3$ y $x=4$.

Construyendo la tabla de signos correspondiente obtenemos que la solución es: $x \in (-\infty, 1) \cup (2, 3) \cup (4, +\infty)$

f) $\frac{x^3+x^2-5x+3}{x^3+5x^2+3x-9} < 0 \Rightarrow \frac{(x+3)(x-1)^2}{(x+3)^2(x-1)} < 0 \Rightarrow \frac{x-1}{x+3} < 0 \Rightarrow$ Las raíces son $x=-3$ y $x=1$.

Construyendo la tabla de signos correspondiente obtenemos que la solución es: $x \in (-3, 1)$

g) $\frac{x-8}{3-x} \le -4-x \Rightarrow \frac{x-8}{3-x}+4+x \le 0 \Rightarrow \frac{4-x^2}{3-x} \le 0 \Rightarrow \frac{(x-2)(x+2)}{x-3} \le 0 \Rightarrow$ Las raíces son $x=-2$, $x=2$ y $x=3$.

Construyendo la tabla de signos correspondiente obtenemos que la solución es: $x \in (-\infty, -2] \cup [2, 3)$

h) $\frac{4x^3-4x^2-x+1}{x^2+2x+1} \le 0 \Rightarrow \frac{(x-1)(2x+1)(2x-1)}{(x+1)^2} \le 0 \Rightarrow$ Las raíces son $x=-1$, $x=-\frac{1}{2}$, $x=\frac{1}{2}$ y $x=1$.

Construyendo la tabla de signos correspondiente obtenemos que la solución es:

$x \in (-\infty, -1) \cup \left(-1, -\frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{1}{2}, 1\right]$

119. Resuelve los sistemas de inecuaciones con una incógnita:

a) $\begin{cases} 2x+3(x-1)<7 \\ 3x+2\le x+6 \end{cases}$

b) $\begin{cases} (x-3)^2+1\ge 0 \\ x^2-11x+28<0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} -3(x-3)-2x\le -3 \\ 2x-3<x+3 \\ x\le 5 \\ x\ge 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x-\dfrac{x}{2}<2 \\ 2x+3(x-1)>x+2 \end{cases}$

a) $\begin{cases} 2x+3(x-1)<7 \\ 3x+2\le x+6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x<10 \\ 2x\le 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x<2 \\ x\le 2 \end{cases} \Rightarrow$ Solución: $x\in(-\infty,\ 2)$

b) Observemos que la primera inecuación siempre es cierta, por tanto:

$\begin{cases} (x-3)^2+1\ge 0 \\ x^2-11x+28<0 \end{cases} \Rightarrow (x-7)(x-4)<0 \Rightarrow$ Solución: $x\in(4,\ 7)$

c) $\begin{cases} -3(x-3)-2x\le -3 \\ 2x-3<x+3 \\ x\le 5 \\ x\ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -5x\le -12 \\ x<6 \\ x\le 5 \\ x\ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\ge \dfrac{12}{5} \\ x<6 \\ x\le 5 \\ x\ge 0 \end{cases} \Rightarrow$ Solución: $x\in\left[\dfrac{12}{5},\ 5\right]$

d) $\begin{cases} 2x-\dfrac{x}{2}<2 \\ 2x+3(x-1)>x+2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x<\dfrac{4}{3} \\ x>\dfrac{5}{4} \end{cases} \Rightarrow$ Solución: $x\in\left(\dfrac{5}{4},\ \dfrac{4}{3}\right)$

120. Resuelve los siguientes sistemas de inecuaciones con dos incógnitas:

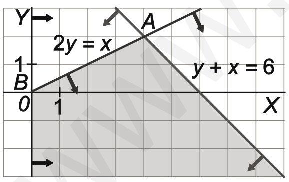
a) $\begin{cases} x+y\le 6 \\ 2y\le x \\ x\ge 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x+y<2 \\ x>y-2 \\ x>0 \quad y>0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x-4\ge 0 \\ x-6\le 0 \\ 3\le y\le 5 \end{cases}$

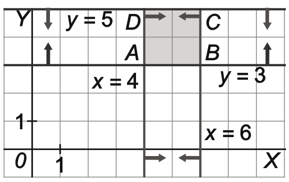
d) $\begin{cases} 3x+4y\ge 12 \\ -3x+4y\le 4 \\ x-4\le 0 \end{cases}$

a)



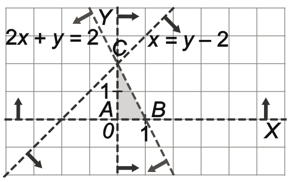
Vértices: $A(4,\ 2)$ $B(0,\ 0)$

c)



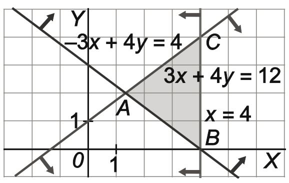
Vértices: $A(4,\ 3)$ $B(6,\ 3)$ $C(6,\ 5)$ $D(4,\ 5)$

b)



Vértices: $A(0,\ 0)$ $B(1,\ 0)$ $C(0,\ 2)$

d)



Vértices: $A\left(\dfrac{4}{3},\ 2\right)$ $B(4,\ 0)$ $C(4,\ 4)$

Síntesis

121. Opera y simplifica.

a) $\frac{1}{xy}+\frac{a}{xz}+\frac{a^2}{yz}$

b) $\left(x+\frac{(x-1)^2}{2-x}\right)\cdot\frac{2-x}{2}$

c) $\frac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x^2}}$

d) $\frac{x-\frac{x^2}{x-y}}{y-\frac{y^2}{x+y}}$

e) $\frac{a+b}{a-b}-\frac{a-b}{a+b}+\frac{a^2}{a^2-b^2}$

f) $\left(a^2-b^2\right):\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$

g) $\frac{1+\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x+1}}:\frac{x+1}{x+2}$

h) $\frac{1+\frac{x-2}{x+2}}{\frac{x+2}{x-2}-1}$

a) $\frac{1}{xy}+\frac{a}{xz}+\frac{a^2}{yz}=\frac{z+ay+a^2x}{xyz}$

b) $\left(x+\frac{(x-1)^2}{2-x}\right)\cdot\frac{2-x}{2}=\frac{2x-x^2+x^2-2x+1}{2-x}\cdot\frac{2-x}{2}=\frac{1}{2-x}\cdot\frac{2-x}{2}=\frac{1}{2}$

c) $\frac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x^2}}=\frac{\frac{x+1}{x}}{\frac{x^2-1}{x^2}}=\frac{(x+1)x^2}{x(x-1)(x+1)}=\frac{x}{x-1}$

d) $\frac{x-\frac{x^2}{x-y}}{y-\frac{y^2}{x+y}}=\frac{\frac{x^2-xy-x^2}{x-y}}{\frac{xy+y^2-y^2}{x+y}}=\frac{-xy(x+y)}{xy(x-y)}=\frac{y+x}{y-x}$

e) $\frac{a+b}{a-b}-\frac{a-b}{a+b}+\frac{a^2}{a^2-b^2}=\frac{a^2+2ab+b^2-a^2+2ab-b^2+a^2}{(a-b)(a+b)}=\frac{4ab+a^2}{(a-b)(a+b)}=\frac{4ab+a^2}{a^2-b^2}$

f) $\left(a^2-b^2\right):\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)=(a-b)(a+b):\frac{b+a}{ab}=(a-b)ab=a^2b-ab^2$

g) $\frac{1+\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x+1}}:\frac{x+1}{x+2}=\frac{\frac{x+1}{x}}{\frac{x+2}{x+1}}:\frac{x+1}{x+2}=\frac{\frac{(x+1)(x+2)}{x}}{\frac{(x+1)(x+2)}{x+1}}=\frac{x+1}{x}$

h) $\frac{1+\frac{x-2}{x+2}}{\frac{x+2}{x-2}-1}=\frac{\frac{x+2+x-2}{x+2}}{\frac{x+2-x+2}{x-2}}=\frac{2x(x-2)}{4(x+2)}=\frac{x^2-2x}{2x+4}$

122. Racionaliza, opera y simplifica la expresión: $\dfrac{\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{2}+2\sqrt{a}}-\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{2}-2\sqrt{a}}}{\frac{2a}{1-4a^2}}$

$$\frac{\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{2}+2\sqrt{a}}-\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{2}-2\sqrt{a}}}{\frac{2a}{1-4a^2}}=\frac{\frac{\sqrt{a}\left(\sqrt{2}-2\sqrt{a}\right)}{\left(\sqrt{2}+2\sqrt{a}\right)\left(\sqrt{2}-2\sqrt{a}\right)}-\frac{\sqrt{a}\left(\sqrt{2}+2\sqrt{a}\right)}{\left(\sqrt{2}-2\sqrt{a}\right)\left(\sqrt{2}+2\sqrt{a}\right)}}{\frac{2a}{1-4a^2}}=\frac{\frac{\sqrt{2a}-2a}{2-4a}-\frac{\sqrt{2a}+2a}{2-4a}}{\frac{2a}{1-4a^2}}=\frac{\frac{-4a}{2-4a}}{\frac{2a}{1-4a^2}}=$$

$$=\frac{\frac{-2a}{1-2a}}{\frac{2a}{(1-2a)(1+2a)}}=\frac{-2a(1-2a)(1+2a)}{2a(1-2a)}=-1-2a$$

123. Calcula el término que se indica en cada uno de los siguientes desarrollos.

a) El quinto término de $(2 + x)^8$ **b)** El tercer término de $\left(\frac{2}{3}+\frac{3}{x}\right)^6$ **c)** El último término de $(2a^2b - 3a)^{37}$

a) $T_5 = \binom{8}{4}\cdot 2^4 \cdot x^4 = 70\cdot 16\cdot x^4 = 1120x^4$

c) $T_{38} = -\binom{37}{37}(3a)^{37} = -450\ 283\ 905\ 890\ 997\ 363a^{37}$

b) $T_3 = \binom{6}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^4\left(\frac{3}{x}\right)^2 = 15\cdot\frac{16}{81}\cdot\frac{9}{x^2} = \frac{80}{3x^2}$

124. Dado el polinomio $P(x) = -3x^3 + x^2 - 2x + k$, calcula el valor de k para que sea divisible por $x - 2$.

Por el teorema del resto tenemos: $P(2) = 0 \Rightarrow -3\cdot 2^3 + 2^2 - 2\cdot 2 + k = 0 \Rightarrow -24 + k = 0 \Rightarrow k = 24$

125. Resuelve la ecuación: $\binom{x}{2} - 2x = \binom{x-2}{2} - 1$

$$\binom{x}{2} - 2x = \binom{x-2}{2} - 1 \Rightarrow \frac{x(x-1)}{2} - 2x = \frac{(x-2)(x-3)}{2} - 1 \Rightarrow x^2 - x - 4x = x^2 - 5x + 6 - 2 \Rightarrow 0 = 4$$

La ecuación no tiene solución.

126. Sea el polinomio $P(x) = 2x^4 + 2x^3 - 11x^2 + ax + b$. Calcula el valor de a y b para que sea divisible por $x^2 + x + 6$.

Se efectúa la división y se obtiene: cociente: $2x^2 - 23$ y resto: $(23 + a)x + (b + 138)$. Por tanto:

$$\begin{cases} 23 + a = 0 \\ b + 138 = 0 \end{cases} \Rightarrow a = -23,\ b = -138$$

127. Sea el polinomio $P(x) = 2x^5 - 2x^4 + 3x^3 - 3x^2 + ax + b$, halla el valor de a y b para que:

- **El polinomio sea divisible por $x - 1$.**
- **El valor numérico en $x = -1$ valga -12.**

Por el teorema del resto se tiene $P(1) = 0$, por otro lado, $P(-1) = -12$, por tanto:

$$\begin{cases} P(1) = 0 \\ P(-1) = -12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 - 2 + 3 - 3 + a + b = 0 \\ -2 - 2 - 3 - 3 - a + b = -12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + b = 0 \\ -a + b = -2 \end{cases} \Rightarrow a = 1,\ b = -1$$

128. Calcula la expresión de $P(x)$ sabiendo que $P(2x + 1) = 8x^2 + 14x$.

$P(x)$ es un polinomio de segundo grado. Podemos escribir: $P(x) = ax^2 + bx + c$.

Se tiene que:

$$P(2x + 1) = a(2x + 1)^2 + b(2x + 1) + c = a(4x^2 + 4x + 1) + 2bx + b + c = 4ax^2 + (4a + 2b)x + (a + b + c)$$

Por tanto:

$$\begin{cases} 4a = 8 \\ 4a + 2b = 14 \\ a + b + c = 0 \end{cases} \Rightarrow a = 2,\ b = 3,\ c = -5 \Rightarrow P(x) = 2x^2 + 3x - 5$$

129. a) Calcula la suma y el producto de las soluciones de la ecuación $x^2+3x+c=0$.

b) Calcula el valor de *c* para que el producto de la soluciones de la ecuación anterior valga –18.

a) $x_1+x_2=-\frac{b}{a}=-3$, $x_1x_2=\frac{c}{a}=c$

b) Por el apartado anterior $c=-18$

130. Halla la expresión de un polinomio de tercer grado que verifique que:

$P(0)=0$ $\qquad P(1)=0$ $\qquad P(-1)=2$ $\qquad P(-2)=-6$

Sea $P(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ el polinomio buscado. Se tiene que:

$$\begin{cases} P(0)=d \\ P(1)=a+b+c+d \\ P(-1)=-a+b-c+d \\ P(-2)=-8a+4b-2c+d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d=0 \\ a+b+c+d=0 \\ -a+b-c+d=2 \\ -8a+4b-2c+d=-6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d=0 \\ a+b+c=0 \\ -a+b-c=2 \\ -8a+4b-2c=-6 \end{cases}$$

Sumando la segunda ecuación con la tercera obtenemos: $2b=2\Rightarrow b=1$.

Restándole a la cuarta ecuación el doble de la tercera obtenemos: $-6a+2b=-10\Rightarrow -6a+2=-10\Rightarrow a=2$.

Finalmente, despejando de la segunda ecuación obtenemos: $c=-3$.

131. a) Compara las soluciones de la ecuación de segundo grado $3x^2-4x-4=0$ con las de la ecuación $-4x^2-4x+3=0$.

b) Demuestra que las soluciones de la ecuación $x^2+bx+2=0$ son inversas de las de la ecuación $2x^2+bx+1=0$.

c) Demuestra que las soluciones de la ecuación $ax^2+bx+c=0$ son inversas de las de la ecuación $cx^2+bx+a=0$.

a) $3x^2-4x-4=0\Rightarrow x=\frac{4\pm 8}{6}\Rightarrow x=2,\ x=-\frac{2}{3}$; $\qquad -4x^2-4x+3=0\Rightarrow x=\frac{4\pm 8}{-8}\Rightarrow x=-\frac{3}{2},\ x=\frac{1}{2}$

Las soluciones de una ecuación son inversas de las de la otra.

b) $x^2+bx+2=0\Rightarrow x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-8}}{2}$; $\qquad 2x^2+bx+1=0\Rightarrow x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-8}}{4}$

$$\frac{-b+\sqrt{b^2-8}}{2}\cdot\frac{-b-\sqrt{b^2-8}}{4}=\frac{(-b)^2-\left(b^2-8\right)}{8}=\frac{b^2-b^2+8}{8}=\frac{8}{8}=1$$

De la misma forma: $\frac{-b-\sqrt{b^2-8}}{2}\cdot\frac{-b+\sqrt{b^2-8}}{4}=\frac{(-b)^2-\left(b^2-8\right)}{8}=\frac{b^2-b^2+8}{8}=\frac{8}{8}=1$

Las soluciones de una ecuación son inversas de las de la otra.

c) $ax^2+bx+2=0\Rightarrow x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ab}}{2a}$; $\qquad cx^2+bx+a=0\Rightarrow x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2c}$

$$\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\cdot\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2c}=\frac{(-b)^2-\left(b^2-4ac\right)}{4ac}=\frac{4ac}{4ac}=1$$

Las soluciones son inversas una de la otra.

Y de la misma forma se comprueba la otra pareja de soluciones.

132. a) La ecuación polinómicas de tercer grado $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ tiene por raíces x_1, x_2 y x_3. Calcula, en función de *a*, *b*, *c* y *d*, los valores de:

i) $x_1 + x_2 + x_3$ **ii)** $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$ **iii)** $x_1x_2x_3$

b) Calcula tres números tales que la suma sea 3, la suma de los tres productos de dos de ellos sea –6 y el producto de los tres sea –8.

a) $ax^3 + bx^2 + cx + d = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) = a\left[x^3 - (x_1 + x_2 + x_3)x^2 + (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)x - x_1x_2x_3\right]$

Igualando coeficientes obtenemos: $x_1 + x_2 + x_3 = -\dfrac{b}{a}$, $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \dfrac{c}{a}$ y $x_1x_2x_3 = -\dfrac{d}{a}$.

b) Por el apartado anterior, tomando $a = 1$, los números buscados son las soluciones de la ecuación de tercer grado $x^3 - 3x^2 - 6x + 8 = 0$, por tanto, los números son $x_1 = 1$, $x_2 = 4$ y $x_3 = -2$.

133. Calcula el conjunto de números reales que cumplen la siguiente condición: $|x - 2| \le |x - 6|$. Para ello:

a) Calcula el punto que equidista de 2 y de 6

b) Razona cuáles son los puntos que están más cerca de 2 que de 6.

a) El punto que equidista de 2 y de 6 es 4.

b) $|x - 2|$ representa la distancia del punto *x* al punto 2 y $|x - 6|$ representa la distancia del punto *x* al punto 6.

Por tanto, se buscan los puntos cuya distancia a 2 sea más pequeña que su distancia a 6. Éstos son los puntos menores que 4, es decir, la solución es $x \in (-\infty, 4]$

CUESTIONES

134. Para cada caso, escribe una ecuación de segundo grado que cumpla:

a) Que no tenga ninguna solución real.

b) Que tenga una única solución real doble.

c) Que la suma de las raíces sea 7, y el producto, –60.

d) Que el producto de las raíces sea el doble que su suma.

a) $x^2 + 1 = 0$ **b)** $x^2 - 2x + 1 = 0$ **c)** $x^2 - 7x - 60 = 0$ **d)** $x^2 - x + 2 = 0$

135. Escribe dos polinomios diferentes que tengan las mismas raíces:

a) Si son del mismo grado.

b) Si tienen diferente grado.

a) $P(x) = x^2 - 4$, $Q(x) = 2x^2 - 8$ **b)** $P(x) = x$, $Q(x) = x^3 + x$

136. Demuestra que la ecuación $x^2 + (2\lambda - 1)x - \lambda = 0$ tiene dos soluciones reales diferentes para cualquier valor del parámetro λ.

El discriminante de la ecuación es $\Delta = b^2 - 4ac = (2\lambda - 1)^2 + 4\lambda = 4\lambda^2 + 1$.

Es siempre estrictamente positivo, por lo tanto, la ecuación tiene dos soluciones reales diferentes.

137. Dada la ecuación de segundo grado $\lambda x^2+(2+2\lambda)x+\lambda=0$ dependiente del parámetro λ, se pide:

a) Calcular los valores de λ para que la ecuación tenga dos soluciones reales distintas.

b) Calcular los valores de λ para que la ecuación tenga una única solución real doble.

a) Calcular los valores de λ para que la ecuación no tenga ninguna solución real.

El discriminante de la ecuación es $\Delta=b^2-4ac=(2\lambda+2)^2-4\lambda^2=8\lambda+4$. Por tanto:

a) Si $\lambda>-\frac{1}{2}$ la ecuación tiene dos soluciones reales.

b) Si $\lambda=-\frac{1}{2}$ la ecuación tiene una única solución real doble.

c) Si $\lambda<-\frac{1}{2}$ la ecuación no tiene solución real.

138. Un sistema de dos ecuaciones y tres incógnitas.

a) ¿Puede ser incompatible? Pon un ejemplo.

b) ¿Puede ser compatible indeterminado? Pon un ejemplo.

c) ¿Puede ser compatible determinado? Pon un ejemplo.

a) $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+y+z=0 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+y+2z=1 \end{cases}$ **c)** No puede ser compatible determinado.

139. a) A la hora de resolver una ecuación racional en el que la incógnita aparece en algún denominador, puede obtenerse alguna solución falsa. ¿Cuál es la razón?

b) A la hora de resolver una ecuación irracional puede obtenerse alguna solución falsa. ¿Cuál es la razón?

a) Al quitar denominadores se puede estar introduciendo soluciones que anulen dicho denominador y sean falsas por no estar definida la división entre cero.

b) Al elevar al cuadrado los dos miembros de una ecuación, se pueden introducir soluciones falsas ya que dichos miembros podrían ser iguales en valor absoluto pero con diferente signo.

140. Con la ayuda del desarrollo del binomio $(1+1)^n$, demuestra que se verifica la igualdad:

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\ldots+\binom{n}{n}=2^n$$

$$2^n=(1+1)^n=\binom{n}{0}1^n\cdot1^0+\binom{n}{1}1^{n-1}\cdot1+\binom{n}{2}1^{n-2}\cdot1^2+\ldots+\binom{n}{n}1^0\cdot1^n=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\ldots+\binom{n}{n}$$

141. a) ¿Cuáles son las condiciones que deben verificar los coeficientes b y c del polinomio $P(x)=x^2+bx+c$ para que sea un cuadrado perfecto?

b) ¿Cuáles son las condiciones que deben verificar los coeficientes a, b y c del polinomio $P(x)=ax^2+bx+c$ para que sea un cuadrado perfecto?

a) $P(x)$ debe tener una única solución real. Por tanto, $b^2-4c=0$ y $P(x)=\left(x+\frac{b}{2}\right)^2$

b) $P(x)$ debe tener una única solución real. Por tanto, $b^2-4ac=0$ y $P(x)=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\left(\sqrt{a}x+\frac{b\sqrt{a}}{2a}\right)^2$

142. Calcula, en función de *a*, *b* y *c*, la suma de las inversas de las soluciones de la ecuación de segundo grado $ax^2 + bx + c = 0$

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}=\frac{-\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}}=-\frac{b}{c}$$

143. Demuestra que se cumple: $\log_x A = \log_{x^2} A^2$

$$\log_{x^2} A^2=\frac{\log A^2}{\log x^2}=\frac{2\log A}{2\log x}=\frac{\log A}{\log x}=\log_x A$$

PROBLEMAS

144. Si se divide un número por 5 y por 13 y se suman los cocientes, el resultado es 72. Halla dicho número.

Sea x el número desconocido: $\frac{x}{5}+\frac{x}{13}=72 \Rightarrow 13x+5x=4680 \Rightarrow x=\frac{4680}{18}=260$

145. Si sumamos cuatro números impares consecutivos obtenemos como resultado 72. ¿Cuáles son estos números?

Sean x, $x+2$, $x+4$, $x+6$ los números buscados. Se tiene que:

$x+x+2+x+4+x+6=72 \Rightarrow 4x+12=72 \Rightarrow x=\frac{60}{4}=15$. Por tanto, los números buscados son: 15, 17, 19 y 21.

146. La suma de un número positivo más el valor de su raíz cuadrada coincide con el triple de dicho número. ¿De qué número de trata?

Sea x el número desconocido: $x+\sqrt{x}=3x \Rightarrow \sqrt{x}=2x \Rightarrow x=4x^2 \Rightarrow x(4x-1)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=\frac{1}{4} \end{cases}$

147. La suma de un número de dos cifras más el que resulta al invertirlas es 99. ¿Cuánto vale la suma de las dos cifras de ese número?

Sea $[xy]_{10)}=10x+y$ el número desconocido. El número invertido será $[yx]_{10)}=10y+x$.

Se tiene que: $10x+y+10y+x=99 \Rightarrow 11x+11y=99 \Rightarrow x+y=9 \Rightarrow$ Las dos cifras suman 9.

148. a) Encuentra un número de tres cifras tales que la suma de los cuadrados de las dos cifras extremas es 65 y que si a dicho número se le añaden 297 unidades, el número que resulta se escribe al revés que el buscado.

b) ¿Cuántos números de este tipo hay?

a) Suponiendo que el número buscado es $[xyz]_{10)}=100x+10y+z$ tenemos:

$$\begin{cases} x^2+z^2=65 \\ 100x+10y+z+297=100z+10y+x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+z^2=65 \\ x-z=-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z=7 \Rightarrow \begin{cases} x=4 \\ x=-4 \text{ (No valida)} \end{cases} \\ z=-4 \text{ (No valida)} \end{cases}$$

Por tanto, un número que cumple las condiciones es 407.

b) El resultado no depende de y, por tanto, hay 10 posibles soluciones: 407, 417, 427, 437, 447, 457, 467, 477, 487 y 497.

149. Tres números están en progresión aritmética. Su suma vale 57 y la suma de sus cuadrados vale 1181. Calcula los tres números.

Sean los números buscados: $x-a$, x, $x+a$.

Tenemos: $x-a+x+x+a=57 \Rightarrow 3x=57 \Rightarrow x=19$

Por otra parte: $(19-a)^2+19^2+(19+a)^2=1181 \Rightarrow 2a^2=98 \Rightarrow a^2=49 \Rightarrow \begin{cases} a=7 \\ a=-7 \end{cases}$

En ambos casos, los números buscados son 12, 19 y 26.

150. De un número de tres cifras sabemos que su suma es 12, que la cifra de las unidades es igual a la semisuma de las cifras de las centenas y de las decenas, y, por último, que el número que resulta al invertir las cifras del buscado es 198 unidades más pequeño que este. ¿De qué número se trata?

Suponiendo que el número buscado es $[xyz]_{10)}=100x+10y+z$ y que, por tanto, el número que resulta al invertir sus cifras es $[zyx]_{10)}=100z+10y+x$, podemos escribir:

$$\begin{cases} x+y+z=12 \\ x+y-2z=0 \\ 99x-99z=198 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y+z=12 \\ x+y-2z=0 \\ x-z=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=6 \\ y=2 \\ z=4 \end{cases} \Rightarrow$$ El número buscado es el 624.

151. Se consideran los números $A=u^2+v^2$, $B=u^2-v^2$ y $C=2uv$ donde u y v son números enteros positivos.

a) Comprueba que para cualesquiera valores de u y v, los números A, B y C forman una terna pitagórica, es decir, que A, B y C pueden ser los lados de un triángulo rectángulo. ¿Cuáles son los catetos y cuál la hipotenusa?

b) Con la ayuda del apartado anterior, calcula los lados de un triángulo rectángulo sabiendo que sus longitudes son números enteros que suman 90 y que la suma de las longitudes de sus catetos vale 49.

c) Calcula tres números enteros que formen terna pitagórica, que sumen 132 y tales que la hipotenusa mida una unidad más que uno de los catetos.

a) La hipotenusa debe ser A, el número más grande, y los catetos B y C.

Comprobemos que se verifica el teorema de Pitágoras:

$$A^2=(u^2+v^2)^2=u^4+v^4+2u^2v^2=u^4+v^4-2u^2v^2+4u^2v^2=(u^2-v^2)^2+(2uv)^2=B^2+C^2$$

b) La hipotenusa vale $90-49=41$.

$41=25+16=5^2+4^2 \Rightarrow u=5,\ v=4 \Rightarrow A=41,\ B=9$ y $C=40$

c) $\begin{cases} A+B+C=132 \\ A=B+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u^2+v^2+u^2-v^2+2uv=132 \\ u^2+v^2=2uv+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2u^2+2uv=132 \\ 2uv=u^2+v^2-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u^2+uv=66 \\ (u-v)^2=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u^2+uv=66 \\ u=1+v \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow u=6,\ v=5 \Rightarrow A=61,\ B=11$ y $C=60$

152. Un padre tiene 48 años, y su hijo, 15. ¿Cuántos años han de pasar para que la edad del padre sea justo el doble de la del hijo?

Sean x los años que han de pasar: $48+x=2(15+x) \Rightarrow 48+x=30+2x \Rightarrow x=18$

Dentro de 18 años, la edad del padre será el doble de la del hijo.

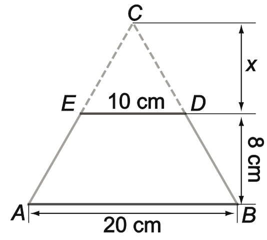
153. Las bases de un trapecio miden 10 y 20 cm, respectivamente, y la altura, 8. Calcula la altura del triángulo que resulta al prolongar los dos lados no paralelos del trapecio.

La superficie del trapecio es: $S_T = \frac{(20+10)\cdot 8}{2} = 120\ \text{cm}^2$

La superficie del triángulo *CED* es: $S_{CED} = \frac{10x}{2} = 5x$

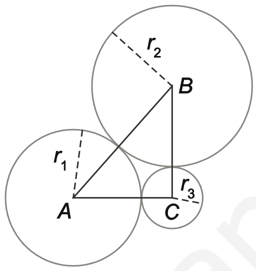
La superficie del triángulo *ABC* es: $S_{ABC} = \frac{20(x+8)}{2} = 10x + 80$

Por tanto, se tiene que: $10x + 80 - 5x = 120 \Rightarrow 5x = 120 - 80 = 40 \Rightarrow x = \frac{40}{5} = 8$



La altura del triángulo *ABC* es $8 + 8 = 16\ \text{cm}$

154. Los catetos de un triángulo rectángulo miden 27 y 36 cm. Tomando como centro cada uno de los vértices del triángulo se trazan tres circunferencias de forma que son tangentes exteriores dos a dos.



Calcula los radios de las tres circunferencias.

El valor de la hipotenusa es $\sqrt{36^2 + 27^2} = 45\ \text{cm}$, por tanto:

$$\begin{cases} r_1 + r_3 = 27 \\ r_2 + r_3 = 36 \\ r_1 + r_2 = 45 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r_1 = 18\ \text{cm} \\ r_2 = 27\ \text{cm} \\ r_3 = 9\ \text{cm} \end{cases}$$

155. Tres números están en progresión geométrica y su producto vale 1728. Si al número central se le añaden 8 unidades, los tres números pasan a estar en progresión aritmética. ¿Cuáles son estos tres números?

Sean $\frac{x}{r}$, x y rx los números buscados: $\frac{x}{r}\cdot x \cdot rx = 1728 \Rightarrow x = \sqrt[3]{1728} = 12$

Como $\frac{12}{r}$, 20 y $12r$ están en progresión aritmética, tenemos:

$$12r - 20 = 20 - \frac{12}{r} \Rightarrow 12r^2 - 40r + 12 = 0 \Rightarrow 3r^2 - 10r + 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} r = 3 \\ r = \frac{1}{3} \end{cases}$$

En ambos casos, los números buscados son 4, 12 y 36.

156. Las medidas de los cinco ángulos de un pentágono están en progresión aritmética. Calcúlalos sabiendo que el segundo más pequeño mide 88º.

Los ángulos son $88 - d$, 88, $88 + d$, $88 + 2d$ y $88 + 3d$.

Como la suma de los ángulos de un pentágono es (5 – 2)·180º = 540º, tenemos:

$$88 - d + 88 + 88 + d + 88 + 2d + 88 + 3d = 540 \Rightarrow d = 20$$

Por tanto, los ángulos valen 68º, 88º, 108º, 128º y 148º.

157. Hace cinco años, la edad de una madre era el triple de la de su hijo, y dentro de diez solo será el doble. Halla las edades actuales de ambos.

Sean $3x$ y x las edades de hace cinco años.

Las edades actuales son $3x + 5$ y $x + 5$, y las edades dentro de 10 años son $3x + 15$ y $x + 15$.

Por tanto, se tiene: $3x + 15 = 2(x + 15) \Rightarrow x = 15$

La edad actual de la madre es 50 años, y la del hijo, 20.

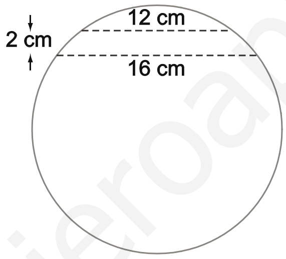
158. Un grupo de amigos debe pagar un total de 360 € por una reserva para un fin de semana en una casa rural. En el último momento cuatro amigos confirman que no podrán asistir, por lo que el resto del grupo deberá abonar, cada uno, 4,5 € más por la reserva. ¿Cuántos amigos disfrutarán del fin de semana en la casa rural? ¿Cuánto dinero aportará cada uno de los amigos?

Se x el número de amigos inicial e y el dinero que aporta, al principio, cada uno de ellos:

$$\begin{cases} xy = 360 \\ (x-4)(y+4{,}5) = 360 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} xy = 360 \\ 4{,}5x - 4y = 18 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 20 \\ y = 18 \end{cases}$$

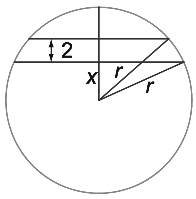
Finalmente, van 16 amigos a la casa rural y cada uno paga 22,5 €.

159. Las dos cuerdas paralelas dibujadas en la circunferencia de la figura miden 12 y 16 cm. La distancia entre ellas es de 2 cm.



Halla el radio de la circunferencia

Aplicando el teorema de Pitágoras:



$$\left.\begin{array}{l} 8^2 + x^2 = r^2 \\ 6^2 + (2+x)^2 = r^2 \end{array}\right\} \Rightarrow 64 + x^2 = 36 + 4 + x^2 + 4x \Rightarrow 4x = 24 \Rightarrow x = 6 \text{ cm} .$$

Por tanto, $r^2 = 64 + 36 = 100 \Rightarrow r = 10$ cm .

160. Si se disminuye en 10 cm el lado de un cuadrado, su área disminuye en 400 cm^2. ¿Cuál es el tamaño original del cuadrado?

Sea x el lado del cuadrado original. Su área es x^2.

Se tiene: $(x-10)^2 = x^2 - 400 \Rightarrow x^2 - 20x + 100 = x^2 - 400 \Rightarrow 20x = 500 \Rightarrow x = 25$ cm .

161. Dos ciudades *A* y *B*, unidas por una carretera, distan 111 km. Desde la ciudad *A* hacia la *B* sale un coche a 72 km/h y desde *B* sale hacia *A* otro coche a 76 km/h. ¿Cuánto tardarán en encontrarse?

Si los coches tardan t horas en encontrarse, en esas t horas el primer coche habrá recorrido x km y el segundo coche 111 – x. por tanto:

$$\frac{x}{72} = \frac{111-x}{76} \Rightarrow 76x = 7992 - 72x \Rightarrow 148x = 7992 \Rightarrow x = \frac{7992}{148} = 54 \text{ km} .$$

El tiempo que tardarán en encontrarse será: $\frac{54}{72} = 0{,}75$ horas = 45 minutos.

162. Desde un punto *A* sale una moto con velocidad 72 km/h. Diez minutos después sale, desde el mismo punto y a su encuentro, un coche con velocidad constante de 90 km/h. ¿Cuánto tardará en darle alcance?

Si tarda *t* horas en alcanzarle tenemos: $72\left(t+\frac{1}{6}\right)=90t \Rightarrow 72t+12=90t \Rightarrow t=\frac{2}{3}$ horas $=40$ minutos.

163. Se consideran tres barras homogéneas de metal compuestas de la siguiente forma:

Primera barra: 30 g de oro, 45 de plata y 75 de cobre.

Segunda barra: 60 g de oro, 30 de plata y 135 de cobre.

Tercera barra: 45 g de oro, 60 de plata y 75 de cobre.

¿Qué cantidad deberá tomarse de cada una de las barras para obtener otra que contenga 64,5 g de oro, 69 de plata y 136,5 de cobre?

En la primera barra se verifica que $\frac{30}{150}=\frac{2}{10}$ es oro, $\frac{45}{150}=\frac{3}{10}$ es plata y $\frac{75}{150}=\frac{5}{10}$ es cobre.

En la segunda se verifica que $\frac{60}{225}=\frac{4}{15}$ es oro, $\frac{30}{225}=\frac{2}{15}$ es plata y $\frac{135}{225}=\frac{9}{15}$ es cobre.

En la tercera se verifica que $\frac{45}{180}=\frac{3}{12}$ es oro, $\frac{60}{180}=\frac{4}{12}$ es plata y $\frac{75}{180}=\frac{5}{12}$ es cobre.

Supongamos que tomamos *x* g de la barra primera, *y* de la segunda y *z* de la tercera. Se puede escribir el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} \frac{2}{10}x+\frac{4}{15}y+\frac{3}{12}z=64,5 \\ \frac{3}{10}x+\frac{2}{15}y+\frac{4}{12}z=69 \\ \frac{5}{10}x+\frac{9}{15}y+\frac{5}{12}z=136,5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 12x+16y+15z=3870 \\ 18x+8y+20z=4140 \\ 30x+36y+25z=8190 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=90 \\ y=90 \\ z=90 \end{cases}$$

Por tanto, se deberán tomar 90 g de cada una de las barras.

164. Halla tres enteros consecutivos tales que al sumar los cuadrados de los dos primeros se obtenga el cuadrado del tercero.

Sean x, $x+1$ y $x+2$ los números buscados:

$$x^2+(x+1)^2=(x+2)^2 \Rightarrow x^2+x^2+2x+1=x^2+4x+4 \Rightarrow x^2-2x-3=0 \Rightarrow x=-1,\ x=3$$

Por tanto hay dos posibles soluciones: –1, 0 y 1 o 3, 4 y 5.

165. Se sabe que una cierta población de insectos se incrementa en un 9 % cada semana. Calcula el tiempo que ha de pasar para que la población se multiplique por cinco.

Sea *P* el número inicial de insectos. Al cabo de una semana se tendrán $P\cdot 1,09$. Al cabo de *t* semanas se tendrán $P\cdot 1,09^t$ insectos. Por tanto:

$$5P=P\cdot 1,09^t \Rightarrow 1,09^t=5 \Rightarrow t=\frac{\log 5}{\log 1,09}=18,676 \text{ semanas} \simeq 131 \text{ días.}$$

166. Si se colocan 5000 € a un 5 % de interés compuesto anual con capitalización anual, ¿cuánto tiempo tarda en aumentar en un 50 %? ¿Y si la capitalización es mensual?

$$1,5C=C\cdot 1,05^t \Rightarrow 1,05^t=1,5 \Rightarrow t=\frac{\log 1,5}{\log 1,05}=8,31 \text{ años.}$$

Si la capitalización es mensual tenemos:

$$1,5C=C\cdot(1+\frac{0,05}{12})^{12t} \Rightarrow 1,004167^{12t}=1,5 \Rightarrow t=\frac{\log 1,5}{12\cdot\log 1,004167}=8,13 \text{ años.}$$

167. En un concurso de matemáticas se propone una prueba de 25 preguntas. Cada una de ellas tiene 5 posibles respuestas de las que solo una es verdadera. Por cada respuesta acertada se obtienen 5 puntos; si se responde de forma errónea se obtienen 0 puntos, y si se deja una pregunta sin respuesta, se obtienen 2.

a) Escribe la expresión algebraica que determina la puntuación de un concursante llamando *x* al número de respuestas acertadas, e *y* al número de respuestas incorrectas.

b) Si de un concursante se sabe que ha obtenido 80 puntos, ¿cómo puede deducirse el número de respuestas acertadas, erróneas y no contestadas? Da dos ejemplos posibles.

c) En dos de las preguntas no contestadas, ese mismo concursante dudaba entre dos de las cinco opciones. ¿Qué puntuación habría obtenido en el caso de haberlas contestado de manera correcta?

a) La expresión algebraica que da la puntuación es: $P(x,y) = 5x + 2(25 - x - y) = 5x + 50 - 2x - 2y = 3x - 2y + 50$.

b) Si el concursante ha obtenido 80 puntos, se tiene que:

$$3x - 2y + 50 = 80 \Rightarrow 3x - 2y = 30 \Rightarrow y = \frac{3x - 30}{2} \Rightarrow y = \frac{3x}{2} - 15$$

Dos posibles ejemplos pueden ser:

$x = 10 \Rightarrow y = 0$, es decir, acierta 10 preguntas y no contesta ninguna de las otras 15.

$x = 12 \Rightarrow y = 3$, es decir, acierta 12 preguntas, falla 3 y no contesta 10.

c) Habría obtenido 6 puntos más, es decir, 86 puntos.

168. Se han comprado un determinado número de discos DVD vírgenes por una cantidad total de 17,25 €. Si se hubieran comprado discos de una calidad superior, cuyo precio es 0,40 € más caro por unidad, se deberían haber adquirido 8 menos para que el precio total no variase. ¿Cuántos discos se han comprado?

Sea *x* el número de discos adquiridos. El precio de cada uno es de $\frac{17,25}{x}$ euros.

Si se comprasen discos de una calidad superior, el precio de cada disco sería $\left(\frac{17,25}{x} + 0,4\right)$.

Por tanto, se tiene que:

$$\left(\frac{17,25}{x} + 0,4\right)(x - 8) = 17,25 \Rightarrow 17,25 + 0,4x - \frac{138}{x} - 3,2 = 17,25 \Rightarrow 0,4x^2 - 3,2x - 138 = 0 \Rightarrow\Rightarrow \begin{cases} x = 23 \\ x = -15 \text{ (No válida)} \end{cases}$$

Se han comprado 23 discos.

169. Para participar en las próximas competiciones locales de atletismo se deben pasar dos pruebas. En la primera se elimina al 60 % de los participantes, y en la segunda, a las dos terceras partes de los que quedan.

¿Cuántos participantes se apuntaron en un principio si después de las dos pruebas quedan 10 atletas para competir en la final?

Sea *x* el número de participantes iniciales.

Después de la primera prueba quedan 0,4*x*. Después de la segunda prueba quedan $\frac{0,4x}{3}$.

Por tanto, $\frac{0,4x}{3} = 10 \Rightarrow x = 75$.

Se apuntaron 75 participantes.

170. Un comerciante adquiere dos tipos de café para tostar, moler y, posteriormente, mezclar. El de mayor calidad tiene un precio de 9 €/kg, mientras que por el otro pagó 7,50€ por cada kilo. El comerciante quiere obtener una mezcla que salga a 8,40 €/kg.

¿Cuál deberá ser la proporción de los dos tipos de café?

Sea x la cantidad de café de mayor calidad en un kg de mezcla e y la cantidad del otro café en un kg de mezcla, tenemos:

$$\begin{cases} x+y=1 \\ 9x+7,5y=8,4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0,6 \\ y=0,4 \end{cases}$$

Por tanto, hay que mezclar 0,6 kg de café de mayor calidad por cada 0,4 kg del otro, es decir, hay que mezclar 3 kg de café de mejor calidad por cada 2 kg del otro.

171. Un almacenista trabaja con tres tipos de televisores. Cada televisor del primer tipo le cuesta 180 €, el del segundo tipo, 90 €, y el del tercer tipo, 30 €. Un pedido de 105 unidades tiene un importe total de 9600 €. Determina el número de televisores pedidos de cada clase sabiendo que el número de televisores del segundo tipo es el doble que los del primer y tercer tipo juntos.

Sean x el número de televisores del primer tipo e y el número de televisores del tercer tipo. El número de televisores del segundo tipo es $2(x + y)$.

Por tanto:

$$\begin{cases} x+2(x+y)+y=105 \\ 180x+90\cdot 2(x+y)+30y=9600 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x+3y=105 \\ 360x+210y=9600 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=35 \\ 12x+7y=32 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=15 \\ y=20 \end{cases}$$

Se pidieron 15 televisores del primer tipo, 70 del segundo y 20 del tercero.

172. Entre las 6 h y 9 h de la tarde la velocidad media contratada de bajada de archivos disminuye en 80 kB/s mientras que de 6 h a 9 h de la mañana, esta velocidad media se ve incrementada en 100 kB/s. Andrés se ha bajado un archivo en dos etapas. Por la mañana se ha bajado la primera parte del archivo de 12400 kB y por la tarde se ha bajado los restantes 11264 kB. En total, la bajada del archivo completo ha precisado exactamente de un minuto. ¿Cuál es la velocidad media de bajada contratada?

Sea v kB/s la velocidad media de bajada contratada. Se bajan 12400 kB con una velocidad de $v + 100$ y 11264 kB con velocidad $v – 80$. El tiempo total invertido es 60 segundos, por tanto:

$$\frac{12400}{v+100}+\frac{11264}{v-80}=60 \Rightarrow 60v^2-22464v-614400=0 \Rightarrow v=\frac{22464\pm 25536}{2}=11232\pm 12768$$

La única solución que tiene sentido es $v=11232+12768=24000$ kB/s.

173. Un ciclista está realizando un trayecto a favor del viento. En un primer tramo, el viento le ayuda a razón de 1 km/h, y en un segundo tramo, le ayuda a razón de 2 km/h. El ciclista lleva una velocidad propia constante en todo el recorrido y tarda 2 horas y 36 minutos en hacer los 40 km. Posteriormente, en un mapa topográfico, el ciclista observa que los tramos están en proporción 3 a 2. Calcula la velocidad propia del ciclista.

Sea x la velocidad del ciclista. Sean y, $40 – y$ las longitudes de los tramos. El tiempo que el ciclista tarda en realizar el total del trayecto es: $\frac{y}{x+1}+\frac{40-y}{x+2}=2,6$.

La relación de los tramos es: $\frac{y}{40-y}=\frac{3}{2} \Rightarrow 2y=120-3y \Rightarrow y=24$.

Por tanto, $\frac{24}{x+1}+\frac{16}{x+2}=2,6 \Rightarrow 2,6x^2-32,2x-58,8=0 \Rightarrow x=\frac{32,2\pm 40,6}{5,2}$.

La única solución que tiene sentido es $x=\frac{32,2+40,6}{5,2}=14$ km/h.

PARA PROFUNDIZAR

174. Factoriza los siguientes polinomios.

a) $x^2+y^2+2xy-z^2$

b) $4x^2-9y^2-4z^2+12yz$

c) $4-9x^2-25y^2+30xy$

d) x^3-y^3

e) x^3+y^3

a) $x^2+y^2+2xy-z^2=(x+y)^2-z^2=(x+y-z)(x+y+z)$

b) $4x^2-9y^2-4z^2+12yz=4x^2-(3y-2z)^2=(2x+3y-2z)(2x-3y+2z)$

c) $4-9x^2-25y^2+30xy=4-(3x-5y)^2=(2+3x-5y)(2-3x+5y)$

d) $x^3-y^3=(x-y)(x^2+xy+y^2)$

e) $x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)$

175. Factoriza el polinomio $x^4+2x^3+4x^2+3x+2$ sabiendo que es el producto de dos polinomios irreducibles de segundo grado y que el coeficiente de primer grado del primero de los factores es 1.

$$x^4+2x^3+4x^2+3x+2=(x^2+x+a)(x^2+bx+c)=x^4+(b+1)x^3+(a+b+c)x^2+(c+ab)x+ac$$

$$\begin{cases} b+1=2 \\ a+b+c=4 \\ c+ab=3 \\ ac=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=1 \\ c=1 \end{cases} \Rightarrow P(x)=(x^2+x+1)(x^2+2x+1)$$

176. Resuelve las siguientes ecuaciones con valores absolutos.

a) $x-1+|-3x-3|=-3$

b) $2x-|x^2-1|=-2$

c) $|x-1|+|x+1|=1$

d) $|x^2-1|-2|x^2-9|=-7$

a) $$x-1+|-3x-3|=-3 \Rightarrow \begin{cases} x-1-3x-3=-3 & \text{si } x\le -1 \\ x-1+3x+3=-3 & \text{si } x>-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-\frac{1}{2} & \text{si } x\le -1 \\ x=-\frac{5}{4} & \text{si } x>-1 \end{cases} \Rightarrow \text{ No tiene solución.}$$

b) $$2x-|x^2-1|=-2 \Rightarrow \begin{cases} 2x-x^2+1=-2 & \text{si } x>1 \text{ o } x<-1 \\ 2x+x^2-1=-2 & \text{si } -1\le x\le 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2-2x-3=0 & \text{si } x>1 \text{ o } x<-1 \\ x^2+2x+1=0 & \text{si } -1\le x\le 1 \end{cases} \Rightarrow x=-1,\ x=3$$

c) $$|x-1|+|x+1|=1 \Rightarrow \begin{cases} -x+1-x-1=1 & \text{si } x<-1 \\ -x+1+x+1=1 & \text{si } -1\le x\le 1 \\ x-1+x+1=1 & \text{si } x>1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x=1 & \text{si } x<-1 \\ 2=1 & \text{si } -1\le x\le 1 \\ 2x=1 & \text{si } x>1 \end{cases} \Rightarrow \text{ No tiene solución}$$

d) $$|x^2-1|-2|x^2-9|=-7 \Rightarrow \begin{cases} x^2-1-2x^2+18=-7 & \text{si } x<-3 \\ x^2-1+2x^2-18=-7 & \text{si } -3\le x\le -1 \\ -x^2+1+2x^2-18=-7 & \text{si } -1<x<1 \\ x^2-1+2x^2-18=-7 & \text{si } 1\le x\le 3 \\ x^2-1-2x^2+18=-7 & \text{si } x>3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2=24 & \text{si } x<-3 \\ x^2=4 & \text{si } -3\le x\le -1 \\ x^2=10 & \text{si } -1<x<1 \\ x^2=4 & \text{si } 1\le x\le 3 \\ x^2=24 & \text{si } x>3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=\sqrt{24},\ x=-\sqrt{24},\ x=2,\ x=-2$$

177. Estudia si este sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas es compatible.

$$\begin{cases} x^2+y^2-z^2=-4 \\ xy+xz+yz=-5 \\ x+y+z=2 \end{cases}$$

Como $(x+y+z)^2 = x^2+y^2+z^2+2(xy+xz+yz)$, tenemos:

$2^2 = z^2-4+z^2+2\cdot(-5) \Rightarrow z^2=9 \Rightarrow z=3,\ \ z=-3$

Suponiendo que $z=3$, el sistema queda:

$$\begin{cases} x^2+y^2=5 \\ xy+3x+3y=-5 \\ x+y=-1 \end{cases}$$

Como $(x+y)^2 = x^2+y^2+2xy$, tenemos: $1=5+2xy \Rightarrow xy=-2$ y el sistema queda:

$$\begin{cases} x^2+y^2=5 \\ 3x+3y=-3 \\ x+y=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+y^2=5 \\ x+y=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1,\ y=-2,\ z=3 \\ x=-2,\ y=1,\ z=3 \end{cases}$$

Como el sistema tiene, al menos, dos soluciones, es compatible.

De hecho el sistema no tiene más soluciones, si suponemos que $z=-3$, el sistema queda:

$$\begin{cases} x^2+y^2=5 \\ xy-3x-3y=-5 \\ x+y=5 \end{cases}$$

Como $(x+y)^2 = x^2+y^2+2xy$, tenemos: $25=5+2xy \Rightarrow xy=10$ y el sistema queda:

$$\begin{cases} x^2+y^2=5 \\ 3x+3y=15 \\ x+y=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+y^2=5 \\ x+y=5 \end{cases} \Rightarrow \text{No tiene solución.}$$

178. Aplicando el método de Gauss, estudia y resuelve el siguiente sistema de cuatro ecuaciones lineales con cuatro incógnitas.

$$\begin{cases} x+3y-2z+2w=12 \\ 2x-2y-z+w=5 \\ 3x+y-2z-4w=16 \\ 3x-3z-3w=15 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+3y-2z+2w=12 \\ 2x-2y-z+w=5 \\ 3x+y-2z-4w=16 \\ 3x-3z-3w=15 \end{cases} \underset{\substack{E_2 \to E_2-2E_1 \\ E_3 \to E_3-3E_1 \\ E_4 \to E_4-3E_1}}{\Rightarrow} \begin{cases} x+3y-2z+2w=12 \\ -8y+3z-3w=-19 \\ -8y+4z-10w=-20 \\ -9y+3z-9w=-21 \end{cases} \underset{\substack{E_3 \to E_3-E_2 \\ E_4 \to 8E_4-9E_2}}{\Rightarrow} \begin{cases} x+3y-2z+2w=12 \\ -8y+3z-3w=-19 \\ z-7w=-1 \\ -3z-45w=3 \end{cases}$$

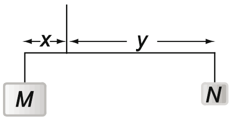
$$\underset{E_4 \to E_4+3E_3}{\Rightarrow} \begin{cases} x+3y-2z+2w=12 \\ -8y+3z-3w=-19 \\ z-7w=-1 \\ -66w=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=2 \\ z=-1 \\ w=0 \end{cases}$$

ENTORNO MATEMÁTICO

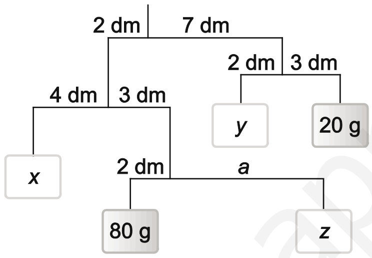
Álgebra para que el bebé esté contento

María y Antonio está de enhorabuena ¡han tenido una bebé! Pero, claro, las cosas al principio no son fáciles. ¡Martina no para de llorar! Se pasa el día y la noche gritando y solo cuando está agotada consigue dormir no más de dos horas; después, vuelta al llanto. La verdad es que María y Antonio empiezan a estar desesperados. Un feliz día, un amigo les comenta que a él le paso lo mismo con su hijo y que lo solucionó sin más que poner en su cuarto un colgante de techo. Pero han de tener sumo cuidado de que el colgante esté perfectamente equilibrado para que la niña deje de llorar. ¡Parece mentira, tan pequeños y ya tan exigentes!

Deciden probar la posible solución y el manitas de Antonio se dispone a diseñar un juego de colgantes sonoros. María, que es ingeniera, le recuerda que para que dos masas *M* y *N* colgadas en los extremos de una vara de masa despreciable estén en equilibrio, se debe verificar la igualdad: $xM = yN$

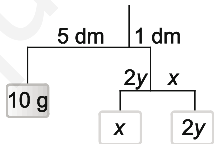


Con esta información, Antonio diseña un colgante con cinco figuras.



a) Calcula los valores de x, y, z y a para que el colgante que ha diseñado Antonio esté en equilibrio.

b) Como el diseño inicial parece difícil de hacer, Antonio decide simplificarlo y hacer uno de tres figuras. Para este otro colgador, calcula los posibles valores de x e y que se pueden poner teniendo en cuenta que deben ser números enteros.



a) Imponiendo las condiciones para el equilibrio obtenemos el sistema:

$$\begin{cases} 2\cdot 80 = az \\ 3(80+z) = 4x \\ 2y = 3\cdot 20 \\ 2(x+80+z) = 7(y+20) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} az = 160 \\ 4x - 3z = 240 \\ y = 30 \\ 2x + 2z - 7y = -20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 75 \text{ g} \\ y = 30 \text{ g} \\ z = 20 \text{ g} \\ a = 8 \text{ dm} \end{cases}$$

b) Imponiendo las condiciones para el equilibrio obtenemos el sistema:

$$\begin{cases} 5\cdot 10 = x + 2y \\ 2yx = 2yx \end{cases} \Rightarrow x + 2y = 50 \Rightarrow x = 50 - 2y$$

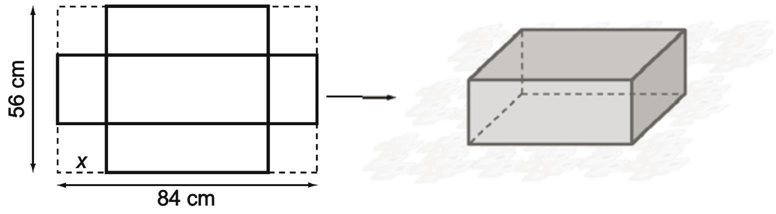
Como x e y deben ser enteros positivos, hay 24 posibles soluciones:

x	48	46	44	42	40	38	36	34	32	30	28	26
y	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

x	24	22	20	18	16	14	12	10	8	6	4	2
y	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24

Las cajas

Una vez resuelto el problema, María y Antonio quieren construir también un juego de cajas para guardar los juguetes de Martina. Para ello compran cartulinas de 84 cm × 56 cm. Para construir cada caja, recortan cuatro cuadrados iguales en las cuatro equinas y doblan tal y como muestra la figura.



a) Calcula expresiones algebraicas que determinen la superficie y el volumen de la caja sin tapa que se obtiene en función del lado x de los cuadrados recortados.

b) Elabora una hoja de cálculo tal que se muestre la superficie y el volumen de la caja para diferentes valores de x.

c) Con ayuda de la hoja de cálculo anterior, establece la longitud x que hace que el volumen de la caja sea máximo. ¿Cuánto vale la superficie en este caso?

a) $S = 84 \cdot 56 - 4x^2 = 4704 - 4x^2$

$V = x(84-2x)(56-2x) = 4x^3 - 280x^2 + 4704x$

b)

x	$S(x)$	$V(x)$
5	4604	17020
8	4448	21760
9	4380	22572
10	4304	23040
11	4220	23188
12	4128	23040
15	3804	21060
10,9	4228,76	23186,916
10,95	4224,39	23187,8295
10,97	4222,6364	23187,9867
10,98	4221,7584	23188,0208
10,99	4220,8796	23188,0252

c) El máximo volumen se obtiene al cortar cuadrados de 10,99 cm de lado. En este caso, el volumen será de 23 188 cm^3 y la superficie de 4220,9 cm^2.

AUTOEVALUACION

Comprueba qué has aprendido

1. Calcula el valor de a para que la división siguiente sea exacta.

$$\left(-2x^4 - 7x^3 + 20x^2 + 4ax - a\right) : \left(2x^2 - 3x - 3\right)$$

Al dividir los polinomios se obtiene como cociente $-x^2 - 5x + 1$ y como resto $4(a-3)x - (a-3)$.

Por tanto, para que la división sea exacta, $a - 3 = 0 \Rightarrow a = 3$

2. Factoriza el polinomio: $2x^5+4x^4-13x^3+10x^2-7x+4$

Al aplicar la regla de Ruffini, se obtienen las raíces $x=1$ (doble), $x=-4$ y un resto de segundo grado $2x^2+1$ que no tiene raíces reales.

Por tanto, $2x^5+4x^4-13x^3+10x^2-7x+4=(x-1)^2(x+4)(2x^2+1)$

3. Desarrolla el binomio: $\left(3-\sqrt{2}\right)^5$

$$\left(3-\sqrt{2}\right)^5=\binom{5}{0}\cdot 3^5-\binom{5}{1}\cdot 3^4\cdot\left(\sqrt{2}\right)+\binom{5}{2}\cdot 3^3\cdot\left(\sqrt{2}\right)^2-\binom{5}{3}\cdot 3^2\cdot\left(\sqrt{2}\right)^3+\binom{5}{4}\cdot 3\cdot\left(\sqrt{2}\right)^4-\binom{5}{5}\left(\sqrt{2}\right)^5=$$

$$=243-405\sqrt{2}+540-180\sqrt{2}+60-4\sqrt{2}=843-589\sqrt{2}$$

4. Simplifica las siguientes fracciones algebraicas.

a) $\dfrac{\frac{1}{2}x+1}{1+\frac{1}{x+1}}-\dfrac{1}{x+1}$ **b)** $\dfrac{2}{x-2}-\dfrac{6}{x^2-x-2}+\dfrac{1}{x+1}$

a) $\dfrac{\frac{1}{2}x+1}{1+\frac{1}{x+1}}-\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{\frac{x+2}{2}}{\frac{x+2}{x+1}}-\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{x+1}{2}-\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{(x+1)^2-2}{2(x+1)}=\dfrac{x^2+2x-1}{2x+2}$

b) $\dfrac{2}{x-2}-\dfrac{6}{x^2-x-2}+\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{2}{x-2}-\dfrac{6}{(x+1)(x-2)}+\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{2x+2-6+x-2}{(x+1)(x-2)}=\dfrac{3(x-2)}{(x+1)(x-2)}=\dfrac{3}{x+1}$

5. Resuelve las ecuaciones:

a) $\dfrac{2\sqrt{4x+8}}{3}-\sqrt{x+2}=1$

b) $\log(2x+1)+\log(x+1)=2\log(x-1)$

c) $\dfrac{49^x+343}{8}=7^{x+1}$

a) $\dfrac{2\sqrt{4x+8}}{3}-\sqrt{x+2}=1\Rightarrow 2\sqrt{4x+8}=3+3\sqrt{x+2}\Rightarrow 16x+32=9+9x+18+18\sqrt{x+2}\Rightarrow 18\sqrt{x+2}=7x+5\Rightarrow$

$\Rightarrow 324x+648=49x^2+25+70x\Rightarrow 49x^2-254x-623=0\Rightarrow x=\begin{cases}x=7\\ x=-\dfrac{89}{49}\ \text{(Falsa)}\end{cases}$

b) $\log(2x+1)+\log(x+1)=2\log(x-1)\Rightarrow\log(2x+1)(x+1)=\log(x-1)^2\Rightarrow 2x^2+3x+1=x^2-2x+1\Rightarrow x^2+5x=0\Rightarrow$

$\Rightarrow\begin{cases}x=0\ \text{(Falsa)}\\ x=-5\ \text{(Falsa)}\end{cases}$. La ecuación no tiene solución.

c) Hacemos el cambio $z=7^x$

$\dfrac{49^x+343}{8}=7^{x+1}\Rightarrow\left(7^x\right)^2+343=8\cdot 7^{x+1}\Rightarrow z^2-56z+343=0\Rightarrow z=\begin{cases}z=49\Rightarrow 7^x=49\Rightarrow x=2\\ z=7\Rightarrow 7^x=1\Rightarrow x=1\end{cases}$

6. Resuelve, si es posible, los sistemas:

a) $\begin{cases} x^2 + y^2 + xy = 7 \\ 2x + y = -1 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 2^x + 3^y = 7 \\ 4^x + 9^y = 25 \end{cases}$

a) $y = -1 - 2x$

$$x^2 + (-1-2x)^2 + x(-1-2x) = 7 \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1,\ y = -3 \\ x = -2,\ y = 3 \end{cases}$$

b) Hacemos el cambio $u = 2^x$, $v = 3^y$

$$\begin{cases} u + v = 7 \\ u^2 + v^2 = 25 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = 4,\ v = 3 \\ u = 3,\ v = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2,\ y = 1 \\ x = \dfrac{\log 3}{\log 2},\ y = \dfrac{\log 4}{\log 3} \end{cases}$$

7. Halla las soluciones de las inecuaciones:

a) $\dfrac{2x-3}{4} - \dfrac{x-8}{8} - 7x < \dfrac{161}{8}$ **b)** $\dfrac{x^2 - x - 6}{2x^2 + x - 6} \le 0$

a) $\dfrac{2x-3}{4} - \dfrac{x-8}{8} - 7x < \dfrac{161}{8} \Rightarrow 4x - 6 - x + 8 - 56x < 161 \Rightarrow -53x < 159 \Rightarrow x > -3 \Rightarrow$ Solución: $x \in (-3, +\infty)$

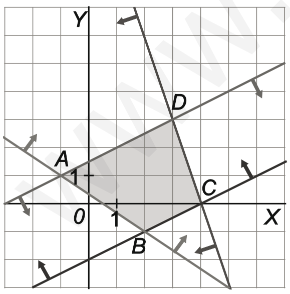
b) $\dfrac{x^2 - x - 6}{2x^2 + x - 6} \le 0 \Rightarrow \dfrac{(x+2)(x-3)}{(x+2)(2x-3)} \le 0 \Rightarrow \dfrac{x-3}{2x-3} \le 0 \Rightarrow$ Solución: $x \in \left(\dfrac{3}{2},\ 3\right]$

8. Resuelve los sistemas de inecuaciones:

a) $\begin{cases} 2(x-3) < -2x + 6 \\ \dfrac{x-3}{3} \ge 2x + 6 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 3x + y \le 12 \\ x - 2y \ge -3 \\ y \ge \dfrac{x}{2} - 2 \\ 2x + 3y \ge 1 \end{cases}$

a) $\begin{cases} 2(x-3) < -2x + 6 \\ \dfrac{x-3}{3} \ge 2x + 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x < 12 \\ 5x \le -21 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 3 \\ x \le -\dfrac{21}{5} \end{cases} \Rightarrow$ Solución: $x \in \left(-\infty \quad -\dfrac{21}{5}\right]$

b)



Vértices: $A(-1, 1)$ $B(2, -1)$ $C(4, 0)$ $D(3, 3)$

9. Para hacer un regalo de 36 € a un compañero cada uno de los amigos que participa debe pagar una cierta cantidad. Si se retiran dos amigos, los demás deben pagar 3 € más cada uno. ¿Cuánto debe pagar cada amigo finalmente?

En un principio hay x amigos que pagan y € cada uno, tenemos:

$\begin{cases} xy = 36 \\ (x-2)(y+3) = 36 \end{cases} \Rightarrow x = 6,\ y = 6 \Rightarrow$ Cada uno de los 4 amigos debe pagar 9 €.

Relaciona y contesta

Elige la única respuesta correcta en cada caso

1. ¿Cuál es la solución real de la siguiente ecuación?

$$5^x + 5^x + 5^x + 5^x + 5^x = \sqrt{625}$$

A. $x = 0$

B. $x = 1$

C. No tiene solución real.

D. Tiene infinitas soluciones reales.

$5^x + 5^x + 5^x + 5^x + 5^x = \sqrt{625} \Rightarrow 5 \cdot 5^x = 25 \Rightarrow 5^x = 5 \Rightarrow x = 1$, la respuesta B.

2. La factorización del polinomio $P(x) = 16x^4 - 81y^4$ es:

A. $(2x-3y)^4$

B. $(4x+9y)^2(4x-9y)^2$

C. $(2x-3y)(2x+3y)(4x^2+9y^2)$

D. $(8x^3-27y^3)(2x-3y)$

$16x^4 - 81y^4 = (4x^2-9y^2)(4x^2+9y^2) = (2x-3y)(2x+3y)(4x^2+9y^2)$, la respuesta C.

3. La ecuación $\log_2\sqrt{x+1} + \log_2 x = \log_2\sqrt{x-1} + \log_2(-x)$

A. Tiene una solución real.

B. Tiene dos soluciones reales.

C. Tiene infinitas soluciones reales.

D. No tiene solución real.

$\log_2\sqrt{x+1} + \log_2 x = \log_2\sqrt{x-1} + \log_2(-x) \Rightarrow \log_2 x\sqrt{x+1} = \log_2\left(-x\sqrt{x-1}\right) \Rightarrow x\sqrt{x+1} = -x\sqrt{x-1} \Rightarrow$

$\Rightarrow x^3 + x^2 = x^3 - x^2 \Rightarrow 2x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$ (Falsa), la respuesta D.

Señala, en cada caso, las respuestas correctas

4. Se considera la inecuación $\dfrac{x-1}{x+2} \geq 2$

A. El valor $x = -3$ forma parte de la solución.

B. Los valores $x = -1$ y $x = 1$ forman parte de la solución.

C. El valor $x = -5$ forma parte de la solución pero el valor $x = -2$ no.

D. Los valores $x = -2$ y $x = -5$ forman parte de la solución.

$\dfrac{x-1}{x+2} \geq 2 \Rightarrow \dfrac{x-1}{x+2} - 2 \geq 0 \Rightarrow \dfrac{x+5}{x+2} \leq 0 \Rightarrow$ Solución: $x \in [-5, -2)$, por tanto, las respuestas correctas son A y C.

5. Se considera el sistema de ecuaciones $\begin{cases} 2x+y-z=2 \\ 3x-2y+z=2 \end{cases}$.

A. Si se añade la ecuación $5x-y=0$ el sistema no tiene solución.

B. Si se añade la ecuación $5x-y=4$ el sistema tiene infinitas soluciones.

C. Si se añade la ecuación $x+y+z=0$ el sistema tiene infinitas soluciones entre las que se encuentra $x=1$, $y=1$, $z=1$.

D. Ninguna de las afirmaciones anteriores es cierta.

Sumando las ecuaciones del sistema obtenemos $5x-y=4$, por lo tanto A y B son correctas.

Para comprobar si lo es C resolvemos el sistema

$\begin{cases} 2x+y-z=2 \\ 3x-2y+z=2 \\ x+y+z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{10}{13} \\ y=-\dfrac{2}{13} \\ z=-\dfrac{8}{13} \end{cases}$, por lo que C no es correcta. Por tanto, las respuestas correctas son A y B.

Elige la relación correcta entre las dos afirmaciones dadas

6. Se consideran las afirmaciones:

1. ***x*** **es un número que verifica la expresión:** $A(x)=B(x)$

2. ***x*** **es un número que verifica:** $[A(x)]^2=[B(x)]^2$

A. $1 \Leftrightarrow 2$ **B.** $1 \Rightarrow 2$ pero $2 \not\Rightarrow 1$ **C.** $2 \Rightarrow 1$ pero $1 \not\Rightarrow 2$ **D.** Nada de lo anterior

Obviamente $1 \Rightarrow 2$, pero el recíproco no es cierto, si $[A(x)]^2=[B(x)]^2$ puede ser $A(x)=B(x)$ o $A(x)=-B(x)$, por tanto la relación correcta es B.

Señala el dato innecesario para contestar

7. Se requiere calcular el valor numérico en $x=a$ **e** $y=b$ **de:**

$$\frac{1}{\frac{y}{x}-\frac{1}{x}} : \frac{x^2-2x+1}{xy-x-y+1}$$

Para ello se aportan los datos: 1. $a=3$ **2.** $b=-3$

A. El dato 1 es innecesario.

B. El dato 2 es innecesario.

C. Son necesarios los dos datos.

D. Son innecesarios los dos datos.

$$\frac{1}{\frac{y}{x}-\frac{1}{x}} : \frac{x^2-2x+1}{xy-x-y+1} = \frac{x}{y-1} : \frac{(x-1)^2}{(x-1)(y-1)} = \frac{x}{x-1}$$

Por tanto, la respuesta correcta es B.

3 Trigonometría

EJERCICIOS PROPUESTOS

1 y 2. Ejercicios resueltos.

3. Expresa en radianes las siguientes medidas angulares.

a) 30º

b) 60º

c) 200º

d) 330º

a) $30^\circ = \frac{30^\circ \pi}{180^\circ} = \frac{\pi}{6}$ rad

b) $60^\circ = \frac{60^\circ \pi}{180^\circ} = \frac{\pi}{3}$ rad

c) $200^\circ = \frac{200^\circ \pi}{180^\circ} = \frac{10\pi}{9}$ rad

d) $330^\circ = \frac{330^\circ \pi}{180^\circ} = \frac{11\pi}{6}$ rad

4. Halla la medida en grados de los siguientes ángulos.

a) $\frac{7\pi}{3}$ rad

b) $\frac{3\pi}{2}$ rad

c) 4 rad

d) 4π rad

a) $\frac{7\pi}{3}$ rad $= \frac{7\pi \cdot 180^\circ}{3\pi} = 420^\circ$

b) $\frac{3\pi}{2}$ rad $= \frac{3\pi \cdot 180^\circ}{2\pi} = 270^\circ$

c) 4 rad $= \frac{4 \cdot 180^\circ}{\pi} = 229^\circ\ 11'$

d) 4π rad $= \frac{4\pi \cdot 180^\circ}{\pi} = 720^\circ$

5. Determina las razones trigonométricas de los ángulos de un triángulo cuyos lados miden 6, 8 y 10 cm, respectivamente.

Se trata de un triángulo rectángulo, pues verifica el teorema de Pitágoras: $10^2 = 6^2 + 8^2$

$\text{sen}\ \hat{A} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$ $\cos \hat{A} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$ $\text{tg}\ \hat{A} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$

$\text{sen}\ \hat{B} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$ $\cos \hat{B} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$ $\text{tg}\ \hat{B} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$

6. Calcula las razones trigonométricas de los ángulos agudos de estos triángulos.

a) $\hat{A} = 90º$, $b = 10$ cm, $c = 12$ cm **b)** $\hat{B} = 90º$, $b = 15$ cm, $c = 12$ cm **c)** $\hat{C} = 90º$, $b = 12$ cm, $c = 20$ cm

a) $a = \sqrt{10^2 + 12^2} = \sqrt{244} = 2\sqrt{61}$ cm

$\text{sen}\,\hat{B} = \frac{b}{a} = \frac{10}{2\sqrt{61}} = \frac{5\sqrt{61}}{61}$ $\cos\hat{B} = \frac{c}{a} = \frac{12}{2\sqrt{61}} = \frac{6\sqrt{61}}{61}$ $\text{tg}\,\hat{B} = \frac{b}{c} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$

$\text{sen}\,\hat{C} = \frac{c}{a} = \frac{12}{2\sqrt{61}} = \frac{6\sqrt{61}}{61}$ $\cos\hat{C} = \frac{b}{a} = \frac{10}{2\sqrt{61}} = \frac{5\sqrt{61}}{61}$ $\text{tg}\,\hat{C} = \frac{c}{b} = \frac{12}{10} = \frac{6}{5}$

b) $a = \sqrt{15^2 - 12^2} = \sqrt{81} = 9$ cm

$\text{sen}\,\hat{A} = \frac{a}{b} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$ $\cos\hat{A} = \frac{c}{b} = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}$ $\text{tg}\,\hat{A} = \frac{a}{c} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$

$\text{sen}\,\hat{C} = \frac{c}{b} = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}$ $\cos\hat{C} = \frac{a}{b} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$ $\text{tg}\,\hat{C} = \frac{c}{a} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$

c) $a = \sqrt{20^2 - 12^2} = \sqrt{256} = 16$ cm

$\text{sen}\,\hat{A} = \frac{a}{c} = \frac{16}{20} = \frac{4}{5}$ $\cos\hat{A} = \frac{b}{c} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$ $\text{tg}\,\hat{A} = \frac{a}{b} = \frac{16}{12} = \frac{4}{3}$

$\text{sen}\,\hat{B} = \frac{b}{c} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$ $\cos\hat{B} = \frac{a}{c} = \frac{16}{20} = \frac{4}{5}$ $\text{tg}\,\hat{B} = \frac{b}{a} = \frac{12}{16} = \frac{3}{4}$

7. Calcula las razones inversas del ángulo menor en el triángulo rectángulo cuyos catetos midan 5 y 10 cm.

Hipotenusa: $a = \sqrt{5^2 + 10^2} = 5\sqrt{5}$ cm. El ángulo de menor amplitud es el opuesto al cateto menor, por tanto:

$\text{cosec}\,\alpha = \frac{5\sqrt{5}}{5} = \sqrt{5}$ $\sec\alpha = \frac{5\sqrt{5}}{10} = \frac{\sqrt{5}}{2}$ $\text{cotg}\,\alpha = \frac{10}{5} = 2$

8. Ejercicio resuelto.

9. Halla los ángulos reducidos y las razones trigonométricas de estos ángulos.

a) 3990º **b)** 9π **c)** 25200º **d)** $\frac{121\pi}{4}$

a) Se calcula el ángulo reducido: $3990º : 360º = 11{,}08\overset{\frown}{3}$ y $0{,}08\overset{\frown}{3} \cdot 360º = 30º$

$\text{sen}\,3990º = \text{sen}\,30º = \frac{1}{2}$ $\cos 3990º = \cos 30º = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\text{tg}\,3990º = \text{tg}\,30º = \frac{\sqrt{3}}{3}$

b) Se calcula el ángulo reducido: $9\pi : 2\pi = 4{,}5$ rad y $0{,}5 \cdot 2\pi = \pi$ rad

$\text{sen}\,9\pi = \text{sen}\,\pi = 0$ $\cos 9\pi = \cos\pi = -1$ $\text{tg}\,9\pi = \text{tg}\,\pi = 0$

c) Se calcula el ángulo reducido: 25 200º : 360º = 70 y 0 · 360º = 0º

$\text{sen}\,25\,200º = \text{sen}\,0º = 0$ $\cos 25\,200º = \cos 0º = 1$ $\text{tg}\,25\,200º = \text{tg}\,0º = 0$

d) Se calcula el ángulo reducido: $\frac{121\pi}{4} : 2\pi = 15{,}125$ rad y $0{,}125 \cdot 2\pi = \frac{\pi}{4}$ rad

$\text{sen}\frac{121\pi}{4} = \text{sen}\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\cos\frac{121\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\text{tg}\frac{121\pi}{4} = \text{tg}\frac{\pi}{4} = 1$

10. Halla el signo de todas las razones trigonométricas de:

a) 120º **c)** 256º **e)** 315º

b) –70º **d)** 800º **f)** –460º

α	120º	–70º	256º	800º	315º	–460º
Cuadrante	II	IV	III	I	IV	III
$\text{sen}\,\alpha$ y $\text{cosec}\,\alpha$	+	–	–	+	–	–
$\cos\alpha$ y $\sec\alpha$	–	+	–	+	+	–
$\text{tg}\,\alpha$ y $\text{cotg}\,\alpha$	–	–	+	+	–	+

11. Para los siguientes ángulos, indica el signo de todas sus razones trigonométricas.

a) $\frac{3\pi}{4}$ **c)** $\frac{4\pi}{3}$ **e)** $-\frac{9\pi}{4}$

b) $\frac{11\pi}{3}$ **d)** $-\frac{7\pi}{6}$ **f)** $-\frac{5\pi}{3}$

α	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{3}$	$\frac{4\pi}{3}$	$-\frac{7\pi}{6}$	$-\frac{9\pi}{4}$	$-\frac{5\pi}{3}$
Cuadrante	II	IV	III	II	IV	I
$\text{sen}\,\alpha$ y $\text{cosec}\,\alpha$	+	–	–	+	–	+
$\cos\alpha$ y $\sec\alpha$	–	+	–	–	+	+
$\text{tg}\,\alpha$ y $\text{cotg}\,\alpha$	–	–	+	–	–	+

12 y 13. Ejercicios resueltos.

14. Calcula el valor de las siguientes razones trigonométricas reduciéndolas al primer cuadrante.

a) sen 150º **d)** tg 330º **g)** sen 240º

b) cos 225º **e)** cosec 135º **h)** cotg 300º

c) sen 840º **f)** tg 1800º **i)** sec 2295º

a) $\text{sen}\,150^\circ = \text{sen}\,30^\circ = \frac{1}{2}$

b) $\cos 225^\circ = -\cos 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

c) $\text{sen}\,840^\circ = \text{sen}\,60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

d) $\text{tg}\,330^\circ = -\text{tg}\,30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

e) $\text{cosec}\,135^\circ = \frac{1}{\text{sen}\,45^\circ} = \sqrt{2}$

f) $\text{tg}\,1800^\circ = \text{tg}\,0^\circ = 0$

g) $\text{sen}\,240^\circ = -\,\text{sen}\,60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

h) $\text{cotg}\,300^\circ = -\frac{1}{\text{tg}\,60^\circ} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

i) $\sec 2295^\circ = -\frac{1}{\cos 45^\circ} = -\sqrt{2}$

15. Calcula, en función de *h*, sen 303º sabiendo que cos 33º = *h*.

$\text{sen}\,303^\circ = -\text{sen}\,57^\circ = -\text{sen}\,(90^\circ - 33^\circ) = -\cos 33^\circ = -h$

16. Calcula el valor exacto de:

a) sen $\frac{3\pi}{4}$ **b)** sen $\frac{11\pi}{6}$ **c)** sen $\frac{4\pi}{3}$ **d)** sen $\frac{5\pi}{6}$

a) $\text{sen}\,\frac{3\pi}{4} = \text{sen}\,\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

b) $\text{sen}\,\frac{11\pi}{6} = -\text{sen}\,\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$

c) $\text{sen}\,\frac{4\pi}{3} = -\text{sen}\,\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

d) $\text{sen}\,\frac{5\pi}{6} = \text{sen}\,\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$

17. Ejercicio interactivo.

18 y 19. Ejercicios resueltos.

20. Calcula las restantes razones de α sabiendo que:

a) La cotangente de un ángulo $\alpha < 90º$ vale $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

b) $\sec\alpha = -5$ y $90º < \alpha < 180º$

c) $\text{cosec}\,\alpha = -2$ y $\alpha \in \text{III}$

a) Al ser un ángulo del primer cuadrante, todas las razones son positivas. Tenemos:

$$\text{cotg}\,\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \text{tg}\,\alpha = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

$$1 + \text{tg}^2\alpha = \sec^2\alpha \Rightarrow \sec\alpha = \sqrt{1+\text{tg}^2\alpha} = \sqrt{1+3} = 2 \Rightarrow \cos\alpha = \frac{1}{2}$$

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} \Rightarrow \text{sen}\,\alpha = \cos\alpha\,\text{tg}\,\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \text{cosec}\,\alpha = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

b) Al ser un ángulo del segundo cuadrante, el seno y la cosecante son positivos y el resto de razones son negativas. Tenemos:

$$\sec\alpha = -5 \Rightarrow \cos\alpha = -\frac{1}{5}$$

$$\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \text{sen}\,\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-\frac{1}{25}} = \frac{\sqrt{24}}{5} = \frac{2\sqrt{6}}{5} \Rightarrow \text{cosec}\,\alpha = \frac{5}{2\sqrt{6}} = \frac{5\sqrt{6}}{12}$$

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} = -2\sqrt{6} \Rightarrow \text{cotg}\,\alpha = -\frac{1}{2\sqrt{6}} = -\frac{\sqrt{6}}{12}$$

c) Al ser un ángulo del tercer cuadrante, el seno, coseno, cosecante y secante son negativas, y el resto de razones, positivas. Tenemos:

$$\text{cosec}\,\alpha = -2 \Rightarrow \text{sen}\,\alpha = -\frac{1}{2}$$

$$\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \cos\alpha = -\sqrt{1-\text{sen}^2\alpha} = -\sqrt{1-\frac{1}{4}} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \sec\alpha = -\frac{2}{\sqrt{3}} = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \text{cotg}\,\alpha = \sqrt{3}$$

21. Calcula la razón pedida en cada caso.

a) $\operatorname{sen}\alpha$, si $\operatorname{tg}\alpha = -3$ y $\alpha \in \text{II}$ **b)** $\operatorname{tg}\alpha$, si $\cos\alpha = \frac{4}{5}$ y $\alpha \in \text{IV}$ **c)** $\cos\alpha$, si $\operatorname{cotg}\alpha = 5$ y $\alpha \in \text{III}$

a) Al ser un ángulo del segundo cuadrante, el seno es positivo. Tenemos:

$$1+\operatorname{cotg}^2\alpha = \operatorname{cosec}^2\alpha = \frac{1}{\operatorname{sen}^2\alpha} \Rightarrow \operatorname{sen}\alpha = \sqrt{\frac{1}{1+\operatorname{cotg}^2\alpha}} = \sqrt{\frac{1}{1+\frac{1}{9}}} = \sqrt{\frac{9}{10}} = \frac{3\sqrt{10}}{10}$$

b) Al ser un ángulo del cuarto cuadrante, la tangente es negativa. Tenemos:

$$1+\operatorname{tg}^2\alpha = \sec^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = -\sqrt{\frac{1}{\cos^2\alpha}-1} = -\sqrt{\frac{25}{16}-1} = -\sqrt{\frac{9}{16}} = -\frac{3}{4}$$

c) Al ser un ángulo del tercer cuadrante, el coseno es negativo. Tenemos:

$$1+\operatorname{tg}^2\alpha = \sec^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow \cos\alpha = -\sqrt{\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} = -\sqrt{\frac{1}{1+\frac{1}{25}}} = -\sqrt{\frac{25}{26}} = -\frac{5\sqrt{26}}{26}$$

22 a 24. Ejercicios resueltos.

25. Transforma 15º y $\frac{5\pi}{12}$ rad en una suma o diferencia de ángulos y calcula sus razones trigonométricas.

$15^\circ = 60^\circ - 45^\circ$:

$$\operatorname{sen}15^\circ = \operatorname{sen}(60^\circ - 45^\circ) = \operatorname{sen}60^\circ\cos45^\circ - \cos60^\circ\operatorname{sen}45^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

$$\cos15^\circ = \cos(60^\circ - 45^\circ) = \cos60^\circ\cos45^\circ + \operatorname{sen}60^\circ\operatorname{sen}45^\circ = \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

$$\operatorname{tg}15^\circ = \operatorname{tg}(60^\circ - 45^\circ) = \frac{\operatorname{tg}60^\circ - \operatorname{tg}45^\circ}{1+\operatorname{tg}60^\circ\operatorname{tg}45^\circ} = \frac{\sqrt{3}-1}{1+\sqrt{3}} = -\frac{2\sqrt{3}-4}{2} = 2-\sqrt{3}$$

$\frac{5\pi}{12} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}$:

$$\operatorname{sen}\frac{5\pi}{12} = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right) = \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6} + \cos\frac{\pi}{4}\operatorname{sen}\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

$$\cos\frac{5\pi}{12} = \cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6} - \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\operatorname{sen}\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

$$\operatorname{tg}\frac{5\pi}{12} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}+\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}}{1-\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}} = \frac{1+\frac{\sqrt{3}}{3}}{1-\frac{\sqrt{3}}{3}} = 2+\sqrt{3}$$

26. Calcula tg 75º a partir del seno y del coseno.

$75^\circ = 45^\circ + 30^\circ$:

$$\operatorname{sen}75^\circ = \operatorname{sen}(45^\circ + 30^\circ) = \operatorname{sen}45^\circ\cos30^\circ + \cos45^\circ\operatorname{sen}30^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

$$\cos75^\circ = \cos(45^\circ + 30^\circ) = \cos45^\circ\cos30^\circ - \operatorname{sen}45^\circ\operatorname{sen}30^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

$$\operatorname{tg}75^\circ = \frac{\operatorname{sen}75^\circ}{\cos75^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}} = 2+\sqrt{3}$$

27. Demuestra que $\text{sen}\left(\alpha+\frac{3\pi}{2}\right)=-\cos\alpha$.

$$\text{sen}\left(\alpha+\frac{3\pi}{2}\right)=\text{sen}\alpha\cos\frac{3\pi}{2}+\cos\alpha\,\text{sen}\frac{3\pi}{2}=\text{sen}\alpha\cdot 0+\cos\alpha\cdot(-1)=-\cos\alpha$$

28 y 29. Ejercicios resueltos.

30. Determina el valor del seno, el coseno y la tangente de los ángulos 120º y $\frac{4\pi}{3}$ rad.

$$\text{sen}\,120^\circ=\text{sen}(2\cdot 60^\circ)=2\text{sen}\,60^\circ\cos 60^\circ=2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 120^\circ=\cos(2\cdot 60^\circ)=\cos^2 60^\circ-\text{sen}^2 60^\circ=\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=-\frac{1}{2}$$

$$\text{tg}\,120^\circ=\text{tg}(2\cdot 60^\circ)=\frac{2\text{tg}\,60^\circ}{1-\text{tg}^2 60^\circ}=\frac{2\sqrt{3}}{1-\left(\sqrt{3}\right)^2}=-\sqrt{3}$$

$$\text{sen}\frac{4\pi}{3}=\text{sen}\left(2\cdot\frac{2\pi}{3}\right)=2\text{sen}\frac{2\pi}{3}\cos\frac{2\pi}{3}=2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos\frac{4\pi}{3}=\cos\left(2\cdot\frac{2\pi}{3}\right)=\cos^2\frac{2\pi}{3}-\text{sen}^2\frac{2\pi}{3}=\left(-\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=-\frac{1}{2}$$

$$\text{tg}\frac{4\pi}{3}=\text{tg}\left(2\cdot\frac{2\pi}{3}\right)=\frac{2\text{tg}\frac{2\pi}{3}}{1-\text{tg}^2\frac{2\pi}{3}}=\frac{-2\sqrt{3}}{1-\left(-\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{3}$$

31. Desarrolla las expresiones de cos 3α y de tg 3α en función de las razones trigonométricas del ángulo α.

$$\cos 3\alpha=\cos(\alpha+2\alpha)=\cos\alpha\cos 2\alpha-\text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,2\alpha=\cos\alpha\left(\cos^2\alpha-\text{sen}^2\alpha\right)-\text{sen}\,\alpha\cdot 2\,\text{sen}\,\alpha\cos\alpha=$$

$$=\cos^3\alpha-\cos\alpha\,\text{sen}^2\alpha-2\,\text{sen}^2\alpha\cos\alpha=\cos^3\alpha-3\cos\alpha\,\text{sen}^2\alpha=\cos^3\alpha-3\cos\alpha(1-\cos^2\alpha)=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha$$

$$\text{tg}\,3\alpha=\text{tg}(\alpha+2\alpha)=\frac{\text{tg}\,\alpha+\text{tg}\,2\alpha}{1-\text{tg}\,\alpha\cdot\text{tg}\,2\alpha}=\frac{\text{tg}\,\alpha+\frac{2\,\text{tg}\,\alpha}{1-\text{tg}^2\alpha}}{1-\text{tg}\,\alpha\cdot\frac{2\,\text{tg}\,\alpha}{1-\text{tg}^2\alpha}}=\frac{\frac{\text{tg}\,\alpha-\text{tg}^3\alpha+2\,\text{tg}\,\alpha}{1-\text{tg}^2\alpha}}{\frac{1-\text{tg}^2\alpha-2\,\text{tg}^2\alpha}{1-\text{tg}^2\alpha}}=\frac{3\,\text{tg}\,\alpha-\text{tg}^3\alpha}{1-3\text{tg}^2\alpha}=\frac{\text{tg}\,\alpha\left(3-\text{tg}^2\alpha\right)}{1-3\,\text{tg}^2\alpha}$$

32. Si α es un ángulo del segundo cuadrante y sen $\alpha=\frac{3}{5}$, calcula las razones de $\frac{\alpha}{2}$.

El ángulo $\frac{\alpha}{2}$ es del primer cuadrante, por tanto sus razones trigonométricas son positivas. Tenemos:

$$\text{sen}\,\alpha=\frac{3}{5}\Rightarrow\cos\alpha=-\sqrt{1-\text{sen}^2\alpha}=-\sqrt{1-\frac{9}{25}}=-\frac{4}{5}$$

$$\text{sen}\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}=\sqrt{\frac{1+\frac{4}{5}}{2}}=\sqrt{\frac{9}{10}}=\frac{3\sqrt{10}}{10}$$

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}=\sqrt{\frac{1-\frac{4}{5}}{2}}=\sqrt{\frac{1}{10}}=\frac{\sqrt{10}}{10}$$

$$\text{tg}\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}=\sqrt{\frac{1+\frac{4}{5}}{1-\frac{4}{5}}}=\sqrt{9}=3$$

33. Calcula sen 32º suponiendo que sen 8º = 0,14.

$$\text{sen}\,8^\circ = 0{,}14 \Rightarrow \cos 8^\circ = \sqrt{1-\text{sen}^2 8^\circ} = \sqrt{1-0{,}14^2} = 0{,}99$$

$$\text{sen}\,16^\circ = \text{sen}(2\cdot 8^\circ) = 2\text{sen}\,8^\circ\cos 8^\circ = 2\cdot 0{,}14\cdot 0{,}99 = 0{,}2772 \Rightarrow \cos 16^\circ = \sqrt{1-\text{sen}^2 16^\circ} = 0{,}9608$$

$$\text{sen}\,32^\circ = \text{sen}(2\cdot 16^\circ) = 2\text{sen}\,16^\circ\cos 16^\circ = 2\cdot 0{,}2772\cdot 0{,}9608 \simeq 0{,}5327$$

34 y 35. Ejercicios resueltos.

36. Transforma en productos.

a) sen 55º + sen 15º **b)** sen 75º – sen 35º **c)** cos 125º + cos 85º **d)** cos 220º – cos 20º

a) $\text{sen}\,55^\circ + \text{sen}\,15^\circ = 2\,\text{sen}\dfrac{55^\circ+15^\circ}{2}\cos\dfrac{55^\circ-15^\circ}{2} = 2\,\text{sen}\,35^\circ\cos 20^\circ$

b) $\text{sen}\,75^\circ - \text{sen}\,35^\circ = 2\cos\dfrac{75^\circ+35^\circ}{2}\,\text{sen}\dfrac{75^\circ-35^\circ}{2} = 2\cos 55^\circ\,\text{sen}\,20^\circ$

c) $\cos 125^\circ + \cos 85^\circ = 2\cos\dfrac{125^\circ+85^\circ}{2}\cos\dfrac{125^\circ-85^\circ}{2} = 2\cos 105^\circ\cos 20^\circ$

d) $\cos 220^\circ - \cos 20^\circ = -2\,\text{sen}\dfrac{220^\circ+20^\circ}{2}\,\text{sen}\dfrac{220^\circ-20^\circ}{2} = -2\,\text{sen}\,120^\circ\,\text{sen}\,100^\circ$

37. Expresa en forma de sumas o diferencias.

a) sen 80º sen40º **b)** cos 25º cos 10º

a) $80^\circ = \dfrac{\hat{A}+\hat{B}}{2};\ 40^\circ = \dfrac{\hat{A}-\hat{B}}{2} \Rightarrow \hat{A} = 120^\circ;\ \hat{B} = 40^\circ$

$$\text{sen}\,80^\circ\,\text{sen}\,40^\circ = \frac{1}{2}\cdot 2\text{sen}\frac{120^\circ+40^\circ}{2}\,\text{sen}\frac{120^\circ-40^\circ}{2} = -\frac{1}{2}(\cos 120^\circ - \cos 40^\circ)$$

b) $25^\circ = \dfrac{\hat{A}+\hat{B}}{2};\ 10^\circ = \dfrac{\hat{A}-\hat{B}}{2} \Rightarrow \hat{A} = 35^\circ;\ \hat{B} = 15^\circ$

$$\cos 25^\circ\cos 10^\circ = \frac{1}{2}\cdot 2\cos\frac{35^\circ+15^\circ}{2}\cos\frac{35^\circ-15^\circ}{2} = \frac{1}{2}(\cos 35^\circ + \cos 15^\circ)$$

38. Comprueba que cos 75º + cos 45º = cos 15º.

$$\cos 75^\circ + \cos 45^\circ = 2\cos\frac{75^\circ+45^\circ}{2}\cos\frac{75^\circ-45^\circ}{2} = 2\cos 60^\circ\cos 15^\circ = 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\cos 15^\circ = \cos 15^\circ$$

39. Simplifica la siguiente expresión: $\dfrac{\cos 2x + \cos x}{\text{sen}\,2x + \text{sen}\,x}$

$$\frac{\cos 2x + \cos x}{\text{sen}\,2x + \text{sen}\,x} = \frac{2\cos\dfrac{2x+x}{2}\cos\dfrac{2x-x}{2}}{2\,\text{sen}\dfrac{2x+x}{2}\cos\dfrac{2x-x}{2}} = \frac{\cos\dfrac{3x}{2}}{\text{sen}\dfrac{3x}{2}} = \text{cotg}\frac{3x}{2}$$

40. Calcula el valor de: $\cos\dfrac{\pi}{6} + \cos\dfrac{\pi}{12} - 2\cos\dfrac{\pi}{24}\cos\dfrac{\pi}{8}$

$$\cos\frac{\pi}{6} + \cos\frac{\pi}{12} - 2\cos\frac{\pi}{24}\cos\frac{\pi}{8} = 2\cos\frac{\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{12}}{2}\cos\frac{\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{12}}{2} - 2\cos\frac{\pi}{24}\cos\frac{\pi}{8} = 2\cos\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{24} - 2\cos\frac{\pi}{24}\cos\frac{\pi}{8} = 0$$

41. Ejercicio interactivo.

42 a 46. Ejercicios resueltos.

47. Resuelve las siguientes ecuaciones y da los resultados en grados y en radianes.

a) $\operatorname{sen} x = 1$ **b)** $2\cos x + 1 = 0$ **c)** $\sqrt{3}\operatorname{tg} x - 1 = 0$

a) El seno de un ángulo vale 1 en 90º, 450º, 810º, etc.

Por tanto $x = 90º + 360ºk$ con $k \in \mathbb{Z}$ o, en radianes, $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$ con $k \in \mathbb{Z}$.

b) $2\cos x + 1 = 0 \Rightarrow \cos x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 120º + 360º k = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k \\ x = 240º + 360º k = \frac{4\pi}{3} + 2\pi k \end{cases} \forall k \in \mathbb{Z}$.

c) $\sqrt{3}\operatorname{tg} x - 1 = 0 \Rightarrow \operatorname{tg} x = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow x = 30º + 180º k = \frac{\pi}{6} + \pi k \ \forall k \in \mathbb{Z}$.

48. Resuelve las ecuaciones trigonométricas indicando las soluciones comprendidas en el intervalo [0, 2π].

a) $\operatorname{sen} x + \cos x = 0$ **b)** $\operatorname{sen} 2x - \operatorname{sen} x = 0$

a) $\operatorname{sen} x + \cos x = 0 \Rightarrow \operatorname{sen} x = -\cos x \Rightarrow \operatorname{tg} x = -1 \Rightarrow \begin{cases} x = 135º = \frac{3\pi}{4} \text{ rad} \\ x = 315º = \frac{7\pi}{4} \text{ rad} \end{cases}$

b) $\operatorname{sen} 2x - \operatorname{sen} x = 0 \Rightarrow 2\operatorname{sen} x \cos x - \operatorname{sen} x = 0 \Rightarrow \operatorname{sen} x(2\cos x - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \operatorname{sen} x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0º = 0 \text{ rad} \\ x = 180º = \pi \text{ rad} \\ x = 360º = 2\pi \text{ rad} \end{cases} \\ \cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 60º = \frac{\pi}{3} \text{ rad} \\ x = 300º = \frac{5\pi}{3} \text{ rad} \end{cases} \end{cases}$

49. Resuelve, dando las soluciones en el intervalo [0, 2π].

a) $\operatorname{sen} 6x - 2\operatorname{sen} 4x + \operatorname{sen} 2x = 0$ **b)** $2\operatorname{sen}^2 x + \cos 2x = 4\cos^2 x$

a) $\operatorname{sen}6x - 2\operatorname{sen}4x + \operatorname{sen}2x = 0 \Rightarrow 2\operatorname{sen}\frac{8x}{2}\cos\frac{4x}{2} - 2\operatorname{sen}4x = 0 \Rightarrow 2\operatorname{sen}4x\cos 2x - 2\operatorname{sen}4x = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2\operatorname{sen}4x(\cos 2x - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \operatorname{sen}4x = 0 \Rightarrow 4x = 0º + 180º k \Rightarrow x = 0º + 45º k \\ \cos 2x = 1 \Rightarrow 2x = 0º + 360º k \Rightarrow x = 0º + 180º k \end{cases}$ con $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$

Y si nos ceñimos al intervalo, $x = 0º$; $x = 45º$; $x = 90º$; $x = 135º$; $x = 180º$; $x = 225º$; $x = 270º$; $x = 315º$; $x = 360º$

b) $2\operatorname{sen}^2 x + \cos 2x = 4\cos^2 x \Rightarrow 2\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = 4\cos^2 x \Rightarrow \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 4\cos^2 x \Rightarrow 1 = 4\cos^2 x \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos^2 x = \frac{1}{4} \Rightarrow \cos x = \pm\frac{1}{2} \Rightarrow x = 60º$; $x = 120º$; $x = 240º$; $x = 300º$

50. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones en el intervalo [0, 2π].

a) $\begin{cases} \text{tg}(x+y)=\sqrt{3} \\ x+2y=\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$

b) $\begin{cases} \text{sen}\,x-\text{sen}\,y=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2} \\ \text{sen}\,x+\text{sen}\,y=\dfrac{\sqrt{3}+1}{2} \end{cases}$

a) $\begin{cases} \text{tg}(x+y)=\sqrt{3} \\ x+2y=\dfrac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=\dfrac{\pi}{3}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z} \\ x+2y=\dfrac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{\pi}{6}+2\pi k \\ y=\dfrac{\pi}{6}-\pi k \end{cases} k\in\mathbb{Z}$

La única solución en el intervalo [0, 2π] es $x=\dfrac{\pi}{6},\ y=\dfrac{\pi}{6}$.

b) Haciendo el cambio $u=\text{sen}\,x$, $v=\text{sen}\,y$ tenemos:

$$\begin{cases} u-v=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2} \\ u+v=\dfrac{\sqrt{3}+1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u=\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ v=\dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{sen}\,x=\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \text{sen}\,y=\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Hay cuatro soluciones en el intervalo [0, 2π]: $x=\dfrac{\pi}{3},\ y=\dfrac{\pi}{6}$; $x=\dfrac{2\pi}{3},\ y=\dfrac{\pi}{6}$; $x=\dfrac{\pi}{3},\ y=\dfrac{5\pi}{6}$ y $x=\dfrac{2\pi}{3},\ y=\dfrac{5\pi}{6}$

51 a 54. Ejercicios resueltos.

55. Calcula la longitud del lado *c* de un triángulo *ABC* sabiendo que *a* = 10 cm, $\hat{A}=45^\circ$ y $\hat{B}=100^\circ$.

Aplicando el teorema del seno:

$$\frac{a}{\text{sen}\,\hat{A}}=\frac{c}{\text{sen}\,\hat{C}}\Rightarrow c=\frac{a\,\text{sen}\,\hat{C}}{\text{sen}\,\hat{A}}=\frac{10\,\text{sen}\,35^\circ}{\text{sen}\,45^\circ}=8{,}11\ \text{cm}$$

56. Dado un triángulo *ABC* con *a* = 12 cm, *b* = 15 cm y $\hat{C}=35^\circ$.

a) ¿Cuál es la longitud del lado *c*?

b) ¿Cuál es su área?

a) Aplicando el teorema del coseno:

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\hat{C}=12^2+15^2-2\cdot12\cdot15\cos35^\circ=74{,}105\Rightarrow c=8{,}61\ \text{cm}$$

b) Área: $A=\dfrac{1}{2}ab\,\text{sen}\,\hat{C}=\dfrac{1}{2}\cdot12\cdot15\,\text{sen}\,35^\circ=51{,}62\ \text{cm}^2$

57. Resuelve los siguientes triángulos y calcula sus áreas.

a) $\hat{A}=80º,\ \hat{B}=40º,\ a=8$ dm

b) $\hat{A}=80º,\ a=10$ m, $b=5$ m

c) $a=10$ cm, $b=15$ cm, $c=20$ cm

d) $\hat{A}=75º,\ b=8$ mm, $c=12$ mm

a) $\hat{C}=180º-\hat{A}-\hat{B}=60º$

Aplicando el teorema del seno dos veces:

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\hat{A}}=\frac{b}{\operatorname{sen}\hat{B}}\Rightarrow b=\frac{a\operatorname{sen}\hat{B}}{\operatorname{sen}\hat{A}}=\frac{8\operatorname{sen}40º}{\operatorname{sen}80º}=5,22\ \text{dm}$$

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\hat{A}}=\frac{c}{\operatorname{sen}\hat{C}}\Rightarrow c=\frac{a\operatorname{sen}\hat{C}}{\operatorname{sen}\hat{A}}=\frac{8\operatorname{sen}60º}{\operatorname{sen}80º}=7,04\ \text{dm}$$

Área: $A=\frac{1}{2}ab\operatorname{sen}\hat{C}=\frac{1}{2}\cdot 8\cdot 5,22\cdot\operatorname{sen}60º=18,1\,\text{dm}^2$

b) Aplicando el teorema del seno:

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\hat{A}}=\frac{b}{\operatorname{sen}\hat{B}}\Rightarrow \operatorname{sen}\hat{B}=\frac{b\operatorname{sen}\hat{A}}{a}=\frac{5\operatorname{sen}80º}{10}\simeq 0,492\Rightarrow \hat{B}=29º\ 29'\ 55,34''$$

(La posibilidad $\hat{B}=150º\ 31'\ 40''$ no es válida)

$\hat{C}=180º-\hat{A}-\hat{B}=70º\ 30'\ 4,66''$

Aplicando el teorema del coseno:

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\hat{C}=10^2+5^2-2\cdot 10\cdot 5\cos 70º\ 30'\ 4,66''=91,621\Rightarrow c\simeq 9,57\ \text{m}$$

Área: $A=\frac{1}{2}ab\operatorname{sen}\hat{C}=\frac{1}{2}\cdot 10\cdot 5\cdot\operatorname{sen}70º\ 30'\ 4,66''\simeq 23,57\ \text{m}^2$

c) Aplicando el teorema del coseno dos veces:

$$\cos\hat{A}=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{15^2+20^2-10^2}{2\cdot 15\cdot 20}=0,875\Rightarrow \hat{A}=28º\ 57'\ 18''$$

$$\cos\hat{B}=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{10^2+20^2-15^2}{2\cdot 10\cdot 20}=0,6875\Rightarrow \hat{B}=46º\ 34'\ 3''$$

$\hat{C}=180º-\hat{A}-\hat{B}=104º\ 28'\ 39''$

Área: $A=\frac{1}{2}ab\operatorname{sen}\hat{C}=\frac{1}{2}\cdot 10\cdot 15\cdot\operatorname{sen}104º\,28'39''=72,62\ \text{cm}^2$

d) Aplicando el teorema del coseno dos veces:

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\hat{A}=8^2+12^2-2\cdot 8\cdot 12\cos 75º=158,307\Rightarrow a=12,58\ \text{mm}$$

$$\cos\hat{B}=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{12,58^2+12^2-8^2}{2\cdot 12,58\cdot 12}=0,789\Rightarrow \hat{B}=37º\ 53'\ 42''$$

$\hat{C}=180º-\hat{A}-\hat{B}=67º\ 6'\ 18''$

Área: $A=\frac{1}{2}bc\operatorname{sen}\hat{A}=\frac{1}{2}\cdot 8\cdot 12\cdot\operatorname{sen}75º=46,36\ \text{mm}^2$

58. Ejercicio interactivo.

59 a 71. Ejercicios resueltos.

EJERCICIOS

Medida de ángulos

72. Copia y completa las siguientes tablas.

Grados	30º		60º	
Radianes		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$

Grados	210º		240º	
Radianes		$\frac{5\pi}{4}$		$\frac{3\pi}{2}$

Grados		135º		180º
Radianes	$\frac{2\pi}{3}$		$\frac{5\pi}{6}$	

Grados		315º		360º
Radianes	$\frac{5\pi}{3}$		$\frac{11\pi}{6}$	

Grados	30º	45º	60º	90º
Radianes	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$

Grados	210º	225º	240º	270º
Radianes	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$

Grados	120º	135º	150º	180º
Radianes	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π

Grados	300º	315º	330º	360º
Radianes	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π

73. Pasa de grados a radianes.

a) 585º **b)** 450º **c)** 76º 52′ 30″ **d)** 382º 30′

a) $585^\circ = \frac{585^\circ\pi}{180^\circ} = \frac{13\pi}{4}$ rad

b) $450^\circ = \frac{450^\circ\pi}{180^\circ} = \frac{5\pi}{2}$ rad

c) $76^\circ 52' 30'' = \frac{76,875^\circ\pi}{180^\circ} = \frac{41\pi}{96}$ rad

d) $382^\circ 30' = \frac{382,5^\circ\pi}{180^\circ} = \frac{17\pi}{8}$ rad

74. Los siguientes ángulos están en radianes, pásalos a grados.

a) $\frac{41\pi}{3}$ rad **b)** 13π rad **c)** $\frac{11\pi}{12}$ rad **d)** 5 rad

a) $\frac{41\pi}{3}\text{ rad} = \frac{41\pi\cdot 180^\circ}{3\pi} = 2460^\circ$

b) $13\pi\text{ rad} = \frac{13\pi\cdot 180^\circ}{\pi} = 2340^\circ$

c) $\frac{11\pi}{12}\text{ rad} = \frac{11\pi\cdot 180^\circ}{12\pi} = 165^\circ$

d) $5\text{ rad} = \frac{5\cdot 180^\circ}{\pi} = 286^\circ\, 28'\, 44''$

Razones trigonométricas

75. Calcula las razones trigonométricas de los ángulos agudos de los siguientes triángulos rectángulos.

a) $\hat{A} = 90^\circ$, $a = 29$ cm, $b = 20$ cm

b) $\hat{B} = 90^\circ$, $a = 65$ cm, $c = 72$ cm

a) $c = \sqrt{29^2 - 20^2} = \sqrt{441} = 21$ cm

$\operatorname{sen} \hat{B} = \frac{b}{a} = \frac{20}{29}$ $\quad \cos \hat{B} = \frac{c}{a} = \frac{21}{29}$ $\quad \operatorname{tg} \hat{B} = \frac{b}{c} = \frac{20}{21}$

$\operatorname{sen} \hat{C} = \frac{c}{a} = \frac{21}{29}$ $\quad \cos \hat{C} = \frac{b}{a} = \frac{20}{29}$ $\quad \operatorname{tg} \hat{C} = \frac{c}{b} = \frac{21}{20}$

b) $b = \sqrt{65^2 + 72^2} = \sqrt{9409} = 97$ cm

$\operatorname{sen} \hat{A} = \frac{a}{b} = \frac{65}{97}$ $\quad \cos \hat{A} = \frac{c}{b} = \frac{72}{97}$ $\quad \operatorname{tg} \hat{A} = \frac{a}{c} = \frac{65}{72}$

$\operatorname{sen} \hat{C} = \frac{c}{b} = \frac{72}{97}$ $\quad \cos \hat{C} = \frac{a}{b} = \frac{65}{97}$ $\quad \operatorname{tg} \hat{C} = \frac{c}{a} = \frac{72}{65}$

76. Indica los siguientes ángulos como suma de un número entero de vueltas completas más el ángulo restante.

a) 2345º **b)** –1500º **c)** $\frac{46\pi}{3}$ rad **d)** $-\frac{52\pi}{7}$ rad

a) 2345º = 6 · 360º + 185º = 6 vueltas + 185º

b) –1500º = –5 · 360º + 300º = –5 vueltas + 300º

c) $\frac{46\pi}{3}$ rad $= 7 \cdot 2\pi + \frac{4\pi}{3}$ = 7 vueltas + $\frac{4\pi}{3}$ rad

d) $-\frac{52\pi}{7}$ rad $= -4 \cdot 2\pi + \frac{4\pi}{7}$ = –4 vueltas + $\frac{4\pi}{7}$ rad

77. Utiliza la calculadora para hallar el valor de las siguientes razones trigonométricas. Aproxima los resultados a las milésimas.

a) sen 36º **b)** tg 331º **c)** cotg 111º **d)** sen 25º 40′ **e)** sec 126º 33′ **f)** cotg 121º 22′ 45″

a) sen 36º = 0,588

b) tg 331º = –0,554

c) cotg 111º = –0,384

d) sen 25º 40′ = 0,433

e) sec 126º 33′ = –1,679

f) cotg 121º 22′ 45″ = –0,610

78. Utiliza la calculadora para hallar el valor de las siguientes razones trigonométricas. Aproxima los resultados a las milésimas. Ten en cuenta que todos los ángulos están dados en radianes.

a) sen $\frac{\pi}{12}$ **b)** cosec 2 **c)** cos $\frac{3\pi}{7}$ **d)** sec 3 **e)** tg $\frac{21\pi}{5}$ **f)** cotg 2,75

a) sen $\frac{\pi}{12}$ = 0,259

b) cosec 2 = 1,100

c) cos $\frac{3\pi}{7}$ = 0,223

d) sec 3 = –1,010

e) tg $\frac{21\pi}{5}$ = 0,727

f) cotg 2,75 = –2,422

79. Calcula, de forma exacta, el valor de las siguientes razones trigonométricas.

a) sen 240º **d)** sen 1215º **g)** $\text{tg}\ \frac{7\pi}{3}$ **j)** cotg 225º

b) cos 135º **e)** cosec 330º **h)** $\sec\ \frac{5\pi}{3}$ **k)** $\text{sen}\ \frac{7\pi}{4}$

c) cos(–600º) **f)** tg 300º **i)** sec 120º **l)** $\text{tg}(-15\pi)$

a) $\text{sen}\,240^\circ = -\text{sen}\,60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

b) $\cos 135^\circ = -\cos 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

c) $\cos(-600^\circ) = \cos 600^\circ = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$

d) $\text{sen}\,1215^\circ = \text{sen}\,135^\circ = \text{sen}\,45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$

e) $\text{cosec}\,330^\circ = -\text{cosec}\ 30^\circ = -2$

f) $\text{tg}\,300^\circ = -\text{tg}\ 60^\circ = -\sqrt{3}$

g) $\text{tg}\frac{7\pi}{3} = \text{tg}\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$

h) $\sec\frac{5\pi}{3} = \sec\frac{\pi}{3} = 2$

i) $\sec 120^\circ = -\sec 60^\circ = -2$

j) $\text{cotg}\ 225^\circ = \text{cotg}45^\circ = 1$

k) $\text{sen}\frac{7\pi}{4} = -\text{sen}\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

l) $\text{tg}(-15\pi) = -\text{tg}15\pi = -\text{tg}\,\pi = 0$

80. Calcula todas las razones trigonométricas del ángulo α sabiendo que:

a) Es un ángulo del primer cuadrante y $\cos\alpha = \frac{2}{3}$

b) Pertenece al segundo cuadrante y $\text{sen}\,\alpha = 0,25$

c) $180^\circ < \alpha < 270^\circ$ y $\text{tg}\,\alpha = \sqrt{2}$

d) $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$ y $\sec\alpha = \sqrt{2}$

e) $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ y $\text{cotg}\,\alpha = -3$

f) $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ y $\text{cosec}\,\alpha = -\frac{5}{2}$

a) Al ser un ángulo del primer cuadrante, todas las razones son positivas. Tenemos:

$$\cos\alpha = \frac{2}{3} \Rightarrow \sec\alpha = \frac{3}{2}$$

$$\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \text{sen}\,\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-\frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3} \Rightarrow \text{cosec}\,\alpha = \frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{5}$$

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\sqrt{5}}{2} \Rightarrow \text{cotg}\,\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

b) Al ser un ángulo del segundo cuadrante, el seno y la cosecante son positivos y el resto de razones son negativas. Tenemos:

$$\operatorname{sen}\alpha = 0,25 = \frac{1}{4} \Rightarrow \operatorname{cosec}\alpha = 4$$

$$\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \cos\alpha = -\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\alpha} = -\sqrt{1-\frac{1}{16}} = -\frac{\sqrt{15}}{4} \Rightarrow \sec\alpha = -\frac{4}{\sqrt{15}} = -\frac{4\sqrt{15}}{15}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = -\frac{1}{\sqrt{15}} = -\frac{\sqrt{15}}{15} \Rightarrow \operatorname{cotg}\alpha = -\sqrt{15}$$

c) Al ser un ángulo del tercer cuadrante, la tangente y la cotangente son positivos, y el resto de razones, negativas. Tenemos:

$$\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{2} \Rightarrow \operatorname{cotg}\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$1+\operatorname{tg}^2\alpha = \sec^2\alpha \Rightarrow \sec\alpha = -\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha} = -\sqrt{1+2} = -\sqrt{3} \Rightarrow \cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} \Rightarrow \operatorname{sen}\alpha = \cos\alpha\operatorname{tg}\alpha = -\frac{\sqrt{6}}{3} \Rightarrow \operatorname{cosec}\alpha = -\frac{3}{\sqrt{6}} = -\frac{\sqrt{6}}{2}$$

d) Al ser un ángulo del cuarto cuadrante, el coseno y la secante son positivos, y el resto de razones, negativas. Tenemos:

$$\sec\alpha = \sqrt{2} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \operatorname{sen}\alpha = -\sqrt{1-\cos^2\alpha} = -\sqrt{1-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \operatorname{cosec}\alpha = -\sqrt{2}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = -1 \Rightarrow \operatorname{cotg}\alpha = -1$$

e) Al ser un ángulo del segundo cuadrante, el seno y la cosecante son positivos y el resto de razones son negativas. Tenemos:

$$\operatorname{cotg}\alpha = -3 \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = -\frac{1}{3}$$

$$1+\operatorname{tg}^2\alpha = \sec^2\alpha \Rightarrow \sec\alpha = -\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha} = -\sqrt{1+\frac{1}{9}} = -\frac{\sqrt{10}}{3} \Rightarrow \cos\alpha = -\frac{3}{\sqrt{10}} = -\frac{3\sqrt{10}}{10}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} \Rightarrow \operatorname{sen}\alpha = \cos\alpha\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{10}}{10} \Rightarrow \operatorname{cosec}\alpha = \frac{10}{\sqrt{10}} = \sqrt{10}$$

f) Al ser un ángulo del tercer cuadrante, la tangente y la cotangente son positivos, y el resto de razones, negativas. Tenemos:

$$\operatorname{cosec}\alpha = -\frac{5}{2} \Rightarrow \operatorname{sen}\alpha = -\frac{2}{5}$$

$$\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \cos\alpha = -\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\alpha} = -\sqrt{1-\frac{4}{25}} = -\frac{\sqrt{21}}{5} \Rightarrow \sec\alpha = -\frac{5}{\sqrt{21}} = -\frac{5\sqrt{21}}{21}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \frac{2}{\sqrt{21}} = \frac{2\sqrt{21}}{21} \Rightarrow \operatorname{cotg}\alpha = \frac{\sqrt{21}}{2}$$

81. Calcula, en función de *h*, el valor de cada una de las siguientes razones trigonométricas.

a) sen 123º, siendo sen 57º = *h*. **d)** cos 250º, siendo sen 110º = *h*. **g)** tg 290º, siendo sen 110º = *h*.

b) cos 220º, siendo tg 40º = *h*. **e)** cos 247º, siendo sen 113º = *h*. **h)** sen 83º, siendo cos 7º = *h*.

c) tg 260º, siendo sen 80º = *h*. **f)** cosec 701º, siendo cotg 199º = *h*. **i)** sec 203º, siendo cotg 67º = *h*.

a) $\text{sen}\,123° = \text{sen}\,57° = h$

b) $1+\text{tg}^2\alpha = \sec^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow \cos 220° = -\sqrt{\dfrac{1}{1+\text{tg}^2\,220°}} = -\sqrt{\dfrac{1}{1+\text{tg}^2\,40°}} - \sqrt{\dfrac{1}{1+h^2}}$

c) $1+\text{tg}^2\alpha = \sec^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha} = \dfrac{1}{1-\text{sen}^2\alpha} \Rightarrow \text{tg}\,260° = \sqrt{\dfrac{1}{1-\text{sen}^2\,260°}-1} = \sqrt{\dfrac{1}{1-(-\text{sen}\,80°)^2}-1} = \sqrt{\dfrac{1}{1-h^2}-1} =$

$= \sqrt{\dfrac{h^2}{1-h^2}} = \dfrac{h}{\sqrt{1-h^2}}$

d) $\cos 250° = \cos 110° = -\sqrt{1-\text{sen}^2\,110°} = -\sqrt{1-h^2}$

e) $\cos 247° = -\sqrt{1-\text{sen}^2\,247°} = -\sqrt{1-(-\text{sen}\,113°)^2} = -\sqrt{1-h^2}$

f) $\text{cosec}\,701° = \text{cosec}\,341° = -\text{cosec}\,19° = \text{cosec}\,199° = -\sqrt{1+\text{cotg}^2 199°} = -\sqrt{1+h^2}$

g) $\text{tg}\,290° = \text{tg}\,110° = \sqrt{\dfrac{1}{1-\text{sen}^2\,110°}-1} = \sqrt{\dfrac{1}{1-h^2}-1} = \sqrt{\dfrac{h^2}{1-h^2}} = \dfrac{h}{\sqrt{1-h^2}}$

h) $\text{sen}\,83° = \cos 7° = h$

i) $\sec 203° = -\sec 23° = \dfrac{-1}{\cos 23°} = \dfrac{-1}{\text{sen}\,67°} = -\text{cosec}\,67° = -\sqrt{1+\text{cotg}^2\,67°} = -\sqrt{1+h^2}$

82. Determina la razón trigonométrica que se indica en cada caso, expresándola en función de *h*.

a) $\text{cosec}\dfrac{23\pi}{5}$, sabiendo que $\text{cotg}\dfrac{3\pi}{5} = -h^2$. **c)** tg 348º, sabiendo que cos 192º $= -h^2$.

b) $\sec 305°$, sabiendo que $\text{cotg}\,55° = \dfrac{1}{h}$.

a) $\text{cosec}\dfrac{23\pi}{5} = \text{cosec}\dfrac{3\pi}{5} = \sqrt{1+\text{cotg}^2\dfrac{3\pi}{5}} = \sqrt{1+h^4}$

b) $\sec 305° = \dfrac{1}{\cos 305°} = \dfrac{1}{\cos 55°} = \dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{1}{1+\text{tg}^2\,55°}}} = \sqrt{1+\text{tg}^2\,55°} = \sqrt{1+h^2}$

c) $\text{tg}\,348° = -\sqrt{\dfrac{1}{\cos^2 348°}-1} = -\sqrt{\dfrac{1}{\cos^2 12°}-1} = -\sqrt{\dfrac{1}{(-\cos 192°)^2}-1} = -\sqrt{\dfrac{1}{h^4}-1} = -\dfrac{\sqrt{1-h^4}}{h^2}$

83. Sabiendo que sen α = *h* y que α es un ángulo del primer cuadrante, calcula en función de *h*:

a) sen (90º – α) **b)** tg (1080º – α)

a) 90º – α es también un ángulo del primer cuadrante $\Rightarrow$ sen (90º – α) = cos α = $\sqrt{1-h^2}$

b) 1080º = 3 · 360º $\Rightarrow$ tg (1080º – α) = tg (–α) = – tg α = $\dfrac{-h}{\sqrt{1-h^2}}$

84. Para un ángulo α del primer cuadrante, que cumple que tg $\alpha = h$, calcula en función de h:

a) sen (90º – α) **b)** cotg (1080º – α)

a) sen (90º – α) = cos α = $\sqrt{\dfrac{1}{1+tg^2\alpha}} = \sqrt{\dfrac{1}{1+h^2}}$

b) cotg (1080º – α) = cotg (–α) = –cotg α = $-\dfrac{1}{h}$

85. Sabiendo que cosec $x = -\dfrac{7}{4}$, calcula:

a) sen (810º – x) **b)** sec $\left(\dfrac{17\pi}{2} - x\right)$

Observemos que x está en el tercer o cuarto cuadrante, por tanto, 810º – x y $\dfrac{17\pi}{2} - x$ están en el segundo o tercer cuadrante, por lo que no se puede saber el signo de cos x.

a) $\text{sen}(810^\circ - x) = \text{sen}(90^\circ - x) = \cos x = \pm\sqrt{1-\text{sen}^2 x} = \pm\sqrt{1-\dfrac{1}{\text{cosec}^2 x}} = \pm\dfrac{\sqrt{33}}{7}$

b) $\sec\left(\dfrac{17\pi}{2} - x\right) = \sec\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \dfrac{1}{\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)} = \dfrac{1}{\text{sen}\, x} = \text{cosec}\, x = -\dfrac{7}{4}$

86. Demuestra que tg (270º – x) = cotg x.

tg (270º – x) = tg (180º + 90º – x) = tg (90º – x)= cotg x.

87. Desarrolla, en función de sen α y cos α, las expresiones de sen 4α, cos 4α y tg 4α.

$$\text{sen}\,4\alpha = \text{sen}(2\cdot 2\alpha) = 2\,\text{sen}\,2\alpha\cos 2\alpha = 2\cdot 2\,\text{sen}\,\alpha\cos\alpha\cdot\left(\cos^2\alpha - \text{sen}^2\alpha\right) = 4\,\text{sen}\,\alpha\cos^3\alpha - 4\,\text{sen}^3\alpha\cos\alpha$$

$$\cos 4\alpha = \cos(2\cdot 2\alpha) = \cos^2 2\alpha - \text{sen}^2 2\alpha = \left(\cos^2\alpha - \text{sen}^2\alpha\right)^2 - (2\,\text{sen}\,\alpha\cos\alpha)^2 = \cos^4\alpha + \text{sen}^4\alpha - 6\,\text{sen}^2\alpha\cos^2\alpha$$

$$\text{tg}\,4\alpha = \frac{\text{sen}\,4\alpha}{\cos 4\alpha} = \frac{4\,\text{sen}\,\alpha\cos^3\alpha - 4\,\text{sen}^3\alpha\cos\alpha}{\cos^4\alpha + \text{sen}^4\alpha - 6\,\text{sen}^2\alpha\cos^2\alpha}$$

88. Si $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ y $\pi < \beta < \dfrac{3\pi}{2}$ y, siendo $\text{sen}\,\alpha = 0,4$ y $\cos\beta = -0,5$, calcula:

a) $\text{sen}(\alpha - \beta)$ **b)** $\cos(\alpha + \beta)$ **c)** $\text{tg}(\alpha + \beta)$

$\cos\alpha = -\sqrt{1-\text{sen}^2\alpha} = -0,917$ y $\text{sen}\,\beta = -\sqrt{1-\cos^2\beta} = -0,866$

a) $\text{sen}(\alpha - \beta) = \text{sen}\,\alpha\cos\beta - \cos\alpha\,\text{sen}\,\beta = -0,4\cdot 0,5 - 0,917\cdot 0,866 = -0,994$

b) $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\beta = 0,917\cdot 0,5 + 0,4\cdot 0,866 = 0,805$

c) $\text{tg}(\alpha + \beta) = \dfrac{\text{tg}\,\alpha + \text{tg}\,\beta}{1 - \text{tg}\,\alpha\,\text{tg}\,\beta} = \dfrac{-\dfrac{0,4}{0,917} + \dfrac{0,866}{0,5}}{1 + \dfrac{0,4}{0,917}\cdot\dfrac{0,866}{0,5}} = 0,738$

89. Sabiendo que tg $\alpha = 3$, calcula las razones trigonométricas del ángulo 2α si α es un ángulo:

a) Del primer cuadrante **b)** Del tercer cuadrante

a) Al ser tg α >1, 45º < α < 90º y por tanto, 2α pertenece al segundo cuadrante. Tenemos:

$$\cos\alpha = \sqrt{\frac{1}{1+\mathrm{tg}^2\alpha}} = \sqrt{\frac{1}{1+9}} = \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10} \qquad \mathrm{sen}\,\alpha = \mathrm{tg}\,\alpha\cos\alpha = \frac{3\sqrt{10}}{10}$$

$$\mathrm{sen}\,2\alpha = 2\,\mathrm{sen}\,\alpha\cos\alpha = 2\cdot\frac{3\sqrt{10}}{10}\cdot\frac{\sqrt{10}}{10} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5} = 0{,}6$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \mathrm{sen}^2\alpha = \frac{1}{10} - \frac{9}{10} = -\frac{8}{10} = -\frac{4}{5} = -0{,}8$$

$$\mathrm{tg}\,2\alpha = \frac{\mathrm{sen}\,2\alpha}{\cos 2\alpha} = -\frac{3}{4} = -0{,}75$$

b) Al ser tg α >1, 225º < α < 270º y, por tanto, 2α pertenece al segundo cuadrante y se obtienen los mismos valores del apartado anterior para las razones de 2α.

90. Calcula el valor de la tangente de α, sabiendo que es un ángulo del primer cuadrante y que $\mathrm{sen}\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{3}$.

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{1-\mathrm{sen}^2\frac{\alpha}{2}} = \sqrt{1-\frac{1}{9}} = \frac{\sqrt{8}}{3} \Rightarrow \mathrm{tg}\,\alpha = \mathrm{tg}\left(2\cdot\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\mathrm{sen}\left(2\cdot\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\left(2\cdot\frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{2\,\mathrm{sen}\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}-\mathrm{sen}^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{2\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{8}}{3}}{\frac{8}{9}-\frac{1}{9}} = \frac{2\sqrt{8}}{7}$$

91. Calcula, de forma exacta, las razones trigonométricas de los siguientes ángulos.

a) 15º **b)** 7º 30′

a)
$$\mathrm{sen}\,15^\circ = \mathrm{sen}\left(\frac{30^\circ}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-\cos 30^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$$

$$\cos 15^\circ = \cos\left(\frac{30^\circ}{2}\right) = \sqrt{\frac{1+\cos 30^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{4}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$$

$$\mathrm{tg}\,15^\circ = \frac{\mathrm{sen}\,15^\circ}{\cos 15^\circ} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}} = \sqrt{\frac{\left(2-\sqrt{3}\right)^2}{\left(2+\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)}} = 2-\sqrt{3}$$

b)
$$\mathrm{sen}\,7^\circ 30' = \mathrm{sen}\left(\frac{15^\circ}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-\cos 15^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}}{2}$$

$$\cos 7^\circ 30' = \cos\left(\frac{15^\circ}{2}\right) = \sqrt{\frac{1+\cos 15^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}{2}$$

$$\mathrm{tg}\,7^\circ 30' = \frac{\mathrm{sen}\,7^\circ\,15'}{\cos 7^\circ\,15'} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}} = \sqrt{\frac{\left(2-\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^2}{\left(2+\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)\left(2-\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)}} = \frac{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}{\sqrt{2-\sqrt{3}}}$$

92. Si $\cos\alpha = -\frac{2}{3}$ y 90º < α < 180º, calcula las razones trigonométricas de $\frac{\alpha}{2}$.

$$\text{sen}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{2}{3}}{2}} = \sqrt{\frac{5}{6}} = \frac{\sqrt{30}}{6} \qquad \cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{2}{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{6}$$

$$\text{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\frac{\sqrt{30}}{6}}{\frac{\sqrt{6}}{6}} = \sqrt{5}$$

93. Transforma en producto las siguientes sumas de razones trigonométricas.

a) sen 48º + sen 32º

b) cos 200º + cos 40º

c) $\text{sen}\ \frac{\pi}{3} + \text{sen}\ \frac{\pi}{5}$

d) sen 105º − sen 25º

e) cos 23º − cos 57º

f) $\cos\ \frac{\pi}{3} - \cos\ \frac{\pi}{9}$

a) $\text{sen}\,48^\circ + \text{sen}\,32^\circ = 2\,\text{sen}\frac{48^\circ+32^\circ}{2}\cos\frac{48^\circ-32^\circ}{2} = 2\,\text{sen}\,40^\circ\cos 8^\circ$

b) $\cos 200^\circ + \cos 40^\circ = 2\cos\frac{200^\circ+40^\circ}{2}\cos\frac{200^\circ-40^\circ}{2} = 2\cos 120^\circ\cos 80^\circ$

c) $\text{sen}\frac{\pi}{3} + \text{sen}\frac{\pi}{5} = 2\,\text{sen}\frac{\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{5}}{2}\cos\frac{\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{5}}{2} = 2\,\text{sen}\frac{4\pi}{15}\cos\frac{\pi}{15}$

d) $\text{sen}\,105^\circ - \text{sen}\,25^\circ = 2\cos\frac{105^\circ+25^\circ}{2}\text{sen}\frac{105^\circ-25^\circ}{2} = 2\cos 65^\circ\,\text{sen}\,40^\circ$

e) $\cos 23^\circ - \cos 57^\circ = -2\,\text{sen}\frac{23^\circ+57^\circ}{2}\text{sen}\frac{23^\circ-57^\circ}{2} = -2\,\text{sen}\,40^\circ\,\text{sen}(-17^\circ) = 2\,\text{sen}\,40^\circ\,\text{sen}\,17^\circ$

f) $\cos\frac{\pi}{3} - \cos\frac{\pi}{9} = -2\,\text{sen}\frac{\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{9}}{2}\text{sen}\frac{\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{9}}{2} = -2\,\text{sen}\frac{2\pi}{9}\text{sen}\frac{\pi}{9}$

94. Transforma en suma los siguientes productos de razones trigonométricas.

a) 2 sen 33º cos 11º **b)** cos 95º cos 38º **c)** sen 50º cos 75º **d)** sen 119º sen 25º

a) $33^\circ = \frac{\hat{A}+\hat{B}}{2};\ 11^\circ = \frac{\hat{A}-\hat{B}}{2} \Rightarrow \hat{A} = 44^\circ;\ \hat{B} = 22^\circ$, luego 2 sen 33º cos 11º = sen 44º + sen 22º

b) $95^\circ = \frac{\hat{A}+\hat{B}}{2};\ 38^\circ = \frac{\hat{A}-\hat{B}}{2} \Rightarrow \hat{A} = 133^\circ;\ \hat{B} = 57^\circ$, luego $\cos 95^\circ \cos 38^\circ = \frac{1}{2}(\cos 133^\circ + \cos 57^\circ)$

c) $50^\circ = \frac{\hat{A}+\hat{B}}{2};\ 75^\circ = \frac{\hat{A}-\hat{B}}{2} \Rightarrow \hat{A} = 125^\circ;\ \hat{B} = -25^\circ$, luego:

$\text{sen}\,50^\circ \cos 75^\circ = \frac{1}{2}(\text{sen}\,125^\circ + \text{sen}(-25^\circ)) = \frac{1}{2}(\text{sen}\,125^\circ - \text{sen}\,25^\circ)$

d) $119^\circ = \frac{\hat{A}+\hat{B}}{2};\ 25^\circ = \frac{\hat{A}-\hat{B}}{2} \Rightarrow \hat{A} = 144^\circ;\ \hat{B} = 94^\circ$, luego $\text{sen}\,119^\circ\,\text{sen}\,25^\circ = -\frac{1}{2}(\cos 144^\circ - \cos 94^\circ)$

95. Expresa las siguientes sumas como productos.

a) sen 4α + sen 2α

b) sen 3α − sen α

c) cos 6α + cos 4α

d) cos 8α − cos 2α

a) $\operatorname{sen}4\alpha + \operatorname{sen}2\alpha = 2\operatorname{sen}\frac{4\alpha+2\alpha}{2}\cos\frac{4\alpha-2\alpha}{2} = 2\operatorname{sen}3\alpha\cos\alpha$

b) $\operatorname{sen}3\alpha - \operatorname{sen}\alpha = 2\cos\frac{3\alpha+\alpha}{2}\operatorname{sen}\frac{3\alpha-\alpha}{2} = 2\cos2\alpha\operatorname{sen}\alpha$

c) $\cos6\alpha + \cos4\alpha = 2\cos\frac{6\alpha+4\alpha}{2}\cos\frac{6\alpha-4\alpha}{2} = 2\cos5\alpha\cos\alpha$

d) $\cos8\alpha - \cos2\alpha = -2\operatorname{sen}\frac{8\alpha+2\alpha}{2}\operatorname{sen}\frac{8\alpha-2\alpha}{2} = -2\operatorname{sen}5\alpha\operatorname{sen}3\alpha$

96. Demuestra que:

a) $\operatorname{cotg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{cotg}\alpha\operatorname{cotg}\beta - 1}{\operatorname{cotg}\beta + \operatorname{cotg}\alpha}$

b) $\operatorname{cotg}(\alpha-\beta) = \frac{\operatorname{cotg}\alpha\operatorname{cotg}\beta + 1}{\operatorname{cotg}\beta - \operatorname{cotg}\alpha}$

a) $\operatorname{cotg}(\alpha+\beta) = \frac{1}{\operatorname{tg}(\alpha+\beta)} = \frac{1}{\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}} = \frac{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta} = \frac{1-\frac{1}{\operatorname{cotg}\alpha}\cdot\frac{1}{\operatorname{cotg}\beta}}{\frac{1}{\operatorname{cotg}\alpha}+\frac{1}{\operatorname{cotg}\beta}} = \frac{\frac{\operatorname{cotg}\alpha\operatorname{cotg}\beta-1}{\operatorname{cotg}\alpha\operatorname{cotg}\beta}}{\frac{\operatorname{cotg}\beta+\operatorname{cotg}\alpha}{\operatorname{cotg}\alpha\operatorname{cotg}\beta}} = \frac{\operatorname{cotg}\alpha\operatorname{cotg}\beta-1}{\operatorname{cotg}\beta+\operatorname{cotg}\alpha}$

b) $\operatorname{cotg}(\alpha-\beta) = \frac{1}{\operatorname{tg}(\alpha-\beta)} = \frac{1}{\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}} = \frac{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta} = \frac{1+\frac{1}{\operatorname{cotg}\alpha}\cdot\frac{1}{\operatorname{cotg}\beta}}{\frac{1}{\operatorname{cotg}\alpha}-\frac{1}{\operatorname{cotg}\beta}} = \frac{\frac{\operatorname{cotg}\alpha\operatorname{cotg}\beta+1}{\operatorname{cotg}\alpha\operatorname{cotg}\beta}}{\frac{\operatorname{cotg}\beta-\operatorname{cotg}\alpha}{\operatorname{cotg}\alpha\operatorname{cotg}\beta}} = \frac{\operatorname{cotg}\alpha\operatorname{cotg}\beta+1}{\operatorname{cotg}\beta-\operatorname{cotg}\alpha}$

97. Desarrolla las siguientes expresiones.

a) sen (α + β + γ)

b) cos (α + β − γ)

c) sen (2α + β)

d) cos (α − 2β)

a) $\operatorname{sen}(\alpha+\beta+\gamma) = \operatorname{sen}(\alpha+(\beta+\gamma)) = \operatorname{sen}\alpha\cos(\beta+\gamma) + \cos\alpha\operatorname{sen}(\beta+\gamma) =$

$= \operatorname{sen}\alpha\cos\beta\cos\gamma - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\gamma + \cos\alpha\operatorname{sen}\beta\cos\gamma + \cos\alpha\cos\beta\operatorname{sen}\gamma =$

$= \operatorname{sen}\alpha\cos\beta\cos\gamma + \cos\alpha\operatorname{sen}\beta\cos\gamma + \cos\alpha\cos\beta\operatorname{sen}\gamma - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\gamma$

b) $\cos(\alpha+\beta-\gamma) = \cos(\alpha+(\beta-\gamma)) = \cos\alpha\cos(\beta-\gamma) - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}(\beta-\gamma) =$

$= \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma + \cos\alpha\operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\gamma - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta\cos\gamma + \operatorname{sen}\alpha\cos\beta\operatorname{sen}\gamma =$

$= \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma + \cos\alpha\operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\gamma + \operatorname{sen}\alpha\cos\beta\operatorname{sen}\gamma - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta\cos\gamma$

c) $\operatorname{sen}(2\alpha+\beta) = \operatorname{sen}2\alpha\cos\beta + \cos2\alpha\operatorname{sen}\beta = 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha\cos\beta + \cos^2\alpha\operatorname{sen}\beta - \operatorname{sen}^2\alpha\operatorname{sen}\beta$

d) $\cos(\alpha-2\beta) = \cos\alpha\cos2\beta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}2\beta = \cos\alpha(\cos^2\beta - \operatorname{sen}^2\beta) + 2\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta\cos\beta =$

$= \cos\alpha\cos^2\beta - \cos\alpha\operatorname{sen}^2\beta + 2\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta\cos\beta$

Identidades trigonométricas

98. Demuestra las siguientes identidades trigonométricas.

a) $\dfrac{\operatorname{sen}\alpha-\cos\alpha}{\operatorname{tg}\alpha-1}=\cos\alpha$ **b)** $\operatorname{tg}^2\alpha-\operatorname{sen}^2\alpha=\operatorname{tg}^2\alpha\operatorname{sen}^2\alpha$ **c)** $\dfrac{1+\operatorname{cotg}\alpha}{\operatorname{sen}\alpha+\cos\alpha}=\operatorname{cosec}\alpha$ **d)** $\sec^2\alpha-1=\operatorname{tg}^2\alpha$

a) $$\frac{\operatorname{sen}\alpha-\cos\alpha}{\operatorname{tg}\alpha-1}=\frac{\operatorname{sen}\alpha-\cos\alpha}{\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}-1}=\frac{\operatorname{sen}\alpha-\cos\alpha}{\frac{\operatorname{sen}\alpha-\cos\alpha}{\cos\alpha}}=\frac{(\operatorname{sen}\alpha-\cos\alpha)\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha-\cos\alpha}=\cos\alpha$$

b) $$\operatorname{tg}^2\alpha-\operatorname{sen}^2\alpha=\frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha}-\operatorname{sen}^2\alpha=\frac{\operatorname{sen}^2\alpha-\operatorname{sen}^2\alpha\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}=\frac{\operatorname{sen}^2\alpha\left(1-\cos^2\alpha\right)}{\cos^2\alpha}=\frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha}\operatorname{sen}^2\alpha=\operatorname{tg}^2\alpha\operatorname{sen}^2\alpha$$

c) $$\frac{1+\operatorname{cotg}\alpha}{\operatorname{sen}\alpha+\cos\alpha}=\frac{1+\frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}}{\operatorname{sen}\alpha+\cos\alpha}=\frac{\frac{\operatorname{sen}\alpha+\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}}{\operatorname{sen}\alpha+\cos\alpha}=\frac{1}{\operatorname{sen}\alpha}=\operatorname{cosec}\alpha$$

d) $$\sec^2\alpha-1=\frac{1}{\cos^2\alpha}-1=\frac{1-\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}=\frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha}=\operatorname{tg}^2\alpha$$

99. Demuestra las siguientes igualdades trigonométricas.

a) $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{\cos 2\alpha}=\operatorname{tg}2\alpha-\operatorname{tg}\alpha$

b) $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{cotg}\alpha=\sec\alpha\operatorname{cosec}\alpha$

c) $\dfrac{\operatorname{sen}2\alpha}{1+\cos 2\alpha}=\operatorname{tg}\alpha$

d) $\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)-\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)=2\operatorname{tg}2\alpha$

e) $\operatorname{sen}^2\alpha-\operatorname{sen}^2\beta=\operatorname{sen}(\alpha+\beta)\operatorname{sen}(\alpha-\beta)$

f) $(\cos\alpha-\cos\beta)^2+(\operatorname{sen}\alpha+\operatorname{sen}\beta)^2=4\operatorname{sen}^2\dfrac{\alpha+\beta}{2}$

g) $\dfrac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)-\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}{2}=\operatorname{tg}2\alpha$

h) $\dfrac{1-\cos 2\alpha}{2\operatorname{sen}\alpha}-\dfrac{\operatorname{sen}2\alpha}{1+\cos 2\alpha}=\operatorname{sen}\alpha-\operatorname{tg}\alpha$

a) $$\operatorname{tg}2\alpha-\operatorname{tg}\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}-\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{tg}\alpha\left(\frac{2}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}-1\right)=\operatorname{tg}\alpha\frac{1+\operatorname{tg}^2\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}=\operatorname{tg}\alpha\frac{1+\frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha}}{1-\frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha}}=\operatorname{tg}\alpha\frac{\frac{\cos^2\alpha+\operatorname{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha}}{\frac{\cos^2\alpha-\operatorname{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha}}=\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\cos 2\alpha}$$

b) $$\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{cotg}\alpha=\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}=\frac{\operatorname{sen}^2\alpha+\cos^2\alpha}{\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha}=\frac{1}{\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha}=\sec\alpha\operatorname{cosec}\alpha$$

c) $$\frac{\operatorname{sen}2\alpha}{1+\cos 2\alpha}=\frac{2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha}{1+\cos^2\alpha-\operatorname{sen}^2\alpha}=\frac{2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha}{2\cos^2\alpha}=\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}=\operatorname{tg}\alpha$$

d) $$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)-\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=\frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}+\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\operatorname{tg}\alpha}-\frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}-\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\operatorname{tg}\alpha}=\frac{1+\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}\alpha}-\frac{1-\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}\alpha}=\frac{4\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}=2\operatorname{tg}2\alpha$$

e) $$\operatorname{sen}(\alpha+\beta)\operatorname{sen}(\alpha-\beta)=(\operatorname{sen}\alpha\cos\beta+\cos\alpha\operatorname{sen}\beta)(\operatorname{sen}\alpha\cos\beta-\cos\alpha\operatorname{sen}\beta)=\operatorname{sen}^2\alpha\cos^2\beta-\cos^2\alpha\operatorname{sen}^2\beta=$$

$$\operatorname{sen}^2\alpha\cos^2\beta-(1-\operatorname{sen}^2\alpha)\operatorname{sen}^2\beta=\operatorname{sen}^2\alpha(\cos^2\beta+\operatorname{sen}^2\beta)-\operatorname{sen}^2\beta=\operatorname{sen}^2\alpha-\operatorname{sen}^2\beta$$

f) $$(\cos\alpha-\cos\beta)^2+(\operatorname{sen}\alpha+\operatorname{sen}\beta)^2=\cos^2\alpha+\cos^2\beta-2\cos\alpha\cos\beta+\operatorname{sen}^2\alpha+\operatorname{sen}^2\beta+2\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta=$$

$$=2-2\left(\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}-\operatorname{sen}^2\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=2-2\left(1-2\operatorname{sen}^2\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=4\operatorname{sen}^2\frac{\alpha+\beta}{2}$$

g) La expresión es equivalente a la demostrada en el aparatado d.

h) $$\frac{1-\cos 2\alpha}{2\operatorname{sen}\alpha}-\frac{\operatorname{sen}2\alpha}{1+\cos 2\alpha}=\frac{1-\cos^2\alpha+\operatorname{sen}^2\alpha}{2\operatorname{sen}\alpha}-\frac{2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha}{1+\cos^2\alpha-\operatorname{sen}^2\alpha}=\frac{2\operatorname{sen}^2\alpha}{2\operatorname{sen}\alpha}-\frac{2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha}{2\cos^2\alpha}=\operatorname{sen}\alpha-\operatorname{tg}\alpha$$

100. Simplifica las expresiones trigonométricas dadas.

a) $(\text{sen}\,\alpha+\cos\alpha)^2+(\text{sen}\,\alpha-\cos\alpha)^2$

b) $\text{tg}\,\alpha\,\text{tg}\,\beta(\text{cotg}\,\alpha+\text{cotg}\,\beta)$

c) $\text{sen}\,2\alpha(\text{tg}\,\alpha+\text{cotg}\,\alpha)$

d) $\dfrac{\cos^2\alpha}{1-\cos\alpha}\cdot\dfrac{\text{sen}^2\alpha}{1-\text{sen}\,\alpha}+\dfrac{\cos^2\alpha}{1-\text{sen}\,\alpha}$

e) $\dfrac{\text{sen}\,\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha-\text{sen}^2\alpha}\cdot\dfrac{1-\text{tg}^2\alpha}{\text{tg}\,\alpha}-\dfrac{1-\text{tg}^2\alpha}{1+\text{tg}^2\alpha}$

a) $(\text{sen}\,\alpha+\cos\alpha)^2+(\text{sen}\,\alpha-\cos\alpha)^2=\text{sen}^2\alpha+\cos^2\alpha+2\,\text{sen}\,\alpha\cos\alpha+\text{sen}^2\alpha+\cos^2\alpha-2\,\text{sen}\,\alpha\cos\alpha=2$

b) $\text{tg}\,\alpha\,\text{tg}\,\beta(\text{cotg}\,\alpha+\text{cotg}\,\beta)=\text{tg}\,\alpha\,\text{tg}\,\beta\left(\dfrac{1}{\text{tg}\,\alpha}+\dfrac{1}{\text{tg}\,\beta}\right)=\text{tg}\,\alpha\,\text{tg}\,\beta\dfrac{\text{tg}\,\beta+\text{tg}\,\alpha}{\text{tg}\,\alpha\,\text{tg}\,\beta}=\text{tg}\,\alpha+\text{tg}\,\beta$

c) $\text{sen}\,2\alpha(\text{tg}\,\alpha+\text{cotg}\,\alpha)=2\,\text{sen}\,\alpha\cos\alpha\left(\dfrac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha}+\dfrac{\cos\alpha}{\text{sen}\,\alpha}\right)=2\,\text{sen}\,\alpha\cos\alpha\left(\dfrac{1}{\cos\alpha\,\text{sen}\,\alpha}\right)=2$

d) $\dfrac{\cos^2\alpha}{1-\cos\alpha}\cdot\dfrac{\text{sen}^2\alpha}{1-\text{sen}\,\alpha}+\dfrac{\cos^2\alpha}{1-\text{sen}\,\alpha}=\dfrac{\cos^2\alpha}{1-\text{sen}\,\alpha}\left(\dfrac{\text{sen}^2\alpha}{1-\cos\alpha}+1\right)=\dfrac{1-\text{sen}^2\alpha}{1-\text{sen}\,\alpha}\left(\dfrac{1-\cos^2\alpha}{1-\cos\alpha}+1\right)=$

$=\dfrac{(1-\text{sen}\,\alpha)(1+\text{sen}\,\alpha)}{1-\text{sen}\,\alpha}\left(\dfrac{(1-\cos\alpha)(1+\cos\alpha)}{1-\cos\alpha}+1\right)=(1+\text{sen}\,\alpha)(2+\cos\alpha)$

e) $\dfrac{\text{sen}\,\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha-\text{sen}^2\alpha}\cdot\dfrac{1-\text{tg}^2\alpha}{\text{tg}\,\alpha}-\dfrac{1-\text{tg}^2\alpha}{1+\text{tg}^2\alpha}=\dfrac{\text{sen}\,\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha-\text{sen}^2\alpha}\cdot\dfrac{1-\dfrac{\text{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha}}{\dfrac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha}}-\dfrac{1-\dfrac{\text{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha}}{1+\dfrac{\text{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha}}=$

$=\dfrac{\text{sen}\,\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha-\text{sen}^2\alpha}\cdot\dfrac{(\cos^2\alpha-\text{sen}^2\alpha)}{\text{sen}\,\alpha\cos\alpha}-\dfrac{\cos^2\alpha-\text{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha+\text{sen}^2\alpha}=1-\cos^2\alpha+\text{sen}^2\alpha=2\,\text{sen}^2\alpha$

101. Simplifica las siguientes expresiones utilizando las fórmulas de transformación de sumas en productos.

a) $\dfrac{\text{sen}\,8\alpha+\text{sen}\,2\alpha}{2\cos3\alpha}$

b) $\dfrac{\cos\alpha+\cos\beta}{\text{sen}(\alpha+\beta)}$

c) $\dfrac{2\,\text{sen}\,\alpha}{\text{sen}\,5\alpha-\text{sen}\,3\alpha}$

d) $\dfrac{\cos2\alpha+\cos\alpha}{\text{sen}\,2\alpha+\text{sen}\,\alpha}$

a) $\dfrac{\text{sen}\,8\alpha+\text{sen}\,2\alpha}{2\cos3\alpha}=\dfrac{2\,\text{sen}\,5\alpha\cos3\alpha}{2\cos3\alpha}=\text{sen}\,5\alpha$

b) $\dfrac{\cos\alpha+\cos\beta}{\text{sen}(\alpha+\beta)}=\dfrac{2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}}{2\,\text{sen}\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}}=\dfrac{\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}}{\text{sen}\dfrac{\alpha+\beta}{2}}$

c) $\dfrac{2\,\text{sen}\,\alpha}{\text{sen}\,5\alpha-\text{sen}\,3\alpha}=\dfrac{2\,\text{sen}\,\alpha}{2\cos4\alpha\,\text{sen}\,\alpha}=\dfrac{1}{\cos4\alpha}$

d) $\dfrac{\cos2\alpha+\cos\alpha}{\text{sen}\,2\alpha+\text{sen}\,\alpha}=\dfrac{2\cos\dfrac{3\alpha}{2}\cos\dfrac{\alpha}{2}}{2\,\text{sen}\dfrac{3\alpha}{2}\cos\dfrac{\alpha}{2}}=\dfrac{\cos\dfrac{3\alpha}{2}}{\text{sen}\dfrac{3\alpha}{2}}=\text{cotg}\dfrac{3\alpha}{2}$

102. Demuestra que $\cos x=\cos^4\left(\dfrac{x}{2}\right)-\text{sen}^4\left(\dfrac{x}{2}\right)$.

$$\cos^4\left(\frac{x}{2}\right)-\text{sen}^4\left(\frac{x}{2}\right)=\left(\frac{1+\cos x}{2}\right)^2-\left(\frac{1-\cos x}{2}\right)^2=\frac{1+\cos^2x+2\cos x}{4}-\frac{1+\cos^2x-2\cos x}{4}=\cos x$$

Ecuaciones trigonométricas

103. Con ayuda de la calculadora, halla la medida en grados del ángulo α del primer cuadrante tal que:

a) $\text{sen}\ \alpha = 0{,}345$ **c)** $\cos\alpha = 0{,}553$ **e)** $\sec\alpha = 0{,}442$

b) $\text{cosec}\ \alpha = 0{,}3$ **d)** $\text{tg}\ \alpha = 0{,}25$ **f)** $\text{cotg}\ \alpha = 0{,}01$

a) $\text{sen}\ \alpha = 0{,}345 \Rightarrow \alpha = 20^\circ\ 10'\ 54''$

b) $\text{cosec}\ \alpha = 0{,}3 \Rightarrow$ No existe ningún ángulo

c) $\cos\alpha = 0{,}553 \Rightarrow \alpha = 56^\circ\ 25'\ 37''$

d) $\text{tg}\ \alpha = 0{,}25 \Rightarrow \alpha = 14^\circ\ 2'\ 10''$

e) $\sec\alpha = 0{,}442 \Rightarrow$ No existe ningún ángulo

f) $\text{cotg}\ \alpha = 0{,}01 \Rightarrow \alpha = 89^\circ\ 25'\ 37''$

104. Resuelve las siguientes ecuaciones trigonométricas indicando todas sus soluciones en grados.

a) $\text{sen}\,x = \dfrac{1}{2}$ **d)** $\text{sen}\,x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ **g)** $\text{tg}\,x = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

b) $\cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ **e)** $\cos x = -\dfrac{1}{2}$ **h)** $\text{sen}\,x = 0$

c) $\text{tg}\,x = 1$ **f)** $1 + \cos x = 0$ **i)** $\text{tg}\,x = 0$

a) $\text{sen}\,x = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 30^\circ + 360^\circ k \\ x = 150^\circ + 360^\circ k \end{cases} \forall k \in \mathbb{Z}$

b) $\cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 30^\circ + 360^\circ k \\ x = 330^\circ + 360^\circ k \end{cases} \forall k \in \mathbb{Z}$

c) $\text{tg}\,x = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = 45^\circ + 360^\circ k \\ x = 225^\circ + 360^\circ k \end{cases} \forall k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = 45^\circ + 180^\circ k\ \ \forall k \in \mathbb{Z}$

d) $\text{sen}\,x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 225^\circ + 360^\circ k \\ x = 315^\circ + 360^\circ k \end{cases} \forall k \in \mathbb{Z}$

e) $\cos x = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 120^\circ + 360^\circ k \\ x = 240^\circ + 360^\circ k \end{cases} \forall k \in \mathbb{Z}$

f) $1 + \cos x = 0 \Rightarrow \cos x = -1 \Rightarrow x = 180^\circ + 360^\circ k\ \ \forall k \in \mathbb{Z}$

g) $\text{tg}\,x = -\dfrac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \begin{cases} x = 150^\circ + 360^\circ k \\ x = 330^\circ + 360^\circ k \end{cases} \forall k \in \mathbb{Z} \Rightarrow 150^\circ + 180^\circ k\ \ \forall k \in \mathbb{Z}$

h) $\text{sen}\,x = 0 \Rightarrow x = 180^\circ k\ \ \forall k \in \mathbb{Z}$

i) $\text{tg}\,x = 0 \Rightarrow x = 180^\circ k\ \ \forall k \in \mathbb{Z}$

105. Resuelve las siguientes ecuaciones trigonométricas indicando todas sus soluciones en radianes.

a) $\text{sen}\,4x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ **b)** $\cos 2x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ **c)** $\text{tg}\,3x = -1$ **d)** $\text{sen}\dfrac{x}{2} = 0$ **e)** $\cos\dfrac{x}{3} = -\dfrac{1}{2}$ **f)** $\text{tg}\dfrac{3x}{4} = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

a) $\text{sen}\,4x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \begin{cases} 4x = \dfrac{4\pi}{3} + 2\pi k \\ 4x = \dfrac{5\pi}{3} + 2\pi k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{3} + \dfrac{\pi}{2}k \\ x = \dfrac{5\pi}{12} + \dfrac{\pi}{2}k \end{cases}$

b) $\cos 2x = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \begin{cases} 2x = \dfrac{\pi}{4} + 2\pi k \\ 2x = \dfrac{7\pi}{4} + 2\pi k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{8} + \pi k \\ x = \dfrac{7\pi}{8} + \pi k \end{cases}$

c) $\text{tg}\,3x = -1 \Rightarrow \begin{cases} 3x = \dfrac{3\pi}{4} + 2\pi k \\ 3x = \dfrac{7\pi}{4} + 2\pi k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{2\pi k}{3} \\ x = \dfrac{7\pi}{12} + \dfrac{2\pi k}{3} \end{cases}$

d) $\text{sen}\dfrac{x}{2} = 0 \Rightarrow \dfrac{x}{2} = \pi k \Rightarrow x = 2\pi k$

e) $\cos\dfrac{x}{3} = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x}{3} = \dfrac{2\pi}{3} + 2\pi k \\ \dfrac{x}{3} = \dfrac{4\pi}{3} + 2\pi k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2\pi + 6\pi k \\ x = 4\pi + 6\pi k \end{cases}$

f) $\text{tg}\dfrac{3x}{4} = -\dfrac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{3x}{4} = \dfrac{5\pi}{6} + 2\pi k \\ \dfrac{3x}{4} = \dfrac{11\pi}{6} + 2\pi k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{10\pi}{9} + \dfrac{8\pi k}{3} \\ x = \dfrac{22\pi}{9} + \dfrac{8\pi k}{3} \end{cases}$

106. Halla todas las soluciones de las siguientes ecuaciones trigonométricas.

a) sen $x = \cos x$

b) sen $2x - \text{sen}\, x = 0$

c) sen $x - \sqrt{3}\cos x = 0$

d) sen $x + \cos x = \sqrt{2}$

a) $\text{sen}\, x = \cos x \Rightarrow \text{tg}\, x = 1 \Rightarrow x = 45^\circ + 180^\circ k$

b) $\text{sen}\, 2x - \text{sen}\, x = 0 \Rightarrow 2\,\text{sen}\, x \cos x - \text{sen}\, x = 0 \Rightarrow \text{sen}\, x(2\cos x - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \text{sen}\, x = 0 \Rightarrow x = 180^\circ k \\ \cos x = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 60^\circ + 360^\circ k \\ x = 300^\circ + 360^\circ k \end{cases} \end{cases}$

c) $\text{sen}\, x - \sqrt{3}\cos x = 0 \Rightarrow \text{tg}\, x = \sqrt{3} \Rightarrow x = 60^\circ + 180^\circ k$

d) $\text{sen} x + \cos x = \sqrt{2} \Rightarrow (\text{sen} x + \cos x)^2 = 2 \Rightarrow 1 + 2\,\text{sen}\, x \cos x = 2 \Rightarrow 2\,\text{sen}\, x\cos x = 1 \Rightarrow \text{sen}\, 2x = 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow 2x = 90^\circ + 360^\circ k \Rightarrow x = 45^\circ + 180^\circ k$

Al elevar al cuadrado aparecen soluciones falsas con k impar. La solución es $x = 45^\circ + 360^\circ k$ con $k = 0, 1, 2...$

107. Resuelve las siguientes ecuaciones trigonométricas en el intervalo [0º, 360º].

a) tg x + cotg $x = 5$

b) tg $2x$ = cotg x

c) $8\cos 2x = 8\cos x - 9$

d) $2\text{sen}^2 x + \cos 2x = 4\cos^2 x$

a) $\text{tg}\, x + 4\,\text{cotg}\, x = 5 \Rightarrow \text{tg}\, x + \dfrac{4}{\text{tg}\, x} = 5 \Rightarrow \text{tg}^2 x + 4 = 5\,\text{tg}\, x \Rightarrow \text{tg}^2 x - 5\,\text{tg}\, x + 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \text{tg}\, x = 4 \Rightarrow \begin{cases} x = 75^\circ\ 57'\ 50'' \\ x = 255^\circ\ 57'\ 50'' \end{cases} \\ \text{tg}\, x = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = 45^\circ \\ x = 225^\circ \end{cases} \end{cases}$

b) $\text{tg}\, 2x = \text{cotg}\, x \Rightarrow \dfrac{2\,\text{tg}\, x}{1 - \text{tg}^2 x} = \dfrac{1}{\text{tg}\, x} \Rightarrow 2\,\text{tg}^2 x = 1 - \text{tg}^2 x \Rightarrow \text{tg}^2 x = \dfrac{1}{3} \Rightarrow \begin{cases} \text{tg}\, x = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \begin{cases} x = 30^\circ \\ x = 210^\circ \end{cases} \\ \text{tg}\, x = -\dfrac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \begin{cases} x = 150^\circ \\ x = 330^\circ \end{cases} \end{cases}$

c) $8\cos 2x = 8\cos x - 9 \Rightarrow 8\cos^2 x - 8\,\text{sen}^2 x - 8\cos x + 9 = 0 \Rightarrow 8\cos^2 x - 8 + 8\cos^2 x - 8\cos x + 9 = 0 \Rightarrow$

$16\cos^2 x - 8\cos x + 1 = 0 \Rightarrow \cos x = \dfrac{1}{4} \Rightarrow \begin{cases} x = 75^\circ\ 31'\ 21'' \\ x = 284^\circ\ 28'\ 39'' \end{cases}$

d) $2\,\text{sen}^2 x + \cos 2x = 4\cos^2 x \Rightarrow 2\,\text{sen}^2 x + \cos^2 x - \text{sen}^2 x = 4\cos^2 x \Rightarrow \text{sen}^2 x + \cos^2 x = 4\cos^2 x \Rightarrow$

$\Rightarrow 1 = 4\cos^2 x \Rightarrow \cos^2 x = \dfrac{1}{4} \Rightarrow \begin{cases} \cos x = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 60^\circ \\ x = 300^\circ \end{cases} \\ \cos x = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 120^\circ \\ x = 240^\circ \end{cases} \end{cases}$

108. Halla, para el intervalo [0, 2π], las soluciones de las siguientes ecuaciones trigonométricas.

a) $\text{sen}^2 x + \text{tg}^2 x = 0$ **b)** $\cos 2x - \text{sen}\, x = \text{sen}\, 2x - \cos x$ **c)** $2\,\text{sen}\, x + \sqrt{3}\,\text{tg}\, x = 0$

a) $\text{sen}^2 x + \text{tg}^2 x = 0 \Rightarrow \text{sen}^2 x\left(1+\dfrac{1}{\cos^2 x}\right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \text{sen}^2 x = 0 \Rightarrow \text{sen}\, x = 0 \Rightarrow x = 0,\ x = \pi,\ x = 2\pi \\ 1+\dfrac{1}{\cos^2 x} = 0 \Rightarrow \text{Sin solución real} \end{cases}$

b) $\cos 2x - \text{sen}\, x = \text{sen}\, 2x - \cos x \Rightarrow \cos 2x + \cos x = \text{sen}\, 2x + \text{sen}\, x \Rightarrow 2\cos\dfrac{3x}{2}\cos\dfrac{x}{2} = 2\,\text{sen}\dfrac{3x}{2}\cos\dfrac{x}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos\dfrac{x}{2}\left[\cos\dfrac{3x}{2} - \text{sen}\dfrac{3x}{2}\right] = 0 \Rightarrow \begin{cases} \cos\dfrac{x}{2} = 0 \Rightarrow \dfrac{x}{2} = \dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{x}{2} = \dfrac{3\pi}{2} \Rightarrow x = \pi,\ x = 3\pi \text{ (No vale pues } 3\pi \notin [0, 2\pi]) \\ \cos\dfrac{3x}{2} - \text{sen}\dfrac{3x}{2} = 0 \Rightarrow \text{tg}\dfrac{3x}{2} = 1 \Rightarrow \dfrac{3x}{2} = \dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{3x}{2} = \dfrac{5\pi}{4} \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{6},\ x = \dfrac{5\pi}{6} \end{cases}$

c) $2\,\text{sen}\, x + \sqrt{3}\,\text{tg}\, x = 0 \Rightarrow 2\,\text{sen}\, x + \sqrt{3}\dfrac{\text{sen}\, x}{\cos x} = 0 \Rightarrow \text{sen}\, x\left(2+\dfrac{\sqrt{3}}{\cos x}\right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \text{sen}\, x = 0 \Rightarrow x = 0,\ x = \pi,\ x = 2\pi \\ \cos x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x = \dfrac{5\pi}{6},\ x = \dfrac{7\pi}{6} \end{cases}$

109. Calcula, para las ecuaciones propuestas, las soluciones pertenecientes al intervalo [−π, π].

a) $\cos 3x = 1 + \cos 2x$

b) $\text{sen}\, 3x + \text{sen}\, 6x = 0$

c) $\cos 5x + \cos 3x = \cos x$

d) $\sqrt{3}\cos x + \text{sen}\, x = 2$

a) $\cos 3x = 1 + \cos 2x \Rightarrow \cos(2x + x) = 1 + \cos^2 x - \text{sen}^2 x \Rightarrow \cos 2x \cos x - \text{sen}\, 2x\, \text{senx} = 2\cos^2 x \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos^3 x - \text{sen}^2 x\, \text{cosx} - 2\,\text{sen}^2 x\, \text{cosx} = 2\cos^2 x \Rightarrow \cos x\left(\cos^2 x - 3\,\text{sen}^2 x - 2\cos x\right) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos x\left(\cos^2 x - 3 + 3\cos^2 x - 2\cos x\right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \Rightarrow x = -\dfrac{\pi}{2},\ x = \dfrac{\pi}{2} \\ 4\cos^2 x - 2\cos x - 3 = 0 \Rightarrow \cos x = -0{,}6514 \Rightarrow x = 2{,}28,\ x = -2{,}28 \end{cases}$

b) $\text{sen}\, 3x + \text{sen}\, 6x = 0 \Rightarrow 2\,\text{sen}\dfrac{9x}{2}\cos\dfrac{3x}{2} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \text{sen}\dfrac{9x}{2} = 0 \Rightarrow x = 0,\ x = -\dfrac{2\pi}{9},\ x = \dfrac{2\pi}{9} \\ \cos\dfrac{3x}{2} = 0 \Rightarrow x = \pi,\ x = -\dfrac{\pi}{3},\ x = \dfrac{\pi}{3} \end{cases}$

c) $\cos 5x + \cos 3x = \cos x \Rightarrow 2\cos 4x \cos x = \cos x \Rightarrow \cos x\left(2\cos 4x - 1\right) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{2},\ x = -\dfrac{\pi}{2} \\ \cos 4x = \dfrac{1}{2} \Rightarrow x = \dfrac{5\pi}{12},\ x = \dfrac{\pi}{12},\ x = -\dfrac{\pi}{12},\ x = -\dfrac{5\pi}{12} \end{cases}$

d) $\sqrt{3}\cos x + \text{sen}\, x = 2 \Rightarrow \dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos x + \dfrac{1}{2}\text{sen}\, x = 1 \Rightarrow \text{sen}\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right) = 1 \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{6}$

110. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones trigonométricas en el intervalo [0, 360º].

a) $\begin{cases} \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 y = \dfrac{5}{4} \\ \operatorname{sen}^2 x - \cos^2 y = \dfrac{3}{4} \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} \operatorname{sen} x \cos y = \dfrac{1}{4} \\ \cos x \operatorname{sen} y = \dfrac{1}{4} \end{cases}$

b) $\begin{cases} \cos x + \cos y = 1 \\ x + y = 90^\circ \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = 2 \\ x - y = \pi \end{cases}$

a) $$\begin{cases} \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 y = \dfrac{5}{4} \\ \operatorname{sen}^2 x - \cos^2 y = \dfrac{3}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \operatorname{sen}^2 x = 1 \Rightarrow \operatorname{sen} x = \pm 1 \\ \cos^2 y = \dfrac{1}{4} \Rightarrow \cos y = \pm \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 90^\circ, y = 45^\circ \\ x = 90^\circ, y = 135^\circ \\ x = 90^\circ, y = 225^\circ \\ x = 90^\circ, y = 315^\circ \\ x = 270^\circ, y = 45^\circ \\ x = 270^\circ, y = 135^\circ \\ x = 270^\circ, y = 225^\circ \\ x = 270^\circ, y = 315^\circ \end{cases}$$

b) $$\begin{cases} \cos x + \cos y = 1 \\ x + y = 90^\circ \end{cases} \Rightarrow 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} = 1 \Rightarrow 2\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{x-y}{2} = 1 \Rightarrow \cos\frac{x-y}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x-y}{2} = 45^\circ \Rightarrow x - y = 90^\circ \\ \dfrac{x-y}{2} = 315^\circ \Rightarrow x - y = 630^\circ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 90^\circ \\ x - y = 90^\circ \end{cases} \Rightarrow x = 90^\circ,\ y = 0^\circ$$

c) $$\begin{cases} \operatorname{sen} x \cos y = \dfrac{1}{4} \\ \cos x \operatorname{sen} y = \dfrac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{2}(\operatorname{sen}(x+y) + \operatorname{sen}(x-y)) = \dfrac{1}{4} \\ \dfrac{1}{2}(\operatorname{sen}(x+y) - \operatorname{sen}(x-y)) = \dfrac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \operatorname{sen}(x+y) + \operatorname{sen}(x-y) = \dfrac{1}{2} \\ \operatorname{sen}(x+y) - \operatorname{sen}(x-y) = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \operatorname{sen}(x+y) = \dfrac{1}{2} \\ \operatorname{sen}(x-y) = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + y = 30^\circ \\ x - y = 0^\circ \end{cases} \text{ o } \begin{cases} x + y = 150^\circ \\ x - y = 180^\circ \end{cases} \text{ o } \begin{cases} x + y = 390^\circ \\ x - y = -180^\circ \end{cases} \text{ o } \begin{cases} x + y = 510 \\ x - y = -180 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 15^\circ, y = 15^\circ \\ x = 75^\circ, y = 75^\circ \\ x = 285^\circ, y = 105^\circ \\ x = 105^\circ, y = 285^\circ \\ x = 165^\circ, y = 345^\circ \\ x = 345^\circ, y = 165^\circ \end{cases}$$

d) $$\begin{cases} \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = 2 \\ x - y = \pi \end{cases} \Rightarrow \operatorname{tg} x + \operatorname{tg}(x - \pi) = 2 \Rightarrow \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} x = 2 \Rightarrow \operatorname{tg} x = 1 \Rightarrow x = \frac{5\pi}{4},\ y = \frac{\pi}{4}$$

111. Halla todas las soluciones de la siguiente ecuación: $\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 3x + 4\cos^3 x = 0$

$$\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 3x + 4\cos^3 x = 0 \Rightarrow 2\operatorname{sen}\frac{4x}{2}\cos\frac{2x}{2} + 4\cos^3 x = 0 \Rightarrow 2\operatorname{sen} 2x \cos x + 4\cos^3 x = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\cos x\left(\operatorname{sen} 2x + 2\cos^2 x\right) = 0 \Rightarrow\Rightarrow 2\cos x\left(2\operatorname{sen} x \cos x + 2\cos^2 x\right) = 0 \Rightarrow 4\cos^2 x\left(\operatorname{sen} x + \cos x\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 90^\circ + 360^\circ k \\ x = 270^\circ + 360^\circ k \end{cases} \\ \operatorname{sen} x + \cos x = 0 \Rightarrow \operatorname{tg} x = -1 \Rightarrow \begin{cases} x = 135^\circ + 360^\circ k \\ x = 315^\circ + 360^\circ k \end{cases} \Rightarrow x = 135^\circ + 180^\circ k \end{cases}$$

112. Resuelve este sistema en el intervalo [0, 2π]: $\begin{cases} \text{sen}\, x + \text{sen}\, y = 1 \\ \cos x + \cos y = 1 \end{cases}$

Elevando al cuadrado las ecuaciones y sumando miembro a miembro los resultados:

$$\text{sen}^2 x + \cos^2 x + \text{sen}^2 y + \cos^2 y + 2(\text{sen}\, x\, \text{sen}\, y + \cos x \cos y) = 2 \Rightarrow 1 + 1 + 2\cos(x - y) = 2 \Rightarrow \cos(x - y) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - y = \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow x = y + \dfrac{\pi}{2} \\ y - x = \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow y = x + \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

Sustituyendo la primera condición en la primera ecuación:

$$\text{sen}\left(y + \frac{\pi}{2}\right) + \text{sen}\, y = 1 \Rightarrow \cos y + \text{sen}\, y = 1 \Rightarrow \sqrt{1 - \text{sen}^2 y} = 1 - \text{sen}\, y \Rightarrow 1 - \text{sen}^2 y = 1 + \text{sen}^2 y - 2\,\text{sen}\, y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\,\text{sen}^2 y - 2\,\text{sen}\, y = 0 \Rightarrow 2\,\text{sen}\, y(\text{sen}\, y - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \text{sen}\, y = 0 \Rightarrow y = 0,\ x = \dfrac{\pi}{2} \\ \text{sen}\, y = 1 \Rightarrow y = \dfrac{\pi}{2},\ x = \pi \text{ (Falsa)} \end{cases}$$

De la misma forma, sustituyendo la segunda condición, se obtiene también la solución $x = 0,\ y = \dfrac{\pi}{2}$.

Resolución de triángulos

113. Resuelve los siguientes triángulos rectángulos.

a) $\hat{A} = 90°$, $a = 25$ mm, $c = 14$ mm

b) $\hat{B} = 90°$, $a = 28$ cm, $c = 45$ cm

c) $\hat{C} = 90°$, $\hat{A} = 20°$, $a = 12$ dm

d) $\hat{B} = 90°$, $\hat{A} = 15°$, $b = 15$ m

a) $b = \sqrt{25^2 - 14^2} = 20{,}71$ mm $\quad \text{sen}\,\hat{C} = \dfrac{c}{a} = \dfrac{14}{25} \Rightarrow \hat{C} = 34°\ 3'\ 21''$ $\quad \hat{B} = 90° - \hat{C} = 55°\ 56'\ 39''$

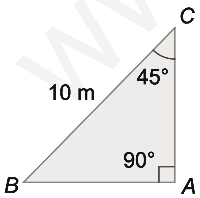
c) $\hat{B} = 90° - \hat{A} = 70°$ $\quad \text{sen}\,\hat{A} = \dfrac{12}{c} \Rightarrow c = 35{,}09$ dm $\quad \text{tg}\,\hat{A} = \dfrac{12}{b} \Rightarrow b = 32{,}97$ dm

d) $\hat{C} = 90° - \hat{A} = 75°$ $\quad \text{sen}\,\hat{A} = \dfrac{a}{15} \Rightarrow a = 3{,}88$ m $\quad \cos\hat{A} = \dfrac{c}{15} \Rightarrow c = 14{,}49$ m

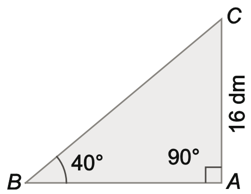
114. Calcula el área de cada uno de estos triángulos rectángulos.

a) $\hat{A} = 90°$, $a = 73$ mm, $c = 55$ mm

b)



c)



a) $b = \sqrt{73^2 - 55^2} = 48 \Rightarrow$ Área: $S = \dfrac{55 \cdot 48}{2} = 1320$ mm^2

b) $b = c;\ c = 10\,\text{sen}\,45° = 5\sqrt{2}$ m $\Rightarrow$ Área: $S = \dfrac{5\sqrt{2} \cdot 5\sqrt{2}}{2} = 25$ m^2

c) $c = \dfrac{16}{\text{tg}\,40°} = 19{,}07$ dm $\Rightarrow$ Área: $S = \dfrac{19{,}07 \cdot 16}{2} = 152{,}56$ dm^2

115. Resuelve los siguientes triángulos.

a) $b = 20$ cm, $c = 28$ cm, $\hat{C} = 40°$

b) $a = 41$ cm, $b = 9$ cm, $c = 40$ cm

c) $a = 3$ cm, $\hat{B} = 30°$, $c = 5$ cm

d) $a = 12$ cm, $b = 15$ cm, $\hat{C} = 35°$

e) $a = 30$ cm, $\hat{B} = 30°$, $\hat{C} = 50°$

f) $b = 25$ cm, $\hat{B} = 55°$, $\hat{C} = 65°$

a) $\dfrac{b}{\operatorname{sen}\hat{B}} = \dfrac{c}{\operatorname{sen}\hat{C}} \Rightarrow \operatorname{sen}\hat{B} = \dfrac{b\operatorname{sen}\hat{C}}{c} = \dfrac{20\cdot\operatorname{sen}40°}{28} = 0{,}459 \Rightarrow \hat{B} = 27°\,19'\,21''$

$\hat{A} = 180° - \hat{B} - \hat{C} = 112°\,40'\,39''$

$\dfrac{a}{\operatorname{sen}\hat{A}} = \dfrac{c}{\operatorname{sen}\hat{C}} \Rightarrow a = \dfrac{c\operatorname{sen}\hat{A}}{\operatorname{sen}\hat{C}} = \dfrac{28\cdot\operatorname{sen}112°\,40''\,39''}{\operatorname{sen}40°} = 40{,}2$ cm

b) $\cos\hat{A} = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \dfrac{9^2 + 40^2 - 41^2}{2\cdot 9\cdot 40} = 0 \Rightarrow \hat{A} = 90°$

$\cos\hat{B} = \dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \dfrac{41^2 + 40^2 - 9^2}{2\cdot 40\cdot 41} = 0{,}9756 \Rightarrow \hat{B} = 12°\,40'\,58''$

$\hat{C} = 180° - \hat{A} - \hat{B} = 77°\,19'\,2''$

c) $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\hat{B} = 3^2 + 5^2 - 2\cdot 3\cdot 5\cdot\cos 30° = 8{,}0192 \Rightarrow b = 2{,}83$ cm

$\cos\hat{A} = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \dfrac{2{,}83^2 + 5^2 - 3^2}{2\cdot 2{,}83\cdot 5} = 0{,}8484 \Rightarrow \hat{A} = 31°\,57'\,43''$

$\hat{C} = 180° - \hat{A} - \hat{B} = 118°\,2'\,17''$

d) $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\hat{C} = 12^2 + 15^2 - 2\cdot 12\cdot 15\cdot\cos 35° = 74{,}1053 \Rightarrow c = 8{,}61$ cm

$\cos\hat{A} = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \dfrac{15^2 + 8{,}61^2 - 12^2}{2\cdot 15\cdot 8{,}61} = 0{,}6006 \Rightarrow \hat{A} = 53°\,5'\,14''$

$\hat{B} = 180° - \hat{A} - \hat{C} = 91°\,54'\,46''$

e) $\hat{A} = 180° - \hat{B} - \hat{C} = 100°$

$\dfrac{a}{\operatorname{sen}\hat{A}} = \dfrac{c}{\operatorname{sen}\hat{C}} \Rightarrow c = \dfrac{a\operatorname{sen}\hat{C}}{\operatorname{sen}\hat{A}} = \dfrac{30\operatorname{sen}50°}{\operatorname{sen}100°} = 23{,}34$ cm

$\dfrac{a}{\operatorname{sen}\hat{A}} = \dfrac{b}{\operatorname{sen}\hat{B}} \Rightarrow b = \dfrac{a\operatorname{sen}\hat{B}}{\operatorname{sen}\hat{A}} = \dfrac{30\operatorname{sen}30°}{\operatorname{sen}100°} = 15{,}23$ cm

f) $\hat{A} = 180° - \hat{B} - \hat{C} = 60°$

$\dfrac{b}{\operatorname{sen}\hat{B}} = \dfrac{c}{\operatorname{sen}\hat{C}} \Rightarrow c = \dfrac{b\operatorname{sen}\hat{C}}{\operatorname{sen}\hat{B}} = \dfrac{25\operatorname{sen}65°}{\operatorname{sen}55°} = 27{,}66$ cm

$\dfrac{b}{\operatorname{sen}\hat{B}} = \dfrac{a}{\operatorname{sen}\hat{A}} \Rightarrow a = \dfrac{b\operatorname{sen}\hat{A}}{\operatorname{sen}\hat{B}} = \dfrac{25\operatorname{sen}60°}{\operatorname{sen}55°} = 26{,}43$ cm

116. Calcula el área de cada uno de estos triángulos.

a) $\hat{A} = 80º$, $b = 25$ cm, $c = 16$ cm

b) $\hat{A} = 70º$, $\hat{B} = 40º$, $c = 20$ cm

c) $a = 16$ cm, $b = 25$ cm, $c = 15$ cm

d) $\hat{A} = 66º$, $a = 15$ cm, $c = 20$ cm

e) $a = 10$ cm, $b = 15$ cm, $\hat{C} = 35º$

a) $A = \frac{1}{2} bc \operatorname{sen} \hat{A} = 196,96 \text{ cm}^2$

b) $\hat{C} = 70º$, por tanto, el triángulo es isósceles y $a = 20$ cm

$A = \frac{1}{2} ac \operatorname{sen} \hat{B} = 128,56 \text{ cm}^2$

c) $\cos \hat{A} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = 0,792 \Rightarrow \operatorname{sen} \hat{A} = 0,6105$

$A = \frac{1}{2} bc \operatorname{sen} \hat{A} = 114,47 \text{ cm}^2$

d) $\frac{a}{\operatorname{sen} \hat{A}} = \frac{c}{\operatorname{sen} \hat{C}} \Rightarrow \operatorname{sen} \hat{C} = \frac{c \operatorname{sen} \hat{A}}{a} = 1,218 > 1$

No existe tal triángulo

e) $A = \frac{1}{2} ab \operatorname{sen} \hat{C} = 43,02 \text{ cm}^2$

117. Halla el área de los dos triángulos que verifican que $\hat{A} = 45º$, $a = 6$ cm y $c = 7,5$ cm.

$$\frac{a}{\operatorname{sen} \hat{A}} = \frac{c}{\operatorname{sen} \hat{C}} \Rightarrow \operatorname{sen} \hat{C} = \frac{c \operatorname{sen} \hat{A}}{a} = 0,8839 \Rightarrow \begin{cases} \hat{C} = 62º\ 6'\ 59'',\ \hat{B} = 72º\ 53'\ 1'' \\ \hat{C} = 117º\ 53'\ 1'',\ \hat{B} = 17º\ 6'\ 59'' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{2} ac \operatorname{sen} \hat{B} = 21,5 \text{ cm}^2 \\ A = \frac{1}{2} ac \operatorname{sen} \hat{B} = 6,62 \text{ cm}^2 \end{cases}$$

Síntesis

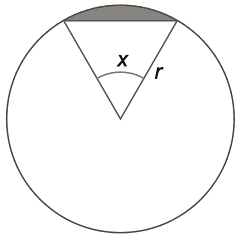
118. Si la suma de dos ángulos α y β es igual, en radianes, a $\frac{\pi}{3}$, calcula el valor de la siguiente expresión:

$$\frac{\cos\alpha + \cos\beta}{\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\beta}$$

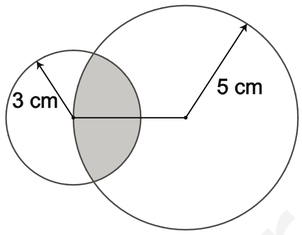
$$\frac{\cos\alpha + \cos\beta}{\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\beta} = \frac{2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{2\operatorname{sen}\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}} = \frac{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{\operatorname{sen}\frac{\alpha+\beta}{2}} = \operatorname{cotg}\frac{\alpha+\beta}{2} = \operatorname{cotg}\frac{\pi}{6} = \sqrt{3}$$

119. a) Demuestra que el área del segmento circular de la figura se puede calcular mediante la expresión:

$$A = \frac{r^2}{2}(x - \operatorname{sen} x)$$



b) Calcula el área de la zona sombreada.



a) Área del sector circular: $A_1 = \frac{\pi r^2 x}{360^\circ}$ Área del triángulo: $A_2 = \frac{1}{2} r^2 \operatorname{sen} x$

Área del segmento circular: $A = A_1 - A_2 = \frac{\pi r^2 x}{360^\circ} - \frac{1}{2} r^2 \operatorname{sen} x = \frac{r^2}{2}\left(\frac{\pi x}{180^\circ} - \operatorname{sen} x\right)$

Considerando los ángulos dados en radianes, la expresión queda: $A = \frac{r^2}{2}\left(\frac{\pi x}{\pi} - \operatorname{sen} x\right) = \frac{r^2}{2}(x - \operatorname{sen} x)$

b) Aplicando la expresión anterior para calcular el área de los dos segmentos circulares que se forman en ambas circunferencias.

Área del segmento circular de la circunferencia de radio $r_1 = 5$ cm:

$$\cos \hat{A}_1 = \frac{5^2 + 5^2 - 3^2}{2 \cdot 5 \cdot 5} = 0{,}82 \Rightarrow \hat{A}_1 = 34{,}92^\circ \Rightarrow \alpha_1 = 2\hat{A}_1 = 69{,}84^\circ = 1{,}22 \text{ rad} \Rightarrow \text{A}_1 = \frac{r_1^2}{2}(\alpha_1 - \operatorname{sen} \alpha_1) = 3{,}51 \text{ cm}^2$$

Área del segmento circular de la circunferencia de radio $r_2 = 3$ cm:

$$\cos \hat{A}_2 = \frac{3^2 + 5^2 - 5^2}{2 \cdot 3 \cdot 5} = 0{,}3 \Rightarrow \hat{A}_2 = 72{,}54^\circ \Rightarrow \alpha_2 = 2\hat{A}_2 = 145{,}08^\circ = 2{,}53 \text{ rad} \Rightarrow \text{A}_2 = \frac{r_2^2}{2}(\alpha_2 - \operatorname{sen} \alpha_2) = 8{,}8 \text{ cm}^2$$

Por tanto, el área de la zona sombreada es $A = A_1 + A_2 = 12{,}31 \text{ cm}^2$.

120. a) Halla una fórmula que permita calcular el área de un rombo conociendo las medidas de su lado y de uno de sus ángulos.

b) ¿Cuál es el área de un rombo de 15 cm de lado si uno de sus ángulos mide 40°?

c) Calcula los ángulos de un rombo sabiendo que su lado mide 4 cm y su área 8 cm^2.

a) Un rombo de lado *x* y uno de sus ángulos α se puede dividir en dos triángulos isósceles iguales de área

$A = \frac{1}{2} x^2 \operatorname{sen} \alpha$, por tanto, el área del rombo es $A_R = 2A = x^2 \operatorname{sen} \alpha$.

b) $A_R = 15^2 \operatorname{sen} 40^\circ = 144{,}63 \text{ cm}^2$.

c) $8 = 4^2 \operatorname{sen} \alpha \Rightarrow \operatorname{sen} \alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow$ Los ángulos del rombo son 30º y 150º.

121. a) Demuestra que $1+\cos\alpha = 2\cos^2\dfrac{\alpha}{2}$.

b) Con ayuda de la fórmula anterior y el teorema del coseno, demuestra que en un triángulo de lados *a*, *b* y c se verifica:

$$\cos\frac{\hat{A}}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$$

con *p* el valor del semiperímetro del triángulo $p = \dfrac{a+b+c}{2}$.

a) $1+\cos\alpha = 1+\cos^2\dfrac{\alpha}{2} - \text{sen}^2\dfrac{\alpha}{2} = 2\cos^2\dfrac{\alpha}{2}$

b) $2\cos^2\dfrac{\hat{A}}{2} = 1+\cos\hat{A} = 1+\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \dfrac{2bc+b^2+c^2-a^2}{2bc} = \dfrac{(b+c)^2-a^2}{2bc} = \dfrac{(b+c+a)(b+c-a)}{2bc} = \dfrac{2p(p-a)}{bc} \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos\dfrac{\hat{A}}{2} = \sqrt{\dfrac{p(p-a)}{bc}}$

122. Sabiendo que $\text{tg}\dfrac{\alpha}{2} = t$:

a) Calcula $\cos^2\dfrac{\alpha}{2}$ y $\text{sen}^2\dfrac{\alpha}{2}$ en función de *t*.

b) Con la ayuda de las fórmulas del ángulo doble, calcula $\text{sen}\,\alpha$, $\cos\alpha$ y $\text{tg}\,\alpha$ en función de *t*.

c) Calcula en función de *t* las siguientes expresiones:

i) $\dfrac{1}{\text{sen}\,\alpha+\cos\alpha}$ **ii)** $\dfrac{\text{sen}\,\alpha-\cos\alpha}{\text{sen}\,\alpha+\cos\alpha}$ **iii)** $\dfrac{\text{tg}\,\alpha}{\text{sen}\,\alpha-\cos\alpha}$

a) $1+\text{tg}^2\dfrac{\alpha}{2} = \sec^2\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1}{\cos^2\dfrac{\alpha}{2}} \Rightarrow \cos^2\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1}{1+\text{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}} = \dfrac{1}{1+t^2}$ y $\text{sen}^2\dfrac{\alpha}{2} = 1-\cos^2\dfrac{\alpha}{2} = 1-\dfrac{1}{1+t^2} = \dfrac{t^2}{1+t^2}$

b) $\text{sen}\,\alpha = \text{sen}\left(2\cdot\dfrac{\alpha}{2}\right) = 2\,\text{sen}\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\alpha}{2} = 2\dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}} = \dfrac{2t}{1+t^2}$

$\cos\alpha = \cos\left(2\cdot\dfrac{\alpha}{2}\right) = \cos^2\dfrac{\alpha}{2} - \text{sen}^2\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1}{1+t^2} - \dfrac{t^2}{1+t^2} = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$

$\text{tg}\,\alpha = \dfrac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{2t}{1-t^2}$

c) i) $\dfrac{1}{\text{sen}\,\alpha+\cos\alpha} = \dfrac{1}{\dfrac{2t}{t^2+1}+\dfrac{1-t^2}{t^2+1}} = \dfrac{t^2+1}{-t^2+2t+1}$

ii) $\dfrac{\text{sen}\,\alpha-\cos\alpha}{\text{sen}\,\alpha+\cos\alpha} = \dfrac{\dfrac{2t}{t^2+1}-\dfrac{1-t^2}{t^2+1}}{\dfrac{2t}{t^2+1}+\dfrac{1-t^2}{t^2+1}} = \dfrac{\dfrac{t^2+2t-1}{t^2+1}}{\dfrac{-t^2+2t+1}{t^2+1}} = \dfrac{t^2+2t-1}{-t^2+2t+1}$

iii) $\dfrac{\text{tg}\,\alpha}{\text{sen}\,\alpha-\cos\alpha} = \dfrac{\dfrac{2t}{1-t^2}}{\dfrac{t^2+2t-1}{t^2+1}} = \dfrac{2t\left(t^2+1\right)}{\left(1-t^2\right)\left(t^2+2t-1\right)}$

CUESTIONES

123. ¿Cuáles son los valores máximo y mínimo de sen α, cos α, tg α, cosec α, sec α y cotg α?

El valor mínimo de sen α y cos α es –1 y el valor máximo es 1.

El valor mínimo y máximo del resto de valores no está definido, tg α y cotg α pueden tomar cualquier valor, sec α y cosec α pueden tomar cualquier valor salvo los pertenecientes al intervalo (–1, 1).

124. Indica el número de soluciones de las siguientes ecuaciones trigonométricas.

a) $\text{sen}\, x + \cos x = 3$

b) $\cos^n x = 10$ siendo *n* cualquier número natural.

a) No tiene solución, pues el valor máximo del sen *x* y del cos *x* es 1, con lo cual su suma nunca puede ser 3.

b) No tiene solución, pues el valor máximo del cos *x* es 1, con lo cual su potencia nunca puede ser 10.

125. Indica todos los ángulos positivos y menores que 360º tales que su tangente coincida con su cotangente.

La tangente coincide con la cotangente para aquellos ángulos en que su valor es 1 y –1. Luego, los ángulos positivos menores de 360º que satisfacen dicha condición son 45º, 135º, 225º y 315º.

126. ¿Cuánto vale la siguiente diferencia?

$$\mathbf{sen}(5\pi - \alpha) - \mathbf{cos}(\alpha + 8\pi)$$

$$\text{sen}(5\pi - \alpha) - \cos(\alpha + 8\pi) = \text{sen}\,5\pi \cos\alpha - \cos 5\pi\, \text{sen}\,\alpha - \cos\alpha \cos 8\pi + \text{sen}\,\alpha\, \text{sen}\, 8\pi =$$

$$= \text{sen}\,\pi \cos\alpha - \cos\pi\, \text{sen}\,\alpha - \cos\alpha \cos 2\pi + \text{sen}\,\alpha\, \text{sen}\, 2\pi = \text{sen}\,\alpha - \cos\alpha$$

PROBLEMAS

127. Un globo está sujeto a una cuerda de 10 m de longitud. Debido a la acción del viento, el globo se ha desplazado de la vertical del punto de amarre y se encuentra a una altura de 8 m. Calcula la inclinación de la cuerda respecto de la línea de tierra.

Sea α la inclinación buscada, tenemos: $\text{sen}\,\alpha = \dfrac{8}{10} \Rightarrow \alpha = 53^\circ\ 7'\ 48''$.

128. En cierta ciudad, en el mediodía del solsticio de verano, los rayos solares tienen una inclinación de 73º 3′. Calcula la longitud de la sombra de un edificio de 52 m de altura.

Sea *x* la longitud de la sombra, tenemos: $\text{tg}\, 73^\circ\ 3' = \dfrac{52}{x} \Rightarrow x = 15{,}85$ m.

129. Una señal de tráfico indica que la pendiente de un tramo de carretera es del 8 %, lo que quiere decir que en un desplazamiento horizontal de 100 m se realiza un ascenso de 8 m de altura.

a) ¿Qué ángulo forma la carretera con la horizontal?

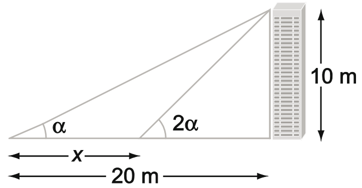
b) ¿Cuántos metros hay que recorrer para ascender 125 m?

a) Sea α el ángulo buscado, tenemos: $\text{tg}\,\alpha = \dfrac{8}{100} \Rightarrow \alpha = 4^\circ\ 34''\ 26''$

b) Sea *x* el recorrido pedido, tenemos: $\text{sen}\,\alpha = \dfrac{125}{x} \Rightarrow x = 1567{,}5$ m

130. Desde un cierto punto que dista 20 m del pie de una torre de 10 m de altura, vemos el punto más alto de ella bajo un cierto ángulo.

¿Qué distancia debemos recorrer hacia la torre para verlo con un ángulo que sea el doble del anterior?



$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{10}{20};\quad \operatorname{tg}2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{3} = \frac{10}{20-x} \Rightarrow 4x = 50 \Rightarrow x = 12{,}5 \text{ m}$$

131. Desde un punto del suelo se ve la copa de un pino bajo un ángulo de 42º. Si nos alejamos 2,5 m hacia otro punto del suelo, alineado con el anterior y con el pie del pino, vemos la copa bajo un ángulo de 24º.

Calcula la altura del pino.

Sea h la altura del pino y x la distancia del pie del pino al primer punto. Tenemos:

$$\left.\begin{array}{l}\operatorname{tg}42^\circ = \dfrac{h}{x}\\ \operatorname{tg}24^\circ = \dfrac{h}{2{,}5+x}\end{array}\right\} \Rightarrow h = x\operatorname{tg}42^\circ = 0{,}9x \Rightarrow 0{,}445 = \frac{0{,}9x}{2{,}5+x} \Rightarrow 1{,}1125 + 0{,}445x = 0{,}9x \Rightarrow x = 2{,}45 \text{ m} \Rightarrow h = 2{,}2 \text{ m}$$

132. Dos coches, con velocidades constantes respectivas de 90 y 80 km/h, viajan por una carretera que se bifurca en dos que forman un ángulo de 82º y son rectas. Si llegan a la vez a la bifurcación y cada coche toma una de las ramas, ¿qué distancia habrá entre ellos cuando lleven 15 minutos de viaje?

Sean e_1 y e_2 los espacios recorridos por los dos coches en 15 min = 0,25 h y sea x la distancia buscada, tenemos:

$$\left.\begin{array}{l}e_1 = 90\cdot 0{,}25 = 22{,}5 \text{ km}\\ e_2 = 80\cdot 0{,}25 = 20 \text{ km}\end{array}\right\} \Rightarrow x = \sqrt{22{,}5^2 + 20^2 - 2\cdot 22{,}5\cdot 20\cos 82^\circ} = 27{,}95 \text{ km}$$

133. Dos coches parten a la vez de un cruce del que salen dos carreteras: una en dirección norte y otra en dirección nornordeste. Uno de los coches toma la primera de ellas con una velocidad de 70 km/h, y el otro la segunda con una velocidad de 90 km/h, ambas constantes.

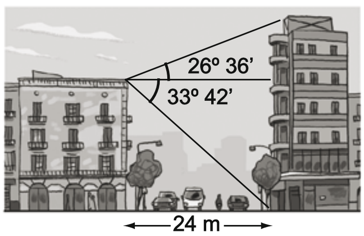
¿A qué distancia se encontrarán al cabo de 30 minutos?

El ángulo que forman las dos carreteras es $\alpha = 22^\circ\ 30'$.

Sean e_1 y e_2 los espacios recorridos por los dos coches en 30 min = 0,5 h y sea x la distancia buscada, tenemos:

$$\left.\begin{array}{l}e_1 = 70\cdot 0{,}5 = 35 \text{ km}\\ e_2 = 90\cdot 0{,}5 = 45 \text{ km}\end{array}\right\} \Rightarrow x = \sqrt{35^2 + 45^2 - 2\cdot 35\cdot 45\cos\alpha} = 18{,}43 \text{ km}$$

134. Calcula la altura de los dos edificios de la figura.



Sea x la altura del primer edificio e y la del segundo. Tenemos:

$$\operatorname{tg}33^\circ 42' = \frac{x}{24} \Rightarrow x = 24\operatorname{tg}33^\circ 42' = 16 \text{ m}$$

$$\operatorname{tg}26^\circ 36' = \frac{y-x}{24} \Rightarrow y - x = 24\operatorname{tg}26^\circ 36' = 12 \text{ m} \Rightarrow y = 12 + 16 = 28 \text{ m}$$

135. Dos ciudades, *A* y *B*, están situadas sobre el mismo meridiano de la esfera terrestre, mientras que la ciudad *C* se encuentra en el mismo paralelo que *A*. La latitud de *A* es de $\alpha = 40º$ Norte.

a) Si la ciudad *B* está 150 km al norte de *A*, calcula su latitud sabiendo que el radio de la Tierra es de unos 6370 km.

b) Si la ciudad *C* está situada sobre el mismo paralelo, a 30º al oeste de *A*, ¿qué distancia separa estas dos ciudades?

a) Recordemos que la longitud de un arco de amplitud α grados y de una circunferencia de radio *r* es $L = \dfrac{\pi r \alpha}{180º}$:

$$\alpha + \beta = \frac{180º L}{\pi r} = \frac{180º\left[\dfrac{\pi \cdot 40º \cdot 6370}{180º} + 150\right]}{6370\pi} = 41º\ 21'$$

b) Se calcula en primer lugar el radio del paralelo correspondiente: $\text{sen}\,50º = \dfrac{r}{6370} \Rightarrow r = 4879{,}7$ km

$$L = \frac{\pi r \alpha}{180º} = 2555 \text{ km}$$

136. Un avión vuela entre dos ciudades, *A* y *B*, que distan 75 km entre sí. Las visuales desde *A* y *B* hasta el avión forman con la horizontal ángulos de 36º y 12º de amplitud, respectivamente.

Calcula la altura a la que vuela el avión y las distancias a las que se encuentra de *A* y de *B*, suponiendo que el avión y las ciudades están sobre el mismo plano vertical.

Sean x_A, x_B las distancias del avión a *A* y *B*, respectivamente, y *h* la altura del avión, tenemos:

$$\frac{x_B}{\text{sen}\,36º} = \frac{75}{\text{sen}\,132º} \Rightarrow x_B = 59 \text{ km} \qquad \frac{x_A}{\text{sen}\,12º} = \frac{75}{\text{sen}\,132º} \Rightarrow x_A = 21 \text{ km} \qquad h = x_B \cdot \text{sen}\,12º = 12{,}3 \text{ km}$$

137. Calcula el área de un pentágono regular si su perímetro coincide con el de un cuadrado que tiene 144 cm^2 de área.

El lado del cuadrado mide $\sqrt{144} = 12$ cm, por tanto, el perímetro del pentágono es 48 cm, es decir, cada lado del pentágono mide 9,6 cm. Si a_p es la apotema, tenemos $\text{tg}\,36º = \dfrac{4{,}8}{a_p} \Rightarrow a_p = 6{,}61$ cm y por tanto, el área del pentágono es $\dfrac{48 \cdot 6{,}61}{2} = 158{,}54$ cm^2.

138. Calcula los radios y las áreas de las circunferencias inscrita y circunscrita a un octógono regular de 5 cm de lado.

Calculamos el radio de la circunferencia circunscrita: $\text{sen}\dfrac{360º}{16} = \dfrac{2{,}5}{R} \Rightarrow R = 6{,}53$ cm.

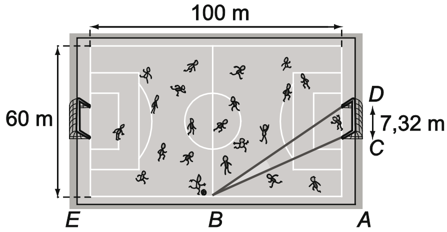
Calculamos el radio de la circunferencia inscrita: $\text{tg}\dfrac{360º}{16} = \dfrac{2{,}5}{r} \Rightarrow r = 6{,}04$ cm.

Por tanto, el área de la circunferencia circunscrita es $A_1 = \pi R^2 = 134\ cm^2$ y el de la circunferencia inscrita es $A_2 = \pi r^2 = 114\ cm^2$.

139. Calcula el área del paralelogramo cuyos lados miden 10 y 15 cm, respectivamente, si uno de sus ángulos mide 35º.

El paralelogramo se puede dividir en dos triángulos iguales de área $\frac{1}{2}\cdot 10\cdot 15\cdot \text{sen}\,35^{\circ}$, por tanto, el área del paralelogramo es $10\cdot 15\cdot \text{sen}\,35^{\circ}=86,04\ \text{cm}^2$.

140. Calcula el ángulo de tiro del jugador que está situado en el punto *B* del campo.



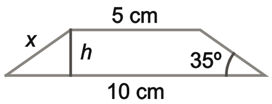
$$\begin{cases} \text{tg}\,\widehat{CBA}=\dfrac{26,34}{50}=0,5268\Rightarrow \widehat{CBA}=27^{\circ}\ 46'\ 49'' \\ \text{tg}\,\widehat{DBA}=\dfrac{33,66}{50}=0,6732\Rightarrow \widehat{DBA}=33^{\circ}\ 56'\ 54'' \end{cases}\Rightarrow \widehat{DBC}=\widehat{DBA}-\widehat{CBA}=6^{\circ}\ 10'\ 5''$$

141. Las bases de un trapecio isósceles miden 10 y 5 cm, respectivamente. El ángulo que forma la base mayor con cada uno de los lados no paralelos es de 35º. Calcula la altura, el perímetro y el área del trapecio.

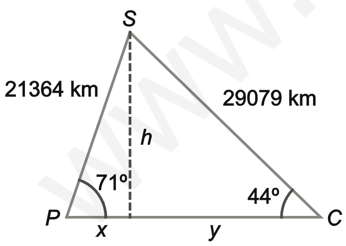
$$\text{tg}\,35^{\circ}=\frac{h}{2,5}\Rightarrow h=1,75\ \text{cm}$$

$$\cos 35^{\circ}=\frac{2,5}{x}\Rightarrow x=3,05\ \text{cm}\Rightarrow P=21,1\ \text{cm}$$

$$A=\frac{(10+5)\cdot 1,75}{2}=13,13\ \text{cm}^2$$



142. Desde un satélite GPS se establece la posición de un coche respecto de un punto de referencia fijo en la Tierra. Las distancias desde el punto fijo y el coche al satélite son 21 364 y 29 079 km, respectivamente. Si la línea que une el punto fijo con el satélite forma un ángulo con el suelo de 71º, y la que une el coche con el satélite, 44º, ¿qué distancia separa al coche del punto fijo? ¿A qué altura está el satélite?

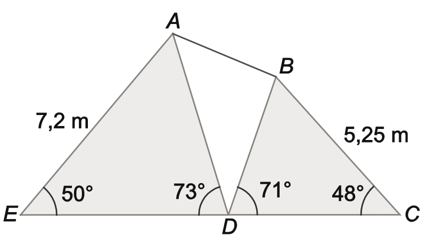


Observemos el dibujo, tenemos:

$$h=21364\cdot \text{sen}\,71^{\circ}=20200\ \text{km}$$

$$x+y=21364\cdot \cos 71^{\circ}+29079\cdot \cos 44^{\circ}=27873,12\ \text{km}$$

143. Calcula la distancia entre los puntos *A* y *B*.

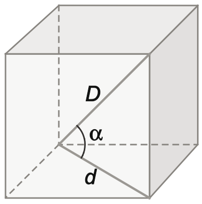


$$\frac{AD}{\text{sen}\,50^{\circ}}=\frac{7,2}{\text{sen}\,73^{\circ}}\Rightarrow AD=5,77\ \text{m}$$

$$\frac{BD}{\text{sen}\,48^{\circ}}=\frac{5,25}{\text{sen}\,71^{\circ}}\Rightarrow BD=4,13\ \text{m}$$

$$AB^2=5,77^2+4,13^2-2\cdot 5,77\cdot 4,13\cos\left(180^{\circ}-73^{\circ}-71^{\circ}\right)=11,79\Rightarrow AB=3,43\ \text{m}$$

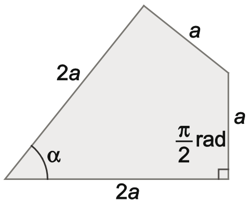
144. Calcula el ángulo α que forman la diagonal del cubo y la diagonal de una cara del mismo.



Sea a la arista del cubo, $D=\sqrt{a^2+a^2+a^2}=\sqrt{3a^2}=a\sqrt{3}$ y $d=\sqrt{a^2+a^2}=a\sqrt{2}$, por tanto, tenemos:

$$\cos\alpha=\frac{d}{D}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{6}}{3}\Rightarrow\alpha=35^\circ\ 15'\ 52''$$

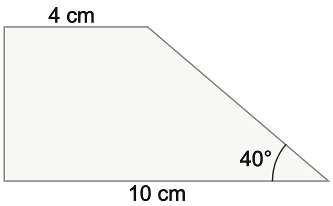
145. Calcula la amplitud del ángulo α de la figura.



La figura se puede dividir en dos triángulos iguales, ya que tienen los tres lados iguales, por tanto:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{a}{2a}=\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{\alpha}{2}=26^\circ\ 33'\ 54''\Rightarrow\alpha=53^\circ\ 7'\ 48''$$

146. Calcula la altura, el perímetro y el área del trapecio de la figura.



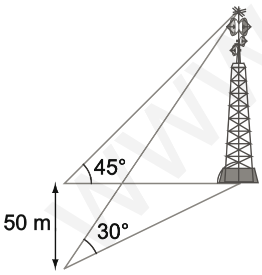
Altura: $h=6\operatorname{tg}40^\circ=5{,}03$ cm

Lado restante: $x=6\cos 40^\circ=4{,}6$ cm

Perímetro: 23,63 cm

Área: $\dfrac{10+4}{2}\cdot 5{,}03=35{,}21\ \text{cm}^2$

147. Un hombre que está situado al oeste de una emisora de radio observa que su ángulo de elevación es de 45º. Camina 50 m hacia el sur y observa que el ángulo de elevación es ahora de 30º. Halla la altura de la antena.



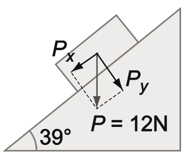
La distancia inicial a la antena es igual a su altura h, ya que el ángulo en el primer punto es de 45º.

Desde el segundo punto, la distancia a la antena es $\dfrac{h}{\operatorname{tg}30^\circ}=\sqrt{3}h$.

Al ser el triángulo del suelo rectángulo tenemos:

$$h^2+50^2=\left(\sqrt{3}h\right)^2=3h^2\Rightarrow h^2=1250\Rightarrow h=35{,}36\ \text{m}$$

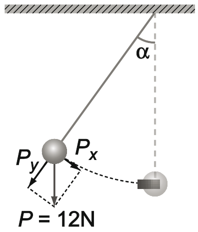
148. Calcula las componentes p_x y p_y de la fuerza $\vec{P}$ de la figura.



$$p_x=P\operatorname{sen}\alpha=12\operatorname{sen}39^\circ=7{,}55\ \text{N}$$

$$p_y=P\cos\alpha=12\cos 39^\circ=9{,}32\ \text{N}$$

149. Calcula, en función de α, las componentes p_x y p_y de la fuerza $\vec{P}$ en el siguiente péndulo. Halla el valor de la fuerza para el caso en que α = 30º.



$$p_x = P \operatorname{sen} \alpha = 12 \operatorname{sen} 30° = 6 \text{ N}$$

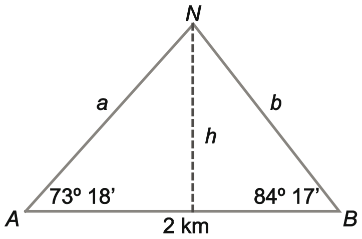
$$p_y = P \cos \alpha = 12 \cos 30° = 10{,}39 \text{ N}$$

150. Dos personas que están separadas por 2 km de distancia, ven, sobre su plano vertical y en el mismo momento, una nube bajo ángulos de 73º 18′ y 84º 17′, respectivamente.

Calcula la altura de la nube y la distancia de la misma a cada uno de los observadores.

Hay dos posibles interpretaciones del problema.

Si la nube está situada entre los dos observadores, tenemos:

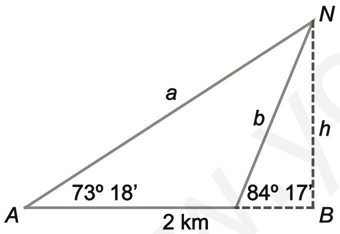


$$\frac{b}{\operatorname{sen} 73°18'} = \frac{2}{\operatorname{sen} 22°\ 25'} \Rightarrow b = 5{,}02 \text{ km}$$

$$\frac{a}{\operatorname{sen} 84°17'} = \frac{2}{\operatorname{sen} 22°\ 25'} \Rightarrow a = 5{,}22 \text{ km}$$

$$h = b \operatorname{sen} 84°\ 17' = 5 \text{ km}$$

Si la nube está situada a un mismo lado de los dos observadores, tenemos



$$\frac{b}{\operatorname{sen} 73°\ 18'} = \frac{2}{\operatorname{sen} 10°\ 59'} \Rightarrow b = 10{,}05 \text{ km}$$

$$\frac{a}{\operatorname{sen} 95°\ 43'} = \frac{2}{\operatorname{sen} 10°\ 59'} \Rightarrow a = 10{,}45 \text{ km}$$

$$h = b \operatorname{sen} 84°\ 17' = 10 \text{ km}$$

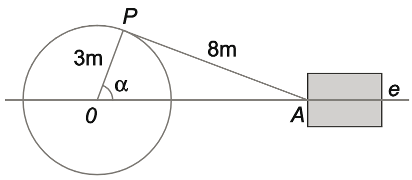
151. Determina, en función del número de lados, las áreas de los polígonos regulares de n lados inscritos y circunscritos, respectivamente, a una circunferencia de 10 cm de radio.

Área del polígono inscrito. $A = n\frac{1}{2}10^2 \operatorname{sen}\frac{360°}{n} = 50n \operatorname{sen}\frac{360°}{n}$

El lado del polígono circunscrito mide $2 \cdot 10 \cdot \operatorname{tg}\frac{360°}{2n} = 20 \operatorname{tg}\frac{180°}{n}$, por tanto, el área del polígono circunscrito es:

$$A = \frac{n \cdot 20 \operatorname{tg}\frac{180°}{n} \cdot 10}{2} = 100n \operatorname{tg}\frac{180°}{n}$$

152. La máquina que representa la figura transforma un movimiento con trayectoria circular en un movimiento con trayectoria recta.



a) Calcula la distancia que separa a *O* de *A* cuando:

i) $\alpha = 0$ rad **ii)** $\alpha = \pi$ rad **iii)** $\alpha = \frac{\pi}{2}$ rad

b) Halla una expresión que relacione la distancia *OA* con el ángulo α.

c) Comprueba que la relación hallada se corresponde con los valores calculados en el apartado a).

d) Calcula la distancia *OA* cuando:

i) $\alpha = \frac{\pi}{6}$ rad **ii)** $\alpha = \frac{5\pi}{6}$ rad **iii)** $\alpha = \frac{7\pi}{6}$ rad **iv)** $\alpha = \frac{11\pi}{6}$ rad

a) **i)** $\alpha = 0 \Rightarrow OA = 8 + 3 = 11$ m **ii)** $\alpha = \pi \Rightarrow OA = 8 - 3 = 5$ m **iii)** $\alpha = \frac{\pi}{2} \Rightarrow OA = \sqrt{8^2 - 3^2} = \sqrt{55} = 7{,}42$ m

b) Aplicando el teorema del coseno tenemos:

$$AP^2 = OA^2 + OP^2 - 2\cdot OA\cdot OP\cos\alpha \Rightarrow 64 = OA^2 + 9 - 6\cdot OA\cos\alpha \Rightarrow OA^2 - 6\cos\alpha OA - 55 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow OA = \frac{6\cos\alpha \pm \sqrt{36\cos^2\alpha - 4\cdot 1\cdot(-55)}}{2} = 3\cos\alpha \pm \sqrt{9\cos^2\alpha + 55}$$

c) $$\alpha = 0 \Rightarrow OA = 3\cos 0 \pm \sqrt{9\cos^2 0 + 55} = 3 \pm \sqrt{9+55} = 3 \pm 8 \Rightarrow \begin{cases} OA = 3 - 8 = -5 \text{ Imposible} \\ OA = 3 + 8 = 11 \text{ m} \end{cases}$$

De igual manera, eliminando las soluciones imposibles tenemos:

$$\alpha = \pi \Rightarrow OA = 3\cos\pi + \sqrt{9\cos^2\pi + 55} = -3 + \sqrt{9+55} = -3 + 8 = 5 \text{ m}$$

$$\alpha = \frac{\pi}{2} \Rightarrow OA = 3\cos\frac{\pi}{2} + \sqrt{9\cos^2\frac{\pi}{2} + 55} = 0 + \sqrt{0+55} = \sqrt{55} = 7{,}42 \text{ m}$$

d) Como antes, eliminando las soluciones imposibles, tenemos:

i) $$\alpha = \frac{\pi}{6} \Rightarrow OA = 3\cos\frac{\pi}{6} + \sqrt{9\cos^2\frac{\pi}{6} + 55} = \frac{3\sqrt{3}}{2} + \sqrt{\frac{27}{4} + 55} = 10{,}46 \text{ m}$$

ii) $$\alpha = \frac{5\pi}{6} \Rightarrow OA = 3\cos\frac{5\pi}{6} + \sqrt{9\cos^2\frac{5\pi}{6} + 55} = -\frac{3\sqrt{3}}{2} + \sqrt{\frac{27}{4} + 55} = 5{,}26 \text{ m}$$

iii) $$\alpha = \frac{7\pi}{6} \Rightarrow OA = 3\cos\frac{7\pi}{6} + \sqrt{9\cos^2\frac{7\pi}{6} + 55} = -\frac{3\sqrt{3}}{2} + \sqrt{\frac{27}{4} + 55} = 5{,}26 \text{ m}$$

iv) $$\alpha = \frac{11\pi}{6} \Rightarrow OA = 3\cos\frac{11\pi}{6} + \sqrt{9\cos^2\frac{11\pi}{6} + 55} = \frac{3\sqrt{3}}{2} + \sqrt{\frac{27}{4} + 55} = 10{,}46 \text{ m}$$

153. a) Demuestra que en cualquier triángulo *ABC*, rectángulo en *A*, se verifica que: $\text{sen}\, 2\hat{B} = \text{sen}\, 2\hat{C}$

b) Demuestra que cualquier triángulo *ABC* que verifique la igualdad anterior es isósceles o rectángulo.

a) $\hat{B} + \hat{C} = 90º \Rightarrow 2\hat{B} = 180º - 2\hat{C} \Rightarrow \text{sen}\, 2\hat{B} = \text{sen}(180º - 2\hat{C}) = \text{sen}\, 2\hat{C}$

b) $$\text{sen}\, 2\hat{B} = \text{sen}\, 2\hat{C} \Rightarrow \begin{cases} 2\hat{B} = 2\hat{C} \Rightarrow \hat{B} = \hat{C} \Rightarrow \text{ Triángulo isósceles} \\ 2\hat{B} = 180º - 2\hat{C} \Rightarrow \hat{B} + \hat{C} = 90º \Rightarrow \hat{A} = 90º \Rightarrow \text{ Triángulo rectángulo} \end{cases}$$

154. Prueba que si los ángulos de un triángulo verifican que $\cos\hat{A}+\cos\hat{B}=\operatorname{sen}\hat{C}$, entonces el triángulo es rectángulo. ¿Cuál es el ángulo recto?

$$\cos\hat{A}+\cos\hat{B}=\operatorname{sen}\hat{C}\Rightarrow 2\cos\frac{\hat{A}+\hat{B}}{2}\cos\frac{\hat{A}-\hat{B}}{2}=2\operatorname{sen}\frac{\hat{C}}{2}\cos\frac{\hat{C}}{2}\Rightarrow 2\cos\frac{180^\circ-\hat{C}}{2}\cos\frac{\hat{A}-\hat{B}}{2}=2\operatorname{sen}\frac{\hat{C}}{2}\cos\frac{\hat{C}}{2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\cos\left(90^\circ-\frac{\hat{C}}{2}\right)\cos\frac{\hat{A}-\hat{B}}{2}=2\operatorname{sen}\frac{\hat{C}}{2}\cos\frac{\hat{C}}{2}\Rightarrow 2\operatorname{sen}\frac{\hat{C}}{2}\cos\frac{\hat{A}-\hat{B}}{2}=2\operatorname{sen}\frac{\hat{C}}{2}\cos\frac{\hat{C}}{2}\Rightarrow\cos\frac{\hat{A}-\hat{B}}{2}=\cos\frac{\hat{C}}{2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{\hat{A}-\hat{B}}{2}=\dfrac{\hat{C}}{2}\Rightarrow\hat{A}=\hat{B}+\hat{C}=90^\circ\Rightarrow\text{ Triángulo rectángulo en } A\\[2mm]\dfrac{\hat{A}-\hat{B}}{2}=-\dfrac{\hat{C}}{2}\Rightarrow\hat{B}=\hat{A}+\hat{C}=90^\circ\Rightarrow\text{ Triángulo rectángulo en } B\end{cases}$$

155. Enunciado Si $\hat{A}$, $\hat{B}$ y $\hat{C}$ son los tres ángulos de un triángulo cualquiera, calcula el valor de la expresión:

$$\operatorname{cotg}\hat{A}\operatorname{cotg}\hat{B}+\operatorname{cotg}\hat{A}\operatorname{cotg}\hat{C}+\operatorname{cotg}\hat{B}\operatorname{cotg}\hat{C}$$

$$-\operatorname{cotg}\hat{C}=\operatorname{cotg}(180^\circ-\hat{C})=\operatorname{cotg}(\hat{A}+\hat{B})=\frac{1}{\operatorname{tg}(\hat{A}+\hat{B})}=\frac{1-\operatorname{tg}\hat{A}\operatorname{tg}\hat{B}}{\operatorname{tg}\hat{A}+\operatorname{tg}\hat{B}}=\frac{\operatorname{cotg}\hat{A}\operatorname{cotg}\hat{B}-1}{\operatorname{cotg}\hat{A}+\operatorname{cotg}\hat{B}}$$

Por tanto, $\operatorname{cotg}\hat{A}\operatorname{cotg}\hat{B}-1=-\operatorname{cotg}\hat{A}\operatorname{cotg}\hat{C}-\operatorname{cotg}\hat{B}\operatorname{cotg}\hat{C}$ y la expresión vale 1.

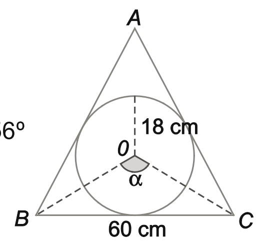
156. El radio de la circunferencia inscrita a un triángulo isósceles mide 18 cm. Resuelve el triángulo sabiendo que su base mide 60 cm.

$OB=\sqrt{18^2+30^2}=35$ cm

Aplicando el teorema del coseno al triángulo *OBC* tenemos:

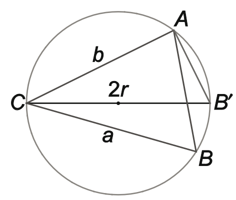
$$\cos\alpha=\frac{35^2+35^2-60^2}{2\cdot 35\cdot 35}=-0{,}4694\Rightarrow\alpha=118^\circ\Rightarrow\hat{B}=\hat{C}=2\cdot 31^\circ=62^\circ\Rightarrow\hat{A}=180^\circ-2\cdot 62^\circ=56^\circ$$

$$\frac{AB}{\operatorname{sen}62^\circ}=\frac{60}{\operatorname{sen}56^\circ}\Rightarrow AB=AC=\frac{60\operatorname{sen}62^\circ}{\operatorname{sen}56^\circ}=63{,}9\text{ cm}$$



PARA PROFUNDIZAR

157. Para el triángulo de la figura y la circunferencia circunscrita a él demuestra la afirmación dada en cada caso.



a) Se cumple la relación: $r=\dfrac{a}{2\operatorname{sen}\hat{A}}=\dfrac{b}{2\operatorname{sen}\hat{B}}=\dfrac{c}{2\operatorname{sen}\hat{C}}$ (Ten en cuenta la relación entre los ángulos $\hat{B}$ y $\hat{B}'$)

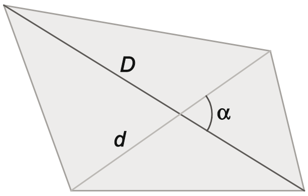
b) El área del triángulo se puede calcular como: $A=\dfrac{abc}{4r}$

a) $\hat{B}=\hat{B}'$, ya que ambos son ángulos inscritos a la misma circunferencia y determinan el mismo arco.

$$\operatorname{sen}\hat{B}=\frac{b\operatorname{sen}\hat{A}}{a}\text{ y }\operatorname{sen}\hat{B}'=\frac{b}{2r}\Rightarrow\frac{b\operatorname{sen}\hat{A}}{a}=\frac{b}{2r}\Rightarrow r=\frac{a}{2\operatorname{sen}\hat{A}}\Rightarrow r=\frac{a}{2\operatorname{sen}\hat{A}}=\frac{b}{2\operatorname{sen}\hat{B}}=\frac{c}{2\operatorname{sen}\hat{C}}$$

b) $A=\dfrac{1}{2}ab\operatorname{sen}\hat{C}=\dfrac{1}{2}ab\dfrac{c}{2r}=\dfrac{abc}{4r}$

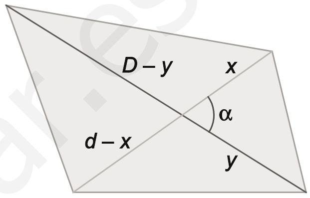
158. Observa la siguiente figura.



a) Si las diagonales de un cuadrilátero miden *d* y *D* unidades lineales, respectivamente, y forman un ángulo α, demuestra que el área de dicho cuadrilátero puede calcularse con la fórmula: $A = \frac{1}{2} dD \operatorname{sen} \alpha$

b) Calcula el área de un cuadrilátero cuyas diagonales forman un ángulo de 80º si miden 4 y 5 cm, respectivamente.

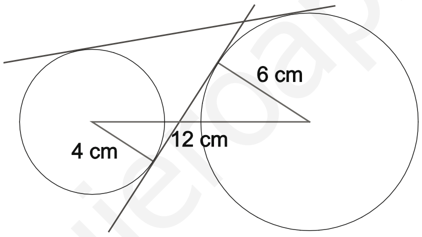
a) El cuadrilátero se puede dividir en cuatro triángulos, como $\operatorname{sen} \alpha (180º - \alpha) = \operatorname{sen} \alpha$ se puede escribir:



$$A = \frac{1}{2} \operatorname{sen} \alpha [xy + x(D-y) + y(d-x) + (D-y)(d-x)] = \frac{1}{2} dD \operatorname{sen} \alpha$$

b) $A = \frac{1}{2} Dd \operatorname{sen} \alpha = \frac{1}{2} 4 \cdot 5 \operatorname{sen} 80º = 9{,}85 \text{ cm}^2$

159. Considera las dos circunferencias coplanarias de la figura.



Calcula la inclinación sobre la recta que une los centros de:

a) la tangente común exterior.

b) la tangente común interior.

a) $\operatorname{sen} \alpha = \frac{6-4}{12} \Rightarrow \alpha = 9º\ 35'\ 39''$

b) $\operatorname{sen} \beta = \frac{6+4}{12} \Rightarrow \beta = 56º\ 26'\ 34''$

ENTORNO MATEMÁTICO

Parada inesperada en el Puente

Un grupo de estudiantes está en Londres aprendiendo inglés. Como actividad complementaria realizan una visita a Westminster. Sin embargo, al ir a cruzar el puente se encuentran con que está cortado por un accidente. Para entretenerse durante la espera, su profesor, Mr. Clever, les propone el siguiente problema:

Can you estimate the height of Big Ben Tower and how far we are from it?

Los chicos están un poco desconcertados porque no saben cómo conseguir la información que les pide Mr. Clever (*internet via Smartphone is not allowed*).

En ese momento Bonneidée, una estudiante francesa, recuerda sus clases de trigonometría y propone un plan para solucionar el problema. Coloca a Edu en el punto *A*, a Fer, en el *B*, y mide en pasos la distancia entre ambos, obteniendo un valor de 125 pasos de unos 80 cm cada uno. Luego estima los ángulos α y β formados por el puente y las líneas que unen *A* y *B* con lo alto del Big Ben, obteniendo que $\alpha = 18º$ y $\beta = 26º$.

Con esta información, Bonneidée afirma que es capaz de calcular la altura de la torre y la distancia a ella. ¿Crees que está en lo cierto o que se está marcando un farol ante sus amigos y Mr. Clever? Si piensas lo primero, demuéstralo calculando tú mismo las cantidades pedidas (*x* y *h* en la figura).

$$\begin{cases} \operatorname{tg} 26º = \dfrac{h}{x} \\ \operatorname{tg} 18º = \dfrac{h}{100+x} \end{cases} \Rightarrow h = x \operatorname{tg} 26º = 0,488x \Rightarrow 0,325 = \frac{0,488x}{100+x} \Rightarrow x = 199,39 \text{ m};\ h = 97,3 \text{ m}$$

El *London Eye*

En vista de que el puente no se abre, Mr. Clever propone, ante el espanto del grupo que ya se ve resolviendo otro problemita una alternativa:

Would you like to visit the London Eye?

Aunque a algunos les da miedo montar en la gigantesca noria del milenio, a otros les parece que puede ser excitante y que las vistas y las fotos desde arriba merecerán la pena. Al final deciden caminar junto al Támesis hasta llegar a la famosa noria y allí el grupo se divide entre los osados que suben y los más miedosos: Fer, Clara y, *of course*, Mr. Clever que se quedan esperando abajo.

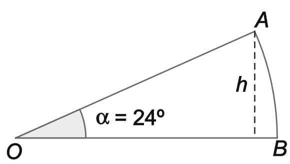
Cuando han pasado unos minutos, la noria se para de repente por causa de una avería y comienzan a escucharse protestas desde las cestas. Los chicos observan que la cesta en la que van sus compañeros ha quedado en la posición *A*. Para tener ocupados a los chicos mientras se arregla el problema, Mr. Clever sin perder su flema británica comenta:

It seems like the London Eye is not working very well today! Hey guys, can you tell your friends what height they are at?

Edu y Clara tratan de resolver el problema. Los únicos datos con que cuentan son los que se indican a la entrada de la misma: altura máxima 135 m y dispone de 30 cestas.

¿Qué deberían hacer estos chicos para estimar la altura a la que chillan sus compañeros?

Observa que el ángulo entre dos cestas, medido desde el centro *O* de la noria, es de 12º, por tanto: $h = 67,5 \operatorname{sen} 24º = 27,5$ m



Luego, la altura a la está la cesta de sus compañeros es $67,5 + 27,5 = 95$ m.

AUTOEVALUACION

Comprueba qué has aprendido

1. Convierte en grados o en radianes, según el caso, los siguientes ángulos.

a) 65º **b)** 138º **c)** 4 rad **d)** $\frac{\pi}{10}$ rad

a) $65° = \frac{65°\pi}{180°} = \frac{13\pi}{36}$ rad

b) $138° = \frac{138°\pi}{180°} = \frac{23\pi}{30}$

c) $4 \text{ rad} = \frac{4 \cdot 180°}{\pi} = 229° \, 11'$

d) $\frac{\pi}{10} \text{ rad} = \frac{\pi \cdot 180°}{10\pi} = 18°$

2. Escribe en función de un ángulo entre 0 y 45º las siguientes razones trigonométricas.

a) sen 120º **b)** cos 480º **c)** tg (–430º)

a) $\text{sen}\,120° = \text{sen}\left(180° - 40°\right) = \text{sen}\,40°$

b) $\cos 480° = \cos 120° = \cos\left(180° - 60°\right) = -\cos 60° = -\text{sen}\,30°$

c) $\text{tg}\left(-430°\right) = -\text{tg}\,430° = -\text{tg}\,70° = -\text{cotg}\,20°$

3. Calcula la razón pedida en cada caso.

a) $\cos\alpha$, si $\text{tg}\,\alpha = 4$ y $\alpha \in \text{III}$

b) $\text{tg}\,\alpha$, si $\text{sen}\,\alpha = -\frac{1}{5}$ y $\alpha \in \text{IV}$

a) $1 + \text{tg}^2\alpha = \sec^2\alpha \Rightarrow \sec\alpha = -\sqrt{1 + \text{tg}^2\alpha} = -\sqrt{1+16} = -\sqrt{17} \Rightarrow \cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}} = -\frac{\sqrt{17}}{17}$

b) $1 + \text{cotg}^2\alpha = \text{cosec}^2\alpha \Rightarrow \text{cotg}\,\alpha = -\sqrt{\text{cosec}^2\alpha - 1} = -\sqrt{25-1} = -\sqrt{24} = -2\sqrt{6} \Rightarrow \text{tg}\,\alpha = -\frac{1}{2\sqrt{6}} = -\frac{\sqrt{6}}{12}$

4. Si sen α = 0,6 y sen β = 0,8, siendo ambos ángulos del primer cuadrante, calcula el valor de:

a) sen $(\alpha + \beta)$ **b)** cos $(\alpha - \beta)$ **c)** tg $(\alpha + \beta)$

$\text{sen}\,\alpha = 0{,}6 = \frac{3}{5} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{4}{5}$ y $\text{tg}\,\alpha = \frac{3}{4}$

$\text{sen}\,\beta = 0{,}8 = \frac{4}{5} \Rightarrow \cos\beta = \frac{3}{5}$ y $\text{tg}\,\beta = \frac{4}{3}$

a) $\text{sen}\left(\alpha+\beta\right) = \text{sen}\,\alpha\cos\beta + \cos\alpha\,\text{sen}\,\beta = \frac{3}{5}\cdot\frac{3}{5} + \frac{4}{5}\cdot\frac{4}{5} = 1 \Rightarrow \alpha + \beta = 90°$

b) $\cos\left(\alpha-\beta\right) = \cos\alpha\cos\beta + \text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\beta = \frac{4}{5}\cdot\frac{3}{5} + \frac{3}{5}\cdot\frac{4}{5} = \frac{24}{25} = 0{,}96$

c) $\alpha + \beta = 90° \Rightarrow \text{tg}\left(\alpha+\beta\right)$ no existe pues $\cos\left(\alpha+\beta\right) = 0$ y $\text{tg}\left(\alpha+\beta\right) = \frac{1}{0}$

5. Si α es un ángulo del segundo cuadrante y $\cos\alpha = -\frac{3}{4}$, calcula las razones de $\frac{\alpha}{2}$ y de 2α.

Al ser α un ángulo del segundo cuadrante, el seno es positivo, la tangente negativa y $\frac{\alpha}{2}$ pertenece al primer cuadrante. Tenemos $\cos\alpha = -\frac{3}{4} \Rightarrow \operatorname{sen}\alpha = \frac{\sqrt{7}}{4}$ y $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{\sqrt{7}}{3}$ y, por tanto:

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{7}{8}} = \frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{14}}{4} \qquad \operatorname{cosec}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{4}{\sqrt{14}} = \frac{2\sqrt{14}}{7}$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{1}{8}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4} \qquad \sec\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{4}{\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} = \sqrt{7} \qquad \operatorname{cotg}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{7}}{7}$$

Por otra parte:

$$\operatorname{sen}2\alpha = 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha = -\frac{3\sqrt{7}}{8} \qquad \operatorname{cosec}2\alpha - \frac{8}{3\sqrt{7}} = -\frac{8\sqrt{7}}{21}$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha = \frac{1}{8} \qquad \sec 2\alpha = 8$$

$$\operatorname{tg}2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha} = -3\sqrt{7} \qquad \operatorname{cotg}2\alpha = -\frac{1}{3\sqrt{7}} = -\frac{\sqrt{7}}{21}$$

6. Resuelve las siguientes ecuaciones trigonométricas.

a) $\operatorname{sen}\alpha = 4\cos\alpha$ **b)** $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{\operatorname{sen}\alpha}{2}$

a) $\operatorname{sen}\alpha = 4\cos\alpha \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = 4 \Rightarrow \alpha = 75{,}96^\circ + 180^\circ k$

b) $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{\operatorname{sen}\alpha}{2} \Rightarrow \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = -\frac{\operatorname{sen}\alpha}{2} \Rightarrow \begin{cases}\operatorname{sen}\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 0^\circ + 180^\circ k \\ \cos\alpha = -2 \Rightarrow \text{ No tiene solución real}\end{cases}$

7. Encuentra todas las soluciones del siguiente sistema de ecuaciones trigonométricas.

$$\begin{cases}\operatorname{sen}\alpha + \cos\beta = 1 \\ \cos\alpha - \operatorname{sen}\beta = -1\end{cases}$$

Elevando al cuadrado las ecuaciones y sumando miembro a miembro los resultados:

$$\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\beta + 2(\operatorname{sen}\alpha\cos\beta - \cos\alpha\operatorname{sen}\beta) = 2 \Rightarrow 1+1+2\operatorname{sen}(\alpha-\beta) = 2 \Rightarrow \operatorname{sen}(\alpha-\beta) = 0 \Rightarrow \alpha = \beta$$

Sustituyendo en la primera ecuación:

$$\operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha = 1 \Rightarrow (\operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha)^2 = 1 \Rightarrow 1 + 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha = 1 \Rightarrow 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\operatorname{sen}\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 0^\circ + 180^\circ k \text{ (Falsa)} \\ \cos\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 90^\circ + 180^\circ k\end{cases}$$

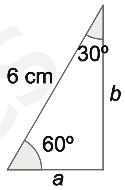
8. Resuelve y calcula el área del triángulo con las medidas: $\hat{A} = 70^\circ$, $\hat{B} = 30^\circ$ y $b = 12$ cm

$\hat{C} = 180^\circ - \hat{A} - \hat{B} = 80^\circ$

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\hat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen}\hat{B}} \Rightarrow a = \frac{b\operatorname{sen}\hat{A}}{\operatorname{sen}\hat{B}} = \frac{12\operatorname{sen}70^\circ}{\operatorname{sen}30^\circ} = 22{,}55 \text{ cm} \qquad \frac{c}{\operatorname{sen}\hat{C}} = \frac{b}{\operatorname{sen}\hat{B}} \Rightarrow c = \frac{b\operatorname{sen}\hat{C}}{\operatorname{sen}\hat{B}} = \frac{12\operatorname{sen}80^\circ}{\operatorname{sen}30^\circ} = 23{,}63 \text{ cm}$$

Área: $A = \frac{1}{2}ac\operatorname{sen}\hat{B} = 133{,}21 \text{ cm}^2$

9. Los lados de un rombo miden 6 cm y forman entre sí ángulos de 60º y 120º. Halla las longitudes de las diagonales del rombo.



El rombo se divide en cuatro triángulos rectángulos como el de la figura.

$a = 6\operatorname{sen}30^\circ = 3$ cm $\qquad b = 6\cos 30^\circ = 3\sqrt{3}$ cm

Por tanto, la diagonal mayor del rombo mide $2b = 6\sqrt{3}$ cm y la diagonal menor mide $2a = 6$ cm.

10. Los ángulos interiores de un polígono regular tienen por coseno $-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

a) Encuentra el número de lados que tiene dicho polígono.

b) ¿Hay más de una solución a la pregunta a)?

Existen dos ángulos cuyo coseno es igual a $\frac{-\sqrt{3}}{2}$, $\alpha = 150^\circ$ y $\alpha = 210^\circ$ (>180º) este último no es interior pues los interiores son menores de 180º. Aplicamos la fórmula para calcular la medida de los ángulos interiores de un polígono regular de n lados:

$$\alpha = \frac{180^\circ(n-2)}{n} \Rightarrow 150^\circ = \frac{180^\circ(n-2)}{n} \Rightarrow 150^\circ n = 180^\circ n - 360^\circ \Rightarrow n = 12$$

Por tanto hay una única solución, $n = 12$ lados.

Relaciona y contesta

Elige la única respuesta correcta en cada caso

1. Un triángulo tiene por lados: $a = uv$, $b = \frac{u^2 - v^2}{2}$ y $c = \frac{u^2 + v^2}{2}$ con u y v dos números reales positivos tales que $u > v$.

A. Se trata de un triángulo rectángulo en *A*.

B. Se trata de un triángulo rectángulo en *B*.

c) Se trata de un triángulo rectángulo en *C*.

d) No es un triángulo rectángulo.

Se verifica que $c^2 = a^2 + b^2$, por tanto la respuesta correcta es C.

2. Dada la función $\frac{5}{5 - 4\cos 5\alpha}$, el valor mínimo se obtiene cuando:

A. $\alpha = 2k\pi$ rad con $k \in \mathbb{Z}$

B. $\alpha = \frac{\pi}{5} + \frac{2}{5}k\pi$ rad con $k \in \mathbb{Z}$

C. $\alpha = \pi + 2k\pi$ rad con $k \in \mathbb{Z}$

D. $\alpha = \frac{\pi}{5} + 2k\pi$ rad con $k \in \mathbb{Z}$

Como $5 - 4\cos 5\alpha > 0$ el valor mínimo de la función se alcanza cuando $\cos 5\alpha$ es mínimo, es decir, cuando $\cos 5\alpha = -1$, por tanto, la respuesta correcta es B.

3. **Uno de los siguientes casos de resolución de triángulos tiene dos soluciones diferentes. Indica cuál es.**

A. $a = 4$ cm, $b = 6$ cm, $c = 15$ cm

B. $a = 5$ cm, $b = 10$ cm, $\hat{A} = 20º$

C. $a = 5$ cm, $b = 10$ cm, $\hat{C} = 20º$

D. $a = 3$ cm, $b = 4$ cm, $c = 5$ cm

La respuesta correcta es B.

Señala, en cada caso, las respuestas correctas

4. **La ecuación trigonométrica $\text{sen}^2 x = \cos^2 x$ tiene:**

A. Una solución en $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

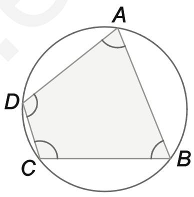
B. Dos soluciones en $[0, \pi]$

C. Tres soluciones en $\left[0, \frac{3\pi}{2}\right]$

D. Cuatro soluciones en $[0, 2\pi]$

$\text{sen}^2 x = \cos^2 x \Rightarrow \text{tg}^2 x = 1 \Rightarrow \text{tg}\, x = \pm 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + \pi k,\ x = \frac{3\pi}{4} + \pi k$, por tanto, todas las respuestas son correctas.

5. **En la siguiente figura:**



A. $\hat{A} + \hat{D} = 180º$ **B.** $\hat{A} + \hat{C} = 180º$ **C.** $\hat{B} + \hat{D} = 180º$ **D.** $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} = 360º$

B es correcto, pues la medida de un ángulo inscrito es igual a la mitad de la medida angular del arco que abarca. Si el ángulo inscrito $\hat{A}$ abarca un arco x, el ángulo inscrito $\hat{C}$ abarca un arco de 360º – x, y $\hat{A} + \hat{C} = \frac{x}{2} + \frac{360º - x}{2} = 180º$. C es correcto por el mismo razonamiento y D es correcto porque se deduce de los dos casos anteriores.

Elige la relación correcta entre las dos afirmaciones dadas

6. **Tres puntos del plano, no alineados, determinan un triángulo. Se consideran las siguientes afirmaciones:**

1. El triángulo es isósceles

2. El triángulo tiene dos ángulos cuyos senos son iguales.

A. $1 \Leftrightarrow 2$

B. $1 \Rightarrow 2$ pero $2 \not\Rightarrow 1$

C. $2 \Rightarrow 1$ pero $1 \not\Rightarrow 2$

D. 1 y 2 son excluyentes entre sí

B es correcta, si un triángulo es isósceles, va a tener dos ángulos iguales y por tanto con el mismo seno, pero si un triángulo tiene dos ángulos con el mismo seno, puede ser isósceles (y por tanto también equilátero).

Señala el dato innecesario para contestar

7. **Para calcular la tangente del ángulo $\frac{\alpha}{2}$ se dan los siguientes datos:**

1. $\textbf{tg}\,\alpha > 0$ **2.** $\cos\alpha < 0$ **3.** $1 + \text{sen}^2\alpha = 1{,}64$

A. Puede eliminarse el dato 1.

B. Puede eliminarse el dato 2.

C. Puede eliminarse el dato 3.

D. Hacen falta los tres datos.

1 y 2 no bastan para calcular $\text{tg}\frac{\alpha}{2}$, por lo que 3 es necesario.

$1 + \text{sen}^2\alpha = 1{,}64 \Rightarrow \text{sen}^2\alpha = 0{,}64 \Rightarrow \cos^2\alpha = 1 - \text{sen}^2\alpha = 0{,}36 \Rightarrow \cos\alpha = \pm 0{,}6$ y $\text{tg}\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$

También es necesario 2 para conocer el signo del coseno. Además, si $\cos\alpha < 0$, α pertenece al segundo o tercer cuadrante, por lo que $\frac{\alpha}{2}$ puede pertenecer al primer o segundo cuadrante y no queda determinado el signo de $\text{tg}\frac{\alpha}{2}$, así que necesitamos también 1 para concluir que α pertenece al tercer cuadrante y por tanto $\frac{\alpha}{2}$ pertenece al segundo y su tangente es negativa. La respuesta correcta es D.

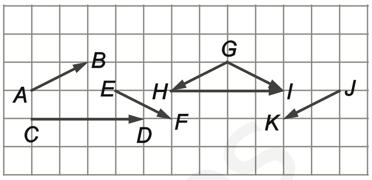
4 Vectores

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Ejercicio resuelto.

2. a) Indica tres parejas de vectores equipolentes.

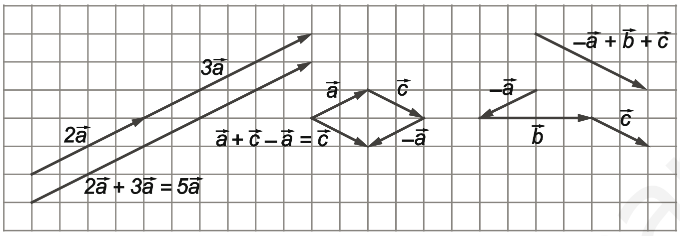
b) Representa: $-2\overrightarrow{JK}+3\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{JK}$ y $\overrightarrow{JK}-\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{GI}$



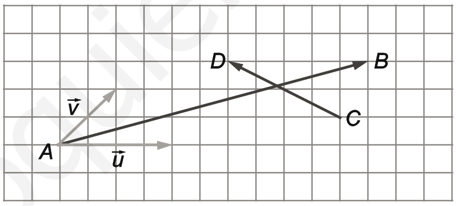
a) Son equipolentes las parejas: $\overrightarrow{EF}$ y $\overrightarrow{GI}$, $\overrightarrow{GH}$ y $\overrightarrow{JK}$, $\overrightarrow{CD}$ y $\overrightarrow{HI}$

b) Sean $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ los vectores libres cuyos representantes son $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ y $\overrightarrow{EF}$ respectivamente. Tenemos

$-2\overrightarrow{JK}+3\overrightarrow{AB}=2\vec{a}+3\vec{a}=5\vec{a}$, $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{JK}=\vec{a}+\vec{c}-\vec{a}=\vec{c}$ y $\overrightarrow{JK}-\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{GI}=-\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$



3. Expresa $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$ en función de $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

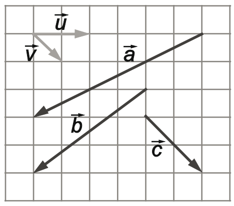


$\overrightarrow{AB}=2\vec{u}+\frac{3}{2}\vec{v}$ $\overrightarrow{CD}=-\frac{3}{2}\vec{u}+\vec{v}$

4. Ejercicio resuelto.

5. a) Halla las coordenadas de $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ respecto de la base $B=\{\vec{u},\vec{v}\}$.

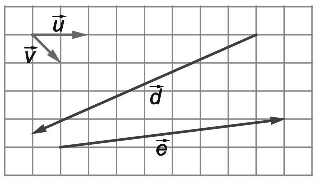
b) Representa y calcula las coordenadas de los vectores $\vec{d}=\frac{1}{2}\vec{a}+\vec{b}$ y $\vec{e}=\vec{c}-\vec{a}$.



a) $\vec{a}=-\frac{9}{2}\vec{u}+3\vec{v}$ $\vec{b}=-\frac{7}{2}\vec{u}+3\vec{v}$ $\vec{c}=2\vec{v}$

b) $\vec{d}=\frac{1}{2}\vec{a}+\vec{b}=\frac{1}{2}\left(-\frac{9}{2}\vec{u}+3\vec{v}\right)+\left(-\frac{7}{2}\vec{u}+3\vec{v}\right)=-\frac{23}{4}\vec{u}+\frac{7}{2}\vec{v}=\left(-\frac{23}{4},\frac{9}{2}\right)$

$\vec{e}=\vec{c}-\vec{a}=2\vec{v}-\left(-\frac{9}{2}\vec{u}+3\vec{v}\right)=\frac{9}{2}\vec{u}-\vec{v}=\left(\frac{9}{2},-1\right)$



6. **a)** Comprueba que los vectores $\vec{u}=(2,-3)$ y $\vec{v}=(3,6)$ forman una base de V^2.

b) Calcula las coordenadas del vector $\vec{w}=\left(6,-\frac{11}{2}\right)$ respecto de la base $B=\{\vec{u},\vec{v}\}$.

a) $\frac{2}{3}\neq\frac{-3}{6}\Rightarrow\vec{u}$ y $\vec{v}$ son linealmente independientes y, por tanto, forman una base de V^2.

b) $\left(6,-\frac{11}{2}\right)=a\cdot(2,-3)+b\cdot(3,6)\Rightarrow\begin{cases}2a+3b=6\\-3a+6b=-\frac{11}{2}\end{cases}\Rightarrow a=\frac{5}{2},\ b=\frac{1}{3}$

Las coordenadas de $\vec{w}$ respecto de la base $B=\{\vec{u},\vec{v}\}$ son $\left(\frac{5}{2},\frac{1}{3}\right)$

7 a 10. **Ejercicios resueltos.**

11. **Halla el punto medio del segmento comprendido entre los puntos $A(7, 12)$ y $B(33, -10)$.**

$$M\left(\frac{7+33}{2},\frac{12-10}{2}\right)=M(20,1)$$

12. **Comprueba si los puntos P, Q y R están alineados o forman triángulo en los siguientes casos:**

a) $P(0, 3)$, $Q(1, 1)$ y $R(2, -1)$ **b)** $P(-3, 0)$, $Q(2, 1)$ y $R(6, 2)$ **c)** $P(-1, 0)$, $Q\left(-\frac{2}{3},\frac{1}{2}\right)$ y $R\left(0,\frac{3}{2}\right)$

a) $\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{PQ}=(1,1)-(0,3)=(1,-2)\\\overrightarrow{PR}=(2,-1)-(0,3)=(2,-4)\end{array}\right\}\Rightarrow\frac{1}{2}=\frac{-2}{-4}\Rightarrow P, Q$ y R están alineados.

b) $\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{PQ}=(2,1)-(-3,0)=(5,1)\\\overrightarrow{PR}=(6,2)-(-3,0)=(9,2)\end{array}\right\}\Rightarrow\frac{5}{9}\neq\frac{1}{2}\Rightarrow P, Q$ y R no están alineados, forman un triángulo.

c) $\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{PQ}=\left(-\frac{2}{3},\frac{1}{2}\right)-(-1,0)=\left(\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right)\\\overrightarrow{PR}=\left(0,\frac{3}{2}\right)-(-1,0)=\left(1,\frac{3}{2}\right)\end{array}\right\}\Rightarrow\frac{\frac{1}{3}}{1}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}}\Rightarrow P, Q$ y R están alineados.

13. **Calcula los valores de a y b para que los vectores $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{RS}$ sean equipolentes sabiendo que: $P(a+4, -b)$, $Q(a+1, b)$, $R(4, -1)$ y $S(a, b)$.**

$$\overrightarrow{PQ}\approx\overrightarrow{RS}\Rightarrow(a+1-a-4,\ b+b)=(a-4,\ b+1)\Rightarrow\begin{cases}-3=a-4\\2b=b+1\end{cases}\Rightarrow a=1,\ b=1$$

14. **Calcula el valor de k para que los puntos $A(4, -1)$, $B(-1, 2)$ y $C(k, k+1)$ estén alineados.**

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AB}=(-1-4,\ 2+1)=(-5,3)\\\overrightarrow{AC}=(k-4,\ k+1+1)=(k-4,\ k+2)\end{array}\right\}\Rightarrow\frac{-5}{k-4}=\frac{3}{k+2}\Rightarrow-5k-10=3k-12\Rightarrow k=\frac{1}{4}$$

15. Halla el vértice *D* del paralelogramo *ABCD* si *A*(2, 3), *B*(1, –1) y *C*(–3, 0).

Para que *ABCD* sea un paralelogramo basta con que $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{DC}$ sean equipolentes, por tanto, si $D(d_1, d_2)$ tenemos:

$$\overrightarrow{AB} \approx \overrightarrow{DC} \Rightarrow (-1, -4) = (-3 - d_1, -d_2) \Rightarrow \begin{cases} -1 = -3 - d_1 \\ -4 = -d_2 \end{cases} \Rightarrow d_1 = -2,\ d_2 = 4 \Rightarrow D(-2, 4)$$

16. Ejercicio resuelto.

17. Si $\vec{u} = (-4, 3)$ y $\vec{v} = (2, -1)$, halla: $|\vec{u}|$, $|\vec{v}|$ y $\vec{u} \cdot \vec{v}$

$$|\vec{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2} = \sqrt{(-4)^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5 \qquad |\vec{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} = \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 = -4 \cdot 2 + 3(-1) = -11$$

18. Calcula, en función de *k*, el módulo de $\vec{v} = (k, -k)$ y $\vec{w} = (k+1, k-1)$ y su producto escalar.

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} = \sqrt{k^2 + (-k)^2} = \sqrt{2k^2} = |k|\sqrt{2} \qquad |\vec{w}| = \sqrt{w_1^2 + w_2^2} = \sqrt{(k+1)^2 + (k-1)^2} = \sqrt{2k^2 + 2}$$

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = v_1 w_1 + v_2 w_2 = k(k+1) - k(k-1) = 2k$$

19. Calcula los valores de *k* para que el ángulo formado por $\vec{v} = (k, -k)$ y $\vec{w} = (k+1, k-1)$ sea de 45º.

$$\cos 45^\circ = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{|\vec{v}||\vec{w}|} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2k}{|k|\sqrt{2} \cdot \sqrt{2k^2 + 2}} = \frac{2k}{|2k|\sqrt{k^2 + 1}} = \frac{\pm 1}{\sqrt{k^2 + 1}} \Rightarrow \sqrt{2k^2 + 2} = \pm 2 \Rightarrow 2k^2 + 2 = 4 \Rightarrow k = 1,\ k = -1$$

Si $k = 1$, $\alpha = 45^\circ$; si $k = -1$, $\alpha = 135^\circ$

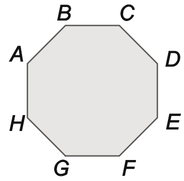
20. Ejercicio interactivo.

21 a 34. Ejercicios resueltos.

EJERCICIOS

Vectores fijos y vectores libres en el plano

35. La siguiente figura representa un octógono regular.



a) Indica dos vectores equipolentes cuyos orígenes y extremos sean vértices diferentes del octógono.

b) Indica dos vectores equipolentes cuyos orígenes y extremos sean vértices no consecutivos del octógono.

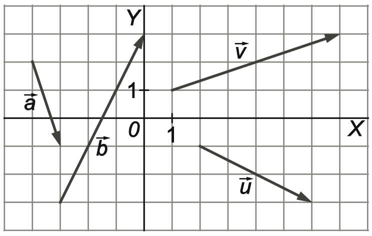
c) Indica dos vectores cuyos orígenes y extremos sean vértices diferentes del octógono y tales que tengan el mismo módulo y la misma dirección pero diferente sentido.

d) Indica dos vectores cuyos orígenes y extremos sean vértices del octógono y tales que tengan el mismo módulo y diferente dirección.

e) Indica dos vectores cuyos orígenes y extremos sean vértices del octógono y tales que tengan diferente módulo igual dirección y diferente sentido.

a) $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{FE}$ **b)** $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{GE}$ **c)** $\overrightarrow{AD}$ y $\overrightarrow{EH}$ **d)** $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BC}$ **e)** $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{DG}$

36. Expresa los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ en función de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

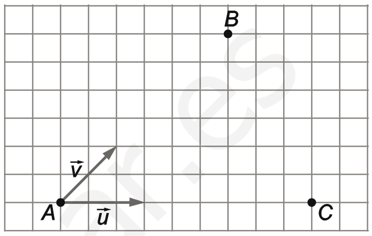


Respecto de la base canónica tenemos: $\vec{a}=(1,-3)$, $\vec{b}=(3,6)$, $\vec{u}=(4,-2)$ y $\vec{v}=(6,2)$

$$\vec{a}=a_1\cdot\vec{u}+a_2\cdot\vec{v}\Rightarrow\begin{cases}1=4a_1+6a_2\\-3=-2a_1+2a_2\end{cases}\Rightarrow a_1=1,\ a_2=-\frac{1}{2}\Rightarrow\vec{a}=\vec{u}-\frac{1}{2}\vec{v}$$

$$\vec{b}=b_1\cdot\vec{u}+b_2\cdot\vec{v}\Rightarrow\begin{cases}3=4b_1+6b_2\\6=-2b_1+2b_2\end{cases}\Rightarrow b_1=-\frac{3}{2},\ b_2=\frac{3}{2}\Rightarrow\vec{b}=-\frac{3}{2}\vec{u}+\frac{3}{2}\vec{v}$$

37. Halla las coordenadas de $\overrightarrow{BC}$ y $\overrightarrow{CB}$ en la base $B=\{\vec{u},\vec{v}\}$.



$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}\Rightarrow\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=3\vec{u}-3\vec{v}\ \text{ y }\ \overrightarrow{CB}=-\overrightarrow{BC}=-3\vec{u}+3\vec{v}$$

Dependencia lineal

38. Decide si las siguientes parejas de vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son linealmente independientes o linealmente dependientes. ¿En qué casos los dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ forman una base de V^2?

a) $\vec{u}=(-4,2)$ y $\vec{v}=\left(\frac{2}{3},-\frac{1}{3}\right)$ **b)** $\vec{u}=(16,32)$ y $\vec{v}=\left(-\frac{1}{4},-\frac{1}{2}\right)$ **c)** $\vec{u}=(2,-16)$ y $\vec{v}=(-1,-8)$

a) $\dfrac{-4}{\frac{2}{3}}=\dfrac{2}{-\frac{1}{3}}=-6\Rightarrow\vec{u}$ y $\vec{v}$ son linealmente dependientes y, por tanto, no forman una base de V^2.

b) $\dfrac{16}{-\frac{1}{4}}=\dfrac{32}{-\frac{1}{2}}=-64\Rightarrow\vec{u}$ y $\vec{v}$ son linealmente dependientes y, por tanto, no forman una base de V^2.

c) $\dfrac{2}{-1}\neq\dfrac{-16}{-8}\Rightarrow\vec{u}$ y $\vec{v}$ son linealmente independientes y, por tanto, forman una base de V^2.

39. Expresa, en cada caso, el vector $\vec{a}$ como combinación lineal de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

a) $\vec{a}=(-12,-2)$, $\vec{u}=(4,-3)$ y $\vec{v}=(-1,-2)$

b) $\vec{a}=\left(-\frac{1}{2},-5\right)$, $\vec{u}=\left(\frac{1}{2},-3\right)$ y $\vec{v}=(1,-2)$

c) $\vec{a}=\left(\frac{3}{4},-\frac{7}{6}\right)$, $\vec{u}=\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{3}\right)$ y $\vec{v}=\left(\frac{1}{4},-\frac{5}{6}\right)$

a) $\vec{a}=a_1\vec{u}+a_2\vec{v}\Rightarrow\begin{cases}-12=4a_1-a_2\\-2=-3a_1-2a_2\end{cases}\Rightarrow a_1=-2,\ a_2=4\Rightarrow\vec{a}=-2\vec{u}+4\vec{v}$

b) $\vec{a}=a_1\vec{u}+a_2\vec{v}\Rightarrow\begin{cases}-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}a_1+a_2\\-5=-3a_1-2a_2\end{cases}\Rightarrow a_1=3,\ a_2=-2\Rightarrow\vec{a}=3\vec{u}-2\vec{v}$

c) $\vec{a}=a_1\vec{u}+a_2\vec{v}\Rightarrow\begin{cases}\frac{3}{4}=\frac{1}{2}a_1+\frac{1}{4}a_2\\-\frac{7}{6}=-\frac{1}{3}a_1-\frac{5}{6}a_2\end{cases}\Rightarrow a_1=1,\ a_2=1\Rightarrow\vec{a}=\vec{u}+\vec{v}$

Operaciones con coordenadas

40. Realiza las siguientes operaciones con coordenadas de vectores.

a) $2\left[2(-1, 3)-3\left[(-2, 0)-3(4, -3)\right]\right]-3(1, -2)$

b) $2\left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{5}\right)-\frac{1}{3}\left(2, -\frac{3}{4}\right)$

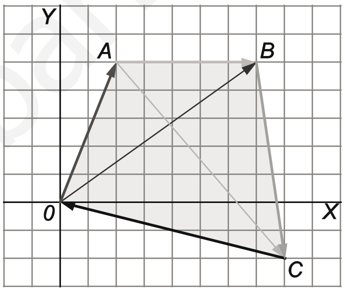
c) $2\left(2-\frac{1}{3}, 1-\frac{1}{4}\right)-2(2, -3)-\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{5}\right)$

a) $2\left[2(-1, 3)-3\left[(-2, 0)-3(4, -3)\right]\right]-3(1, -2)=2(40, -21)-(3, -6)=(77, -36)$

b) $2\left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{5}\right)-\frac{1}{3}\left(2, -\frac{3}{4}\right)=\left(\frac{2}{3}, -\frac{4}{5}\right)-\left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{4}\right)=\left(0, -\frac{11}{20}\right)$

c) $2\left(2-\frac{1}{3}, 1-\frac{1}{4}\right)-2(2, -3)-\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{5}\right)=\left(\frac{10}{3}, \frac{3}{2}\right)-(4, -6)-\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{5}\right)=\left(-\frac{7}{6}, \frac{69}{10}\right)$

41. En la siguiente figura:



a) Calcula las coordenadas de los vectores libres de representantes: $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CO}$, $\overrightarrow{OB}$ y $\overrightarrow{AC}$.

b) Comprueba que $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CO}$ es el vector nulo.

c) Calcula las coordenadas de $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{BC}$.

$A(2, 5)$, $B(7, 5)$, $C(8, -2)$ y $O(0, 0)$, por tanto:

a) $\overrightarrow{OA}=(2, 5)$, $\overrightarrow{AB}=(5, 0)$, $\overrightarrow{BC}=(1, -7)$, $\overrightarrow{CO}=(-8, 2)$, $\overrightarrow{OB}=(7, 5)$ y $\overrightarrow{AC}=(6, -7)$

b) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CO}=(2, 5)+(5, 0)+(1, -7)+(-8, 2)=(0, 0)$

c) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=(2, 5)+(5, 0)=(7, 5)$ y $\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{BC}=(2, 5)+2(5, 0)-3(1, -7)=(9, 26)$

42. Calcula las coordenadas del origen *A* de un vector cuyo extremo es *B*(–2, 4) y que es equipolente al vector $\overrightarrow{CD}$, siendo *C*(5, –1) y *D*(–2, –2).

$\overrightarrow{CD}=(-7, -1)$, si $A(a_1, a_2)$: $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}\Rightarrow(-2-a_1, 4-a_2)=(-7, -1)\Rightarrow\begin{cases}-2-a_1=-7\\4-a_2=-1\end{cases}\Rightarrow a_1=5, a_2=5\Rightarrow A(5, 5)$

43. Dados los puntos *A*(–1, 4), *B*(2, 2) y *C*(–3, 5), calcula:

a) Las coordenadas del punto *D* tal que $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$

b) Las coordenadas del punto *D* tal que $\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{AC}$

c) Las coordenadas del punto *D* tal que $\overrightarrow{AB}=3\overrightarrow{CD}$

d) Las coordenadas del punto *D* tal que $\overrightarrow{DB}=-2\overrightarrow{AC}$

a) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}\Rightarrow(3, -2)=(d_1+3, d_2-5)\Rightarrow\begin{cases}d_1+3=3\\d_2-5=-2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}d_1=0\\d_2=3\end{cases}\Rightarrow D(0, 3)$

b) $\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{AC}\Rightarrow(2-d_1, 2-d_2)=(-2, 1)\Rightarrow\begin{cases}2-d_1=-2\\2-d_2=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}d_1=4\\d_2=1\end{cases}\Rightarrow D(4, 1)$

c) $\overrightarrow{AB}=3\overrightarrow{CD}\Rightarrow(3, -2)=(3d_1+9, 3d_2-15)\Rightarrow\begin{cases}3d_1+9=3\\3d_2-15=-2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}d_1=-2\\d_2=\frac{13}{3}\end{cases}\Rightarrow D\left(-2, \frac{13}{3}\right)$

d) $\overrightarrow{DB}=-2\overrightarrow{AC}\Rightarrow(2-d_1, 2-d_2)=(4, -2)\Rightarrow\begin{cases}2-d_1=4\\2-d_2=-2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}d_1=-2\\d_2=4\end{cases}\Rightarrow D(-2, 4)$

44. Dados los puntos *A*(2, –3), *B*(1, –4) y *C*(–1, –2), calcula las coordenadas de los vectores:

a) $\vec{u} = 2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BC}$

b) $\vec{v} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{5}{6}\overrightarrow{CB}$

c) $\vec{w} = 2\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v}$

d) $\vec{x} = 3\left(\vec{u} - \vec{v}\right) + 5\vec{v}$

a) $\vec{u} = 2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BC} = (-2,\ -2) + (-9,\ 3) + (-2,\ 2) = (-13,\ 3)$

b) $\vec{v} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{5}{6}\overrightarrow{CB} = \left(2,\ -\frac{2}{3}\right) + \left(\frac{1}{3},\ \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{5}{3},\ -\frac{5}{3}\right) = (4,\ -2)$

c) $\vec{w} = 2\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v} = (-26,\ 6) + (2,\ -1) = (-24,\ 5)$

d) $\vec{x} = 3\left(\vec{u} - \vec{v}\right) + 5\vec{v} = 3\vec{u} + 2\vec{v} = (-39,\ 9) + (8,\ -4) = (-31,\ 5)$

45. Calcula, si es que existe, el valor de *k* para que se verifiquen las siguientes igualdades.

a) $(2,\ -3+k) = 3(3,\ -1) + 7(-1,\ -3)$

b) $(1,\ -6) = 4(k,\ 2) - 3(1,\ 3-k)$

c) $\left(\frac{2}{3}+k,\ \frac{k}{2}\right) = 2\left(\frac{1}{3},\ k\right) + k(2,\ -3)$

a) $(2,\ -3+k) = 3(3,\ -1) + 7(-1,\ -3) \Rightarrow (2,\ -3+k) = (2,\ -24) \Rightarrow -3+k = -24 \Rightarrow k = -21$

b) $(1,\ -6) = 4(k,\ 2) - 3(1,\ 3-k) \Rightarrow (1,\ -6) = (4k-3, -1+3k) \Rightarrow \begin{cases} 4k-3=1 \Rightarrow k=1 \\ -1+3k=-6 \Rightarrow k=-\frac{5}{3} \end{cases} \Rightarrow$ No existe ningún valor de *k* para el que se cumpla la igualdad.

c) $\left(\frac{2}{3}+k,\ \frac{k}{2}\right) = 2\left(\frac{1}{3},\ k\right) + k(2,\ -3) \Rightarrow \left(\frac{2}{3}+k,\ \frac{k}{2}\right) = \left(\frac{2}{3}+2k,\ 2k-3k\right) \Rightarrow \begin{cases} \frac{2}{3}+k = \frac{2}{3}+2k \\ \frac{k}{2} = -k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k=0 \\ k=0 \end{cases} \Rightarrow k=0$

46. Calcula los valores de *x* y de *y* para que se verifiquen las siguientes igualdades.

a) $(13,\ -8) = 5(x,\ -1) + 3(1,\ y)$

b) $(x,\ y) = -2(-1,\ -1-x) + 4(-y,\ 3)$

c) $\left(x,\ \frac{y}{4}\right) = \frac{x}{2}\left(2,\ -\frac{1}{2}\right) + 3(x,\ y)$

a) $(13,\ -8) = 5(x,\ -1) + 3(1,\ y) \Rightarrow \begin{cases} 13 = 5x+3 \\ -8 = -5+3y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=-1 \end{cases}$

b) $(x,\ y) = -2(-1,\ -1-x) + 4(-y,\ 3) \Rightarrow \begin{cases} x = 2-4y \\ y = 2+2x+12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+4y=2 \\ -2x+y=14 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-6 \\ y=2 \end{cases}$

c) $\left(x,\ \frac{y}{4}\right) = \frac{x}{2}\left(2,\ -\frac{1}{2}\right) + 3(x,\ y) \Rightarrow \begin{cases} x = x+3x \\ \frac{y}{4} = -\frac{x}{4}+3y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$

47. Calcula el módulo y el argumento de los siguientes vectores.

a) $\vec{u}=(3,\,3)$ **c)** $\vec{u}=(-20,\,-21)$ **e)** $\vec{u}=\left(\frac{1}{2},\,-4\right)$

b) $\vec{u}=(12,\,-5)$ **d)** $\vec{u}=\left(3,\,-\sqrt{3}\right)$ **f)** $\vec{u}=\left(-\sqrt{2},\,-\sqrt{2}\right)$

a) $\vec{u}=(3,\,3)\Rightarrow\begin{cases}|\vec{u}|=\sqrt{3^2+3^2}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}\\ \arg(\vec{u})=\text{arctg}\,1=\dfrac{\pi}{4}\text{ rad}\end{cases}$ ya que pertenece al primer cuadrante.

b) $\vec{u}=(12,\,-5)\Rightarrow\begin{cases}|\vec{u}|=\sqrt{12^2+(-5)^2}=\sqrt{169}=13\\ \arg(\vec{u})=\text{arctg}\left(-\dfrac{5}{12}\right)=5{,}89\text{ rad}\end{cases}$ ya que pertenece al cuarto cuadrante.

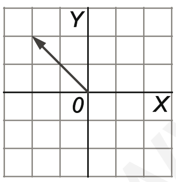
c) $\vec{u}=(-20,\,-21)\Rightarrow\begin{cases}|\vec{u}|=\sqrt{(-20)^2+(-21)^2}=\sqrt{841}=29\\ \arg(\vec{u})=\text{arctg}\left(\dfrac{21}{20}\right)=3{,}95\text{ rad}\end{cases}$ ya que pertenece al tercer cuadrante.

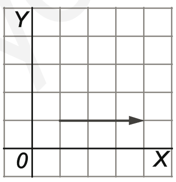
d) $\vec{u}=\left(3,\,-\sqrt{3}\right)\Rightarrow\begin{cases}|\vec{u}|=\sqrt{3^2+(-\sqrt{3})^2}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}\\ \arg(\vec{u})=\text{arctg}\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)=\dfrac{11\pi}{6}\text{ rad}\end{cases}$ ya que pertenece al cuarto cuadrante.

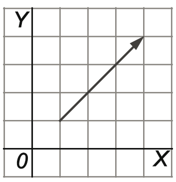
e) $\vec{u}=\left(\frac{1}{2},\,-4\right)\Rightarrow\begin{cases}|\vec{u}|=\sqrt{\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+(-4)^2}=\sqrt{\dfrac{65}{4}}=\dfrac{\sqrt{65}}{2}\\ \arg(\vec{u})=\text{arctg}(-8)=4{,}84\text{ rad}\end{cases}$ ya que pertenece al cuarto cuadrante.

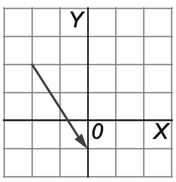
f) $\vec{u}=\left(-\sqrt{2},\,-\sqrt{2}\right)\Rightarrow\begin{cases}|\vec{u}|=\sqrt{\left(-\sqrt{2}\right)^2+\left(-\sqrt{2}\right)^2}=\sqrt{4}=2\\ \arg(\vec{u})=\text{arctg}\,1=\dfrac{5\pi}{4}\text{ rad}\end{cases}$ ya que pertenece al tercer cuadrante.

48. Calcula el módulo y el argumento de los siguientes vectores.

a)


b)


c)


d)


a) $\vec{a}=(-2,\,2)\Rightarrow\begin{cases}|\vec{a}|=\sqrt{(-2)^2+2^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}\\ \arg(\vec{a})=\text{arctg}(-1)=\dfrac{3\pi}{4}\text{ rad}\end{cases}$

c) $\vec{c}=(3,\,3)\Rightarrow\begin{cases}|\vec{c}|=\sqrt{3^2+3^2}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}\\ \arg(\vec{c})=\text{arctg}\,1=\dfrac{\pi}{4}\text{ rad}\end{cases}$

b) $\vec{b}=(3,\,0)\Rightarrow\begin{cases}|\vec{b}|=\sqrt{3^2+0^2}=\sqrt{9}=3\\ \arg(\vec{b})=\text{arctg}\,0=0\text{ rad}\end{cases}$

d) $\vec{d}=(2,\,-3)\Rightarrow\begin{cases}|\vec{d}|=\sqrt{2^2+(-3)^2}=\sqrt{13}\\ \arg(\vec{d})=\text{arctg}\left(-\dfrac{3}{2}\right)=5{,}3\text{ rad}\end{cases}$

49. Calcula los lados de los triángulos *ABC* en cada caso.

a) $A(2, -1)$, $B(-1, 5)$ y $C(-1, -1)$ **b)** $A(3, -1)$, $B(-2, 3)$ y $C(5, 5)$

a) $\overrightarrow{AB} = (-3, 6)$, $\overrightarrow{AC} = (-3, 0)$ y $\overrightarrow{BC} = (0, -6)$

$$a = \left|\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{0^2 + (-6)^2} = 6,\ b = \left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{(-3)^2 + 0^2} = 3 \text{ y } c = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(-3)^2 + 6^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$$

b) $\overrightarrow{AB} = (-5, 4)$, $\overrightarrow{AC} = (2, 6)$ y $\overrightarrow{BC} = (7, 2)$

$$a = \left|\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{7^2 + 2^2} = \sqrt{53},\ b = \left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{2^2 + 6^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10} \text{ y } c = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(-5)^2 + 4^2} = \sqrt{41}$$

50. Clasifica los siguientes triángulos, de los que conocemos sus vértices, según sus lados.

a) $A(-3, 0)$, $B(0, 1)$ y $C(1, -2)$ **b)** $A(1, 2)$, $B(2, 4)$ y $C(4, 1)$ **c)** $A(0, 0)$, $B(3, -1)$ y $C\left(\frac{3+\sqrt{3}}{2}, \frac{3\sqrt{3}-1}{2}\right)$

a) $\overrightarrow{AB} = (3, 1)$, $\overrightarrow{AC} = (4, -2)$ y $\overrightarrow{BC} = (1, -3)$

$$a = \left|\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{1^2 + (-3)^2} = \sqrt{10},\ b = \left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{4^2 + (-2)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5} \text{ y } c = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$$

Es un triángulo isósceles.

b) $\overrightarrow{AB} = (1, 2)$, $\overrightarrow{AC} = (3, -1)$ y $\overrightarrow{BC} = (2, -3)$

$$a = \left|\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{2^2 + (-3)^2} = \sqrt{13},\ b = \left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{3^2 + (-1)^2} = \sqrt{10} = 2\sqrt{5} \text{ y } c = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$$

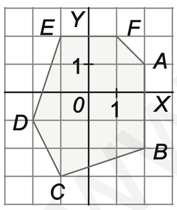
Es un triángulo escaleno.

c) $\overrightarrow{AB} = (3, -1)$, $\overrightarrow{AC} = \left(\frac{3+\sqrt{3}}{2}, \frac{3\sqrt{3}-1}{2}\right)$ y $\overrightarrow{BC} = \left(\frac{\sqrt{3}-3}{2}, \frac{3\sqrt{3}+1}{2}\right)$

$$a = \left|\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}-3}{2}\right)^2 + \left(\frac{3\sqrt{3}+1}{2}\right)^2} = \sqrt{10},\ b = \left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{\left(\frac{3+\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{3\sqrt{3}-1}{2}\right)^2} = \sqrt{10} \text{ y } c = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{10}$$

Es un triángulo equilátero.

51. Calcula la medida de los lados del hexágono de la figura.



$A(2, 1)$, $B(2, -2)$, $C(-1, -3)$, $D(-2, -1)$, $E(-1, 2)$ y $F(1, 2)$, por tanto:

$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{0+9} = 3$ $\left|\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$ $\left|\overrightarrow{CD}\right| = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$

$\left|\overrightarrow{DE}\right| = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$ $\left|\overrightarrow{EF}\right| = \sqrt{4+0} = 2$ $\left|\overrightarrow{FA}\right| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

Producto escalar

52. Calcula el producto escalar de:

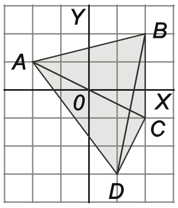
a) $\vec{u} = (3, 4)$ y $\vec{v} = (2, 5)$ **b)** $\vec{u} = (-2, 4)$ y $\vec{v} = (2, -1)$ **c)** $\vec{u} = (-3, -4)$ y $\vec{v} = (2, 0)$ **d)** $\vec{u} = (-1, -3)$ y $\vec{v} = (1, 3)$

a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = 6 + 20 = 26$ **b)** $\vec{u} \cdot \vec{v} = -6 - 4 = -8$ **c)** $\vec{u} \cdot \vec{v} = -6 + 0 = -6$ **d)** $\vec{u} \cdot \vec{v} = -1 - 9 = -10$

53. Halla el módulo de la proyección ortogonal del vector $\vec{u} = (2, -1)$ sobre el vector $\vec{v} = (1, -4)$.

$$\left|\text{proy}_{\vec{v}}\, \vec{u}\right| = \frac{\left|\vec{u} \cdot \vec{v}\right|}{\left|\vec{v}\right|} = \frac{6}{\sqrt{17}} = \frac{6\sqrt{17}}{17}$$

54. Calcula los productos escalares que se indican, si los vectores vienen determinados por la figura.



a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$ **c)** $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DA}$

b) $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{BA}$ **d)** $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB}$

a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = (4, 1) \cdot (0, -3) = 0 - 3 = -3$ **c)** $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DA} = (4, -2) \cdot (-3, 4) = -12 - 8 = -20$

b) $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{BA} = (-1, -2) \cdot (-4, -1) = 4 + 2 = 6$ **d)** $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} = (4, -2) \cdot (1, 5) = 4 - 10 = -6$

55. Calcula el valor o los valores de *k* para que se verifiquen las siguientes igualdades.

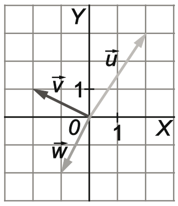
a) $(2, k) \cdot (-1, 3) = -2$ **b)** $(3, -k) \cdot (2, -1) = 4k$ **c)** $\left(5, -\frac{k}{2}\right) \cdot (k, -k) = 6k$

a) $(2, k) \cdot (-1, 3) = -2 \Rightarrow -2 + 3k = -2 \Rightarrow k = 0$

b) $(3, -k) \cdot (2, -1) = 4k \Rightarrow 6 + k = 4k \Rightarrow k = 2$

c) $\left(5, -\frac{k}{2}\right) \cdot (k, -k) = 6k \Rightarrow 5k + \frac{k^2}{2} = 6k \Rightarrow k^2 - 2k = 0 \Rightarrow k(k-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} k = 0 \\ k = 2 \end{cases}$

56. Dados los vectores de la figura, resuelve las operaciones que se indican.



a) $\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$

b) $\vec{u} \cdot \left(\vec{v} + \vec{w}\right) + \left(\vec{u} + \vec{v}\right) \cdot \vec{w}$

c) $\vec{v} \cdot \left(2\vec{u} - 3\vec{w}\right) + \left(-3\vec{w} + 2\vec{u}\right) \cdot \vec{v}$

$\vec{u} = (2, 3)$, $\vec{v} = (-2, 1)$ y $\vec{w} = (-1, -2)$

a) $\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w} = -1 - 8 = -9$

b) $\vec{u} \cdot \left(\vec{v} + \vec{w}\right) + \left(\vec{u} + \vec{v}\right) \cdot \vec{w} = (2, 3) \cdot (-3, -1) + (0, 4) \cdot (-1, -2) = -9 - 8 = -17$

c) $\vec{v} \cdot \left(2\vec{u} - 3\vec{w}\right) + \left(-3\vec{w} + 2\vec{u}\right) \cdot \vec{v} = (-2, 1) \cdot (7, 12) + (7, 12) \cdot (-2, 1) = -2 - 2 = -4$

Vectores paralelos y vectores perpendiculares

57. a) Escribe todos los vectores paralelos al vector libre de coordenadas $\vec{u} = (2, -3)$.

b) Escribe todos los vectores perpendiculares al vector libre de coordenadas $\vec{u} = (2, -3)$.

c) Halla un vector paralelo a $\vec{u} = (2, -3)$ y unitario.

d) Halla un vector perpendicular a $\vec{u} = (2, -3)$ y unitario.

a) $(2t, -3t)$ con $t \in \mathbb{R}$ **c)** $\left(\frac{2}{\sqrt{13}}, \frac{-3}{\sqrt{13}}\right) = \left(\frac{2\sqrt{13}}{13}, \frac{-3\sqrt{13}}{13}\right)$

b) $(3t, 2t)$ con $t \in \mathbb{R}$ **d)** $\left(\frac{3}{\sqrt{13}}, \frac{2}{\sqrt{13}}\right) = \left(\frac{3\sqrt{13}}{13}, \frac{2\sqrt{13}}{13}\right)$

58. Para cada caso, calcula todos los vectores unitarios que tienen la misma dirección que el vector $\vec{u}$. ¿Cuáles de ellos tienen también el mismo sentido?

a) $\vec{u} = (10, -24)$ **b)** $\vec{u} = (-2,7; -3,6)$ **c)** $\vec{u} = \left(\frac{1}{2}, 4\right)$

a) $\vec{u} = (10, -24) \Rightarrow \begin{cases} \left(\frac{10}{\sqrt{10^2+(-24)^2}}, \frac{-24}{\sqrt{10^2+(-24)^2}}\right) = \left(\frac{10}{26}, \frac{-24}{26}\right) = \left(\frac{5}{13}, \frac{-12}{13}\right) \\ \left(\frac{-10}{\sqrt{10^2+(-24)^2}}, \frac{24}{\sqrt{10^2+(-24)^2}}\right) = \left(\frac{-10}{26}, \frac{24}{26}\right) = \left(\frac{-5}{13}, \frac{12}{13}\right) \end{cases}$

El primero de ellos tiene el mismo sentido que $\vec{u}$.

b) $\vec{u} = (-2,7; -3,6) \Rightarrow \begin{cases} \left(\frac{-2,7}{4,5}; \frac{-3,6}{4,5}\right) = (-0,6; -0,8) \\ \left(\frac{2,7}{4,5}; \frac{3,6}{4,5}\right) = (0,6; 0,8) \end{cases}$. El primero de ellos tiene el mismo sentido que $\vec{u}$.

c) $\vec{u} = \left(\frac{1}{2}, 4\right) \Rightarrow \begin{cases} \left(\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{65}}{2}}, \frac{4}{\frac{\sqrt{65}}{2}}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{65}}, \frac{8}{\sqrt{65}}\right) \\ \left(-\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{65}}{2}}, -\frac{4}{\frac{\sqrt{65}}{2}}\right) = \left(-\frac{1}{\sqrt{65}}, -\frac{8}{\sqrt{65}}\right) \end{cases}$. El primero de ellos tiene el mismo sentido que $\vec{u}$.

59. Calcula las coordenadas de un vector paralelo al $\overrightarrow{AF}$ y de módulo 10, siendo $A(-1, 3)$ y $F(-4, 7)$.

$\overrightarrow{AF} = (-3, 4)$, los vectores paralelos a $\overrightarrow{AF}$ son de la forma $(-3t, 4t)$ con $t \in \mathbb{R}$. Así: $|(-3t, 4t)| = 10 \Rightarrow$

$\Rightarrow \sqrt{9t^2 + 16t^2} = 10 \Rightarrow 5|t| = 10 \Rightarrow t = \pm 2$. Por tanto, existen dos posibles soluciones: $(-6, 8)$ y $(6, -8)$.

60. Determina un vector perpendicular a $\vec{u} = (-5, 12)$ y que tenga el mismo módulo que $\vec{u}$. ¿Cuántas soluciones hay?

Hay dos vectores perpendiculares a $\vec{u}$ y con su mismo módulo: $(12, 5)$ y $(-12, -5)$.

Ángulo de dos vectores

61. Calcula el ángulo que forman en cada caso los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

a) $\vec{u}=(3,\ 4)$ y $\vec{v}=(5,\ 12)$
c) $\vec{u}=(-1,\ 2)$ y $\vec{v}=(1,\ -2)$
e) $\vec{u}=(2,\ -1)$ y $\vec{v}=(1,\ 2)$
b) $\vec{u}=(20,\ -21)$ y $\vec{v}=(-1,\ 1)$
d) $\vec{u}=(1,\ -1)$ y $\vec{v}=(2,\ 2)$
f) $\vec{u}=(0,\ 2)$ y $\vec{v}=(3,\ -1)$

a) $\cos\alpha=\dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}=\dfrac{63}{\sqrt{25}\sqrt{169}}=\dfrac{63}{65}\Rightarrow\alpha=14{,}25^\circ$

b) $\cos\alpha=\dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}=\dfrac{-41}{\sqrt{841}\sqrt{2}}=-\dfrac{41}{29\sqrt{2}}=-\dfrac{41\sqrt{2}}{58}\Rightarrow\alpha=178{,}6^\circ$

c) $\cos\alpha=\dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}=\dfrac{-5}{\sqrt{5}\sqrt{5}}=-1\Rightarrow\alpha=180^\circ$

d) $\cos\alpha=\dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}=\dfrac{0}{\sqrt{2}\sqrt{8}}=0\Rightarrow\alpha=90^\circ$

e) $\cos\alpha=\dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}=\dfrac{0}{\sqrt{5}\sqrt{5}}=0\Rightarrow\alpha=90^\circ$

f) $\cos\alpha=\dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}=\dfrac{-2}{\sqrt{4}\sqrt{10}}=-\dfrac{2}{2\sqrt{10}}=-\dfrac{\sqrt{10}}{10}\Rightarrow\alpha=108{,}43^\circ$

62. Halla el valor de *m* para que los vectores $\vec{u}=(m,\ 1)$ y $\vec{v}=(-2,\ 3)$ forman un ángulo de:

a) 30º
b) 135º
c) 90º
d) 0º

$\cos\alpha=\dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}=\dfrac{-2m+3}{\sqrt{m^2+1}\sqrt{13}}=\dfrac{-2m+3}{\sqrt{13m^2+13}}$

a) $\dfrac{-2m+3}{\sqrt{13m^2+13}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow -4m+6=\sqrt{39m+39}\Rightarrow 16m^2+36-48m=39m+39\Rightarrow 16m^2-87m-3=0\Rightarrow$

$\Rightarrow m=\dfrac{87+\sqrt{7761}}{32}$ (Falsa), $m=\dfrac{87-\sqrt{7761}}{32}$

b) $\dfrac{-2m+3}{\sqrt{13m^2+13}}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow 4m-6=\sqrt{26m+26}\Rightarrow 16m^2+36-48m=26m+26\Rightarrow 16m^2-74m+10=0\Rightarrow$

$\Rightarrow m=\dfrac{37+\sqrt{1209}}{16}$, $m=\dfrac{37-\sqrt{1209}}{16}$ (Falsa)

c) $\dfrac{-2m+3}{\sqrt{13m^2+13}}=0\Rightarrow -2m+3=0\Rightarrow m=\dfrac{3}{2}$

d) $\dfrac{-2m+3}{\sqrt{13m^2+13}}=1\Rightarrow -2m+3=\sqrt{13m+13}\Rightarrow 4m^2+9-12m=13m+13\Rightarrow 4m^2-25m-4=0\Rightarrow$

$\Rightarrow m=\dfrac{25+\sqrt{689}}{8}$ (Falsa), $m=\dfrac{25-\sqrt{689}}{8}$

63. Calcula los ángulos del triángulo de vértices *ABC*.

a) $A(1, 3)$, $B(2, 1)$ y $C(4, 1)$ **b)** $A(3, 1)$, $B(0, 5)$ y $C(4, 3)$

a) $\overrightarrow{AB}=(1,-2)$ y $\overrightarrow{AC}=(3,-2) \Rightarrow \cos\hat{A}=\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|}=\dfrac{7}{\sqrt{65}}=\dfrac{7\sqrt{65}}{65} \Rightarrow \hat{A}=29{,}74^\circ$

$\overrightarrow{BA}=(-1,2)$ y $\overrightarrow{BC}=(2,0) \Rightarrow \cos\hat{B}=\dfrac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{BC}|}=\dfrac{-2}{2\sqrt{5}}=-\dfrac{\sqrt{5}}{5} \Rightarrow \hat{B}=116{,}57^\circ$

$\overrightarrow{CA}=(-3,2)$ y $\overrightarrow{CB}=(-2,0) \Rightarrow \cos\hat{C}=\dfrac{\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}}{|\overrightarrow{CA}||\overrightarrow{CB}|}=\dfrac{6}{2\sqrt{13}}=\dfrac{3\sqrt{13}}{13} \Rightarrow \hat{C}=33{,}69^\circ$

b) $\overrightarrow{AB}=(-3,4)$ y $\overrightarrow{AC}=(1,2) \Rightarrow \cos\hat{A}=\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|}=\dfrac{5}{5\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{5}}{5} \Rightarrow \hat{A}=63{,}43^\circ$

$\overrightarrow{BA}=(3,-4)$ y $\overrightarrow{BC}=(4,-2) \Rightarrow \cos\hat{B}=\dfrac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{BC}|}=\dfrac{20}{10\sqrt{5}}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5} \Rightarrow \hat{B}=26{,}57^\circ$

$\overrightarrow{CA}=(-1,-2)$ y $\overrightarrow{CB}=(-4,2) \Rightarrow \cos\hat{C}=\dfrac{\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}}{|\overrightarrow{CA}||\overrightarrow{CB}|}=0 \Rightarrow \hat{C}=90^\circ$

64. Clasifica los siguientes triángulos según los ángulos.

a) $A(1, 3)$, $B(3, 0)$ y $C(-2, 1)$ **b)** $A(1, 3)$, $B(-2, 1)$ y $C(2, -1)$ **c)** $A(1, 3)$, $B(-2, 1)$ y $C(4, 0)$

a) $\overrightarrow{AB}=(2,-3)$ y $\overrightarrow{AC}=(-3,-2) \Rightarrow \cos\hat{A}=\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|}=0 \Rightarrow \hat{A}=90^\circ$. Triángulo rectángulo en *A*.

b) $\overrightarrow{AB}=(-3,-2)$ y $\overrightarrow{AC}=(1,-4) \Rightarrow \cos\hat{A}=\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|}=\dfrac{5}{\sqrt{221}}=\dfrac{5\sqrt{221}}{221} \Rightarrow \hat{A}=70{,}35^\circ$

$\overrightarrow{BA}=(3,2)$ y $\overrightarrow{BC}=(4,-2) \Rightarrow \cos\hat{B}=\dfrac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}|\cdot|\overrightarrow{BC}|}=\dfrac{8}{2\sqrt{65}}=\dfrac{4\sqrt{65}}{65} \Rightarrow \hat{B}=60{,}26^\circ$

$\overrightarrow{CA}=(-1,4)$ y $\overrightarrow{CB}=(-4,2) \Rightarrow \cos\hat{C}=\dfrac{\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}}{|\overrightarrow{CA}|\cdot|\overrightarrow{CB}|}=\dfrac{12}{2\sqrt{85}}=\dfrac{6\sqrt{85}}{85} \Rightarrow \hat{C}=49{,}4^\circ$

Triángulo acutángulo.

c) $\overrightarrow{AB}=(-3,-2)$ y $\overrightarrow{AC}=(3,-3) \Rightarrow \cos\hat{A}=\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|}=\dfrac{-3}{3\sqrt{26}}=-\dfrac{\sqrt{26}}{26} \Rightarrow \hat{A}=101{,}31^\circ$. Triángulo obtusángulo.

65. Calcula los ángulos del cuadrilátero cuyos vértices son *A*(2, 2), *B*(2, 4), *C*(–1, 1) y *D*(–1, –1).

Observemos que $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}=(0,2)$, por lo que se trata de un paralelogramo, con lo que $\hat{A}=\hat{C}$ y $\hat{B}=\hat{D}=180^\circ-\hat{A}$.

Por tanto: $\cos\hat{A}=\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AD}|}=\dfrac{-6}{6\sqrt{2}}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \hat{A}=\hat{C}=135^\circ$ y $\hat{B}=\hat{D}=45^\circ$.

Síntesis

66. Dados los vectores $\vec{u} = 6\vec{i} - 8\vec{j}$ y $\vec{v} = -4\vec{i} + 3\vec{j}$, calcula:

a) Los módulos de ambos vectores.

b) El producto escalar $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

c) El ángulo que forman los dos vectores.

d) Halla el módulo de la proyección de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$ y la de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$.

e) Compara los cocientes $\dfrac{|\vec{v}|}{|\vec{u}|}$ y $\dfrac{|proy_{\vec{u}}\vec{v}|}{|proy_{\vec{v}}\vec{u}|}$.

f) Halla el ángulo que forman $\vec{u} + \vec{v}$ y $\vec{u}$.

g) Halla las coordenadas de $\text{proy}_{\vec{u}}\vec{v}$ y $\text{proy}_{\vec{v}}\vec{u}$.

a) $|\vec{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2} = \sqrt{6^2 + (-8)^2} = \sqrt{100} = 10$ $\quad |\vec{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} = \sqrt{(-4)^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$

b) $\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 = 6 \cdot (-4) + (-8) \cdot 3 = -48$

c) $\cos\alpha = \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = -\dfrac{24}{25} \Rightarrow \alpha = 163,74°$

d) $|proy_{\vec{v}}\vec{u}| = \dfrac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{v}|} = \dfrac{48}{5} = 9,6$ $\quad |proy_{\vec{u}}\vec{v}| = \dfrac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}|} = \dfrac{48}{10} = 4,8$

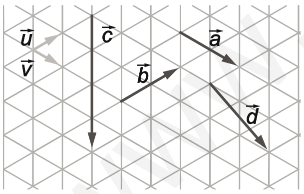
e) Son iguales: $\dfrac{|\vec{v}|}{|\vec{u}|} = \dfrac{proy_{\vec{u}}\vec{v}}{proy_{\vec{v}}\vec{u}} = 0,5$

f) $\vec{u} + \vec{v} = 2\vec{i} - 5\vec{j} \Rightarrow \cos\beta = \dfrac{52}{10\sqrt{29}} = \dfrac{26\sqrt{29}}{145} \Rightarrow \beta = 15,07°$

g) Como α es obtuso, $proy_{\vec{v}}\vec{u}$ tiene sentido opuesto a $\vec{v}$ y $proy_{\vec{v}}\vec{u}$ tiene sentido opuesto a $\vec{u}$. Así:

$\text{proy}_{\vec{v}}\vec{u} = |\text{proy}_{\vec{v}}\vec{u}| \cdot \dfrac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \left(\dfrac{192}{25}, -\dfrac{144}{25}\right)$ $\quad \text{proy}_{\vec{u}}\vec{v} = |\text{proy}_{\vec{u}}\vec{v}| \cdot \dfrac{\vec{u}}{|\vec{u}|} = \left(-\dfrac{288}{100}, \dfrac{384}{100}\right)$

67. Calcula las coordenadas de los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ y $\vec{d}$ respecto de la base $\{\vec{u}, \vec{v}\}$.



$\vec{a} = 2\vec{v}$ $\quad \vec{b} = 2\vec{u}$ $\quad \vec{c} = -4\vec{u} + 4\vec{v}$ $\quad \vec{d} = -\vec{u} + 3\vec{v}$

68. Halla un vector $\vec{v}$ de módulo 5 sabiendo que $\vec{u} \cdot \vec{v} = -14$, siendo $\vec{u} = (6, 8)$.

Si $\vec{v} = (a, b)$, tenemos:

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 25 \\ 6a + 8b = -14 \end{cases} \Rightarrow a = \dfrac{-7-4b}{3} \Rightarrow \left(\dfrac{-7-4b}{3}\right)^2 + b^2 = 25 \Rightarrow 25b^2 + 56b - 176 = 0 \Rightarrow \begin{cases} b = \dfrac{44}{25},\ a = -\dfrac{117}{25} \\ b = -4,\ a = 3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{v} = \left(-\dfrac{117}{25}, \dfrac{44}{25}\right) \\ \vec{v} = (3, -4) \end{cases}$$

69. Calcula el vértice *D* del paralelogramo *ABCD*, siendo *A*(–3, 4), *B*(–2, –4) y *C*(3, –2). Calcula el punto donde se cortan las diagonales del paralelogramo.

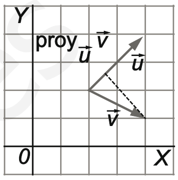
Las diagonales de un paralelogramo se cortan en su punto medio. Este punto de corte será, por tanto, el punto medio del segmento *AC*:

$$M\left(\frac{-3+3}{2}, \frac{4-2}{2}\right) = M(0, 1)$$

Si $D(d_1, d_2)$ es el cuarto vértice del paralelogramo, se deberá verificar que el punto medio del segmento *BD* es *M*:

$$\left(\frac{-2+d_1}{2}, \frac{-4+d_2}{2}\right) = (0, 1) \Rightarrow d_1 = 2,\ d_2 = 6 \Rightarrow D(2, 6)$$

70. Dados los vectores de la figura:



a) Calcula las coordenadas del vector proyección de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$.

b) Descompón $\vec{v}$ como suma de dos vectores: uno de igual dirección que $\vec{u}$ y otro perpendicular a $\vec{u}$.

$\vec{u} = (2, 2)$ y $\vec{u} = (2, -1)$

a) $\text{proy}_{\vec{u}}\vec{v}$ tiene el mismo sentido que $\vec{u}$, por tanto:

$$\text{proy}_{\vec{u}}\vec{v} = \left|\text{proy}_{\vec{u}}\vec{v}\right| \cdot \frac{\vec{u}}{\left|\vec{u}\right|} = \frac{\left|\vec{u}\cdot\vec{v}\right|}{\left|\vec{u}\right|^2}\vec{u} = \frac{2}{8}\vec{u} = \frac{1}{4}\vec{u} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

b) Todos los vectores que llevan la dirección de $\vec{u}$ son de la forma (t, t) con $t \in \mathbb{R}$ y todos los vectores que llevan la dirección perpendicular a $\vec{u}$ son de la forma $(-s, s)$ con $s \in \mathbb{R}$, por tanto, tenemos:

$$\vec{v} = (t, t) + (-s, s) \Rightarrow \begin{cases} t - s = 2 \\ t + s = -1 \end{cases} \Rightarrow t = \frac{1}{2},\ s = -\frac{3}{2} \Rightarrow \vec{v} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right)$$

71. Calcula el valor de *m* para que los puntos del plano *A*(1, 2), *B*(–2, m – 2) y *C*(3, –m) estén alineados.

$$\overrightarrow{AB} = (-3, m-4) \text{ y } \overrightarrow{AC} = (2, -m-2) \Rightarrow \frac{2}{-3} = \frac{-m-2}{m-4} \Rightarrow 2m - 8 = 3m + 6 \Rightarrow m = -14$$

72. Calcula las coordenadas del extremo *B* de un vector cuyo origen es *A*(2, 3) y que es equipolente al vector $\overrightarrow{CD}$, siendo *C*(–2, 3) y *D*(0, –4).

Si $B(b_1, b_2)$ tenemos: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Rightarrow (b_1 - 2, b_2 - 3) = (2, -7) \Rightarrow b_1 = 4,\ b_2 = -4 \Rightarrow B(4, -4)$

73. El baricentro de un triángulo es el punto donde se cortan sus tres medianas y está situado a doble distancia del vértice que del punto medio del lado opuesto. Calcula las coordenadas del baricentro del triángulo *A*(–3, 3), *B*(2, 1), *C*(–2, –1).

El punto medio del lado *CB* es el origen: $\left(\frac{2-2}{2}, \frac{1-1}{2}\right) = O(0, 0)$, por tanto, si el baricentro es $G(g_1, g_2)$, tenemos:

$$\overrightarrow{AG} = 2\overrightarrow{GO} \Rightarrow (g_1 + 3, g_2 - 3) = 2\cdot(-g_1, -g_2) \Rightarrow \begin{cases} g_1 + 3 = -2g_1 \\ g_2 - 3 = -2g_2 \end{cases} \Rightarrow g_1 = -1,\ g_2 = 1 \Rightarrow G(-1, 1)$$

74. De los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ se sabe que $|\vec{u}|^2 = 13$, $|\vec{v}| = 10$ y $\vec{u}\cdot\vec{v} = -9$.

a) Halla el ángulo que forman $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

b) Halla el ángulo que forman $\vec{u}+\vec{v}$ y $\vec{u}-\vec{v}$.

a) $\cos\alpha = \dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|} = \dfrac{-9}{10\sqrt{13}} \Rightarrow \alpha = 104,45^{\circ}$

b) $(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v}) = \vec{u}\cdot\vec{u}+\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}\cdot\vec{u}-\vec{v}\cdot\vec{v} = |\vec{u}|^2 + 2\vec{u}\cdot\vec{v} - |\vec{v}|^2 = -105$

$|\vec{u}+\vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 + 2\vec{u}\cdot\vec{v} + |\vec{v}|^2 = 95$

$|\vec{u}-\vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 - 2\vec{u}\cdot\vec{v} + |\vec{v}|^2 = 131$

$\cos\beta = \dfrac{(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v})}{|\vec{u}+\vec{v}||\vec{u}-\vec{v}|} = \dfrac{-105}{\sqrt{12445}} \Rightarrow \beta = 160,26^{\circ}$

75. Sean los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ tales que $\vec{u}\cdot(\vec{u}+\vec{v}) - (\vec{u}-\vec{v})\cdot\vec{v} = 31$ y $|\vec{u}+\vec{v}|^2 = 37$. Halla el producto escalar $\vec{u}\cdot\vec{v}$.

$\vec{u}\cdot(\vec{u}+\vec{v}) - (\vec{u}-\vec{v})\cdot\vec{v} = 31 \Rightarrow \vec{u}\cdot\vec{u}+\vec{u}\cdot\vec{v}-\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}\cdot\vec{v} = 31 \Rightarrow |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 = 31$

$|\vec{u}+\vec{v}|^2 = 37 \Rightarrow |\vec{u}|^2 + 2\vec{u}\cdot\vec{v} + |\vec{v}|^2 = 37$. Por tanto, $31 + 2\vec{u}\cdot\vec{v} = 37 \Rightarrow \vec{u}\cdot\vec{v} = 3$

CUESTIONES

76. Indica, razonadamente, si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

a) El vector nulo es linealmente dependiente con cualquier otro vector del plano.

b) Si dos vectores no nulos tienen la misma dirección entonces su producto escalar coincide con el producto de sus módulos.

c) $|\vec{u}+\vec{v}| = |\vec{u}| + |\vec{v}|$

d) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA} = \vec{0}$

a) Verdadero. El vector nulo se puede escribir como el producto de cualquier vector por el número 0.

b) Falso. Solo es verdadero si tienen también el mismo sentido; si tienen diferente sentido el producto escalar es el producto de los módulos multiplicado por –1.

c) Falso. Si $\vec{u} = (1, 0)$ y $\vec{v} = (0,1)$ entonces $|\vec{u}+\vec{v}| = |(1, 1)| = \sqrt{2}$ y $|\vec{u}| + |\vec{v}| = 1+1 = 2$

d) Verdadero. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$

77. Da un ejemplo de tres vectores no nulos $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ tales que $\vec{u}$ y $\vec{v}$ sean linealmente independientes, $\vec{u}$ y $\vec{w}$ sean también linealmente independientes, pero $\vec{v}$ y $\vec{w}$ sean linealmente dependientes.

$\vec{u} = (1, 0)$, $\vec{v} = (0, 1)$ y $\vec{w} = (0, 2)$

78. Demuestra que si $\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CB}$ entonces los puntos *A* y *D* son el mismo.

$\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CB} \Rightarrow \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CB} = \vec{0} \Rightarrow A \equiv D$

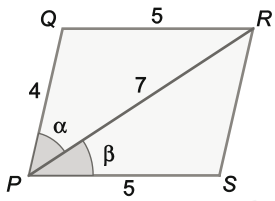
PROBLEMAS

79. El paralelogramo *PQRS* verifica que *PQ* = 4 cm, *PR* = 7 cm y *PS* = 5 cm.

a) Calcula $\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PR}$, $\overrightarrow{PS}\cdot\overrightarrow{PR}$, $\overrightarrow{RS}\cdot\overrightarrow{SP}$ y $\overrightarrow{QR}\cdot\overrightarrow{PR}$.

b) Calcula los ángulos del paralelogramo.

Aplicando el teorema del coseno en los triángulos *PQR* y *PRS*:



$$\cos\alpha = \frac{16+49-25}{56} = \frac{5}{7} \Rightarrow \alpha = 44{,}42^\circ$$

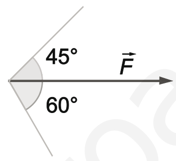
$$\cos\beta = \frac{25+49-16}{70} = \frac{29}{35} \Rightarrow \alpha = 34{,}05^\circ$$

a) $\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PR} = 4\cdot 7\cdot\cos\alpha = 4\cdot 7\cdot\frac{5}{7} = 20$ $\qquad$ $\overrightarrow{RS}\cdot\overrightarrow{SP} = 7\cdot 4\cdot\cos(\alpha+\beta) = 5{,}6$

$\overrightarrow{PS}\cdot\overrightarrow{PR} = 5\cdot 7\cdot\cos\beta = 5\cdot 7\cdot\frac{29}{35} = 29$ $\qquad$ $\overrightarrow{QR}\cdot\overrightarrow{PR} = 5\cdot 7\cdot\cos\beta = 29$

b) $\alpha+\beta = 78{,}47^\circ$ y $180^\circ-(\alpha+\beta) = 101{,}53^\circ$

80. Descompón una fuerza $\vec{F}$ de 15 Newton en otras dos que formen con ella ángulos de 45º y 60º.



$$\begin{cases} \left|\vec{F_2}\right|^2 = \left|\vec{F_1}\right|^2 + \left|\vec{F}\right|^2 - 2\cdot\left|\vec{F_1}\right|\cdot\left|\vec{F}\right|\cdot\cos 45^\circ \\ \left|\vec{F_1}\right|^2 = \left|\vec{F_2}\right|^2 + \left|\vec{F}\right|^2 - 2\cdot\left|\vec{F_2}\right|\cdot\left|\vec{F}\right|\cdot\cos 60^\circ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left|\vec{F_2}\right|^2 = \left|\vec{F_1}\right|^2 + 225 - 15\cdot\sqrt{2}\cdot\left|\vec{F_1}\right| \\ \left|\vec{F_1}\right|^2 = \left|\vec{F_2}\right|^2 + 225 - 15\cdot\left|\vec{F_2}\right| \end{cases}$$

Sustituyendo la segunda ecuación en la primera:

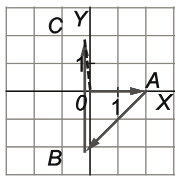
$$\left|\vec{F_2}\right|^2 = \left|\vec{F_2}\right|^2 + 225 - 15\cdot\left|\vec{F_2}\right| + 225 - 15\sqrt{2}\cdot\left|\vec{F_1}\right| \Rightarrow 15\left|\vec{F_2}\right| + 15\sqrt{2}\left|\vec{F_1}\right| = 450 \Rightarrow \left|\vec{F_2}\right| + \sqrt{2}\left|\vec{F_1}\right| = 30 \Rightarrow \left|\vec{F_2}\right| = 30 - \sqrt{2}\left|\vec{F_1}\right|$$

Sustituyendo en la primera ecuación:

$$\left(30-\sqrt{2}\left|\vec{F_1}\right|\right)^2 = \left|\vec{F_1}\right|^2 + 225 - 15\cdot\sqrt{2}\cdot\left|\vec{F_1}\right| \Rightarrow 900 + 2\left|\vec{F_1}\right|^2 - 60\sqrt{2}\left|\vec{F_1}\right| = \left|\vec{F_1}\right|^2 + 225 - 15\cdot\sqrt{2}\cdot\left|\vec{F_1}\right| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left|\vec{F_1}\right|^2 - 45\sqrt{2}\left|\vec{F_1}\right| + 675 = 0 \Rightarrow \left|\vec{F_1}\right| = \frac{45\sqrt{2}-15\sqrt{6}}{2} = 13{,}45\text{ N},\ \left|\vec{F_2}\right| = 30-\sqrt{2}\left|\vec{F_1}\right| = 10{,}98\text{ N}$$

81. Jorge realiza una excursión en tres etapas. En la primera se dirige hacia el Este y anda 2 km. En la segunda sigue andando 3 km pero esta vez en dirección Sudoeste. Finalmente, anda 4 km en dirección Norte. ¿Qué distancia le separa del punto de partida al finalizar la excursión? Realiza, usando vectores, un esquema del trayecto seguido.

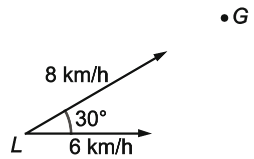


Si se considera el sistema de referencia de la figura, el trayecto de Jorge es $O \to A \to B \to C$:

$$O(0,0),\ A(2,0),\ B(2+3\cos 225^\circ,\ +3\,\mathrm{sen}\,225^\circ) = \left(\frac{4-3\sqrt{2}}{2},\ \frac{-3\sqrt{2}}{2}\right) \text{ y } C\left(\frac{4-3\sqrt{2}}{2},\ \frac{8-3\sqrt{2}}{2}\right)$$

La distancia del punto de salida es, por tanto: $\left|\overrightarrow{OC}\right| = \sqrt{\left(\frac{4-3\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{8-3\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{29-18\sqrt{2}} = 1{,}88$ km

82. Lola está paseando a su perra Lúa. En un momento dado, en el que se encuentran en el punto *L*, la perra ve un gato situado en *G* y tira hacia él con una velocidad de 8 km/h y con una dirección de 30º sobre la dirección de paseo, tal y como muestra la figura. Por su parte Lola tira con una velocidad de 6 km/h en la dirección de su paseo.



Calcula el vector velocidad resultante dando su módulo y dirección.

Tomando el sistema de referencia centrado en *L* y con ejes la dirección del paseo y su perpendicular, se pueden escribir vectorialmente las velocidades de Lola y Lúa como $\vec{a}=(6,\,0)$ y $\vec{b}=(8\cos 30º,\,8\,\text{sen}\,30º)=\left(4\sqrt{3},\,4\right)$, respectivamente.

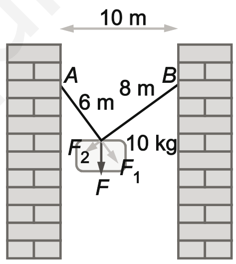
Por tanto, la velocidad resultante es $\vec{a}+\vec{b}=\left(6+4\sqrt{3},\,4\right)$, con módulo $\sqrt{\left(6+4\sqrt{3}\right)^2+16}=13{,}53$ km/h y dirección 17,19º respecto de la horizontal.

83. Los módulos de dos vectores valen 15 y 12 unidades de longitud respectivamente. El módulo de la suma de dichos vectores es 8 unidades de longitud. Calcula el producto escalar de los vectores y el ángulo que forman.

$$\left|\vec{u}+\vec{v}\right|^2=\left|\vec{u}\right|^2+2\vec{u}\cdot\vec{v}+\left|\vec{v}\right|^2 \Rightarrow 64=225+2\vec{u}\cdot\vec{v}+144 \Rightarrow \vec{u}\cdot\vec{v}=-152{,}5$$

$$\cos\alpha=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\left|\vec{u}\right|\left|\vec{v}\right|}=\frac{-152{,}5}{15\cdot 12}=-0{,}8472 \Rightarrow \alpha=147{,}91º$$

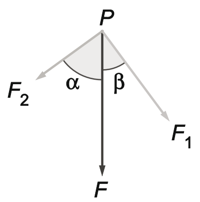
84. Una pesa está suspendida en una cuerda sujeta a dos puntos *A* y *B* de igual altura y ubicados en dos paredes que distan 10 m, tal y como muestra la figura.



La cuerda tiene una longitud de 14 m y la pesa está situada a 6 m de *A* y 8 m de *B*.

La masa de la pesa es de 10 kg y, por tanto, la fuerza que ejerce es *F* =98 N.

Calcula los valores de las fuerzas F_1 y F_2 en los que se descompone la fuerza *F*. ¿Qué interpretación puedes dar a estas fuerzas? Calcula los ángulos que forman con la fuerza *F*.



El triángulo *ABP* es rectángulo en *P* ya que $10^2=6^2+8^2$, por tanto:

$$\text{tg}\,\alpha=\frac{8}{6}=\frac{4}{3},\ \text{tg}\,\beta=\frac{6}{8}=\frac{3}{4},\ \text{sen}\,\alpha=\cos\beta=\frac{4}{5}\ \text{y}\ \cos\alpha=\text{sen}\,\beta=\frac{3}{5}$$

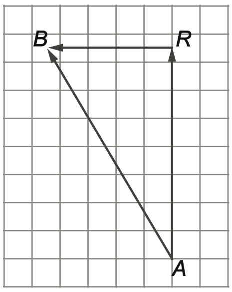
$$\left|\vec{F_1}\right|=98\cdot\cos\beta=98\cdot\frac{4}{5}=78{,}4\text{ N},\ \left|\vec{F_2}\right|=98\cdot\cos\alpha=98\cdot\frac{3}{5}=58{,}8\text{ N},\ \alpha=53{,}13º\ \text{y}\ \beta=36{,}87º$$

85. Un coche viaja a 100 km/h durante 45 minutos en dirección Norte hasta llegar a una rotonda donde realiza un giro de 270º. En la nueva carretera, circula durante 30 minutos a una velocidad de 90 km/h.

a) Usando vectores, dibuja un esquema de la situación.

b) Indica cuál es el módulo, dirección y sentido del vector desplazamiento total, siendo su origen el punto donde se inicia el recorrido y su extremo el punto donde se acaba.

a)

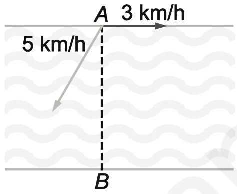


b) $AR = 100 \cdot 0{,}75 = 75$ km, $RB = 90 \cdot 0{,}5 = 45$ km

$$\left|\overline{AB}\right| = \sqrt{75^2 + 45^2} = 87{,}46 \text{ km}$$

$$\widehat{BAR} = \text{arctg}\frac{45}{75} = 30{,}96^\circ$$

86. Daniel quiere cruzar un río de una orilla a otra y de forma perpendicular a ambas. Daniel consigue nadar con una velocidad de 5 km/h pero la corriente del río lleva una velocidad de 3 km/h.

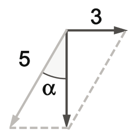


a) ¿En qué dirección debe nadar para conseguir llegar al punto *B* situado justo enfrente del punto de salida *A*?

b) ¿Cuál será la velocidad resultante?

c) ¿Qué pasaría si la velocidad que consigue Daniel fuese menor que la velocidad de la corriente?

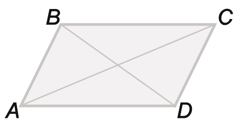
a) $\alpha = \text{arcsen}\frac{3}{5} \simeq 36{,}87^\circ$, Daniel debe nadar con 36,87º respecto de la perpendicular al río.



b) La velocidad resultante será $\sqrt{5^2 - 3^2} = 4$ km/h

c) No existiría ninguna dirección con la que Daniel consiguiese llegar al punto *B* situado justo enfrente del punto de salida *A*, ya que el arcsen no estaría definido en este caso.

87. Dado el paralelogramo *ABCD* demuestra que la suma de los cuadrados de las dos diagonales es igual al doble de la suma de los cuadrados de dos lados consecutivos del paralelogramo. Para ello, ayúdate del cálculo vectorial y demuestra que $\left|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}\right|^2 + \left|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right|^2 = 2\left|\overrightarrow{AB}\right|^2 + 2\left|\overrightarrow{AD}\right|^2$.

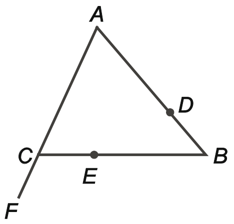


Aplicando las fórmulas de ejercicio resuelto 27:

$$\left|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}\right|^2 + \left|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right|^2 = \left|\overrightarrow{AB}\right|^2 + \left|\overrightarrow{AD}\right|^2 - 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + \left|\overrightarrow{AB}\right|^2 + \left|\overrightarrow{AD}\right|^2 + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 2\left|\overrightarrow{AB}\right|^2 + 2\left|\overrightarrow{AD}\right|^2$$

PARA PROFUNDIZAR

88. En la figura adjunta, del triangulo *ABC* se consideran los puntos *D*, *E* y *F* sobre las rectas que contienen sus lados, de forma que: $\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{CF}$, $\overrightarrow{BC} = 3\overrightarrow{EC}$ y $3\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB}$.



Demuestra que *D*, *E* y *F* están alineados. Para ello:

a) Escoge una base conveniente y escribe los vectores $\overrightarrow{FE}$ y $\overrightarrow{ED}$ como combinación lineal de los vectores de la base.

b) Con ayuda del apartado anterior, relaciona los vectores $\overrightarrow{FE}$ y $\overrightarrow{ED}$.

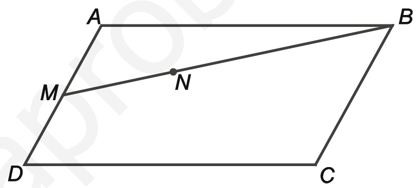
a) Se toma la base $\{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}\}$, así:

$$\overrightarrow{FE} = \overrightarrow{FC} + \overrightarrow{CE} = -\overrightarrow{CF} - \overrightarrow{EC} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{CB} = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

$$\overrightarrow{ED} = \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CA} + \frac{2}{3}\left(\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}\right) = \frac{1}{3}\overrightarrow{CA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{CB} = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

b) Los vectores $\overrightarrow{FE}$ y $\overrightarrow{ED}$ son iguales por lo que *D*, *E* y *F* están alineados

89. En la figura:



- ***ABCD* es un paralelogramo.**
- ***M* es el punto medio del segmento *AD*.**
- $\overrightarrow{BN} = 2\overrightarrow{NM}$

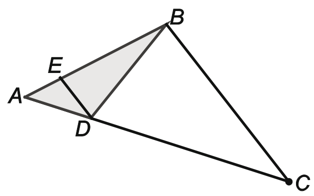
Demuestra que los puntos *C*, *N* y *A* están alineados.

En la base $\{\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DA}\}$ tenemos: $A(0, 1)$, $B(1, 1)$, $C(1, 0)$, $D(0, 0)$ y $M\left(0, \frac{1}{2}\right)$

Por tanto, si $N(n_1, n_2)$: $\overrightarrow{BN} = 2\overrightarrow{NM} \Rightarrow (n_1 - 1, n_2 - 1) = (-2n_1, 1 - 2n_2) \Rightarrow n_1 = \frac{1}{3}, n_2 = \frac{2}{3} \Rightarrow N\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$

De este modo, $\overrightarrow{CN} = \left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$ y $\overrightarrow{CA} = (-1, 1)$ son proporcionales, por lo que *C*, *N* y *A* están alineados.

90. En la figura:



- ***ABC* es un triángulo cualquiera.**
- $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$
- $\overrightarrow{AC} = 4\overrightarrow{AD}$

Demuestra que las rectas *BC* y *ED* son paralelas.

En la base $\{\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB}\}$ tenemos $A(0, 0)$, $B(0, 1)$, $C(4, 0)$, $D(1, 0)$ y $E\left(0, \frac{1}{4}\right)$. Por tanto, $\overrightarrow{BC} = (4, -1)$ y $\overrightarrow{ED} = \left(1, -\frac{1}{4}\right)$ son proporcionales, es decir, las rectas *BC* y *ED* son paralelas.

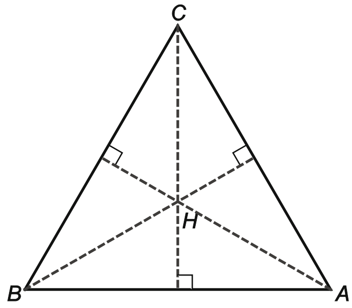
91. Con la ayuda del cálculo vectorial, demuestra el teorema del coseno en un triángulo ABC. Para ello, utiliza el producto escalar.

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = \left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}\right) \cdot \left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}\right) = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CB} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left|\overrightarrow{AB}\right|^2 = \left|\overrightarrow{AC}\right|^2 + 2\left|\overrightarrow{AC}\right|\left|\overrightarrow{CB}\right|\cos\left(\widehat{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}}\right) + \left|\overrightarrow{CB}\right|^2 \Rightarrow c^2 = b^2 + 2ba\cos\left(180º - \hat{C}\right) + a^2 \Rightarrow c^2 = a^2 + b^2 - 2ba\cos\hat{C}$$

92. Con la ayuda del cálculo vectorial, demuestra que las tres alturas de un triángulo se cortan en un mismo punto.

Consideremos un triángulo *ABC* y sus alturas trazadas desde *A* y *B*, que se cortarán en un punto *H*. Queremos probar que *H* también pertenece a la altura trazada desde *C*.



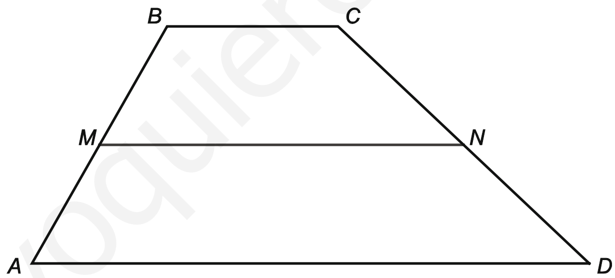
Para ello observemos que $\overrightarrow{AH}$ y $\overrightarrow{BC}$ son perpendiculares, igual que lo son $\overrightarrow{BH}$ y $\overrightarrow{AC}$, y basta demostrar que también lo son $\overrightarrow{CH}$ y $\overrightarrow{AB}$, es decir, que $\overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{AB}=0$.

$$\overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{AB}=\left(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BH}\right)\cdot\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}\right)=\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{BC}+0=$$

$$=\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{HB}\cdot\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CB}\cdot\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{HB}\right)=\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{HA}=0$$

93. Demuestra que la recta que une los puntos medios de los lados no paralelos de un trapecio es paralela a las bases.

Consideremos un trapecio *ABCD* con lados no paralelos *AB* y *CD*, y sean *M* y *N* los respectivos puntos medios de estos lados.



Tenemos:

$$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}\right)+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC})$$

Y, como $\overrightarrow{AD}$ y $\overrightarrow{BC}$ son paralelos, se concluye que $\overrightarrow{MN}$ también es paralelo a estos dos vectores.

ENTORNO MATEMÁTICO

Perdido en el desierto

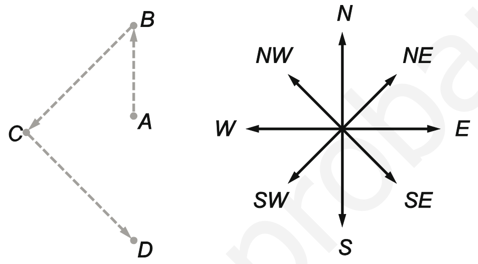
Durante sus vacaciones y antes de empezar la Universidad, Javier, ha decidido realizar un viaje por Mongolia.

Ahora mismo se encuentra visitando el desierto de Gobi, pero como es un despistado incorregible, ha perdido de vista al guía que acompaña a su grupo y se encuentra perdido.

La falta de agua y el calor lo están consumiendo poco a poco y, de no encontrar una solución, no tardará mucho en morir. De pronto, y mientras está vagando sin ningún criterio, encuentra un poste anclado en la arena con una inscripción en árabe. Suerte que Javier hizo caso de su madre que, hace ya tiempo, le dijo: "Hijo: además del inglés sería conveniente que aprendieras, por lo menos, otra lengua. Y mejor sería que fuera alguna de las de los países emergentes: el chino, el hindi, el ruso… Tampoco estaría mal que aprendieras árabe" y aprendió esta lengua.

- **Partiendo de este punto, camina 3 km hacia el Norte y encontrarás arena.**
- **Después, camina otros 5 km dirigiéndote hacia el Suroeste y seguirás encontrando arena.**
- **Finalmente, toma otra dirección hasta que llegues a 4071 m justo al sur del punto inicial del viaje, donde seguirás encontrando arena.**
- **Si vuelves al punto inicial y recorres la misma distancia y con la misma dirección que las del tercer tramo del camino indicado, ¡encontrarás un OASIS!**

Javier consigue traducir el mensaje, que parece obra de un bromista y ante la alternativa de quedarse a esperar que lo encuentren o intentar salir por sus propios medios, opta por esto último y realiza un esquema:



a) Calcula el módulo y el ángulo con la dirección Oeste – Este que forma el tercer tramo del camino.

b) Elige una referencia cartesiana conveniente y establece las coordenadas de los puntos del camino y del punto donde está situado el oasis.

Si se considera el sistema de referencia en el que A es el origen de coordenadas y la dirección Oeste – Este es el eje de abscisas, tenemos $A(0, 0)$, $B(0,3)$, $C(c_1, c_2)$ y $D(0; -4,071)$.

Las condiciones del problema implican:

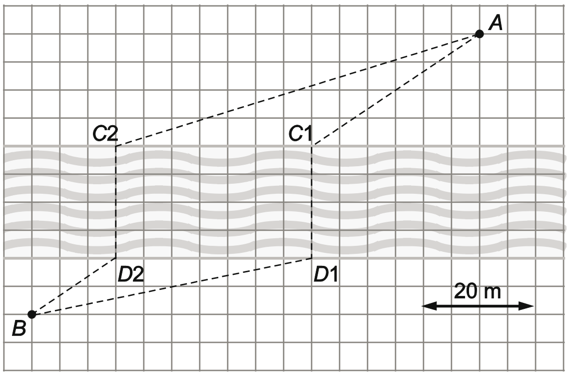
$$\begin{cases} |\overrightarrow{BC}| = 5 \\ \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 15\cos 45^\circ = \dfrac{15\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1^2 + (c_2 - 3)^2 = 25 \\ -3(c_2 - 3) = \dfrac{15\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow c_2 = \frac{6 - 5\sqrt{2}}{2},\ c_1 = -\frac{5\sqrt{2}}{2} \Rightarrow C\left(-\frac{5\sqrt{2}}{2}, \frac{6 - 5\sqrt{2}}{2}\right)$$

El oasis se encuentra en el punto O tal que $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{CD}$, es decir, $O\left(\dfrac{5\sqrt{2}}{2}; -4,071 - \dfrac{6 - 5\sqrt{2}}{2}\right) \simeq (3,5355; -4,6065)$.

Por tanto, la longitud del tercer tramo es $|\overrightarrow{CD}| \simeq \sqrt{3,5355^2 + (-4,6065)^2} \simeq 5,8069$ km y el ángulo que forma con la dirección Oeste – Este es $\operatorname{arctg}\left(\dfrac{-4,6065}{3,5355}\right) \simeq 307,51^\circ$.

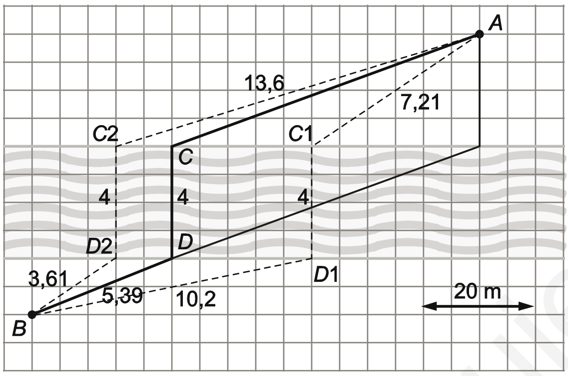
Aventura en el Tuul

Días más tarde y tras su aventura en el desierto, Javier, que no está todavía suficientemente cansado de aventuras, ha ido al Parque Nacional Khustain Nuruu. En un cierto momento, se encuentra en el punto *A* y quiere dirigirse al punto *B* pero atravesando el río Tuul de forma perpendicular a sus orillas.



a) Con la ayuda de GeoGebra, dibuja y calcula la distancia recorrida tomando los caminos $A \to C1 \to D1 \to B$ y $A \to C2 \to D2 \to B$.

b) También con GeoGebra, mediante tanteo y calculando varios caminos, intenta aproximar el camino de mínima longitud para ir de *A* a *B*.



$A \to C1 \to D1 \to B$: 5 (7,21 + 4 + 10,2) = 107,05 m

$A \to C2 \to D2 \to B$: 5 (13,6 + 4 + 3,61) = 106,05 m.

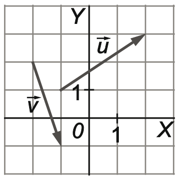
El camino más corto es

$A \to C \to D \to B$: 5 (11,39 + 4 + 5,70) = 104,44 m

AUTOEVALUACION

Comprueba lo que has aprendido

1. Dados los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ de la figura:



a) Calcula las coordenadas de $\vec{u}+\vec{v}$ y $2\vec{u}-3\vec{v}$

b) Calcula el ángulo que forman $\vec{u}$ y $\vec{v}$

a) $\vec{u}=(3,\ 2)$ y $\vec{v}=(1,\ -3)$, por tanto, $\vec{u}+\vec{v}=(4,\ -1)$ y $2\vec{u}-3\vec{v}=(6,\ 4)-(3,\ -9)=(3,\ 13)$

b) $\cos\alpha=\dfrac{-3}{\sqrt{13}\sqrt{10}}=-\dfrac{3\sqrt{130}}{130}\Rightarrow\alpha=105,26^{\circ}$

2. Dados los puntos *A*(2, 4), *B*(–4, 2) y *C*(–3, –1):

a) Calcula el punto *D* para que *ABCD* sea un paralelogramo.

b) ¿Es el anterior paralelogramo un rectángulo?

a) Si $D(d_1,\ d_2)$, tenemos: $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}\Rightarrow(-6,\ -2)=(-3-d_1,\ -1-d_2)\Rightarrow d_1=3,\ d_2=1\Rightarrow D(3,\ 1)$

b) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=(-6,\ -2)\cdot(1,\ -3)=-6+6=0\Rightarrow\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AD}$ son perpendiculares y *ABCD* sí es un rectángulo.

3. a) Calcula el extremo del vector $\overrightarrow{AB}$, sabiendo que *A*(–3, 4) y que es equipolente a $\vec{u}=(2,\ 2)$.

b) Calcula el origen del vector $\overrightarrow{AB}$, sabiendo que *B*(5, –1) y que es equipolente a $\vec{u}=(-2,\ 3)$.

a) Si $B(b_1,\ b_2)$, tenemos: $\overrightarrow{AB}=\vec{u}\Rightarrow(b_1+3,\ b_2-4)=(2,\ 2)\Rightarrow b_1=-1,\ b_2=6\Rightarrow B(-1,\ 6)$

b) Si $A(a_1,\ a_2)$, tenemos: $\overrightarrow{AB}=\vec{u}\Rightarrow(5-a_1,\ -1-a_2)=(-2,\ 3)\Rightarrow a_1=7,\ b_2=-4\Rightarrow A(7,\ -4)$

4. Calcula los ángulos del triángulo *A*(–3, 2), *B*(3, 5) y *C*(–2, 0), y comprueba que se trata de un triángulo rectángulo.

$\overrightarrow{AB}=(6,\ 3)$ y $\overrightarrow{AC}=(1,\ -2)\Rightarrow\cos\hat{A}=\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|}=0\Rightarrow\hat{A}=90^{\circ}$. El triángulo es rectángulo.

$\overrightarrow{BA}=(-6,\ -3)$ y $\overrightarrow{BC}=(-5,\ -5)\Rightarrow\cos\hat{B}=\dfrac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{BC}|}=\dfrac{45}{\sqrt{45\cdot 50}}=\dfrac{3}{\sqrt{10}}=\dfrac{3\sqrt{10}}{10}\Rightarrow\hat{B}=18,43^{\circ}$

$\overrightarrow{CA}=(-1,\ 2)$ y $\overrightarrow{CB}=(5,\ 5)\Rightarrow\cos\hat{C}=\dfrac{\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}}{|\overrightarrow{CA}||\overrightarrow{CB}|}=\dfrac{5}{\sqrt{5\cdot 50}}=\dfrac{1}{\sqrt{10}}=\dfrac{\sqrt{10}}{10}\Rightarrow\hat{C}=71,57^{\circ}$

5. a) Calcula todos los vectores que sean paralelos a $\vec{u}=(-9,\ 12)$ y que tengan módulo 5.

b) Calcula todos los vectores que sean perpendiculares a $\vec{u}(10,\ -24)$ y que tengan módulo 13.

a) Todos los vectores paralelos a $\vec{u}$ son de la forma $(-3t,\ 4t)$ con $t\in\mathbb{R}$, obligando a que tengan módulo 5:

$5=\sqrt{(-3t)^2+(4t)^2}=\pm 5t\Rightarrow t=1,\ t=-1$. Tenemos, por tanto, dos soluciones, $\vec{v}=(-3,\ 4)$ y $\vec{w}=(3,\ -4)$

b) Los vectores perpendiculares a $\vec{u}$ son de la forma $(12t,\ 5t)$ con $t\in\mathbb{R}$, obligando a que tengan módulo 13:

$13=\sqrt{(12t)^2+(5t)^2}=\pm 13t\Rightarrow t=1,\ t=-1$. Tenemos, por tanto, dos soluciones, $\vec{v}=(12,\ 5)$ y $\vec{w}=(-12,\ -5)$

6. Dados los vectores $\vec{u}=(-3,\,5)$ y $\vec{v}=(10,\,3)$ calcula la proyección de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$.

$$\left|\text{proy}_{\vec{v}}\,\vec{u}\right|=\frac{\left|\vec{u}\cdot\vec{v}\right|}{\left|\vec{v}\right|}=\frac{15}{\sqrt{109}}=\frac{15\sqrt{109}}{109}$$

7. Determina el ángulo de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ sabiendo que $\left|\vec{u}\right|=4$, $\left|\vec{v}\right|=6$ y $\left|\vec{u}-\vec{v}\right|=8$.

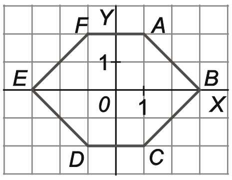
$$\vec{u}\cdot\vec{v}=\frac{\left|\vec{u}\right|^2+\left|\vec{v}\right|^2-\left|\vec{u}-\vec{v}\right|^2}{2}=\frac{16+36-64}{2}=-6\Rightarrow\cos\alpha=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\left|\vec{u}\right|\cdot\left|\vec{v}\right|}=-\frac{6}{24}=-\frac{1}{4}\Rightarrow\alpha=104{,}48^\circ$$

8. Escribe el vector $\vec{a}=(-10,\,12)$ como combinación lineal de los vectores $\vec{b}=(3,\,-4)$ y $\vec{c}=(1,\,-1)$. ¿Forman $\vec{b}$ y $\vec{c}$ una base de V^2? Si es así, indica las coordenadas de $\vec{a}$ en dicha base.

$\frac{1}{3}\neq\frac{-1}{-4}\Rightarrow\vec{b}$ y $\vec{c}$ forman una base de V^2.

$$\vec{a}=a_1\vec{b}+a_2\vec{c}\Rightarrow\begin{cases}3a_1+a_2=-10\\-4a_1-a_2=12\end{cases}\Rightarrow a_1=-2,\ a_2=-4\Rightarrow\vec{a}=-2\vec{b}-4\vec{c}=(-2,\,-4)$$

9. En el hexágono *ABCDEF*, calcula las coordenadas de: $\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{ED}$ y $2\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{EF}+4\overrightarrow{AF}$.



$$\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{ED}=(-2,\,0)-(2,\,2)+(2,\,-2)=(-2,\,-4)$$

$$2\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{EF}+4\overrightarrow{AF}=2(2,\,-2)-3(2,\,2)+4(-2,\,0)=(-10,\,-10)$$

Relaciona y contesta

Elige la única respuesta correcta en cada caso

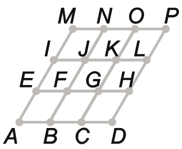
1. Se considera la siguiente figura.

A. $\overrightarrow{FN}+\overrightarrow{FH}=\overrightarrow{IC}$

B. $\overrightarrow{FN}+\overrightarrow{FH}=\overrightarrow{CI}$

C. $\overrightarrow{FN}-\overrightarrow{FH}=\overrightarrow{IC}$

D. $\overrightarrow{FN}-\overrightarrow{FH}=\overrightarrow{CI}$



La respuesta correcta es D.

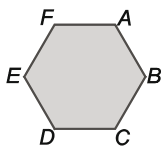
2. El hexágono de la figura es regular y su lado vale 1. El producto escalar $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AE}$ vale:

A. 1

B. 2

C. $\frac{3}{2}$

D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$



El ángulo que forman los dos vectores es 60º, y sus módulos valen $\sqrt{3}$, por tanto, $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AE}=\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}\cdot\cos 60^\circ=\frac{3}{2}$, la respuesta C.

3. El producto escalar de dos vectores no nulos es negativo. El ángulo que forman dicho vectores es:

A. Menor de 90º **B.** Mayor de 90º **C.** Menor de 45º **D.** 360º

Puesto que el coseno del ángulo será negativo, la respuesta correcta es B.

Señala, en cada caso, las respuestas correctas

4. Se consideran los vectores $\vec{u} = \left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{4}\right)$ y $\vec{v} = \frac{1}{4}(3, 2)$

A. Los vectores tienen el mismo módulo.

B. Los vectores son ortogonales.

C. Los vectores son linealmente independientes.

D. Los vectores son linealmente dependientes.

A es correcta, ya que $|\vec{u}| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{9}{16}} = \frac{\sqrt{13}}{4}$ y $|\vec{v}| = \sqrt{\frac{9}{16} + \frac{4}{16}} = \frac{\sqrt{13}}{4}$.

B es correcta, ya que $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{3}{8} - \frac{6}{16} = 0$.

C es correcta, y por tanto D no lo es, ya que las coordenadas de $\vec{u}$ y $\vec{v}$ no son proporcionales.

5. Se consideran los puntos *A*(–2, 1) y *B*(2, –1).

A. El origen de coordenadas está alineado con ellos.

B. El punto *C*(4, 3) determina con ellos un triángulo rectángulo.

C. El punto *C*(4, 3) determina con ellos un triángulo isósceles.

D. El producto escalar de los vectores de posición de *A* y *B* vale 5.

A es correcta, ya que $\overrightarrow{OA} = (-2, 1)$ y $\overrightarrow{OB} = (2, -1)$ son proporcionales.

B es correcta, ya que $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = (-4, 2) \cdot (2, 4) = -8 + 8 = 0$.

C es correcta, ya que $|\overrightarrow{BA}| = \sqrt{16+4} = 2\sqrt{5}$ y $|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{4+16} = 2\sqrt{5}$.

D no es correcta, ya que $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = -4 - 1 = -5$.

Elige la relación correcta entre las dos afirmaciones dadas

6. Sean $\vec{v}$ y $\vec{w}$ vectores de V^2. Se consideran las afirmaciones:

1. El vector $\vec{u} = (2, -3)$ se puede escribir como combinación lineal de $\vec{v}$ y $\vec{w}$.

2. $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son linealmente independientes.

A. $1 \Leftrightarrow 2$

B. $1 \Rightarrow 2$ pero $2 \not\Rightarrow 1$

C. $2 \Rightarrow 1$ pero $1 \not\Rightarrow 2$

D. 1 y 2 son excluyentes entre sí.

Obviamente $2 \Rightarrow 1$, pero el reciproco no es cierto, basta tomar como ejemplo $\vec{v} = \vec{u}$ y $\vec{w} = \vec{0}$, por tanto, la respuesta correcta es C.

Señala el dato innecesario para contestar

7. Se quiere calcular el ángulo que forman los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$. Para ello se dan los siguientes datos:

1. $|\vec{u}| = 8$ **2.** $|\vec{v}| = 6$ **3.** $|\vec{u} - \vec{v}| = 5$ **4.** $\vec{u} \cdot \vec{v} = 37{,}5$

A. Únicamente puede eliminarse el dato 1.

B. Únicamente puede eliminarse el dato 2.

C. Únicamente puede eliminarse el dato 3.

D. Puede eliminarse cualquiera de los cuatro.

Como $|\vec{u} - \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + |\vec{v}|^2$, se puede deducir cualquiera de los datos a partir de los otros tres, por tanto, la respuesta correcta es D.

5 Geometría analítica

EJERCICIOS PROPUESTOS

1 y 2. Ejercicios resueltos.

3. Comprueba si los puntos *A*(–2, 3), *B*(2, –3) y *C*(–2, 5) pertenecen o no a la recta que pasa por *P*(–2, 6) y tiene como vector director $\vec{v} = (0, -3)$. Calcula dos puntos más de esta recta.

La recta que pasa por *P*(–2, 6) y tiene como vector director $\vec{v} = (0, -3)$, que es paralelo al eje *Y*, es la recta vertical $r: x = -2$, por lo que únicamente los puntos cuya abscisa sea –2 pertenecen a la recta, es decir, *A* y *C* pertenecen a *r* pero *B* no.

4. Calcula las ecuaciones de las rectas paralelas a los ejes que pasan por el punto *A*(–3, 5).

La recta paralela al eje *X* que pasa por *A* es $y = 5$, y la recta paralela al eje *Y* que pasa por *A* es $x = -3$.

5. Indica dos puntos y el vector director de la recta *r*: $8x + y = 7$.

Dos puntos de la recta son, por ejemplo, *A*(1, –1) y *B*(0, 7), el vector director es $\overrightarrow{AB} = (-1, 8)$.

6. En cada caso, calcula la ecuación general de la recta que pasa por los puntos:

a) *A*(2, –5) y *B*(1, –3)   **b)** *A*(–2, –4) y *B*(3, –2)

a) El vector director es $\overrightarrow{AB} = (-1, 2)$ y la recta pasa por *A*(2, –5). Por tanto:

$$\frac{x-2}{-1} = \frac{y+5}{2} \Rightarrow 2x - 4 = -y - 5 \Rightarrow 2x + y + 1 = 0$$

b) El vector director es $\overrightarrow{AB} = (5, 2)$ y la recta pasa por *A*(–2, –4). Por tanto:

$$\frac{x+2}{5} = \frac{y+4}{2} \Rightarrow 2x + 4 = 5y + 20 \Rightarrow 2x - 5y - 16 = 0$$

7. Halla el valor de *k* para que la recta que pasa por los puntos A(2, –1) y B(3, *k*) pase por el punto C(0, –4).

C pertenece a la recta que pasa por *A* y *B* si y sólo si los vectores $\overrightarrow{AB} = (1, k+1)$ y $\overrightarrow{AC} = (-2, -3)$ son proporcionales. Por tanto:

$$\frac{1}{-2} = \frac{k+1}{-3} \Rightarrow -2k - 2 = -3 \Rightarrow k = \frac{1}{2}$$

8. Halla *k* para que: *r* : $(k + 5)x - (3 + k)y = 1 - k$ pase por *P*(2, 3).

Sustituyendo las coordenadas de *P* en la ecuación de la recta tenemos $2(k+5) - 3(3+k) = 1 - k \Rightarrow 0 = 0$, por tanto, el punto *P* pertenece a *r* para cualquier valor real de *k*.

9 a 11. Ejercicios resueltos.

12. Indica un vector director y otro normal de la recta de ecuación –3*x* + 2*y* – 4 = 0.

Un vector normal es $\vec{n} = (-3, 2)$ y un vector director es $\vec{u} = (2, 3)$.

13. Halla un vector director y otro normal de la recta que pasa por el punto $A\left(-2, \frac{1}{3}\right)$ y por el origen de coordenadas.

Vector director: $\overline{OA} = \left(-2, \frac{1}{3}\right) \simeq (-6, 1)$ Vector normal: $\vec{n} = (1, 6)$

14. Una recta tiene como vector normal a $\vec{n} = (2, -3)$ y pasa por el punto *A*(–1, 2). Escribe su ecuación general.

La ecuación general es de la forma $2x - 3y + k = 0$. Como la recta pasa por *A*, ha de ser $-2 - 6 + k = 0 \Rightarrow k = 8$.

Por tanto, la ecuación general de la recta es $2x - 3y + 8 = 0$.

15. Halla la ecuación normal de la recta que pasa por *P*(1, –3) y es perpendicular a la que pasa por *A*(0, 2) y *B*(–1, 0).

La recta tiene vector director $\overrightarrow{AB} = (-1, -2) \approx (1, 2)$ y pasa por el punto *P*, por tanto, su ecuación normal es:

$(x - 1) + 2(y + 3) = 0$ o $x + 2y + 5 = 0$.

16. Escribe la ecuación de la recta perpendicular a 3*x* – 6*y* = 1 y que pasa por el punto *A*(–3, 2)

Todas las perpendiculares a $3x - 6y = 1$ son de la forma $6x + 3y + k = 0$.Obligando a que *A* pertenezca a la perpendicular tenemos $-18 + 6 + k = 0 \Rightarrow k = 12$ y, por tanto, la ecuación de la recta perpendicular es

$6x + 3y + 12 = 0 \Rightarrow 2x + y + 4 = 0$.

17. Halla la ecuación de la recta perpendicular a 5*x* + 4*y* – 3 = 0 que corta a la recta 6(*x* – 1) – (*y* – 1) = 0 en *x* = 1.

Todas las rectas perpendiculares a $5x + 4y - 3 = 0$ son de la forma $4x - 5y + k = 0$. Obligando a que corte a $6(x - 1) - (y - 1) = 0$ en $x = 1$, es decir, a que pase por el punto (1, 1) tenemos $4 - 5 + k = 0 \Rightarrow k = 1$. Por tanto, la ecuación de la recta perpendicular es $4x - 5y + 1 = 0$.

18. Halla la ecuación de la recta perpendicular al segmento de extremos *A*(0, –2) y *B*(1, 4) y que pasa por el punto *C*(3, 0).

La recta tiene vector normal $\overrightarrow{AB} = (1, 6)$ y pasa por el punto *C*, por tanto, su ecuación es:

$1(x - 3) + 6(y - 0) = 0 \Rightarrow x + 6y - 3 = 0$

19. Considera el triángulo de vértices *A*(5, 3), *B*(7, –1) y *C*(1, –1). Halla la altura correspondiente al vértice *A*.

La altura correspondiente al vértice *A* pasa por este punto y es perpendicular a $\overrightarrow{BC} = (-6, 0) \simeq (1, 0)$, por tanto su ecuación es $(x - 5) + 0(y - 3) = 0 \Rightarrow x = 5$.

20. Ejercicio resuelto.

21. Calcula la ecuación de la recta que pasa por el punto $A(-2, 4)$ y tiene de pendiente $m = \frac{1}{2}$.

La ecuación de la recta es de la forma $y = \frac{1}{2}x + n$. Como pasa por A: $4 = -1 + n \Rightarrow n = 5$. Por tanto, la ecuación es $y = \frac{x}{2} + 5 \Rightarrow x - 2y + 10 = 0$.

22. Indica el vector director y la pendiente de las siguientes rectas:

a) $-2x + y + 7 = 0$ **b)** $\begin{cases} x = 3\lambda \\ y = 1 - \lambda \end{cases}$ **c)** $y = 5x - 3$ **d)** $x + 4 = \frac{y-1}{2}$

a) Vector director: $\vec{u} = (1, 2)$. Pendiente: $m = \frac{2}{1} = 2$.

b) Vector director: $\vec{u} = (3, -1)$. Pendiente: $m = -\frac{1}{3}$.

c) Vector director: $\vec{u} = (1, 5)$. Pendiente: $m = 5$.

d) Vector director: $\vec{u} = (1, 2)$. Pendiente: $m = \frac{2}{1} = 2$.

23. Calcula la ecuación de la recta que tiene doble pendiente que la bisectriz del primer y tercer cuadrantes y que pasa por el origen de coordenadas.

La pendiente es $m = 2$ y pasa por $O(0, 0)$, por tanto, la ecuación es $y = 2x$.

24. Halla la ecuación punto–pendiente de la recta que pasa por el punto $A(-2, 5)$ y forma un ángulo de 120º con la parte positiva del eje X.

La pendiente es $m = -\sqrt{3}$ y pasa por A, por tanto, la ecuación es $y - 5 = -\sqrt{3}(x + 2)$.

25. Calcula la pendiente y la ordenada en el origen de la recta que pasa por los puntos:

a) $A(-1, 5)$ y $B(2, -2)$ **b)** $A(1, 2)$ y $B(2, -1)$ **c)** $A(0, -5)$ y $B(5, 0)$ **d)** $A(-1, -4)$ y $B(2, -4)$

Sea $y = mx + n$ la ecuación explícita de la recta, donde m es la pendiente y n es la ordenada en el origen. Los puntos dados han de verificar la ecuación, por lo que se tiene:

a) $\begin{cases} -m + n = 5 \\ 2m + n = -2 \end{cases} \Rightarrow m = -\frac{7}{3},\ n = \frac{8}{3}$

c) $\begin{cases} n = -5 \\ 5m + n = 0 \end{cases} \Rightarrow m = 1,\ n = -5$

b) $\begin{cases} m + n = 2 \\ 2m + n = -1 \end{cases} \Rightarrow m = -3,\ n = 5$

d) $\begin{cases} -m + n = -4 \\ 2m + n = -4 \end{cases} \Rightarrow m = 0,\ n = -4$

26. Halla la ecuación explícita y la punto–pendiente de la recta que pasa por $A(0, 5)$ y es perpendicular a $3x + 5y + 2 = 0$.

La recta buscada tiene vector director $\vec{u} = (3, 5)$, por tanto, tiene pendiente $m = \frac{5}{3}$, además pasa por A, con lo que su ecuación punto–pendiente es $y - 5 = \frac{5}{3}x$ y su ecuación explícita es $y = \frac{5}{3}x + 5$.

27. Ejercicio interactivo.

28 a 30. Ejercicios resueltos.

31. Indica, en cada caso, si las rectas *r* y *s* son paralelas o secantes y, en este último caso, obtén el punto de intersección:

a) $r:\begin{cases} x = 2-4t \\ y = 3+2t \end{cases}$ $s:\begin{cases} x = 2s \\ y = -s \end{cases}$

b) $\begin{cases} r: 2x+5y-5=0 \\ s: 3x-5y+5=0 \end{cases}$

a) $\begin{cases} 2-4t = 2s \\ 3+2t = -s \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2t+s=1 \\ 2t+s=-3 \end{cases}$ Como el sistema es incompatible, las dos rectas son paralelas.

b) $\frac{2}{3} \neq \frac{5}{-5} \Rightarrow$ Son rectas secantes. Calculamos el punto de corte: $\begin{cases} 2x+5y-5=0 \\ 3x-5y+5=0 \end{cases} \Rightarrow x=0,\ y=1 \Rightarrow P(0,\ 1)$

32. Calcula la ecuación de la recta paralela a la recta *r*: 2*x* + *y* + 1= 0 y que pasa por el punto de intersección de las rectas *s*: *x* – *y* + 5 = 0 y *t*: *x* + *y*+ 1 = 0.

Se calcula el punto de intersección de s y t :

$\begin{cases} x-y+5=0 \\ x+y+1=0 \end{cases} \Rightarrow x=-3,\ y=2 \Rightarrow P(-3,\ 2)$

El haz de rectas paralelas a r tiene ecuación $2x+y+K=0$. Como la recta buscada pasa por P, se tiene:

$-6+2+K=0 \Rightarrow K=4$. Por tanto, la ecuación de la recta buscada es $2x+y+4=0$.

33. Halla la ecuación del haz cuyo vértice es *P*(–5, 4).

$\{y-4 = m(x+5),\ m \in \mathbb{R}\} \cup \{x=-5\}$

34 y 35. Ejercicios resueltos.

36. Calcula *k* para que la distancia entre las rectas 5*x* + 12*y* – *k* = 0 y 5*x* + 12*y* + 15 = 0 sea 2.

Observemos que las rectas dadas son paralelas. Tenemos:

$d(r,\ s) = 2 \Rightarrow \frac{|-k-15|}{\sqrt{5^2+12^2}} = 2 \Rightarrow |-k-15| = 26 \Rightarrow \begin{cases} -15-k = 26 \\ -15-k=-26 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k=-41 \\ k=11 \end{cases}$

37. Comprueba si los siguientes triángulos son equiláteros, isósceles o escalenos:

a) $A(-2,\ 1)$, $B(0,\ 3)$ y $C(3,\ 7)$

b) $A\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $B\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$ y $C\left(1, \frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)$

a) $d(A,\ B) = \sqrt{2^2+2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ u, $d(B,\ C) = \sqrt{3^2+4^2} = \sqrt{25} = 5$ u y $d(C,\ A) = \sqrt{5^2+6^2} = \sqrt{61}$ u

Por tanto, se trata de un triángulo escaleno.

b) $d(A,\ B) = \sqrt{1^2+0^2} = 1$ u, $d(B,\ C) = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1$ u y $d(C,\ A) = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1$ u

Por tanto, se trata de un triángulo equilátero.

38. Calcula el área del triángulo determinado por *O*(0, 0) y las intersecciones de la recta $x + 2y = 4$ con los ejes.

El triángulo tiene por vértices *O*(0, 0),*A*(0, 2) y *B*(4, 0).

El área del triángulo es $A = \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2}$ con: $\text{base} = d(O, B) = 4$ u , $\text{altura} = d(O, A) = 2$ u

Por tanto, $A = \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2} = \frac{4 \cdot 2}{2} = 4 \text{ u}^2$

39. Calcula la medida de las alturas del triángulo de vértices *A*(4, 1),*B*(–1, 3) y *C*(0, 4).

$AB: 2x + 5y - 13 = 0$, $BC: x - y + 4 = 0$ y $AC: 3x + 4y - 16 = 0$, por tanto, las alturas miden:

$h_{AB} = d(C, AB) = \frac{|20 - 13|}{\sqrt{4 + 25}} = \frac{7}{\sqrt{29}} = \frac{7\sqrt{29}}{29}$ u $\qquad h_{BC} = d(A, BC) = \frac{|4 - 1 + 4|}{\sqrt{1 + 1}} = \frac{7}{\sqrt{2}} = \frac{7\sqrt{2}}{2}$ u

$h_{AC} = d(B, AC) = \frac{|-3 + 12 - 16|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{7}{5}$ u

40. Halla la distancia del punto *C*(10, 0) a la recta que pasa por *A*(–2, 3) y *B*(2, 2). ¿Cuál es la posición relativa de *A*, *B* y *C*?

La recta *AB* tiene vector director $\overrightarrow{AB} = (4, -1)$ y pasa por *A*, su ecuación es: $\frac{x + 2}{4} = \frac{y - 3}{-1} \Rightarrow x + 4y - 10 = 0$.

$d(C, AB) = \frac{|10 - 10|}{\sqrt{1 + 16}} = 0$ u , lo que significa que *C* pertenece a la recta *AB*, es decir, *A*, *B* y *C* están alineados.

41. Ejercicio resuelto.

42. Calcula el ángulo que forman las rectas:

a) *r*: $3x - 4y = 0$ y *s*: $2x + 2y + 3 = 0$ **b)** *r*: $y = x - 5$ y *s*: $y = 2x + 2$

a) Vectores normales: $\overrightarrow{n_r} = (3, -4)$ y $\overrightarrow{n_s} = (2, 2)$. Luego: $\cos\alpha = \cos(\widehat{r, s}) = \frac{|\overrightarrow{n_r} \cdot \overrightarrow{n_s}|}{|\overrightarrow{n_r}| \cdot |\overrightarrow{n_s}|} = \frac{2}{10\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{10} \Rightarrow \alpha = 81{,}87^\circ$

b) Las pendientes son $m_1 = 1$ y $m_2 = 2$, por tanto, $\text{tg}\alpha = \left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}\right| = \left|\frac{1 - 2}{1 + 2}\right| = \frac{1}{3} \Rightarrow \alpha = 18{,}43^\circ$.

43. Calcula el ángulo formado por *r*: $4x + 2y - 7 = 0$ y el eje *Y*.

Los vectores normales son $\overrightarrow{n_1} = (4, 2)$ y $\overrightarrow{n_2} = (1, 0)$, luego $\cos\alpha = \frac{|\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2}|}{|\overrightarrow{n_1}||\overrightarrow{n_2}|} = \frac{4}{2\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5} \Rightarrow \alpha = 26{,}57^\circ$

44. Calcula la recta perpendicular a *r* : $x + y - 3 = 0$ y que pasa por el punto *P*(–3, 3).

La pendiente de la recta *r* es $m = -1$, por tanto, la pendiente de una recta perpendicular a ella es $m' = 1$.

Así, la ecuación de la recta buscada es $y - 3 = x + 3 \Rightarrow y = x + 6$

45 y 46. Ejercicios resueltos.

47. Calcula el simétrico de *P*(–2, 3) respecto del punto *M*(1, –4).

Sea $P'(a, b)$ el punto buscado, M es el punto medio del segmento $\overline{PP'}$. Por tanto:

$$\left(\frac{-2+a}{2}, \frac{3+b}{2}\right) = (1, -4) \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{-2+a}{2} = 1 \\ \dfrac{3+b}{2} = -4 \end{cases} \Rightarrow a = 4,\ b = -11 \Rightarrow P'(4, -11)$$

48. Halla la recta simétrica del eje de ordenadas respecto de $y = x + 1$.

Calculamos el punto Q de intersección de ambas rectas ya que es el único invariante por la simetría: $Q(0, 1)$

Para calcular la recta simétrica indicada basta con determinar el simétrico P' de otro punto cualquiera, P, del eje de ordenadas, ya que la recta buscada quedará determinada por los puntos Q y P'.

Tomando $P(0, -1)$, la recta perpendicular a $y = x + 1$ que pasa por P es $y = -x - 1$.

Ambas rectas se cortan en $M(-1, 0)$ y M debe ser el punto medio del segmento $\overline{PP'}$, por lo que $P'(-2, 1)$.

Por lo tanto, la recta simétrica buscada es la que pasa por Q y P', cuya ecuación es $y = 1$.

49. Determina el triángulo simétrico del *k*(4, 0), *B*(–1, 6) y *C*(–1, –1) respecto de la simetría central con centro el origen de coordenadas.

El simétrico de un punto $P(a, b)$ respecto de la simetría central con centro $O(0, 0)$ es $P'(-a, -b)$.

Por tanto, los vértices del triángulo simétrico son $A'(-4, 0)$, $B'(1, -6)$ y $C'(1, 1)$.

50. Encuentra el triángulo simétrico del *A*(3, 0), *B*(0, 3) y *P*(–2, –2) respecto de la simetría axial con eje la recta $y = x$.

El simétrico de un punto $P(a, b)$ respecto de la simetría axial con eje la recta $y = x$ es $P'(b, a)$.

Por tanto, los vértices del triángulo simétrico son $A'(0, 3)$, $B'(3, 0)$ y $C'(-2, -2)$.

51. Halla el extremo *B* del segmento $\overline{AB}$ siendo *A*(2, 1) y sabiendo que la mediatriz del segmento es $r: x + 2y - 9 = 0$.

Sea $B(a, b)$, como la mediatriz es perpendicular a $\overrightarrow{AB} = (a - 2, b - 1)$, este vector debe ser proporcional a $\overrightarrow{n_r} = (1, 2)$. Además, el punto medio del segmento $\overline{AB}$ debe pertenecer a r, por tanto:

$$\begin{cases} \dfrac{a-2}{1} = \dfrac{b-1}{2} \\ \dfrac{2+a}{2} + 2\dfrac{1+b}{2} - 9 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a - b = 3 \\ a + 2b = 14 \end{cases} \Rightarrow a = 4,\ b = 5 \Rightarrow B(4, 5)$$

52. Ejercicio interactivo.

53. Halla la mediatriz del segmento de extremos *A*(–1, 3) y *B*(5, –3).

Los puntos $P(x, y)$ de la mediatriz verifican: $d(A, X) = d(B, X) \Rightarrow \sqrt{(x+1)^2 + (y-3)^2} = \sqrt{(x-5)^2 + (y+3)^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 + 2x + 1 + y^2 - 6y + 9 = x^2 - 10x + 25 + y^2 + 6y + 9 \Rightarrow x - y - 2 = 0$

54. Halla el punto de la recta *r*: *x* – 3*y* – 11 = 0 que equidista de los puntos *A*(–2, 3) y *B*(6, –1).

Los puntos que equidistan de A y B pertenecen a la mediatriz del segmento $\overline{AB}$, de ecuación:

$$\sqrt{(x+2)^2+(y-3)^2}=\sqrt{(x-6)^2+(y+1)^2}\Rightarrow x^2+4x+4+y^2-6y+9=x^2-12x+36+y^2+2y+1\Rightarrow 2x-y-3=0$$

Por tanto, el punto P buscado es la intersección de la mediatriz con r: $\begin{cases}x-3y-11=0\\2x-y-3=0\end{cases}\Rightarrow P\left(-\frac{2}{5},-\frac{19}{5}\right)$

55. Dadas las rectas *r*: *x* – 3*y* + 4 = 0 y *s*: *x* + *y* = 0, obtén sus bisectrices, comprueba que se cortan en el punto de intersección de *r* y *s* y que son perpendiculares.

Los puntos $P(x, y)$ de las bisectrices verifican:

$$d(P,r)=d(P,s)\Rightarrow\frac{|x-3y+4|}{\sqrt{10}}=\frac{|x+y|}{\sqrt{2}}\Rightarrow\frac{x-3y+4}{\sqrt{10}}=\pm\frac{x+y}{\sqrt{2}}\Rightarrow\begin{cases}b_1:\left(\sqrt{5}-1\right)x+\left(\sqrt{5}+3\right)y-4=0\\b_2:\left(\sqrt{5}+1\right)x+\left(\sqrt{5}-3\right)y+4=0\end{cases}$$

El punto de corte de las rectas es: $\begin{cases}x-3y+4=0\\x+y=0\end{cases}\Rightarrow x=-1,\ y=1\Rightarrow P(-1\quad 1)$

P verifica la ecuación de cada una de las bisectrices: $\begin{cases}\left(\sqrt{5}-1\right)(-1)+\left(\sqrt{5}+3\right)\cdot 1-4=-\sqrt{5}+1+\sqrt{5}+3-4=0\\\left(\sqrt{5}+1\right)(-1)+\left(\sqrt{5}-3\right)\cdot 1+4=-\sqrt{5}-1+\sqrt{5}-3+4=0\end{cases}$

Los vectores normales a b_1 y b_2 son, respectivamente, $\overrightarrow{n_1}=\left(\sqrt{5}-1,\sqrt{5}+3\right)$ y $\overrightarrow{n_2}=\left(\sqrt{5}+1,\sqrt{5}-3\right)$, que verifican $\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}=5-1+5-9=0$, por lo que ambas bisectrices son perpendiculares.

56. Halla los puntos de la recta *r* : *y* = –*x* + 6 que equidistan de las rectas *s*: 3*x* – *y* = 1 y *t* : 3*x* + *y* = 5.

Los puntos que equidistan de s y t son los pertenecientes a sus bisectrices, de ecuaciones:

$$\frac{|3x-y-1|}{\sqrt{10}}=\frac{|3x+y-5|}{\sqrt{10}}\Rightarrow 3x-y-1=\pm(3x+y-5)\Rightarrow\begin{cases}b_1:y=2\\b_2:x=1\end{cases}$$

Los puntos buscados son, por tanto, los puntos de corte de r con cada una de las bisectrices: $P_1(4, 2)$ y $P_2(1, 5)$.

57. Dado el triángulo de vértices *A*(5, 1), *B*(3, 7) y *C*(–2, 3):

a) Calcula el circuncentro. **b)** Calcula el incentro. **c)** Calcula el baricentro.

a) El circuncentro, T, es el punto de corte de las mediatrices del triángulo. Por tanto:

$$\begin{cases}\sqrt{(5-x)^2+(1-y)^2}=\sqrt{(3-x)^2+(7-y)^2}\\\sqrt{(5-x)^2+(1-y)^2}=\sqrt{(-2-x)^2+(3-y)^2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-4x+12y=32\\-14x+4y=-13\end{cases}\Rightarrow x=\frac{71}{38},\ y=\frac{125}{38}\Rightarrow T\left(\frac{71}{38},\frac{125}{38}\right)$$

b) El incentro, I, es es punto de corte de las bisectrices interiores del triángulo. Por tanto:

Recta AB: $3x+y-16=0$ Recta BC: $4x-5y+23=0$ Recta AC: $2x+7y-17=0$

$$\begin{cases}\frac{|3x+y-16|}{\sqrt{10}}=\frac{|4x-5y+23|}{\sqrt{41}}\\\frac{|3x+y-16|}{\sqrt{10}}=\frac{|2x+7y-17|}{\sqrt{53}}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(3\sqrt{53}+2\sqrt{10})x+(\sqrt{53}+7\sqrt{10})y=17\sqrt{10}+16\sqrt{53}\\(3\sqrt{41}+4\sqrt{10})x+(\sqrt{41}-5\sqrt{10})y=16\sqrt{41}-23\sqrt{10}\end{cases}\Rightarrow I(2{,}06;\ 3{,}82)$$

c) El baricentro, G, es el punto de corte de las mediatrices del triángulo. Por tanto:

Punto medio de AB: $M_1(4, 4)$ Punto medio de BC: $M_2\left(\frac{1}{2}, 5\right)$

$$\begin{cases}CM_1: x-6y+20=0\\AM_2: 8++9y-49=0\end{cases}\Rightarrow x=2,\ y=\frac{11}{3}\Rightarrow T\left(2,\frac{11}{3}\right)$$

58 a 65. Ejercicios resueltos.

EJERCICIOS

Ecuaciones de la recta

66. Para cada una de las siguientes rectas, indica si los puntos *P*(–2, 1) y *Q*(3, –1) pertenecen o no a ellas y calcula un punto más de cada una:

a) $r_1 : (x,\ y) = (7,\ -2) + \lambda(4,\ -1)$ **b)** $r_2 : \begin{cases} x = -2+\lambda \\ y = 1+2\lambda \end{cases}$ **c)** $r_3 : 2x + 5y = 1$ **d)** $r_4 : \dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y-2}{5}$

a) Sustituyendo las coordenadas de ambos puntos en la ecuación, se tiene:

$$(-2,\ 1) = (7,\ -2) + \lambda(4,\ -1) \Rightarrow \begin{cases} -2 = 7+4\lambda \\ 1 = -2-\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = -\dfrac{9}{4} \\ \lambda = -3 \end{cases} \Rightarrow P \notin r_1$$

$$(3,\ -1) = (7,\ -2) + \lambda(4,\ -1) \Rightarrow \begin{cases} 3 = 7+4\lambda \\ -1 = -2-\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = -1 \\ \lambda = -1 \end{cases} \Rightarrow Q \in r_1$$

Para calcular un punto más, basta dar valor a λ, por ejemplo, tomando $\lambda = 0$ obtenemos el punto *R*(7, –2)

b) Sustituyendo las coordenadas de ambos puntos en las ecuaciones, se tiene:

$$\begin{cases} -2 = -2+\lambda \\ 1 = 1+2\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 0 \\ \lambda = 0 \end{cases} \Rightarrow P \in r_2 \qquad \begin{cases} 3 = -2+\lambda \\ -1 = 1+2\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 5 \\ \lambda = -1 \end{cases} \Rightarrow Q \notin r_2$$

Para calcular un punto más, basta dar valor a λ, por ejemplo, tomando $\lambda = 1$ obtenemos el punto *R*(–1, 3)

c) Sustituyendo las coordenadas de ambos puntos en la ecuación, se tiene:

$2(-2) + 5\cdot 1 = 1 \Rightarrow P \in r_3$ $\quad 2\cdot 3 + 5(-1) = 1 \Rightarrow Q \in r_3$ Otro punto de la recta es, por ejemplo, *R*(–7, 3)

d) Sustituyendo las coordenadas de ambos puntos en la ecuación, se tiene:

$$\frac{-2+1}{2} \neq \frac{1-2}{5} \Rightarrow P \notin r_4 \qquad \frac{3+1}{2} \neq \frac{-1-2}{5} \Rightarrow Q \notin r_4$$

67. Obtén la ecuación vectorial y las ecuaciones paramétricas de cada una de las siguientes rectas.

a) La recta que pasa por el punto *P*(–3, 1) y lleva la dirección del vector $\vec{u} = (-1,\ -2)$.

b) La recta que pasa por los puntos *A*(2, –3) y *B*(1, 4).

c) La recta que tiene como uno de sus vectores de dirección el $\vec{u} = (-3,\ 3)$ y corta a la parte positiva del eje de abscisas en un punto que dista 3 unidades del origen de coordenadas.

d) La recta que tiene como vector director el $\vec{u} = (2,\ -5)$ y corta a la parte negativa del eje de abscisas en un punto que dista 2 unidades del origen de coordenadas.

e) La recta que tiene por dirección la del vector $\vec{u} = (3,\ 7)$ y corta a la parte negativa del de abcisas en un punto que dista 2 unidades a la izquierda del origen de coordenadas.

a) E. vectorial: $r : (x,\ y) = (-3,\ 1) + \lambda(-1,\ -2)$ E. paramétricas: $r : \begin{cases} x = -3-\lambda \\ y = 1-2\lambda \end{cases}$

b) Vector director: $\overline{AB} = (-1,\ 7)$ E. vectorial: $r : (x,\ y) = (2,\ -3) + \lambda(-1,\ 7)$ E. paramétricas: $r : \begin{cases} x = 2-\lambda \\ y = -3+7\lambda \end{cases}$

c) E. vectorial: $r : (x,\ y) = (3,\ 0) + \lambda(-3,\ 3)$ E. paramétricas: $r : \begin{cases} x = 3-3\lambda \\ y = 3\lambda \end{cases}$

d) E. vectorial: $r : (x,\ y) = (-2,\ 0) + \lambda(2,\ -5)$ E. paramétricas: $r : \begin{cases} x = -2+2\lambda \\ y = -5\lambda \end{cases}$

e) E. vectorial: $r : (x,\ y) = (-2,\ 0) + \lambda(3,\ 7)$ E. paramétricas: $r : \begin{cases} x = -2+3\lambda \\ y = 7\lambda \end{cases}$

68. Para cada una de las siguientes rectas, determina la ecuación continua y la ecuación general.

a) Pasa por el punto $A(-3, -4)$ y tiene la dirección del vector $\vec{u} = (1, -2)$.

b) Pasa por los puntos $P(2, -5)$ y $Q(5, 1)$.

c) Pasa por el origen de coordenadas y por el punto $B(-3, 4)$.

d) Pasa por el origen de coordenadas y por el punto medio del segmento de extremos $M(1, -3)$ y $N(5, 2)$.

e) Pasa por el punto $P(-2, 7)$ y es perpendicular al segmento de extremos $M(-1, -3)$ y $N(0, 4)$.

a) Ecuación continua: $\dfrac{x+3}{1} = \dfrac{y+4}{-2}$ Ecuación general: $-2x - 6 = y + 4 \Rightarrow 2x + y + 10 = 0$

b) Ecuación continua: $\dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y+5}{6}$ Ecuación general: $6x - 12 = 3y + 15 \Rightarrow 2x - y - 9 = 0$

c) Ecuación continua: $\dfrac{x}{-3} = \dfrac{y}{4}$ Ecuación general: $4x + 3y = 0$

d) El punto medio del segmento $\overline{MN}$ es $P\left(3, -\dfrac{1}{2}\right)$

Ecuación continua: $\dfrac{x}{3} = \dfrac{y}{-\frac{1}{2}}$ Ecuación general: $-\dfrac{1}{2}x = 3y \Rightarrow x + 6y = 0$

e) Vector normal: $\vec{n} = \overrightarrow{MN} = (1, 7)$ Vector director: $\vec{u} = (7, -1)$

Ecuación continua: $\dfrac{x+2}{7} = \dfrac{y-7}{-1}$ Ecuación general: $-x - 2 = 7y - 49 \Rightarrow x + 7y - 47 = 0$

69. Halla un vector director y otro normal a cada una de las siguientes rectas.

a) $r: -2x + 3y = 5$

b) $s: x - \dfrac{3}{2}y + 1 = 0$

c) Pasa por los puntos $A(2, -5)$ y $B(-5, -1)$.

d) Pasa por $O(0, 0)$ y por el punto medio del segmento $\overline{AB}$ con $A(2, 6)$ y $B(-2, -4)$.

e) Mediatriz del segmento de extremos $P(3, 5)$ y $Q(5, 2)$.

a) Vector normal: $\vec{n} = (-2, 3)$ Vector director: $\vec{u} = (3, 2)$

b) Vector normal: $\vec{n} = \left(1, -\dfrac{3}{2}\right)$ Vector director: $\vec{u} = \left(\dfrac{3}{2}, 1\right)$

c) Vector director: $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = (-7, 4)$ Vector normal: $\vec{n} = (4, 7)$

d) El punto medio del segmento es $M(0, 1)$

Vector director: $\vec{u} = \overrightarrow{MO} = (0, -1)$ Vector normal: $\vec{n} = (1, 0)$

e) Vector normal: $\vec{n} = \overrightarrow{PQ} = (2, -3)$ Vector director: $\vec{u} = (3, 2)$

70. Obténlas ecuaciones de los lados del triángulo de vértices *P*(1, 3), *Q*(–4, 0) y *R*(–2, –1). Para cada lado, halla un vector de dirección y otro normal.

Lado *PQ*. Un vector de dirección es $\vec{u} = \overline{PQ} = (-5, -3)$. Un vector normal es $\vec{n} = (3, -5)$.

La ecuación es $\dfrac{x-1}{-5} = \dfrac{y-3}{-3} \Rightarrow -3x+3 = -5y+15 \Rightarrow 3x-5y+12=0$

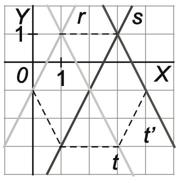
Lado *QR*. Un vector de dirección es $\vec{u} = \overline{QR} = (2, -1)$. Un vector normal es $\vec{n} = (1, 2)$.

La ecuación es $\dfrac{x+4}{2} = \dfrac{y-0}{-1} \Rightarrow -x-4 = 2y \Rightarrow x+2y+4=0$

Lado *PR* .Un vector de dirección es $\vec{u} = \overline{PR} = (-3, -4)$. Un vector normal es $\vec{n} = (4, -3)$.

La ecuación es $\dfrac{x-1}{-3} = \dfrac{y-3}{-4} \Rightarrow -4x+4 = -3y+9 \Rightarrow 4x-3y+5=0$

71. Halla las ecuaciones punto-pendiente de las rectas *r*, *s*, *t* y *t′* de la figura.



La recta *r* pasa por P_1 (1, 1) y tiene pendiente $m_1 = 2$, así, su ecuación punto- pendiente es $y-1 = 2(x-1)$.

La recta *s* pasa por P_2 (3, 1) y tiene pendiente $m_2 = 2$, así, su ecuación punto- pendiente es $y-1 = 2(x-3)$.

La recta *t* pasa por P_3 (1, 1) y tiene pendiente $m_3 = -2$, así, su ecuación punto- pendiente es $y-1 = -2(x-1)$.

La recta *t′* pasa por P_4 (3, 1) y tiene pendiente $m_4 = -2$, así, su ecuación punto- pendiente es $y-1 = -2(x-3)$.

72. Halla las ecuaciones paramétricas de las rectas:

a) $r: y = -2x+3$ **b)** $s: 4x+3y-6=0$ **c)** $t: \dfrac{1}{2}x + \dfrac{3}{4}y - 1 = 0$ **d)** $w: \dfrac{x-4}{2} = \dfrac{y+5}{3}$

e) La recta que pasa por el origen de coordenadas y tiene de pendiente $m = -2$.

f) La recta que pasa por *P*(–4 ,3) y es paralela a *r*: $x - y + 3 = 0$.

a) La recta pasa por *P*(0, 3), vector director $\vec{u} = (1, -2)$ .Las ecuaciones son: $r: \begin{cases} x = \lambda \\ y = 3 - 2\lambda \end{cases}$

b) La recta pasa por *P*(0, 2), vector normal $\vec{n} = (4, 3)$ y director $\vec{u} = (-3, 4)$ .Las ecuaciones son: $s: \begin{cases} x = -3\lambda \\ y = 2 + 4\lambda \end{cases}$

c) La recta pasa por *P*(2, 0), vector normal $\vec{n} = \left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{4}\right) \simeq (2, 3)$ y director $\vec{u} = (-3, 2)$. Ecuaciones: $t: \begin{cases} x = 2 - 3\lambda \\ y = 2\lambda \end{cases}$

d) La recta pasa por *P*(4, –5), vector director $\vec{u} = (2, 3)$. Las ecuaciones son: $w: \begin{cases} x = 4 + 2\lambda \\ y = -5 + 3\lambda \end{cases}$

e) La recta pasa por *O*(0, 0), vector director $\vec{u} = (1, -2)$. Las ecuaciones son: $r: \begin{cases} x = \lambda \\ y = -2\lambda \end{cases}$

f) La recta pasa por *P*(–4 ,3), vector normal $\vec{n} = (1, -1)$ y director $\vec{u} = (1, 1)$ .Las ecuaciones son: $r: \begin{cases} x = -4 + \lambda \\ y = 3 + \lambda \end{cases}$

73. Determina la ecuación normal y la ecuación general de la recta que tiene a $\vec{n} = (-1, 3)$ como vector normal y pasa por el origen de coordenadas.

La ecuación normal es $-1(x-0)+3(y+0)=0$.

La ecuación general es $-x+3y=0$.

74. Encuentra la ecuación normal y la ecuación general de la recta que tiene a $\vec{n} = (2, 4)$ como vector normal y pasa por el punto medio del segmento $\overline{AB}$ siendo $A(0, -2)$ y $B(-3, 0)$.

El punto medio del segmento AB es $M\left(-\frac{3}{2}, -1\right)$

La ecuación normal es $2\left(x+\frac{3}{2}\right)+4(y+1)=0$

La ecuación general es $2x+4y+7=0$

75. Calcula la pendiente de las siguientes rectas:

a) $r: y = -2x+3$

b) $r: 2x-3y+5=0$

c) $r: -\frac{3}{2}x+\frac{1}{5}y-5=0$

d) Recta que pasa por los puntos $P(-1, 2)$ y $Q(1, 3)$.

e) Recta que pasa por los puntos $P(1, a)$ y $Q(1, 3a)$.

f) Recta cuyo vector director es $\vec{u} = (-3, 5)$.

g) Recta cuyo vector normal es $\vec{n} = (2, -7)$.

h) $r: \begin{cases} x = -3+5\lambda \\ y = -1+2\lambda \end{cases}$

a) $m = -2$

b) $2x-3y+5=0 \Rightarrow y = \frac{2}{3}x+\frac{5}{3} \Rightarrow m = \frac{2}{3}$

c) $-\frac{3}{2}x+\frac{1}{5}y-5=0 \Rightarrow y = \frac{15}{2}x+25 \Rightarrow m = \frac{15}{2}$

d) El vector director es $\vec{u} = \overrightarrow{PQ} = (2, 1)$, por tanto, la pendiente es $m = \frac{1}{2}$

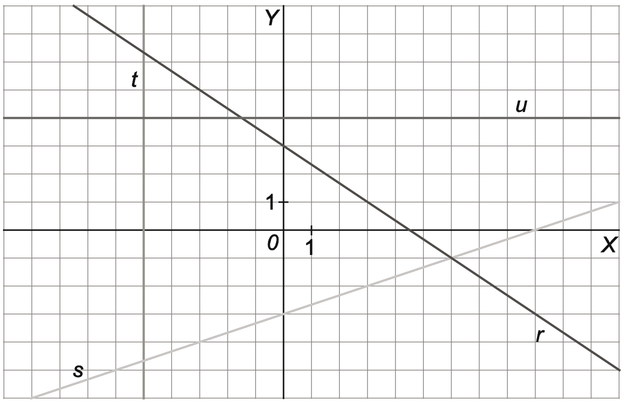
e) El vector director es $\vec{u} = \overrightarrow{PQ} = (0, 2a)$, la recta es vertical si $a \neq 0$ (si $a = 0$ no hay recta) y por tanto, como $m = \frac{2a}{0}$ tiene pendiente infinita.

f) $m = -\frac{5}{3}$

g) El vector director es $\vec{u} = (7, 2)$, por tanto, la pendiente es $m = \frac{2}{7}$

h) El vector director es $\vec{u} = (5, 2)$, por tanto, la pendiente es $m = \frac{2}{5}$

76. Indica el valor de las pendientes y de las ordenadas en el origen de las rectas de la figura y determina, para cada una de ellas, su ecuación general.



Recta r:

$m=-\frac{2}{3}$, $n=3 \Rightarrow y=-\frac{2}{3}x+3 \Rightarrow 2x+3y-9=0$

Recta s:

$m=\frac{1}{3}$, $n=-3 \Rightarrow y=\frac{1}{3}x-3 \Rightarrow x-3y-9=0$

Recta t:

$m=\infty$, no tiene ordenada en el origen $\Rightarrow x+5=0$

Recta u: $m=0$, $n=4 \Rightarrow y-4=0$

77. Halla la ecuación explícitade la recta que pasa por el punto *P*(–2, –5) y forma con la parte positiva del eje de ordenadas un ángulo de 60º.

La recta forma un ángulo de 30º con la parte positive del eje de abscisas, por lo que su pendiente es m=tg (30º) $=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

La ecuación explícita es: $y+5=\frac{\sqrt{3}}{3}(x+2) \Rightarrow y=\frac{\sqrt{3}}{3}x+\frac{2\sqrt{3}-15}{3}$

78. Determina la ecuación de la recta paralela a la bisectriz del primer cuadrante que pasa por el punto *P*(–6, –7).

La pendiente es $m=1$, por tanto, la ecuación es: $y+7=x+6 \Rightarrow y=x-1$

79. Obtén la ecuación normal de la recta que pasa por el punto *P*(3, –1) y tiene por vector director $\vec{v}=(-2,3)$.

La recta tiene vector normal $\vec{n}=(3,2)$, por tanto, su ecuación normal es: $3(x-3)+2(y+1)=0$

80. Obténlas ecuaciones explícitas de las rectas siguientes.

a) Pasa por $A(-1, 2)$ y tiene pendiente $m=2$.

b) Pasa por los puntos $A(-1, 3)$ y $B(2, 4)$.

c) Pasa por $A(2, 3)$ y forma con la parte derecha del eje de abscisas un ángulo de 30º.

d) Pasa por $A(-2, 5)$ y forma con la parte izquierda del eje de abscisas un ángulo de 120º.

a) $y-2=2(x+1) \Rightarrow y=2x+4$

b) El vector director es $\vec{u}=\overrightarrow{AB}=(3,1)$, la ecuación explícita es: $\frac{x+1}{3}=\frac{y-3}{1} \Rightarrow x+1=3y-9 \Rightarrow y=\frac{1}{3}x+\frac{10}{3}$

c) La pendiente es $m=\text{tg }(30º)=\frac{\sqrt{3}}{3}$, la ecuación explícita es: $y-3=\frac{\sqrt{3}}{3}(x-2) \Rightarrow y=\frac{\sqrt{3}}{3}x+\frac{9-2\sqrt{3}}{3}$

d) La recta forma un ángulo de 60º con la parte derecha del eje de abscisas, por lo que tiene pendiente $m=\text{tg }(60º)=\sqrt{3}$, por tanto, la ecuación explícita es: $y-5=\sqrt{3}(x+2) \Rightarrow y=\sqrt{3}x+\left(2\sqrt{3}+5\right)$.

81. Determina las ecuaciones paramétricas, la ecuación general y la ecuación explícita de la recta *r* en los siguientes casos.

a) Pasa por el punto $P(-3, 6)$ y es paralela a la recta de ecuación $-2x + 3y - 5 = 0$.

b) Corta a los ejes coordenados en los puntos $P(0, -3)$ y $Q(-1, 0)$.

c) Corta al eje de abscisas en el punto $P(2, 0)$ y pasa por el punto $Q(-2, 2)$.

a) La recta tiene vector director $\vec{u} = (3, 2)$, por tanto:

Ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x = -3 + 3\lambda \\ y = 6 + 2\lambda \end{cases}$

Ecuación general: $\frac{x+3}{3} = \frac{y-6}{2} \Rightarrow 2x + 6 = 3y - 18 \Rightarrow 2x - 3y + 24 = 0$

Ecuación explícita: $y = \frac{2}{3}x + 8$

b) La recta tiene vector director $\vec{u} = \overrightarrow{PQ} = (-1, 3)$, por tanto:

Ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x = -\lambda \\ y = -3 + 3\lambda \end{cases}$

Ecuación general: $\frac{x}{-1} = \frac{y+3}{3} \Rightarrow 3x + y + 3 = 0$

Ecuación explícita: $y = -3x - 3$

c) La recta tiene vector director $\vec{u} = \overrightarrow{PQ} = (-4, 2)$, por tanto:

Ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x = 2 - 4\lambda \\ y = 2\lambda \end{cases}$

Ecuación general: $\frac{x-2}{-4} = \frac{y}{2} \Rightarrow 2x + 4y - 4 = 0$

Ecuación explícita: $y = -\frac{1}{2}x + 1$

Posiciones relativas de rectas

82. Indica la pendiente de todas las rectas paralelas a la recta que pasa por los puntos *P*(1, 2) y *Q*(–1, –7).

Las rectas tienen vector director $\vec{u} = \overrightarrow{PQ} = (-2, -9)$, por tanto, tienen pendiente $m = \frac{9}{2}$.

83. Calcula la ecuación de la recta que pasa por el punto *P*(2, 6) y es paralela a $r: \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -1 - t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$.

La recta buscada tiene vector director $\vec{u} = (2, -1)$, por tanto, su ecuación es:

$$\frac{x-2}{2} = \frac{y-6}{-1} \Rightarrow -x + 2 = 2y - 12 \Rightarrow x + 2y - 14 = 0$$

84. Estudia las posiciones relativas de los siguientes pares de rectas.

a) $r:\begin{cases} x=1+\lambda \\ y=1-\lambda \end{cases}$ $s:\begin{cases} x=\dfrac{3+t}{2} \\ y=\dfrac{1-t}{2} \end{cases}$

b) $r: 3x-2y=7$ $s: 2x-3y=8$

c) $r: x+y=7$ $s: -\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}y+\frac{7}{2}=0$

d) $r:\begin{cases} x=1+\lambda \\ y=-2-2\lambda \end{cases}$ $s: 4x+y-8=0$

e) $r: y=-2x+3$ $s: y=\frac{x}{2}$

f) $r: 2x-y-5=0$ $s: -\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}y-5=0$

a) Los vectores directores son $\overrightarrow{u_r}=(1,-1)$ y $\overrightarrow{u_s}=\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$. Como son proporcionales y el punto $P(1, 1)$ pertenece a ambas rectas, las rectas son coincidentes.

b) $\frac{3}{2}\neq\frac{-2}{-3}\Rightarrow$ Las rectas son secantes.

c) La ecuación de s se puede escribir como $x + y - 7 = 0$, que es la misma ecuación de r, por lo que las rectas son coincidentes.

d) Los vectores directores son $\overrightarrow{u_r}=(1,-2)$ y $\overrightarrow{u_s}=(-1, 4)$. Como no son proporcionales, las rectas son secantes.

e) Las pendientes son $m_r=-2$ y $m_s=\frac{1}{2}$. Como son distintas, las rectas son secantes, y como $m_r\cdot m_s=-1$ son perpendiculares.

f) $\dfrac{2}{-\frac{2}{3}}=\dfrac{-1}{\frac{1}{3}}\neq\dfrac{-5}{-5}\Rightarrow$ Las rectas son paralelas.

85. Calcula el punto de intersección de los siguientes pares de rectas secantes.

a) $r:\begin{cases} x=2-3\lambda \\ y=1+\lambda \end{cases}$ $s:\begin{cases} x=1-4\mu \\ y=2+2\mu \end{cases}$

b) $r: 2x-5y=-\frac{23}{2}$ $s: 3x-4y=-12$

c) $r: \frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1$ $s: -\frac{x}{8}+\frac{2y}{3}+\frac{3}{2}=0$

d) $r:\begin{cases} x=2-3\lambda \\ y=-2+2\lambda \end{cases}$ $s: 2x-y-6=0$

a) $\begin{cases} 2-3\lambda=1-4\mu \\ 1+\lambda=2+2\mu \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} -3\lambda+4\mu=-1 \\ \lambda-2\mu=1 \end{cases}\Rightarrow\lambda=-1,\ \mu=-1\Rightarrow$ El punto de intersección es $P(5, 0)$

b) $\begin{cases} 2x-5y=-\frac{23}{2} \\ 3x-4y=-12 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} 4x-10y=-23 \\ 3x-4y=-12 \end{cases}\Rightarrow x=-2,\ y=\frac{3}{2}\Rightarrow$ El punto de intersección es $P\left(-2,\frac{3}{2}\right)$

c) $\begin{cases} \frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1 \\ -\frac{x}{8}+\frac{2y}{3}+\frac{3}{2}=0 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} 3x+2y=6 \\ -3x+16y=-36 \end{cases}\Rightarrow x=\frac{28}{9},\ y=-\frac{5}{3}\Rightarrow$ El punto de intersección es $P\left(\frac{28}{9},-\frac{5}{3}\right)$

d) $2(2-3\lambda)+2-2\lambda-6=0\Rightarrow -8\lambda=0\Rightarrow\lambda=0\Rightarrow$ El punto de intersección es $P(2, -2)$

86. Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto de intersección de las rectas *r*: 2*x* − 3*y* + 1 = 0 y *s*: 4*x* + *y* − 3 = 0 y corta al eje de abscisas en el punto *P*(4, 0).

$\begin{cases} 2x-3y+1=0 \\ 4x+y-3=0 \end{cases}\Rightarrow x=\frac{4}{7},\ y=\frac{5}{7}\Rightarrow r$ y s se cortan en el punto $Q\left(\frac{4}{7},\frac{5}{7}\right)$. El vector director de la recta buscada es $\vec{u}=\overrightarrow{PQ}=\left(-\frac{24}{7},\frac{5}{7}\right)\simeq(-24, 5)$, por tanto, su ecuación es: $\frac{x-4}{-24}=\frac{y-0}{5}\Rightarrow 5x-20=-24y\Rightarrow 5x+24y-20=0$

87. Encuentra la ecuación de las siguientes rectas paralelas a una dada.

a) Paralela a $2x+5y-5=0$ y que pasa por el punto $A(-2, 6)$.

b) Paralela al eje de abscisas y que pasa por el punto $A(-1, 4)$.

c) Paralela al eje de ordenadas y que pasa por le punto $A(-1, 4)$.

d) Paralela a $r: 2x-y+12=0$ y que pasa por el origen de coordenadas.

e) Paralela a $r: \begin{cases} x=-1+3t \\ y=5+t \end{cases}$ y que pasa por el punto $P(-2, 4)$.

f) Paralela a $r: \begin{cases} x=-2+2t \\ y=1 \end{cases}$ y que pasa por el punto $P(-2, -2)$.

g) Paralela a la bisectriz del primer cuadrante y que tiene ordenada en el origen igual a 5.

a) La recta es de la forma $2x+5y+k=0$. Como pasa por A, ha de ser $-4+30+k=0 \Rightarrow k=-26$. Por tanto, la ecuación buscada es $2x+5y-26=0$.

b) La recta es $y=4$.

c) La recta es $x=-1$.

d) La recta es de la forma $2x-y+k=0$. Como pasa por (0, 0) tenemos $k=0$. Luego la ecuación es $2x-y=0$.

e) La recta tiene vector director $\vec{u}=(3, 1)$, así, su ecuación es: $\frac{x+2}{3}=\frac{y-4}{1} \Rightarrow x+2=3y-12 \Rightarrow x-3y+14=0$.

f) La recta tiene la misma dirección que la dada, luego $\begin{cases} x=-2+2t \\ y=-2 \end{cases} \Rightarrow y=-2$.

g) La pendiente de la recta es $m = 1$ y la ordenada en el origen $n = 5$. Luego la recta es $y = x + 5$.

88. Obtén la ecuación de las siguientes rectas.

a) Perpendicular a $x - 2y - 3 = 0$ y que pasa por el punto $A(2, -1)$.

b) Perpendicular al eje de abscisas y que pasa por el punto $A(-4, 8)$.

c) Perpendicular al eje de ordenadas y que pasa por el punto $A(-1, 3)$.

d) Perpendicular a r: $3x - 3y + 1 = 0$ y que pasa por el origen de coordenadas.

e) Perpendicular a $r: \begin{cases} x=-1+2t \\ y=5+t \end{cases}$ y que pasa por el punto $P(-1, 0)$.

f) Perpendicular al segmento $\overline{AB}$ con $A(-1, -3)$ y $B(2, -5)$ y que pasa por $P(-3, 2)$.

a) La recta tiene vector director $\vec{u}=(1, -2)$, así, su ecuación es: $\frac{x-2}{1}=\frac{y+1}{-2} \Rightarrow -2x+4=y+1 \Rightarrow 2x+y-3=0$.

b) La recta es vertical y pasa por A, por tanto, su ecuación es: $x = -4$.

c) La recta es horizontal y pasa por A, por tanto, su ecuación es: $y = 3$.

d) La recta tiene vector director $\vec{u}=(3, -3)$, así, su ecuación es: $\frac{x}{3}=\frac{y}{-3} \Rightarrow 3x+3y=0 \Rightarrow x+y=0$.

e) La recta tiene vector normal $\vec{n}=(2, 1)$, así, su ecuación es: $2(x+1)+1(y-0) \Rightarrow 2x+y+2=0$.

f) La recta tiene vector normal $\vec{n}=\overrightarrow{AB}=(3, -2)$, así, su ecuación es: $3(x+3)-2(y-2) \Rightarrow 3x-2y+13=0$.

89. En cada caso, calcula el valor del parámetro *k* para que las rectas tengan la posición relativa indicada.

a) $r: x - ky + 1 = 0$; $s: kx - 4y - 3 = 0$, paralelas.

b) $r: kx - 2y - 4k = 0$; $s: x - 3y - 4 = 0$, coincidentes.

c) $r: 2kx + 5y - 1 = 0$; $s: 3x - ky + 2 = 0$, paralelas.

a) Ha de verificarse que $\frac{1}{k} = \frac{-k}{-4} \neq \frac{1}{-3} \Rightarrow k^2 = 4 \Rightarrow k = \pm 2$.

b) Ha de verificarse que $\frac{k}{1} = \frac{-2}{-3} = \frac{-4k}{-4} \Rightarrow k = \frac{2}{3}$.

c) Ha de verificarse que $\frac{2k}{3} = \frac{5}{-k} \neq \frac{-1}{2} \Rightarrow 2k^2 = -15 \Rightarrow$ Imposible, luego no pueden ser paralelas.

90. Halla para qué valor de *b*, la recta $x - by = -4b - 1$ es coincidente con la recta que pasa por los puntos *P*(–1, 4) y *Q*(2, 3).

La recta dada debe pasar por P y Q, luego $\begin{cases} -1 - 4b = -4b - 1 \\ 2 - 3b = -4b - 1 \end{cases} \Rightarrow b = -3$, así, la recta es $x + 3y - 11 = 0$.

91. Halla el valor de *k* para que sean paralelas las rectas $r: (2k - 2)x - y + 2k = 0$ y $s: (k - 1)x + (k + 1)y - 17 = 0$. Para los valores hallados, obtén la ecuación de la recta paralela a *r* y *s* que pasa por el origen de coordenadas.

Para que sean paralelas tiene que suceder que $\frac{2k-2}{k-1} = \frac{-1}{k+1} \Rightarrow 2k^2 + k - 3 = 0 \Rightarrow k = 1,\ k = -\frac{3}{2}$.

En el primer caso la recta paralela que pasa por el origen es $y = 0$, en el segundo caso es $5x + y = 0$.

92. Dadas las rectas:

$r: (k - 1)x - 2y + 2k = 0$ $s: (3k - 4)x + y + k^2 = 0$

Encuentra los valores de *k* para que sean perpendiculares. Para los valores hallados, calcula el punto de intersección de las rectas.

Los vectores directores de las rectas son $\vec{u_r} = (2,\ k - 1)$ y $\vec{u_s} = (1,\ 4 - 3k)$, que han de ser perpendiculares. Así:

$$2 + (k-1)(4-3k) = 0 \Rightarrow -3k^2 + 7k - 2 = 0 \Rightarrow k = \frac{1}{3},\ k = 2$$

Para $k = \frac{1}{3}$, $\begin{cases} r: \frac{-2}{3}x - 2y + \frac{2}{3} = 0 \\ s: -3x + y + \frac{1}{9} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 3y = 1 \\ 27x - 9y = 1 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{2}{15}, y = \frac{13}{45}$. El punto de intersección es $P\left(\frac{2}{15}, \frac{13}{45}\right)$.

Para $k = 2$, $\begin{cases} r: x - 2y + 4 = 0 \\ s: 2x + y + 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 2y = -4 \\ 4x + 2y = -8 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{-12}{5}, y = \frac{4}{5}$. El punto de intersección es $P\left(-\frac{12}{5}, \frac{4}{5}\right)$.

93. Halla los valores de *m* y *n* para que sean perpendiculares las rectas $r: x - my + 2n = 0$ y $s: 2mx + ny + 1 = 0$, sabiendo que el punto *P*(0, 2) pertenece a la recta *r*. Para los valores hallados, encuentra el punto de intersección de *r* y *s*.

Los vectores directores de las rectas son $\vec{u_r} = (m,\ 1)$ y $\vec{u_s} = (-n,\ 2m)$, que han de ser perpendiculares. Así:

$$\begin{cases} -mn + 2m = 0 \\ -2m + 2n = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = n = 0 \text{ Imposible} \\ m = n = 2 \end{cases}$$

El punto P de intersección es: $\begin{cases} x - 2y + 4 = 0 \\ 4x + 2y + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = -1,\ y = \frac{3}{2} \Rightarrow P\left(-1, \frac{3}{2}\right)$

Haz de rectas

94. Calcula la ecuación del haz de rectas secantes de vértice el punto *P*(–2, 3). Encuentra la recta de este haz que tiene pendiente $m = -\frac{1}{2}$.

La ecuación del haz es $y - 3 = m(x+2)$. Si $m = -\frac{1}{2} \Rightarrow y - 3 = -\frac{1}{2}(x+2) \Rightarrow 2y - 6 = -x - 2 \Rightarrow x + 2y - 4 = 0$.

95. Determina la ecuación del haz determinado por las rectas secantes *r*: *y* = 2*x* – 3 y *s*: *y* = 3*x* – 5 y halla su vértice y la recta de este haz que pasa por el punto *P*(–2, 2).

La ecuación del haz es: $2x - y - 3 + \lambda(3x - y - 5) = 0$. Vértice: $\begin{cases} y = 2x - 3 \\ y = 3x - 5 \end{cases} \Rightarrow x = 2,\ y = 1 \Rightarrow V(2, 1)$

Si la recta pasa por *P*, se tiene que $-4 - 2 - 3 + \lambda(-6 - 2 - 5) = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{9}{13}$. Por tanto, la recta buscada es:

$2x - y - 3 - \frac{9}{13}(3x - y - 5) = 0 \Rightarrow 26x - 13y - 39 - 27x + 9y + 45 = 0 \Rightarrow x + 4y - 6 = 0$

96. Halla la ecuación del haz determinado por las rectas secantes *r* : 2*x* + *y* = 0 y *s* : 3*x* – 2*y* = 0 y calcula su vértice y la recta de este haz que tiene pendiente $m = -\frac{2}{3}$.

La ecuación del haz es: $2x + y + \lambda(3x - 2y) = 0$. Vértice: $\begin{cases} 2x + y = 0 \\ 3x - 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 0,\ y = 0 \Rightarrow V(0, 0)$

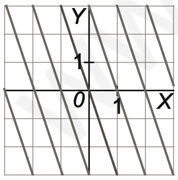
La recta buscada tiene pendiente $m = -\frac{2}{3}$ y pasa por *V*, por tanto, su ecuación es: $y = -\frac{2}{3}x \Rightarrow 2x + 3y = 0$.

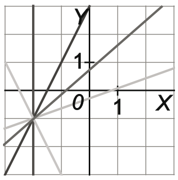
97. Escribe, en una sola ecuación dependiente de un parámetro, todas las rectas paralelas a la recta de ecuación *r* : –2*x* + 3*y* – 5 = 0 y elige, de entre ellas, la que pasa por *P*(–1, 3).

Todas las rectas paralelas a la dada son de la forma $-2x + 3y + K = 0$.

De ellas, la que pasa por *P* verifica $2 + 9 + K = 0 \Rightarrow K = -11$, por tanto, su ecuación es: $-2x + 3y - 11 = 0$.

98. Determina las ecuaciones de los haces de las siguientes figuras.

a) 

b) 

Halla en cada uno de los haces anteriores la recta que pasa por el punto *P*(–1, –2)

a) Es un haz de rectas paralelas de pendiente $m = -3$, por tanto, su ecuación es: $3x + y + K = 0$.

De ellas, la que pasa por *P* verifica $-3 - 2 + K = 0 \Rightarrow K = 5$, por tanto, su ecuación es: $3x + y + 5 = 0$.

b) Es un haz de rectas secantes de vértice *V*(–2, –1), por tanto, su ecuación es: $y + 1 = m(x+2)$.

De ellas, la que pasa por *P* verifica $-2 + 1 = m(-1+2) \Rightarrow m = -1$, por tanto, su ecuación es:

$y + 1 = -(x+2) \Rightarrow x + y + 3 = 0$.

99. Encuentra la expresión que representa a todas las rectas que tienen pendiente $m = -2$ y di cuál de ellas pasa por el origen de coordenadas.

Las rectas con pendiente $m = -2$ son de la forma $y = -2x + n$. La que pasa por el origen tiene ecuación $y = -2x$.

100. Escribe, en una sola ecuación dependiente de un parámetro, todas las rectas perpendiculares a $r: 3x - 2y + 12 = 0$ y elige, de entre ellas, la que pasa por $P(1, -1)$.

La pendiente de r es $m = \frac{3}{2}$, por tanto, las rectas perpendiculares a r tienen pendiente $m = -\frac{2}{3}$, es decir, son de la forma $y = -\frac{2}{3}x + n$. La que pasa por P verifica $-1 = -\frac{2}{3} + n \Rightarrow n = -\frac{1}{3}$, por tanto su ecuación es: $y = -\frac{2}{3}x - \frac{1}{3}$.

Distancias y ángulos

101. Calcula la distancia entre los puntos A y B:

a) $A(2, -3)$ y $B(-2, 5)$

b) $A\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$ y $B\left(\frac{5}{2}, -\frac{5}{3}\right)$

c) $A\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ y $B\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

d) $A\left(\frac{1}{2}, -\frac{5}{3}\right)$ y $B\left(\frac{3}{5}, -3\right)$

a) $d(A, B) = \sqrt{(-2-2)^2 + (5+3)^2} = \sqrt{16+64} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$ u

b) $d(A, B) = \sqrt{\left(\frac{5}{2} - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{5}{3} - \frac{1}{3}\right)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ u

c) $d(A, B) = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{10}{4}} = \frac{\sqrt{10}}{2}$ u

d) $d(A, B) = \sqrt{\left(\frac{3}{5} - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(-3 + \frac{5}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{100} + \frac{16}{9}} = \sqrt{\frac{1609}{900}} = \frac{\sqrt{1609}}{30}$ u

102. Halla la distancia del punto $P(2, -3)$ al punto de intersección de las rectas $r: \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 + \lambda \end{cases}$ y $s: 2x + y - 3 = 0$.

Punto de intersección A: $2 - 1 + \lambda - 3 = 0 \Rightarrow \lambda = 2 \Rightarrow A(1, 1)$. Por tanto, $d(A, P) = \sqrt{1^2 + (-4)^2} = \sqrt{17}$ u

103. Halla el perímetro del romboide determinado por las siguientes rectas.

a) $x + 4y - 9 = 0$ **b)** $x - y - 4 = 0$ **c)** $x + 4y - 6 = 0$ **d)** $x - y + 6 = 0$

Observemos que a y c son paralelas, igual que b y d, por tanto, es un paralelogramo. Los vértices son:

$\begin{cases} x + 4y - 9 = 0 \\ x - y - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 5,\ y = 1 \Rightarrow A(5, 1)$

$\begin{cases} x + 4y - 6 = 0 \\ x - y + 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = -\frac{18}{5},\ y = \frac{12}{5} \Rightarrow C\left(-\frac{18}{5}, \frac{12}{5}\right)$

$\begin{cases} x + 4y - 9 = 0 \\ x - y + 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = -3,\ y = 3 \Rightarrow B(-3, 3)$

$\begin{cases} x + 4y - 6 = 0 \\ x - y - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{22}{5},\ y = \frac{2}{5} \Rightarrow D\left(\frac{22}{5}, \frac{2}{5}\right)$

El perímetro es $2(d(A, B) + d(B, C)) = 2\left(\sqrt{64+4} + \sqrt{\frac{9}{25} + \frac{9}{25}}\right) = 2\left(2\sqrt{17} + \frac{3}{5}\sqrt{2}\right) \simeq 18{,}19$ u

104. Halla la distancia del punto *P*(–4, 3) al punto medio del segmento de extremos *A*(1, –3) y *B*(–1, 2).

El punto medio del segmento es $M\left(0, -\frac{1}{2}\right)$, por tanto, $d(P, M) = \sqrt{16 + \frac{49}{4}} = \frac{\sqrt{113}}{2}$ u

105. Calcula la distancia del punto *P* a la recta *r* en los siguientes casos.

a) $P(-3, 4)$ r: $2x + 3y - 5 = 0$

b) $P(0, -2)$ r: $y = -2x + 5$

c) $P\left(\frac{1}{2}, -3\right)$ r: $2x - 2y = -3$

d) $P(1, -2)$ $r: \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = -2 - 2\lambda \end{cases}$

e) $P(-1, 0)$ y *r* es la recta que pasa por los puntos $A\left(\frac{1}{2}, -3\right)$ y $B\left(-2, \frac{1}{2}\right)$

f) $P(3, -2)$ y *r* es la recta que forma un ángulo de 45º con el eje positivo de abscisas y que tiene ordenada en el origen igual a –2.

a) $d(P, r) = \frac{|2\cdot(-3) + 3\cdot 4 - 5|}{\sqrt{2^2 + 3^2}} = \frac{1}{\sqrt{13}} = \frac{\sqrt{13}}{13}$ u

b) $d(P, r) = \frac{|2\cdot 0 - 2 - 5|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{7}{\sqrt{5}} = \frac{7\sqrt{5}}{5}$ u

c) $d(P, r) = \frac{\left|2\cdot\frac{1}{2} - 2\cdot(-3) + 3\right|}{\sqrt{2^2 + (-2)^2}} = \frac{10}{\sqrt{8}} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$ u

d) $\begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = -2 - 2\lambda \end{cases} \Rightarrow \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-2} \Rightarrow -x + 1 = y + 2 \Rightarrow x + y + 1 = 0 \Rightarrow d(P, r) = \frac{|1 - 2 + 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = 0$

e) $\frac{x - \frac{1}{2}}{-2 - \frac{1}{2}} = \frac{y + 3}{\frac{1}{2} + 3} \Rightarrow 14x + 10y + 23 = 0 \Rightarrow d(P, r) = \frac{|14\cdot(-1) + 10\cdot 0 + 23|}{\sqrt{14^2 + 10^2}} = \frac{9}{\sqrt{296}} = \frac{9\sqrt{74}}{148}$ u

f) La pendiente de *r* es $m = 1$, y la ordenada en el origen es $n = -2$, por tanto, su ecuación es $y = x - 2 \Rightarrow x - y - 2 = 0$ y $d(P, r) = \frac{|3 + 2 - 2|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ u

106. Comprueba que los siguientes pares de rectas son paralelas y calcula, en cada caso, la distancia que las separa.

a) $r: 2x - y = 7$ s: $2x - y = 8$

b) $r: 2x - 3y - 2 = 0$ $s: -\frac{2}{3}x + y - 2 = 0$

c) $r: \begin{cases} x = 2 + 2\lambda \\ y = 3 - \lambda \end{cases}$ $s: \begin{cases} x = 3 + t \\ y = \frac{3 - t}{2} \end{cases}$

a) $\frac{2}{2} = \frac{-1}{-1} \neq \frac{-7}{-8} \Rightarrow$ Son paralelas y $d(r, s) = \frac{|-7 + 8|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$ u

b) s: $-\frac{2}{3}x + y - 2 = 0 \Rightarrow 2x - 3y + 6 = 0$. $\frac{2}{2} = \frac{-3}{-3} \neq \frac{-2}{6} \Rightarrow$ Son paralelas y $d(r, s) = \frac{|-2 - 6|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2}} = \frac{8}{\sqrt{13}} = \frac{8\sqrt{13}}{13}$ u

c) $r: \begin{cases} x = 2 + 2\lambda \\ y = 3 - \lambda \end{cases} \Rightarrow \frac{x-2}{2} = \frac{y-3}{-1} \Rightarrow x + 2y - 8 = 0$ $\quad s: \begin{cases} x = 3 + t \\ y = \frac{3 - t}{2} \end{cases} \Rightarrow x - 3 = 3 - 2y \Rightarrow x + 2y - 6 = 0$

$\frac{1}{1} = \frac{2}{2} \neq \frac{-8}{-6} \Rightarrow$ Son paralelas y $d(r, s) = \frac{|-8 + 6|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ u

107. Calcula las medidas de sus tres lados y clasifica los siguientes triángulos.

a) $A(3, 2)$, $B(5, -4)$ y $C(1, -2)$ **b)** $A(3, 5)$, $B(-1, -1)$ y $C(5, -3)$ **c)** $A(0, 1)$, $B(0, 2)$ y $C\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}\right)$

a) $d(A, B) = \sqrt{2^2 + (-6)^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$ u $d(B, C) = \sqrt{(-4)^2 + 2^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$ u

$d(A, C) = \sqrt{(-2)^2 + (-4)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$ u Es un triángulo isósceles.

b) $d(A, B) = \sqrt{(-4)^2 + (-6)^2} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$ u $d(B, C) = \sqrt{6^2 + (-2)^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$ u

$d(A, C) = \sqrt{2^2 + (-8)^2} = \sqrt{68} = 2\sqrt{17}$ u Es un triángulo escaleno.

c) $d(A, B) = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1$ u $d(B, C) = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2} = 1$ u

$d(A, C) = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = 1$ u Es un triángulo equilátero.

108. Calcula el perímetro y el área del triángulo de vértices: *A*(–2, 2), *B*(5, –1) y *C*(3, 4)

$d(A, B) = \sqrt{7^2 + (-3)^2} = \sqrt{58}$ u, $d(B, C) = \sqrt{(-2)^2 + 5^2} = \sqrt{29}$ u y $d(A, C) = \sqrt{5^2 + 2^2} = \sqrt{29}$ u.

Por tanto, el perímetro es $P = \sqrt{58} + 2\sqrt{29}$ u.

La altura del triángulo es la distancia del vértice *C* a la recta determinada por el segmento *AB*, de ecuación:

$$\frac{x+2}{7} = \frac{y-2}{-3} \Rightarrow -3x - 6 = 7y - 14 \Rightarrow 3x + 7y - 8 = 0$$

Por tanto, la altura es $d(C, AB) = \frac{|3\cdot(-3) + 4\cdot(-7) + 8|}{\sqrt{3^2 + 7^2}} = \frac{29}{\sqrt{58}} = \frac{\sqrt{58}}{2}$ u y el área es $S = \frac{\sqrt{58}\cdot\frac{\sqrt{58}}{2}}{2} = \frac{58}{4} = \frac{29}{2}$ u^2

109. Calcula las coordenadas de los vértices y el perímetro del triángulo determinado por las rectas:

$$r: x - 3y + 1 = 0$$
$$s: 3x - 2y - 4 = 0$$
$$t: 2x + y + 2 = 0$$

Los vértices del triángulo son:

$$\begin{cases} x - 3y + 1 = 0 \\ 3x - 2y - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 2,\ y = 1 \Rightarrow A(2, 1) \qquad \begin{cases} x - 3y + 1 = 0 \\ 2x + y + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = -1,\ y = 0 \Rightarrow B(-1, 0)$$

$$\begin{cases} 3x - 2y - 4 = 0 \\ 2x + y + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 0,\ y = -2 \Rightarrow C(0, -2)$$

Por tanto, el perímetro es $P = d(A,B) + d(B,C) + d(C,A) = \sqrt{9+1} + \sqrt{1+4} + \sqrt{4+9} = \sqrt{10} + \sqrt{5} + \sqrt{13}$ u

110. Calcula el ángulo que forman las rectas:

a) $r: 3x + y = 1$ y $s: x - y = 3$

b) $r: x - 2y - 2 = 0$ y $s: -x - y - 2 = 0$

c) $r: y = -x + 2$ y $s: y = -\frac{1}{2} - 3x$

d) $r: \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 3 - 2\lambda \end{cases}$ y $s: \begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = 1 + t \end{cases}$

e) $r: 2x - y - 7 = 0$ y $s: \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 + \lambda \end{cases}$

a) Los vectores normales son $\overrightarrow{n_1} = (3, 1)$ y $\overrightarrow{n_2} = (1, -1)$, luego $\cos\alpha = \frac{|\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2}|}{|\overrightarrow{n_1}||\overrightarrow{n_2}|} = \frac{2}{\sqrt{10}\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{5}}{5} \Rightarrow \alpha = 63{,}43^\circ$

b) Los vectores normales son $\overrightarrow{n_1} = (1, -2)$ y $\overrightarrow{n_2} = (-1, -1)$, luego $\cos\alpha = \frac{|\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2}|}{|\overrightarrow{n_1}||\overrightarrow{n_2}|} = \frac{1}{\sqrt{5}\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{10}}{10} \Rightarrow \alpha = 71{,}57^\circ$

c) Las pendientes son $m_1 = -1$ y $m_2 = -3$, luego $\operatorname{tg}\alpha = \frac{|m_1 - m_2|}{|1 + m_1 m_2|} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 26{,}57^\circ$

d) Los vectores directores son $\overrightarrow{u_1} = (2, -2)$ y $\overrightarrow{u_2} = (-2, 1)$. Luego $\cos\alpha = \frac{|\overrightarrow{u_1} \cdot \overrightarrow{u_2}|}{|\overrightarrow{u_1}||\overrightarrow{u_2}|} = \frac{6}{\sqrt{8}\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{10}}{10} \Rightarrow \alpha = 18{,}43^\circ$

e) Los vectores normales son $\overrightarrow{n_1} = (2, -1)$ y $\overrightarrow{n_2} = (1, 0)$. Luego $\cos\alpha = \frac{|\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2}|}{|\overrightarrow{n_1}||\overrightarrow{n_2}|} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5} \Rightarrow \alpha = 26{,}57^\circ$

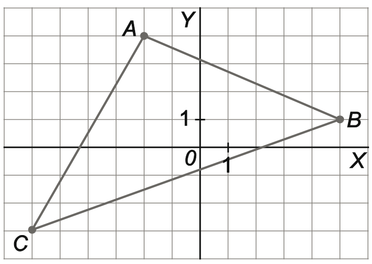
111. Calcula el área y el perímetro del cuadrilátero que forman las rectas *r* : 3*x* + 4*y* = 12 y *s* : 5*x* + 6*y* = 30 con los ejes coordenados.

Los vértices del cuadrilátero son $A(4, 0)$, $B(6, 0)$, $C(0, 5)$ y $D(0, 3)$.

El perímetro es $P = d(A,B) + d(B,C) + d(C,D) + d(D,A) = \sqrt{4+0} + \sqrt{36+25} + \sqrt{0+4} + \sqrt{16+9} = 9 + \sqrt{61}$ u.

El área se calcula restando las áreas de los triángulos rectángulos *OBC* y *OAD*: $S = 15 - 6 = 9$ u^2.

112. Halla el perímetro del triángulo formado por los puntos medios de los lados del triángulo de la figura.



$A(-2, 4)$, $B(5, 1)$ y $C(-6, -3)$, de modo que los puntos medios de los lados son

$M_1\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$, $M_2\left(-\frac{1}{2}, -1\right)$ y $M_3\left(-4, \frac{1}{2}\right)$, por tanto, el perímetro pedido es:

$$P = d(M_1, M_2) + d(M_2, M_3) + d(M_3, M_1) = \sqrt{4 + \frac{49}{4}} + \sqrt{\frac{49}{4} + \frac{9}{4}} + \sqrt{\frac{121}{4} + 4} = \frac{\sqrt{65} + \sqrt{58} + \sqrt{137}}{2} \text{ u}$$

Otra forma de hacerlo sería:

$$P = \frac{1}{2}\text{Perímetro}(ABC) = \frac{1}{2}\left[\sqrt{7^2 + (-3)^2} + \sqrt{(-4)^2 + (-7)^2} + \sqrt{(-11)^2 + (-4)^2}\right] = \frac{1}{2}\left[\sqrt{58} + \sqrt{65} + \sqrt{137}\right]$$

113. Calculando las medidas de sus tres ángulos, clasifica los siguientes triángulos.

a) $A(5, 3)$, $B(1, 2)$ y $C(7, 0)$ **b)** $A(1, 2)$, $B(-4, -3)$ y $C(2, -1)$ **c)** $A(-2, 8)$, $B(-6, 1)$ y $C(0, 4)$

a) $\overrightarrow{AB}=(-4,-1)$ y $\overrightarrow{AC}=(2,-3) \Rightarrow \cos\hat{A}=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|}=\frac{-5}{\sqrt{17}\sqrt{13}}=-\frac{5\sqrt{221}}{221}\Rightarrow \hat{A}=109,65°$

$\overrightarrow{BA}=(4,1)$ y $\overrightarrow{BC}=(6,-2) \Rightarrow \cos\hat{B}=\frac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{BC}|}=\frac{22}{\sqrt{17}\sqrt{40}}=\frac{11\sqrt{170}}{170}\Rightarrow \hat{B}=32,47°$

$\overrightarrow{CA}=(-2,3)$ y $\overrightarrow{CB}=(-6,2) \Rightarrow \cos\hat{C}=\frac{\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}}{|\overrightarrow{CA}||\overrightarrow{CB}|}=\frac{18}{\sqrt{13}\sqrt{40}}=\frac{9\sqrt{130}}{130}\Rightarrow \hat{C}=37,87°$

Es un triángulo obtusángulo.

b) $\overrightarrow{AB}=(-5,-5)$ y $\overrightarrow{AC}=(1,-3) \Rightarrow \cos\hat{A}=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|}=\frac{10}{\sqrt{50}\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{5}}{5}\Rightarrow \hat{A}=63,43°$

$\overrightarrow{BA}=(5,5)$ y $\overrightarrow{BC}=(6,2) \Rightarrow \cos\hat{B}=\frac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{BC}|}=\frac{40}{\sqrt{50}\sqrt{40}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}\Rightarrow \hat{B}=26,57°$

$\overrightarrow{CA}=(-1,3)$ y $\overrightarrow{CB}=(-6,-2) \Rightarrow \cos\hat{C}=\frac{\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}}{|\overrightarrow{CA}||\overrightarrow{CB}|}=\frac{0}{\sqrt{10}\sqrt{40}}=0\Rightarrow \hat{C}=90°$

Es un triángulo rectángulo.

c) $\overrightarrow{AB}=(-4,-7)$ y $\overrightarrow{AC}=(2,-4) \Rightarrow \cos\hat{A}=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|}=\frac{20}{\sqrt{65}\sqrt{20}}=\frac{2\sqrt{13}}{13}\Rightarrow \hat{A}=56,31°$

$\overrightarrow{BA}=(4,7)$ y $\overrightarrow{BC}=(6,3) \Rightarrow \cos\hat{B}=\frac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{BC}|}=\frac{45}{\sqrt{65}\sqrt{45}}=\frac{3\sqrt{13}}{13}\Rightarrow \hat{B}=33,69°$

$\overrightarrow{CA}=(-2,4)$ y $\overrightarrow{CB}=(-6,-3) \Rightarrow \cos\hat{C}=\frac{\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}}{|\overrightarrow{CA}||\overrightarrow{CB}|}=\frac{0}{\sqrt{20}\sqrt{45}}=0\Rightarrow \hat{C}=90°$

Es un triángulo rectángulo.

114. Calcula las coordenadas de los vértices y la medida de los ángulos del triángulo determinado por las siguientes rectas. Clasifícalo según sus lados y según sus ángulos.

$$\boldsymbol{r: 3x+2y-3=0}$$

$$\boldsymbol{s: 2x-y-2=0}$$

$$\boldsymbol{t: x+2y+9=0}$$

Los vértices del triángulo son:

$\begin{cases}3x+2y-3=0\\2x-y-2=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=1\\y=0\end{cases}\Rightarrow A(1,0)$ $\begin{cases}3x+2y-3=0\\x+2y+9=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=6\\y=-\frac{15}{2}\end{cases}\Rightarrow B\left(6,-\frac{15}{2}\right)$

$\begin{cases}2x-y-2=0\\x+2y+9=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=-1\\y=-4\end{cases}\Rightarrow C(-1,-4)$

Los vectores normales son: $\vec{n}_r=(3,2)$, $\vec{n}_s=(2,-1)$, $\vec{n}_t=(1,2)$

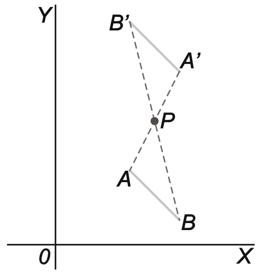
Las rectas s y t son perpendiculares pues: $2\cdot 1+(-1)2=0\Rightarrow\hat{C}=90°$

Los otros ángulos son: $\cos\hat{A}=\frac{\vec{n}_r\cdot\vec{n}_s}{|\vec{n}_r||\vec{n}_s|}=\frac{4}{\sqrt{13}\sqrt{5}}\Rightarrow\hat{A}=60,26°$ $\cos\hat{B}=\frac{\vec{n}_r\cdot\vec{n}_t}{|\vec{n}_r||\vec{n}_t|}=\frac{7}{\sqrt{13}\sqrt{5}}\Rightarrow\hat{B}=29,74°$

Por tener los ángulos distintos es escaleno, además, es un triángulo rectángulo.

Puntos y rectas simétricos

115. Calcula las coordenadas de los extremos del segmento simétrico del $\overline{AB}$ respecto de la simetría central de centro *P* siendo: *A*(2, 3), *B*(4, 1) y *P*(3, 5).



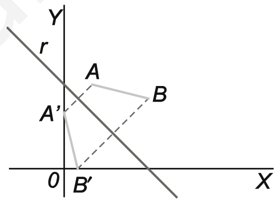
P ha de ser el punto medio de *A* y *A'*, luego, si $A'(a_1, a_2)$, tenemos:

$$\begin{cases} \dfrac{2+a_1}{2} = 3 \Rightarrow a_1 = 4 \\ \dfrac{3+a_2}{2} = 5 \Rightarrow a_2 = 7 \end{cases} \Rightarrow A'(4, 7)$$

Análogamente, *P* ha de ser el punto medio de *B* y *B'*, luego si $B'(b_1, b_2)$, tenemos:

$$\begin{cases} \dfrac{4+b_1}{2} = 3 \Rightarrow b_1 = 2 \\ \dfrac{1+b_2}{2} = 5 \Rightarrow b_2 = 9 \end{cases} \Rightarrow B'(2, 9)$$

116. Calcula las coordenadas de los extremos del segmento simétrico del $\overline{AB}$ respecto de la simetría axial de eje *r* siendo: *A*(1, 3), $B\left(3, \dfrac{5}{2}\right)$ y *r* : $x + y = 3$.



La recta que pasa por *A* y *A'* es perpendicular a *r*, por tanto, es de la forma $x - y + k = 0$ y, como pasa por *A*, se tiene $1 - 3 + k = 0 \Rightarrow k = 2$, con lo que la ecuación de la recta *AA'* es $x - y + 2 = 0$.

El punto de intersección de esta recta y *r* es: $\begin{cases} x - y + 2 = 0 \\ x + y = 3 \end{cases} \Rightarrow x = \dfrac{1}{2},\ y = \dfrac{5}{2} \Rightarrow M\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{5}{2}\right)$

M es el punto medio del segmento $\overline{AA'}$, luego, si $A'(a_1, a_2)$, tenemos:

$$\begin{cases} \dfrac{1+a_1}{2} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow a_1 = 0 \\ \dfrac{3+a_2}{2} = \dfrac{5}{2} \Rightarrow a_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow A'(0, 2)$$

Siguiendo un proceso análogo para el punto *B* se tiene:

$$BB' : x - y + k = 0 \Rightarrow 3 - \frac{5}{2} + k = 0 \Rightarrow k = -\frac{1}{2} \Rightarrow x - y - \frac{1}{2} = 0$$

Punto de intersección: $\begin{cases} x - y - \dfrac{1}{2} = 0 \\ x + y = 3 \end{cases} \Rightarrow x = \dfrac{7}{4},\ y = \dfrac{5}{4} \Rightarrow N\left(\dfrac{7}{4}, \dfrac{5}{4}\right)$

Calculo de $B'(b_1, b_2)$: $\begin{cases} \dfrac{3+b_1}{2} = \dfrac{7}{4} \Rightarrow a_1 = \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{\frac{5}{2}+b_2}{2} = \dfrac{5}{4} \Rightarrow a_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow B'\left(\dfrac{1}{2}, 0\right)$

117. Dada las rectas $r: x-4y+2=0$ y $s: 2x-3y=-4$:

a) Calcula su punto de corte.

b) Demuestra que el punto $P(1, 2)$ pertenece a s y calcula su simétrico respecto de la recta r.

c) Calcula la ecuación de la simétrica de la recta s respecto de la recta r.

a) El punto de corte es: $\begin{cases} x-4y+2=0 \\ 2x-3y+4=0 \end{cases} \Rightarrow Q(-2, 0)$

b) P verifica la ecuación de s. En efecto: $2\cdot 1-3\cdot 2+4=2-6+4=0 \Rightarrow P \in s$.

La recta perpendicular a r que pasa por P es: $4x+y+k=0 \Rightarrow 4+2+k=0 \Rightarrow k=-6 \Rightarrow 4x+y-6=0$.

Dicha recta corta a r en el punto: $\begin{cases} 4x+y-6=0 \\ x-4y+2=0 \end{cases} \Rightarrow M=\left(\frac{22}{17}, \frac{14}{17}\right)$

M es el punto medio de P y su simétrico $P'(a, b)$, luego: $\begin{cases} \frac{1+a}{2}=\frac{22}{17} \Rightarrow a=\frac{27}{17} \\ \frac{2+b}{2}=\frac{14}{17} \Rightarrow b=-\frac{6}{17} \end{cases} \Rightarrow P'\left(\frac{27}{17}, -\frac{6}{17}\right)$

c) La recta pasa por Q y P', por tanto su ecuación es: $\frac{x+2}{61}=\frac{y}{-6} \Rightarrow -6x-12=61y \Rightarrow 6x+61y+12=0$.

Lugares geométricos

118. Dados los puntos $A(1, 4)$, $B(-3, 0)$ y $C(3, -2)$:

a) Determina las mediatrices de los segmentos $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$.

b) Halla las coordenadas del punto que equidista de A, B y C.

a) Mediatriz del segmento $\overline{AB}$:

$$\sqrt{(x-1)^2+(y-4)^2}=\sqrt{(x+3)^2+(y-0)^2} \Rightarrow x^2-2x+1+y^2-8y+16=x^2+6x+9+y^2 \Rightarrow x+y-1=0$$

Mediatriz del segmento $\overline{AC}$:

$$\sqrt{(x-1)^2+(y-4)^2}=\sqrt{(x-3)^2+(y+2)^2} \Rightarrow x^2-2x+1+y^2-8y+16=x^2-6x+9+y^2+4y+4 \Rightarrow x-3y+1=0$$

Mediatriz del segmento $\overline{BC}$:

$$\sqrt{(x+3)^2+(y-0)^2}=\sqrt{(x-3)^2+(y+2)^2} \Rightarrow x^2+6x+9+y^2=x^2-6x+9+y^2+4y+4 \Rightarrow 3x-y-1=0$$

b) El punto que equidista de A, B y C, el circuncentro, se obtiene como punto de intersección de las mediatrices:

$$\begin{cases} x+y-1=0 \\ x-3y+1=0 \end{cases} \Rightarrow x=\frac{1}{2},\ y=\frac{1}{2} \Rightarrow T\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

119. Halla las bisectrices de las rectas $r: 3x-2y=-2$ y $s: \begin{cases} x=2\lambda \\ y=1+\lambda \end{cases}$ y comprueba que son perpendiculares.

Ecuación general de la recta s. $\begin{cases} x=2\lambda \\ y=1+\lambda \end{cases} \Rightarrow \frac{x}{2}=y-1 \Rightarrow x-2y+2=0$

Ecuaciones de las bisectrices:

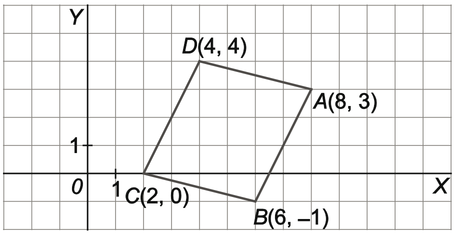
$$\frac{|3x-2y+2|}{\sqrt{13}}=\frac{|x-2y+2|}{\sqrt{5}} \Rightarrow \frac{3x-2y+2}{\sqrt{13}}=\pm\frac{x-2y+2}{\sqrt{5}} \Rightarrow \begin{cases} b_1: \left(3\sqrt{5}-\sqrt{13}\right)x+\left(2\sqrt{13}-2\sqrt{5}\right)y+\left(2\sqrt{5}-2\sqrt{13}\right)=0 \\ b_2: \left(3\sqrt{5}+\sqrt{13}\right)x-\left(2\sqrt{13}+2\sqrt{5}\right)y+\left(2\sqrt{5}+2\sqrt{13}\right)=0 \end{cases}$$

Los vectores normales y, por tanto, las bisectrices, son perpendiculares, ya que:

$$\left(3\sqrt{5}-\sqrt{13}, 2\sqrt{13}-2\sqrt{5}\right)\left(3\sqrt{5}+\sqrt{13}, -2\sqrt{13}-2\sqrt{5}\right)=45-13-52+20=0$$

Síntesis

120. Las diagonales de un rombo son perpendiculares entre sí. Calcula las ecuaciones de las diagonales de la figura, y comprueba si se trata o no de un rombo.



La diagonal AC tiene vector director $\overrightarrow{AC} = (-6, -3) \simeq (2, 1)$ y pasa por A, por lo que su ecuación es:

$$\frac{x-8}{2} = \frac{y-3}{1} \Rightarrow x-8 = 2y-6 \Rightarrow x-2y-2 = 0$$

La diagonal BD tiene vector director $\overrightarrow{BD} = (-2, 5)$ y pasa por B, por lo que su ecuación es:

$$\frac{x-6}{-2} = \frac{y+1}{5} \Rightarrow 5x-30 = -2y-2 \Rightarrow 5x+2y-28 = 0$$

No se trata de un rombo, ya que las diagonales no son perpendiculares. En efecto, $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 12-15 = -3 \neq 0$

121. Dado el triángulo de vértices: $A(1, 3)$, $B(-1, 2)$ y $C(0, -3)$

a) Calcula las coordenadas del baricentro.

b) Halla las ecuaciones de dos alturas y las coordenadas del ortocentro.

c) Obtén las ecuaciones de dos mediatrices y las coordenadas del circuncentro.

d) Calcula el radio de la circunferencia circunscrita al triángulo.

e) Encuentra la ecuación de la recta de Euler y comprueba que el baricentro, ortocentro y circuncentro están alineados.

a) El baricentro es $G\left(0, \frac{2}{3}\right)$

b) La altura por A es perpendicular a $\overrightarrow{BC} = (1, -5)$, así, su ecuación es: $1(x-1)-5(y-3) \Rightarrow x-5y+14 = 0$.

La altura por B es perpendicular a $\overrightarrow{AC} = (-1, -6)$, así, su ecuación es: $-1(x+1)-6(y-2) \Rightarrow x+6y-11 = 0$.

El ortocentro es el punto de intersección de estas alturas: $H\left(-\frac{29}{11}, \frac{25}{11}\right)$

c) Mediatriz del lado AB: $\sqrt{(x-1)^2+(y-3)^2} = \sqrt{(x+1)^2+(y-2)^2} \Rightarrow 4x+2y-5 = 0$

Mediatriz del ladoAC: $\sqrt{(x-1)^2+(y-3)^2} = \sqrt{(x-0)^2+(y+3)^2} \Rightarrow 2x+12y-1 = 0$

El circuncentro es el punto de intersección de estas mediatrices: $T\left(\frac{29}{22}, -\frac{3}{22}\right)$

d) El radio de la circunferencia circunscrita es $d(T, A) = \sqrt{\left(\frac{29}{22}-1\right)^2+\left(-\frac{3}{22}-3\right)^2} = \sqrt{\frac{2405}{242}} \approx 3{,}15$ u

e) $\overrightarrow{GH} = \left(-\frac{29}{11}, \frac{53}{33}\right)$ y $\overrightarrow{GH} = \left(\frac{29}{22}, -\frac{53}{66}\right)$ son proporcionales, por tanto, el baricentro, ortocentro y circuncentro están alineados. La recta que pasa por ellos es la recta de Euler, de ecuación:

$$\frac{x-0}{-\frac{29}{11}} = \frac{y-\frac{2}{3}}{\frac{53}{33}} \Rightarrow 53x+87y-58 = 0$$

122. Halla las bisectrices interiores del triángulo de vértices *A*(2, 3), *B*(–1, 2) y *C*(3, 0). Calcula las coordenadas del incentro y el radio de la circunferencia inscrita.

Bisectriz interior por *A*: $2x - y - 1 = 0$

Bisectriz interior por *B*: $\left(\sqrt{2} - 1\right)x + \left(2\sqrt{2} + 3\right)y - \left(7 + 3\sqrt{2}\right) = 0$

Bisectriz interior por *C*: $\left(3 + \sqrt{2}\right)x + \left(1 + 2\sqrt{2}\right)y - \left(9 + 3\sqrt{2}\right) = 0$

El incentro es el punto de intersección de dos bisectrices: $I\left(\sqrt{2}, 2\sqrt{2} - 1\right)$

El radio de la circunferencia inscrita es $d(I, AB) = \dfrac{\left|\sqrt{2} - 3(2\sqrt{2} - 1) + 7\right|}{\sqrt{10}} = \dfrac{10 - 5\sqrt{2}}{\sqrt{10}} \simeq 0{,}93$ u (La recta *AB* tiene ecuación $x - 3y + 7 = 0$)

123. Dado el triángulo de vértices *A*(–3, 2), *B*(3, –4) y *C*(3, 5), y los puntos exteriores *D*(5, –3) y *E*(5, 3),

a) Demuestra que el segmento $\overline{BD}$ es paralelo al lado $\overline{AC}$ y mide la tercera parte de éste.

b) Demuestra que el segmento $\overline{CE}$ es paralelo al lado $\overline{AB}$ y mide la tercera parte de éste.

c) Si *M* es el punto medio de D y E y *G* es el baricentro del triángulo, demuestra que *A*, *G* y *M* están alineados.

d) Comprueba que *G* es el punto medio de *A* y *M*.

a) $\overrightarrow{BD} = (2, 1)$ y $\overrightarrow{AC} = (6, 3)$ verifican que $\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{BD}$, por lo queel segmento $\overline{BD}$ es paralelo al lado $\overline{AC}$ y mide la tercera parte de éste.

b) $\overrightarrow{CE} = (2, -2)$ y $\overrightarrow{AB} = (6, -6)$ verifican que $\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{CE}$, por lo queel segmento $\overline{CE}$ es paralelo al lado $\overline{AB}$ y mide la tercera parte de éste.

c) $M(5, 0)$ y $G(1, 1)$ $\Rightarrow \overrightarrow{AG} = (4, -1)$ y $\overrightarrow{AM} = (8, -2)$ son proporcionales, por lo que *A*, *G* y *M* están alineados.

d) Como $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AG}$, *G* es el punto medio de *A* y *M*.

124. Dado el cuadrilátero de vértices *A*(1, 1), *B*(5, 2), *C*(3, 3) y $D\left(1, \frac{5}{2}\right)$:

a) Demuestra que se trata de un trapecio.

b) Calcula el punto donde se cortan las diagonales.

c) Comprueba que la recta que une los puntos medios de los dos lados no paralelos es paralela a las bases del trapecio.

a) Los lados *AB* y *DC* son paralelos, ya que los vectores $\overrightarrow{AB} = (4, 1)$ y $\overrightarrow{DC} = \left(2, \frac{1}{2}\right)$ son proporcionales.

Los lados *AD* y *BC* no son paralelos, ya que los vectores $\overrightarrow{AD} = \left(0, \frac{3}{2}\right)$ y $\overrightarrow{BC} = (-2, 1)$ no son proporcionales.

Por tanto, el cuadrilátero es un trapecio de bases *AB* y *DC*.

b) La diagonal *AC* tiene ecuación: $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-1}{2} \Rightarrow x - y = 0$ y la *BD*: $\dfrac{x-5}{-4} = \dfrac{y-2}{\frac{1}{2}} \Rightarrow x + 8y - 21 = 0$.

Punto de corte: $\begin{cases} x - y = 0 \\ x + 8y - 21 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = \dfrac{7}{3}, y = \dfrac{7}{3} \Rightarrow P\left(\dfrac{7}{3}, \dfrac{7}{3}\right)$

c) $R\left(1, \frac{7}{4}\right)$ y $S\left(4, \frac{5}{2}\right)$ son los puntos medios de *AD* y *BC*, respectivamente.La recta *RS* es paralela a los lados *AB* y *DC*, ya que los vectores $\overrightarrow{AB} = (4, 1)$, $\overrightarrow{DC} = \left(2, \frac{1}{2}\right)$ y $\overrightarrow{RS} = \left(3, \frac{3}{4}\right)$ son proporcionales.

125. Se considera el cuadrilátero de vértices:*A*(–5, 0), *B*(3, 2), *C*(5, –8) y *D*(–7, –6)

a) Calcula la medida de las dos diagonales.

b) Comprueba que los puntos medios de los lados forman un paralelogramo.

c) Calcula el perímetro del paralelogramo.

d) Comprueba que el perímetro hallado coincide con la suma de las dos diagonales del cuadrilátero inicial.

a) $d(A,C)=\sqrt{10^2+8^2}=\sqrt{164}=2\sqrt{41}$ u $\quad$ $d(B,D)=\sqrt{(-10)^2+(-8)^2}=\sqrt{164}=2\sqrt{41}$ u

b) Punto medio del lado *AB*: $M_1(-1,1)$ $\quad$ Punto medio del lado *BC*: $M_2(4,-3)$

Punto medio del lado *CD*: $M_3(-1,-7)$ $\quad$ Punto medio del lado DA: $M_4(-6,-3)$

Como $\overrightarrow{M_1M_4}=\overrightarrow{M_2M_3}=(-5,-4)$, $M_1M_2M_3M_4$ es un paralelogramo.

c) El perímetro es $2d(M_1,M_2)+2d(M_2,M_3)=2\sqrt{5^2+(-4)^2}+2\sqrt{(-5)^2+(-4)^2}=4\sqrt{41}$ u

d) La suma de las diagonales es $d(A,C)+d(B,D)=4\sqrt{41}$, que coincide con el perímetro del paralelogramo.

126. Calcula las coordenadas de los vértices del triángulo *ABC* sabiendo que las coordenadas de los puntos medios de sus lados son: *M*(–2, 2), *N*(5, 3) y *P*(2, –2).

Sean $A(a_1, a_2)$, $B(b_1, b_2)$ y $C(c_1, c_2)$. Se debe verificar que:

$$\begin{cases}\dfrac{a_1+b_1}{2}=-2\\[2mm] \dfrac{a_1+c_1}{2}=5\\[2mm] \dfrac{b_1+c_1}{2}=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a_1+b_1=-4\\ a_1+c_1=10\\ b_1+c_1=4\end{cases}\Rightarrow a_1=1,\ b_1=-5,\ c_1=9 \qquad \begin{cases}\dfrac{a_2+b_2}{2}=2\\[2mm] \dfrac{a_2+c_2}{2}=3\\[2mm] \dfrac{b_2+c_2}{2}=-2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a_2+b_2=4\\ a_2+c_2=6\\ b_2+c_2=-4\end{cases}\Rightarrow a_2=7,\ b_2=-3,\ c_2=-1$$

Por tanto,*A*(1, 7), *B*(–5, –3) y *C*(9, –1).

127. Halla el punto de la recta *r* : 2*x* + *y* + 1 = 0 que equidista de los puntos *A*(2, 2) y *B*(–2, 4).

El punto buscado será la intersección de la recta *r* con la mediatriz del segmento *AB*.

La mediatriz del segmento *AB* es: $\sqrt{(x-2)^2+(y-2)^2}=\sqrt{(x+2)^2+(y-4)^2}\Rightarrow 2x-y+3=0$.

El punto de intersección es: $\begin{cases}2x+y+1=0\\ 2x-y+3=0\end{cases}\Rightarrow x=-1,\ y=1\Rightarrow P(-1,1)$

128. Calcula los puntos de la recta *r*: *x*+*y*– 3 = 0 que están a distancia 1 del punto *P*(1, 1).

Los puntos de la recta son de la forma $(t, 3-t)$, para que estén a distancia 1 de *P* se debe verificar:

$\sqrt{(t-1)^2+(2-t)^2}=1\Rightarrow 2t^2-6t+4=0\Rightarrow\begin{cases}t=2\\ t=1\end{cases}$ Se obtienen así dos soluciones, *A*(2, 1) y *B*(1, 2).

129. Determina las rectas que pasan por el punto *P*(1, 2) y que forman con la bisectriz del primer y tercer cuadrantes un ángulo de 45º.

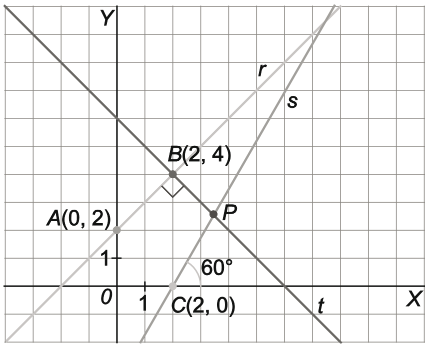
Las rectas no verticales buscadas son del tipo $y-2=m(x-1)$.

Como la pendiente de la bisectriz del primer y tercer cuadrantes es 1, tenemos:

$\text{tg}\,45^\circ=\left|\dfrac{m-1}{1+m}\right|\Rightarrow\dfrac{m-1}{m+1}=\pm1\Rightarrow\begin{cases}m-1=m+1\Rightarrow 0=2 \text{ Imposible}\\ m-1=-m-1\Rightarrow m=0\end{cases}$. Por tanto, la recta buscada es $y-2=0\Rightarrow y=2$.

Además, la recta vertical $x=1$ también forma un ángulo de 45º con la bisectriz del primer y tercer cuadrantes.

130. A partir de la información de la figura, calcula:



a) Las ecuaciones de las rectas *r*, *s* y *t*.

b) El punto *P* de intersección entre *s* y *t*.

c) El punto *P′* simétrico de *P* respecto de la recta *r*.

d) El punto *C′* simétrico de *C* respecto de la recta *r*.

e) El perímetro del cuadrilátero *PCC′P′*.

f) La ecuación de la recta *s′* simétrica de *s* respecto de la recta *r*.

g) El ángulo que forman *s* y *t*.

h) La recta paralela a *s* que pasa por *B*.

i) Las rectas que pasan por el punto *D*(–1, 3) y forman un ángulo de 30º con la recta *r*.

a) $r: \dfrac{x-0}{2} = \dfrac{y-2}{2} \Rightarrow x - y + 2 = 0$ $\quad s: y - 0 = \text{tg}\,60^\circ(x-2) \Rightarrow y = \sqrt{3}x - 2\sqrt{3}$ $\quad t: \dfrac{x-2}{-2} = \dfrac{y-4}{2} \Rightarrow x + y - 6 = 0$

b) $\begin{cases} y = \sqrt{3}x - 2\sqrt{3} \\ x + y - 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{6+2\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} = \dfrac{(6+2\sqrt{3})(1-\sqrt{3})}{1-3} = 2\sqrt{3} \\ y = 6 - 2\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow P\left(2\sqrt{3},\ 6-2\sqrt{3}\right)$.

c) La perpendicular a *r* por *P* es *t*, que corta a *r* en *B*. Por tanto, *B* debe ser el punto medio del segmento $\overline{PP'}$, con lo que $P'\left(4-2\sqrt{3},\ 2+2\sqrt{3}\right)$.

d) La perpendicular a *r* por *C* tiene ecuación $x + y - 2 = 0$ y corta a *r* en el punto *A*, con lo que *A* debe ser el punto medio del segmento $\overline{CC'}$ y, por tanto, $C'(-2,\ 4)$.

e) $d(P,C) + d(C,C') + d(C',P') + d(P',P) = \sqrt{\left(2-2\sqrt{3}\right)^2 + \left(-6+2\sqrt{3}\right)^2} + \sqrt{(-4)^2 + 4^2} + \sqrt{\left(6-2\sqrt{3}\right)^2 + \left(-2+2\sqrt{3}\right)^2} +$

$+\sqrt{\left(-4+4\sqrt{3}\right)^2 + \left(4-4\sqrt{3}\right)^2} = 8\sqrt{3} + 4\sqrt{6} - 8 \simeq 15{,}65$ u

f) La recta buscada pasa por *P′* y *C′*, por tanto, su ecuación es:

$$\frac{x+2}{6-2\sqrt{3}} = \frac{y-4}{-2-2\sqrt{3}} \Rightarrow \left(2+2\sqrt{3}\right)x + \left(6-2\sqrt{3}\right)y + \left(-20+12\sqrt{3}\right) = 0$$

g) Los vectores normales de *s* y *t* son, respectivamente, $\vec{n_1} = \left(\sqrt{3},\ -1\right)$ y $\vec{n_2} = (1,\ 1)$, por tanto, el ángulo que forman es: $\cos\alpha = \dfrac{\left|\sqrt{3}-1\right|}{2\sqrt{2}} = \dfrac{\left(\sqrt{3}-1\right)\sqrt{2}}{4} \Rightarrow \alpha = 75^\circ$

h) Como la pendiente de *s* es $m = \sqrt{3}$, la recta paralela a *s* que pasa por *B* tiene ecuación:

$$y - 4 = \sqrt{3}(x-2) \Rightarrow y = \sqrt{3}x + \left(4-2\sqrt{3}\right)$$

i) La recta *r* tiene pendiente 1, luego forma un ángulo de 45º con la parte positiva del eje de abscisas. Las rectas que forman un ángulo de 30º con la recta *r* tienen que formar, por tanto, ángulos de 15º o de 75º con la parte positiva del eje de abscisas.

Por tanto, sus pendientes han de ser $m_1 = \text{tg}\,15^\circ = \dfrac{1-\dfrac{\sqrt{3}}{3}}{1+\dfrac{\sqrt{3}}{3}} = 2-\sqrt{3}$ y $m_2 = \text{tg}\,75^\circ = \dfrac{\text{tg}\,30^\circ + \text{tg}\,45^\circ}{1-\text{tg}\,30^\circ\,\text{tg}\,45^\circ} = 2+\sqrt{3}$.

De este modo, las rectas buscadas tienen ecuación:

$$y - 3 = \left(2-\sqrt{3}\right)(x+1) \Rightarrow y = \left(2-\sqrt{3}\right)x + \left(5-\sqrt{3}\right) \qquad y - 3 = \left(2+\sqrt{3}\right)(x+1) \Rightarrow y = \left(2+\sqrt{3}\right)x + \left(5+\sqrt{3}\right)$$

131. Halla las coordenadas de los puntos de la recta $r: x + 2y - 2 = 0$ y que distan 2 unidades de la recta $s: 4x - 3y + 13 = 0$.

Los puntos de *r* son de la forma $(2-2t,\ t)$, para que disten 2 unidades de *s* deben verificar:

$$\frac{|4\cdot(2-2t)-3t+13|}{\sqrt{4^2+3^2}} = 2 \Rightarrow 21-11t = \pm 10 \Rightarrow \begin{cases} 21-11t = 10 \Rightarrow t = 1 \Rightarrow P_1(0,\ 1) \\ 21-11t = -10 \Rightarrow t = \dfrac{31}{11} \Rightarrow P_2\left(-\dfrac{40}{11},\ \dfrac{31}{11}\right) \end{cases}$$

132. Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto de intersección de las rectas:

$$r: \begin{cases} x = -3+5\lambda \\ y = 3\lambda \end{cases} \quad s: \begin{cases} x = 7-7\lambda \\ y = 4\lambda+6 \end{cases}$$

y que forma un ángulo de 45º con la recta que une los puntos $A(0, 5)$ y $B(5, 0)$.

El punto de intersección de las rectas es el $P(7, 6)$, que se obtiene para $\lambda = 2$ en la primera recta y $\lambda = 0$ en la segunda.

La recta que une *A* y *B* es $y = -x + 5$, que forma 45º con los ejes de coordenadas. Por tanto hay dos soluciones al problema planteado: La recta horizontal que pasa por *P*, de ecuación $y = 6$, y la recta vertical que pasa por *P*, de ecuación $x = 7$.

CUESTIONES

133. ¿Existe algún valor de *a* para el que los puntos $O(0, 0)$, $A(1, 1)$ y $B(1, a)$ pertenezcan a una misma recta?

Para que los puntos *A*, *B* y *C* pertenezcan a una misma recta es necesario y suficiente que los vectores $\overrightarrow{OA} = (1,\ 1)$ y $\overrightarrow{OB} = (1,\ a)$ tengan la misma dirección, es decir, sean proporcionales. Por tanto:

$\dfrac{1}{1} = \dfrac{1}{a} \Rightarrow a = 1 \Rightarrow$ Para $a = 1$, los puntos *O*, *A* y *B* están alineados, de hecho, *A* y *B* son iguales.

134. a) Indica un vector de dirección y otro normal a la recta que tiene por ecuación explícita: $y = mx + n$

b) Indica un vector de dirección y otro normal de la recta que tiene por ecuación punto–pendiente: $y - y_0 = m(x - x_0)$

a) Vector de dirección $\vec{u} = (1,\ m)$ Vector normal $\vec{n} = (m,\ -1)$

b) Vector de dirección $\vec{u} = (1,\ m)$ Vector normal $\vec{n} = (m,\ -1)$

135. Indica, razonadamente, si las siguientes afirmaciones son ciertas o falsas.

a) Si la distancia de un punto a una recta es cero entonces obligatoriamente el punto está contenido en la recta.

b) Si la ecuación general de una recta no tiene término independiente entonces el origen de coordenadas pertenece a la recta.

c) La expresión $Ax + By + C = 0$ representa siempre una recta independientemente de los valores reales de *A*, *B* y *C*.

a) Cierta, si la recta es $r: Ax + By + C = 0$ y el punto es $P(a, b)$, al ser $d(P, r) = 0$, se verifica que $|Aa + Bb + C| = 0 \Rightarrow Aa + Bb + C = 0$, lo que significa que *P* verifica la ecuación de *r*, es decir, *P* pertenece a la recta.

b) Cierta, si la recta es $r: Ax + By = 0$, claramente el origen de coordenadas $O(0, 0)$ verifica la ecuación de *r*, es decir, pertenece a *r*.

c) Falsa. Si $A = B = 0$ la expresión no representa a ninguna recta.

136. Indica el lugar geométrico de los puntos del plano tales que:

a) Equidistan de dos rectas paralelas

b) La distancia a una recta fija sea 3 unidades de longitud.

c) Equidistan de los tres vértices de un triángulo.

d) Equidistan de los tres lados de un triángulo.

a) La recta paralela a ambas y que está a igual distancia de una y de otra.

b) Dos rectas paralelas a la dada (una a cada lado)y que estén a distancia 3 de ella.

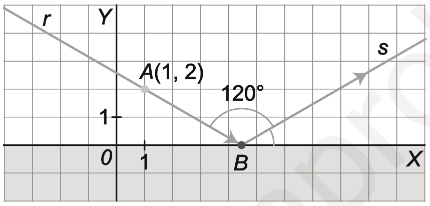
c) El circuncentro del triángulo (punto de intersección de las tres mediatrices).

d) El incentro del triángulo (punto de intersección de las tres bisectrices).

PROBLEMAS

137. Un rayo de luz *r*, que pasa por el punto *A*(1, 2), incide sobre el eje de abscisas y se refleja formando con él un ángulo de 30º.

Halla las ecuaciones de los rayos incidente y reflejado.



El rayo incidente pasa por *A* y forma con el eje de abscisas un ángulo de 150º, por tanto su pendiente es $m = \text{tg}150º = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ y su ecuación es de la forma $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + n$.

Como debe pasar por *A*, tenemos: $2 = -\frac{\sqrt{3}}{3} + n \Rightarrow n = \frac{6+\sqrt{3}}{3} \Rightarrow y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{6+\sqrt{3}}{3}$

Para calcular la ecuación del rayo reflejado observemos que el rayo incidente corta el eje de abscisas en $B\left(1+2\sqrt{3},\, 0\right)$, por tanto, el rayo reflejado pasa por *B* y forma con el eje de abscisas un ángulo de 30º, con lo que su pendiente es $m = \text{tg}30º = \frac{\sqrt{3}}{3}$ y su ecuación es de la forma $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + n$.

Como debe pasar por *B*, tenemos: $0 = \frac{\sqrt{3}}{3}\left(1+2\sqrt{3}\right) + n \Rightarrow n = -\frac{6+\sqrt{3}}{3} \Rightarrow y = \frac{\sqrt{3}}{3}x - \frac{6+\sqrt{3}}{3}$

138. Calcula el valor de *k* para que el área del triángulo de vértices *A*(4, 3), *B*(6, –3) y *C*(6, *k*) sea 20 u^2.

La recta que pasa por *A* y por *B* tiene por ecuación: $\frac{x-4}{-1} = \frac{y-3}{3} \Rightarrow 3x - 12 = -y + 3 \Rightarrow 3x + y - 15 = 0$.

La altura por *C* mide $h = d(C, AB) = \frac{|18+k-15|}{\sqrt{10}} = \frac{|3+k|}{\sqrt{10}}$ u y la base mide $d(A,B) = \sqrt{4+36} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$ u, por tanto, tenemos: $S = \pm\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{10}\cdot\frac{3+k}{\sqrt{10}} = \pm(3+k) = 20 \Rightarrow \begin{cases} 3+k = 20 \Rightarrow k = 17 \\ -3-k = 20 \Rightarrow k = -23 \end{cases}$

139. Los vértices opuestos de un cuadrado son los puntos *A*(0, 3) y *C*(4, 0).

a) ¿Cuáles son las coordenadas de los otros dos vértices?

b) ¿Cuál es el área del cuadrado?

a) La diagonal del cuadrado está sobre la recta *AC*: $3x + 4y - 12 = 0$.

La diagonal mide $d(A,C) = \sqrt{25} = 5$ u y su punto medio es $M\left(2, \frac{3}{2}\right)$.

Sea *P*(*a*, *b*) uno de los vértices, *MP* es perpendicular a *AC*, luego es de la forma $(3\lambda, 4\lambda)$.

Además, $d(M,P) = \frac{5}{2} \Rightarrow \sqrt{(3\lambda)^2 + (4\lambda)^2} = \frac{5}{2} \Rightarrow 5|\lambda| = \frac{5}{2} \Rightarrow \lambda = \pm\frac{1}{2}$

Obtenemos así los dos vértices faltantes:

$$\overrightarrow{MP} = \left(a-2, b-\frac{3}{2}\right) = (3\lambda, 4\lambda) \Rightarrow \begin{cases} \lambda = \frac{1}{2} \Rightarrow a = \frac{7}{2}, b = \frac{7}{2} \Rightarrow B\left(\frac{7}{2}, \frac{7}{2}\right) \\ \lambda = -\frac{1}{2} \Rightarrow a = \frac{1}{2}, b = -\frac{1}{2} \Rightarrow D\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) \end{cases}$$

b) Aplicando el teorema de Pitágoras se calcula la longitud del lado del cuadrado: $2l^2 = 5^2 \Rightarrow l = \frac{5}{\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$ u .

Por tanto el área del cuadrado es $S = l^2 = \frac{25}{2}$ u^2

140. En el paralelogramo de vértices *ABCD*, se conocen las coordenadas de los puntos *A*(0, 3), *B*(1, 0) y *C*(6, 1). Calcula la medida de sus diagonales y el ángulo que forman.

Si $D(a, b)$ tenemos: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Rightarrow (1, -3) = (6-a, 1-b) \Rightarrow a = 5, b = 4 \Rightarrow D(5, 4)$

Las diagonales miden: $d(A,C) = \sqrt{36+4} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$ u y $d(B,D) = \sqrt{16+16} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$ u

El ángulo que forman es: $\cos\alpha = \cos\left(\widehat{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}}\right) = \frac{|24-8|}{2\sqrt{10}4\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{5}}{5} \Rightarrow \alpha = 63,43^\circ$

141. Del cuadrado *ABCD*, se conocen las coordenadas del punto *A*(8, 7) y que los puntos *B* y *C* pertenecen a la recta de ecuación $3x-4y=19$.

a) ¿Cuáles son las coordenadas de los otros tres vértices?

b) Halla el perímetro y el área del cuadrado.

a) *AB* es perpendicular a $3x-4y=19$ y pasa por *A*, por tanto, su ecuación es: $4x+3y-53=0$

Estas dos rectas se cortan en *B*: $\begin{cases} 3x-4y-19=0 \\ 4x+3y-53=0 \end{cases} \Rightarrow B\left(\dfrac{269}{25}, \dfrac{83}{25}\right)$

Los puntos de la recta $3x-4y=19$ son de la forma $\left(\dfrac{269}{25}+4\lambda, \dfrac{83}{25}+3\lambda\right)$. Por otra parte, $d(B,C)=d(A,B)$, por tanto tenemos dos posibilidades para el vértice *C*:

$$\sqrt{(4\lambda)^2+(3\lambda)^2}=\sqrt{\left(\frac{69}{25}\right)^2+\left(-\frac{92}{25}\right)^2} \Rightarrow 5|\lambda|=\frac{23}{5} \Rightarrow \lambda=\pm\frac{23}{25} \Rightarrow \begin{cases} C_1=\left(\dfrac{361}{25}, \dfrac{152}{25}\right) \\ C_2=\left(\dfrac{177}{25}, \dfrac{14}{25}\right) \end{cases}$$

Por último, el vértice D_1 (asociado a C_1) es el simétrico de *B* respecto del punto medio M_1 de AC_1:

$$M_1=\left(\frac{561}{50}, \frac{327}{50}\right) \Rightarrow D_1\left(\frac{292}{25}, \frac{244}{25}\right)$$

Análogamente se obtiene el vértice D_2 asociado a C_2: $M_2=\left(\dfrac{377}{50}, \dfrac{189}{50}\right) \Rightarrow D_2\left(\dfrac{108}{25}, \dfrac{106}{25}\right)$

b) Aunque obtenemos dos posibles cuadrados en el apartado anterior, en ambos la longitud del lado es $l=d(A,B)=\dfrac{23}{5}$ u, por tanto el perímetro es $P=4l=\dfrac{92}{5}$ u y el área es $S=l^2=\dfrac{529}{25}$ u^2.

142. Calcula el valor de *k* para que la recta $x+y=k$ forme con los ejes coordenados un triángulo que verifique que su área es 5 u^2.

La recta corta a los ejes coordenados en $(k, 0)$ y $(0, k)$. El área del triángulo será, por tanto, $\dfrac{k^2}{2}$. Así, $k=\pm\sqrt{10}$.

143. Calcula el área del triángulo de vértices los puntos de corte de las rectas dadas.

$$r: x+3y=14$$
$$s: 3x-5y=4$$
$$t: 2x-y=-7$$

Los vértices del triángulo son:

$$\begin{cases} x+3y=14 \\ 3x-5y=4 \end{cases} \Rightarrow A\left(\frac{41}{7}, \frac{19}{7}\right) \quad \begin{cases} 3x-5y=4 \\ 2x-y=-7 \end{cases} \Rightarrow B\left(-\frac{39}{7}, -\frac{29}{7}\right) \quad \begin{cases} x+3y=14 \\ 2x-y=-7 \end{cases} \Rightarrow C(-1, 5)$$

La longitud de la base es $d(A,B)=\sqrt{\dfrac{8704}{49}}=\dfrac{16\sqrt{34}}{7}$ u y la altura es $d(C,AB)=\dfrac{|-3-25-4|}{\sqrt{34}}=\dfrac{16\sqrt{34}}{17}$ u, por tanto, el área del triángulo *ABC* es $S=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{16\sqrt{34}}{7}\cdot\dfrac{16\sqrt{34}}{17}=\dfrac{256}{7}$ u^2.

144. Calcula las rectas que pasan por el punto *P*(1, 2) y que determinan con los ejes coordenados un triángulo de área 4,5 u^2.

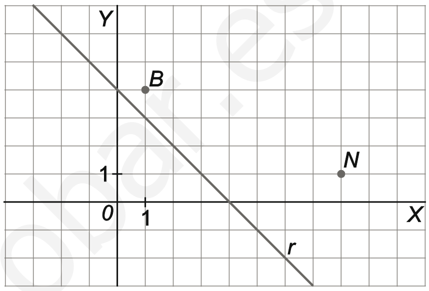
Las rectas que pasan por *P* son de la forma $y-2=m(x-1)\Rightarrow y=mx+2-m$. Cortan a los ejes en los puntos $(0,\,2-m)$ y $\left(\frac{m-2}{m},\,0\right)$.

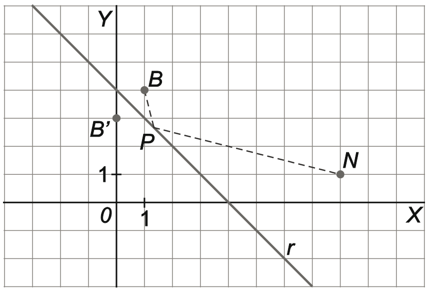
Tenemos:

$$\frac{(2-m)\frac{m-2}{m}}{2}=\frac{9}{2}\Rightarrow -m^2+4m-4=9m\Rightarrow m^2+5m+4=0\Rightarrow\begin{cases}m=-4\Rightarrow y=-4x+6\\ m=-1\Rightarrow y=-x+3\end{cases}$$

Hay, por tanto, dos soluciones.

145. Construye el camino que debe seguir la bola *B*(1, 4) para que llegue al punto *N*(8, 1) después de chocar en la banda $r: x+y-4=0$.





El simétrico de *B* respecto de *r* es *B′*(0, 3).

El punto de choque *M* es el punto de intersección de las rectas *B′N* y *r*:

$B'N$: $\frac{x}{8}=\frac{y-3}{-2}\Rightarrow -x=4y-12\Rightarrow x+4y-12=0$

$$\begin{cases}x+4y-12=0\\ x+y-4=0\end{cases}\Rightarrow x=\frac{4}{3},\ y=\frac{8}{3}\Rightarrow P\left(\frac{4}{3},\ \frac{8}{3}\right).$$

Camino: $\overline{BP}-\overline{PN}$

146. Dados los puntos *A*(4, 0), *M*(6, 2) y *N*(2, 4), calcula los vértices *B* y *C* del triángulo *ABC* de forma que *M* sea el punto medio del lado $\overline{AB}$ y *N* el punto medio del lado $\overline{AC}$.

Si $B(b_1,\,b_2)$ y $C(c_1,\,c_2)$, tenemos:

$$\begin{cases}\frac{4+b_1}{2}=6\\ \frac{0+b_2}{2}=2\end{cases}\Rightarrow b_1=8,\ b_2=4\Rightarrow B(8,\,4)\qquad\qquad \begin{cases}\frac{4+c_1}{2}=2\\ \frac{0+c_2}{2}=4\end{cases}\Rightarrow c_1=0,\ c_2=8\Rightarrow C(0,\,8)$$

147. El vértice *B* que determina el ángulo desigual de un triángulo isósceles, *ABC*, está situado en el punto (1, 2). Sabiendo que el vértice *A* tiene por coordenadas (1, 7) y que el vértice *C* está en la recta $x-y+1=0$, calcula las coordenadas del vértice *C*.

El punto *C* es de la forma $(t-1,\,t)$. Como el triángulo es isósceles, tenemos:

$$d(A,B)=d(B,C)\Rightarrow\sqrt{0^2+5^2}=\sqrt{(t-1-1)^2+(t-2)^2}\Rightarrow 5=\pm\sqrt{2}(t-2)\Rightarrow t=\frac{4\pm5\sqrt{2}}{2}\Rightarrow\begin{cases}C\left(\frac{2+5\sqrt{2}}{2},\ \frac{4+5\sqrt{2}}{2}\right)\\ C\left(\frac{2-5\sqrt{2}}{2},\ \frac{4-5\sqrt{2}}{2}\right)\end{cases}$$

148. Determina las ecuaciones de los lados de un triángulo que cumple las siguientes condiciones:

I. Tiene un vértice en $A(2, -7)$.

II. La recta $3x + y + 11 = 0$ es la altura relativa al vértice B.

III. La recta $x + 2y + 7 = 0$ es la mediana correspondiente al vértice C.

La recta AC es perpendicular a $3x + y + 11 = 0$, luego es de la forma $x - 3y + k = 0$.

Como pasa por A, ha de ser $k = -23$ y, por tanto, AC: $x - 3y - 23 = 0$.

Para conocer C basta calcular el punto de intersección de $x - 3y - 23 = 0$ y la altura $x + 2y + 7 = 0$, obteniéndose:

$$\begin{cases} x - 3y - 23 = 0 \\ x + 2y + 7 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 5,\ y = -6 \Rightarrow C(5, -6)$$

El vértice $B(a, b)$ pertenece a la altura $3x + y + 11 = 0$, por lo que se ha de cumplir $3a + b + 11 = 0$.

Por otra parte el punto medio del lado $AB, M\left(\frac{a+2}{2}, \frac{b-7}{2}\right)$, pertenece a la mediana $x + 2y + 7 = 0$, por lo que se cumplirá la ecuación $\frac{a+2}{2} + 2\cdot\frac{b-7}{2} + 7 = 0 \Rightarrow a + 2b + 2 = 0$.

Resolviendo el sistema formado por las dos ecuaciones obtenidas para a y b, encontramos las coordenadas del punto B:

$$\begin{cases} 3a + b + 11 = 0 \\ a + 2b + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow a = -4,\ b = 1 \Rightarrow B(-4, 1)$$

Las ecuaciones de los otros dos lados se calculan ahora de forma inmediata obteniéndose:

AB: $4x + 3y + 13 = 0$ y BC: $7x + 9y + 19 = 0$.

149. Calcula las ecuaciones de una recta que pasa por el punto $P(3, -1)$ y forma triángulos isósceles con las rectas $r: x - 2y = 0$ y $s: 2x + y = 0$.

Las pendientes de r y s valen $\frac{1}{2}$ y -2 por lo que son perpendiculares. Por tanto, la recta buscada forma un ángulo de 45º con cada una de las rectas dadas.

Observemos que hay dos rectas que cumplen esta condición, la bisectriz de r y s y la recta buscada.

Si m es la pendiente de la recta buscada, tomando, por ejemplo, s, tenemos:

$$\operatorname{tg} 45^\circ = \left|\frac{-2-m}{1-2m}\right| \Rightarrow -2 - m = \pm(1 - 2m) \Rightarrow m = 3,\ m = -\frac{1}{3}$$

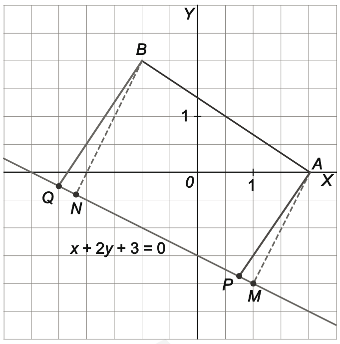
Para cualquiera de estos valores, el ángulo formado con r es también 45º.

Obtenemos así las dos rectas predichas, $y + 1 = 3(x - 3) \Rightarrow y = 3x - 10$ y $y + 1 = -\frac{1}{3}(x - 3) \Rightarrow x + 3y = 0$.

La segunda pasa por el punto de corte, $O(0, 0)$, de r y s, por lo que es la bisectriz de r y s, es decir, la ecuación buscada es $y = 3x - 10$.

150. Un trapecio rectángulo tiene dos vértices en los puntos *A*(2, 0) y *B*(–1, 2). Los dos vértices restantes están sobre la recta $x + 2y + 3 = 0$. Halla sus coordenadas. ¿Cuántas soluciones hay?

Como $\overline{AB} = (-3, 2)$, el lado *AB* no es paralelo a la recta $x + 2y + 3 = 0$ sobre la que están los otros dos vértices.



Caso 1: Los ángulos rectos del trapecio corresponden a los vértices *A* y *B*.

Las rectas perpendiculares a *AB* son de la forma $-3x + 2y + k = 0$.

La que pasa por *A* es $-3x + 2y + 6 = 0$. Su intersección con la recta $x + 2y + 3 = 0$ es uno de los vértices buscados:

$$\begin{cases} -3x+2y+6=0 \\ x+2y+3=0 \end{cases} \Rightarrow x=\frac{3}{4},\ y=-\frac{15}{8} \Rightarrow P\left(\frac{3}{4}, -\frac{15}{8}\right)$$

La que pasa por *B* es $-3x + 2y - 7 = 0$. Su intersección con la recta $x + 2y + 3 = 0$ es el otro vértice:

$$\begin{cases} -3x+2y-7=0 \\ x+2y+3=0 \end{cases} \Rightarrow x=-\frac{5}{2},\ y= \Rightarrow Q\left(-\frac{5}{2}, -\frac{1}{4}\right)$$

Caso 2: Los ángulos rectos se encuentran sobre la recta $x + 2y + 3 = 0$.

El vector normal de la recta y por tanto el vector director de los lados es: $\vec{n} = (1,\ 2)$

La recta que pasa por $A(2, 0)$ y que es perpendicular a $x + 2y + 3 = 0$ es:

$$(x, y) = (2, 0) + (1, 2)\lambda \Rightarrow y = 2x - 4$$

La recta que pasa por $B(-1, 2)$ y que es perpendicular a $x + 2y + 3 = 0$ es:

$$(x, y) = (-1, 2) + (1, 2)\lambda \Rightarrow y = 2x + 4$$

Los vértices son:

$$\begin{cases} x+2y+3=0 \\ y=2x-4 \end{cases} \Rightarrow x=1,\ \ y=-2 \Rightarrow M(1, -2)$$

$$\begin{cases} x+2y+3=0 \\ y=2x+4 \end{cases} \Rightarrow x=-\frac{11}{5},\ \ y=-\frac{2}{5} \Rightarrow N\left(-\frac{11}{5}, -\frac{2}{5}\right)$$

151. Del rombo *ABCD*, se conocen las coordenadas de los puntos *A*(2, 3) y *C*(–2, –5). Sabiendo que su área es 20 u^2, halla los vértices *B* y *D* y el perímetro del rombo.

La ecuación de *AC* es $2x - y - 1 = 0$ y el punto medio de *AC* es *M*(0, –1).

Como *BD* es perpendicular a *AC* y pasa por *M*, tenemos *BD*: $x + 2y + 2 = 0$. De este modo, *B* es de la forma $(-2-2b, b)$ y *C* es de la forma $(-2-2d, d)$.

Para calcular *b* y *d* observemos que la diagonal *AC* mide $\sqrt{16+64} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$ u, por tanto, como el área es 20 u^2, la diagonal *BD* mide $2\sqrt{5}$ u.

Además, el punto medio de *BD*es *M*, por tanto, tenemos:

$$\begin{cases} \sqrt{(-2d+2b)^2+(d-b)^2} = 2\sqrt{5} \\ \left(-2-b-d, \dfrac{b+d}{2}\right) = (0, -1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{5(d-b)^2} = 2\sqrt{5} \\ b+d=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d-b=\pm 2 \\ b+d=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=0,\ d=-2 \\ b=-2,\ d=0 \end{cases}$$

Los vértices son *B*(2, –2) y *D*(–2, 0), el perímetro es $P = 4d(A,B) = 20$ u.

152. Dadas las rectas *r* : *x* – 2*y* = 2 y *s* : 2*x* – *y* + 6 = 0, halla todas las rectas que pasen por el punto *P*(1, 1) y que formen con *r* y *s* ángulos iguales.

Las rectas que pasan por *P* son de la forma: $y-1=m(x-1)\Rightarrow mx-y+1-m=0$.

Ángulo con *r*: $\cos\alpha=\dfrac{|m+2|}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{1+m^2}}$ Ángulo con *s*: $\cos\alpha=\dfrac{|2m+1|}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{1+m^2}}$

Por tanto: $\begin{cases} m+2=2m+1\Rightarrow m=1\Rightarrow a_1\equiv x-y=0 \\ m+2=-2m-1\Rightarrow m=-1\Rightarrow -x-y+2=0\Rightarrow a_2\equiv x+y-2=0 \end{cases}$

153. Los puntos *A*(–2, 2) y *C*(3, 1) son vértices opuestos de un rombo *ABCD*. Sabiendo que el vértice *B* pertenece al eje de abscisas, calcula las coordenadas de los vértices *B* y *D* y el área del rombo.

La diagonal *BD* está contenida en la recta perpendicular a la recta $AC: x+5y-8=0$ que pasa por $M\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{2}\right)$, punto medio de la diagonal *AC*.

Por tanto, la diagonal *BD* está contenida en la recta $5x-y-1=0$.

La intersección de dicha recta con el eje de abscisas es el vértice $B\left(\dfrac{1}{5},0\right)$.

El vértice $D(a,b)$ verifica: $\overline{BD}=2\overline{BM}\Rightarrow\left(a-\dfrac{1}{5},b\right)=\left(\dfrac{3}{5},3\right)\Rightarrow a=\dfrac{4}{5},\ b=3\Rightarrow D\left(\dfrac{4}{5},3\right)$.

Las diagonales del rombo miden $d(A,C)=\sqrt{26}$ u y $d(B,D)=\sqrt{\dfrac{234}{25}}=\dfrac{3\sqrt{26}}{5}$ u, por tanto, el área del rombo es $S=\dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{26}\cdot\dfrac{3\sqrt{26}}{5}=\dfrac{39}{5}$ u^2.

154. El lado desigual de un triángulo isósceles es el segmento $\overline{AB}$, con *A*(3, 1) y *B*(1, 2). Calcula las coordenadas del vértice *C* del triángulo, sabiendo que su área es de 4 u^2.

$d(A,B)=\sqrt{(-2)^2+1^2}=\sqrt{5}$ u, por tanto, la altura del triángulo verifica: $4=\dfrac{1}{2}\sqrt{5}h\Rightarrow h=\dfrac{8\sqrt{5}}{5}$ u.

C es el punto que situado en la perpendicular a *AB* por su punto medio y que dista de *AB* $\dfrac{8\sqrt{5}}{5}$ u:

$AB:\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y-1}{-1}\Rightarrow -x+3=2y-2\Rightarrow x+2y-5=0$, y el punto medio de $\overline{AB}$ es $M\left(2,\dfrac{3}{2}\right)$.

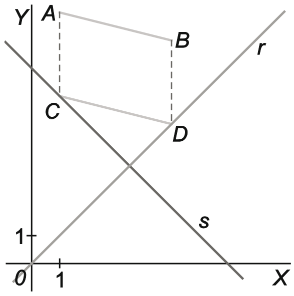
La recta perpendicular es $2x-y-\dfrac{5}{2}=0$ y sus puntos son de la forma $\left(t,2t-\dfrac{5}{2}\right)$. Imponiendo que disten $\dfrac{8\sqrt{5}}{5}$ u de la recta *AB* tenemos:

$$\frac{8\sqrt{5}}{5}=\frac{\left|t+2\left(2t-\frac{5}{2}\right)-5\right|}{\sqrt{1+4}}\Rightarrow|5t-10|=8\Rightarrow\begin{cases} t=\dfrac{18}{5}\Rightarrow C_1\left(\dfrac{18}{5},\dfrac{47}{10}\right) \\ t=\dfrac{2}{5}\Rightarrow C_2\left(\dfrac{2}{5},-\dfrac{17}{10}\right) \end{cases}$$

Por tanto, hay dos soluciones.

PARA PROFUNDIZAR

155. Dadas las rectas $r: x - y = 0$ y $s: x + y - 7 = 0$ y el segmento de extremos $A(1, 9)$ y $B(5, 8)$, calcula las coordenadas de los extremos de un segmento $\overline{CD}$ de la misma longitud que $\overline{AB}$, paralelo a él y tal que el punto C pertenezca a la recta s y el punto D a la r.



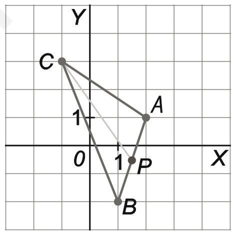
Los puntos de r son de la forma $D(d, d)$ y los puntos de s son de la forma $C(c, 7-c)$.

Los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$ pueden ser iguales u opuestos, por tanto:

$$\begin{cases} d - c = 4 \\ d - 7 + c = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d - c = 4 \\ d + c = 6 \end{cases} \Rightarrow c = 1,\ d = 5 \Rightarrow C(1, 6) \text{ y } D(5, 5)$$

$$\begin{cases} d - c = -4 \\ d - 7 + c = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d - c = -4 \\ d + c = 8 \end{cases} \Rightarrow c = 6,\ d = 2 \Rightarrow C(6, 1) \text{ y } D(2, 2)$$

156. Dado el triángulo $A(2, 1)$, $B(1, -2)$ y $C(-1, 3)$



a) Calcula el punto P, intersección de la bisectriz del ángulo C con el lado opuesto $\overline{AB}$.

b) Demuestra que $\dfrac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = \dfrac{\overline{CA}}{\overline{CB}}$.

a) $AB: \dfrac{x-2}{-1} = \dfrac{y-1}{-3} \Rightarrow 3x - y - 5 = 0$ $AC: \dfrac{x-2}{-3} = \dfrac{y-1}{2} \Rightarrow 2x + 3y - 7 = 0$

$BC: \dfrac{x+1}{-2} = \dfrac{y-3}{5} \Rightarrow 5x + 2y - 1 = 0$

Bisectriz interior del ángulo C:

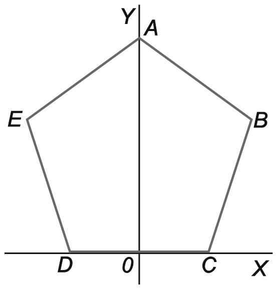
$$\frac{2x + 3y - 7}{\sqrt{13}} = -\frac{5x + 2y - 1}{\sqrt{29}} \Rightarrow \left(2\sqrt{29} + 5\sqrt{13}\right)x + \left(3\sqrt{29} + 2\sqrt{13}\right)y - 7\sqrt{29} - \sqrt{13} = 0$$

Al resolver el sistema formado por las rectas bisectriz y AB se obtiene el punto: $P\left(\dfrac{45 - \sqrt{377}}{16}, \dfrac{55 - 3\sqrt{377}}{16}\right)$

b) En efecto, al realizar el cálculo se obtiene $\dfrac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = \dfrac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = \dfrac{\sqrt{377}}{29}$.

157. Calcula, de forma exacta, las coordenadas de los vértices del pentágono regular de la figura sabiendo que su lado mide 2 unidades.

Comprueba que el cociente entre la distancia de D a B y la distancia de D a C es el número áureo $\Phi = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$.



El ángulo interior de un pentágono regular vale $\dfrac{3 \cdot 180^\circ}{5} = 108^\circ$.

$C(1, 0)$, $D(-1,0)$

Por el teorema del coseno: $DB = \sqrt{2^2 + 2^2 - 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \cos 108^\circ} = \sqrt{8 + 8\cos 72^\circ}$

Teniendo en cuenta que las longitudes de DA y DB son iguales, tenemos: $A\left(0, \sqrt{DA^2 - 1^2}\right) = \left(0, \sqrt{7 + 8\cos 72^\circ}\right)$

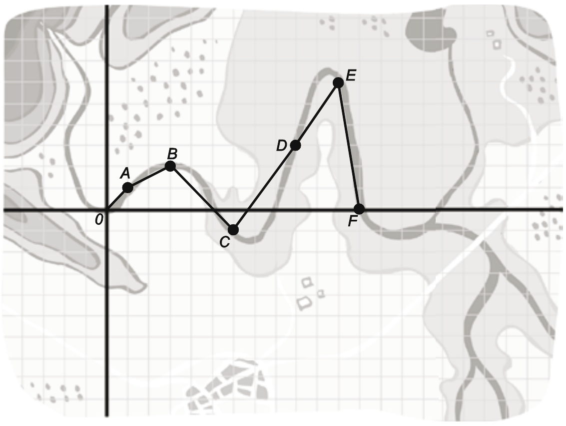
$B\left(-1 + \sqrt{8 + 8\cos 72^\circ} \cdot \cos 36^\circ, \sqrt{8 + 8\cos 72^\circ} \cdot \operatorname{sen} 36^\circ\right)$ $E\left(1 - \sqrt{8 + 8\cos 72^\circ} \cdot \cos 36^\circ, \sqrt{8 + 8\cos 72^\circ} \cdot \operatorname{sen} 36^\circ\right)$

$$\frac{DB}{DC} = \frac{\sqrt{8 + 8\cos 72^\circ}}{2} = \sqrt{2 + 2\cos 72^\circ} = 1{,}618033989... = \Phi$$

ENTORNO MATEMÁTICO

A vueltas con el río

Dentro de unos días, la clase de Antonio y Juana va a salir de excursión al campo. Aprovechando esta circunstancia y con el propósito de hacer la clase de matemáticas más animada, la profesora propone un concurso por equipos: ¿quién puede dar la mejor aproximación a la longitud que separa a las dos puntos O y F del cauce de un río?



Para ello proporciona un boceto del río de la zona de acampada, calcado de un plano a escala obtenido de una página de mapas de Internet. Para facilitar la tarea, inserta un par de ejes coordenados de forma que el origen de coordenadas es el punto *O*. La cuadrícula está formada por cuadrados de 20 m de lado.

Rápidamente y con intención de demostrar que son los más rápidos a la hora de resolver problemas y, por tanto, merecedores de ganar el concurso, el equipo de Antonio, idea el siguiente método:

Elegirá cinco puntos del cauce que junto con *O* y con *F* formarán una línea poligonal *OA*–*AB*–*BC*–*CD*–*DE*–*EF*. La longitud de esta poligonal se aproximará a la longitud del cauce del río.

Tras exponer su idea a la clase, la profesora confirma que el método parece adecuado pero indica que cree que la aproximación, tal vez debido a la rapidez con la que ha sido elaborada, no es muy buena y que habría que mejorarla.

Basándose en la misma idea, el equipo de Juana, tras reflexionar un poco más, propone colocar dos puntos más *G* y *H* de forma que la nueva poligonal se ajuste mejor a la línea del cauce.

a) Calcula la aproximación que obtiene el equipo de Antonio.

b) Calcula la aproximación que obtiene el equipo de Juana.

c) Añade algún punto más y obtén la nueva aproximación.

a) *O*(0, 0),*A*(1,1),*B*(3, 2),*C*(6, –1),*D*(9, 3),*E*(11, 6) y*F*(12, 0)

La poligonal mide $\sqrt{2}+\sqrt{5}+\sqrt{18}+\sqrt{25}+\sqrt{13}+\sqrt{37}\simeq 22,58$ u , por tanto, el equipo de Antonio obtiene 451,6 m.

b) Añadiendo los puntos *G*(8,0) y *H*(10, 6) la poligonal mide $\sqrt{2}+\sqrt{5}+\sqrt{18}+\sqrt{5}+\sqrt{10}+\sqrt{10}+\sqrt{1}+\sqrt{37}\simeq 23,54$ u , por lo que el equipo de Juana obtiene 470,8 m.

c) Añadiendo, por ejemplo, *I*(4,5; 1) y *J*(7,5; –1) obtenemos como aproximación $20\cdot 23,98=479,6$ m.

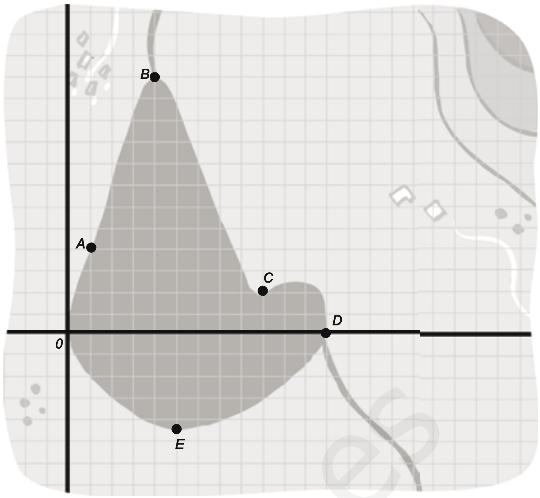
¿Piraguas en la laguna?

En la zona en la que van a acampar, el río desemboca en una laguna y los profesores del colegio están pensando si alquilar o no unas piraguas para practicar piragüismo. Como la actividad, además de cara, conlleva riesgos (y no sólo el de algún alumno en remojo), solo lo harán si la laguna es lo suficientemente grande como para que la experiencia merezca la pena y no una charca en la que dar un par de paladas.

La profesora propone un nuevo reto a los equipos: calcular aproximaciones de la superficie de dicha laguna.

De nuevo proporciona a los equipos un esquema con los límites de la superficie que se quiere calcular. Los cuadros de la cuadrícula en este caso tienen por lado 4m.

En este caso, el más rápido es el equipo de Juana, que propone considerar los puntos *O*, *A*, *B*, *C*, *D* y *E* del perímetro del lago y calcular el área del polígono formado por ellos mediante triangulación.



a) Calcula el área de los triángulos *ABC*, *OAC*, *OCD* y *ODE* de la figura utilizando los métodos de la geometría analítica.

b) Utiliza alguna aplicación de geometría dinámica para obtener el área de los triángulos anteriores y añade algunos puntos más para mejorar la aproximación.

a) $O(0, 0)$, $A(1, 4)$, $B(4, 12)$, $C(9, 2)$, $D(12, 0)$ y $E(5; -4{,}5)$

$$ABC: \begin{cases} \text{base: } d(A,C) = \sqrt{64+3} = \sqrt{68} = 2\sqrt{17} \text{ u} \\ AC\text{: } x + 4y - 17 = 0 \\ \text{altura: } h = d(B,AC) = \dfrac{|4 + 4\cdot 12 - 17|}{\sqrt{17}} = \dfrac{35}{\sqrt{17}} = \dfrac{35\sqrt{17}}{17} \text{ u} \end{cases} \Rightarrow S_1 = \frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{17}\cdot\frac{35\sqrt{17}}{17} = 35 \text{ u}^2$$

$$OAC: \begin{cases} \text{base: } d(O,A) = \sqrt{17} \text{ u} \\ OA: 4x - y = 0 \\ \text{altura: } h = d(C,OA) = \dfrac{|36-2|}{\sqrt{17}} = \dfrac{34}{\sqrt{17}} = 2\sqrt{17} \text{ u} \end{cases} \Rightarrow S_2 = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{17}\cdot 2 = 17 \text{ u}^2$$

$$OCD: \begin{cases} \text{base: } d(O,D) = 12 \text{ u} \\ \text{altura: } h = 2 \text{ u} \end{cases} \Rightarrow S_3 = \frac{1}{2}\cdot 12\cdot 2 = 12 \text{ u}^2 \quad \overset{\Delta}{ODE}: \begin{cases} \text{base: } d(O,D) = 12 \text{ u} \\ \text{altura: } h = 4{,}5 \text{ u} \end{cases} \Rightarrow S_4 = \frac{1}{2}\cdot 12\cdot 4{,}5 = 27 \text{ u}^2$$

El equipo de Juana obtiene $S \simeq S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = 35 + 17 + 12 + 27 = 91 \text{ u}^2 \Rightarrow 91\cdot 4^2 = 1456 \text{ m}^2$

b) La superficie se aproxima a $103 \text{ u}^2 \Rightarrow 103\cdot 16 = 1648 \text{ m}^2$

AUTOEVALUACION

Comprueba qué has aprendido

1. Calcula en cada caso la ecuación de la recta.

a) Paralela a la recta $s: 2x+3y=5$ y que pasa por $P(0,-3)$.

b) Perpendicular a la recta $s: 4x-3y+5=0$ y que pasa por el punto $P(1, 1)$.

c) De dirección la del vector $\overrightarrow{AB}$ con $A(2, 4)$ y $B(-1,3)$ y que pasa por el punto de intersección de las rectas $5x+y-20=0$ e $y=x+2$.

a) Las rectas paralelas a s son de la forma $2x+3y+K=0$, la que pasa por P es:

$-9+K=0 \Rightarrow K=9 \Rightarrow 2x+3y+9=0$

b) Las rectas perpendiculares a s son de la forma $3x+4y+K=0$, la que pasa por P es:

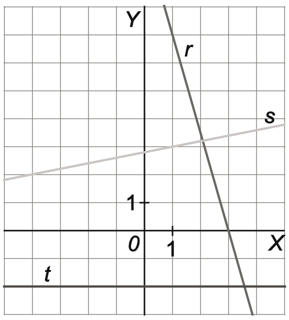
$3+4+K=0 \Rightarrow K=-7 \Rightarrow 3x+4y-7=0$

c) Calculamos el punto de intersección:

$$\begin{cases} 5x+y-20=0 \\ y=x+2 \end{cases} \Rightarrow x=3,\ y=5 \Rightarrow P(3, 5)$$

Como $\overrightarrow{AB}=(-3, -1)$, la recta buscada tiene ecuación: $\dfrac{x-3}{-3}=\dfrac{y-5}{-1} \Rightarrow x-3y+12=0$

2. Calcula la pendiente y la ordenada en el origen de las rectas *r*, *s* y *t* que aparecen en la figura. Indica un vector de dirección de cada una de ellas.



La recta r pasa por los puntos (3, 0) y (1, 7), por tanto, un vector director es $\overrightarrow{u_r}=(-2, 7)$, su ecuación es $r: 7x+2y-21=0$, su pendiente es $m_r=-\dfrac{7}{2}$ y su ordenada en el origen es $n_r=\dfrac{21}{2}$.

La recta s pasa por los puntos (1, 3) y (–4, 2), por tanto, un vector director es $\overrightarrow{u_s}=(5, 1)$, su ecuación es $s: x-5y+14=0$, su pendiente es $m_s=\dfrac{1}{5}$ y su ordenada en el origen es $n_s=\dfrac{14}{5}$.

La recta t es la recta horizontal $t: y=-2$, con vector director $\overrightarrow{u_t}=(1, 0)$, pendiente $m_t=0$ y ordenada en el origen $n_t=-2$.

3. Calcula la ecuación de la recta paralela a $x+y=0$ y que forma con los ejes coordenados un triángulo de 30 u^2. ¿Hay una única solución?

La recta debe tener por ecuación $x+y=k$, por lo que corta a los ejes en los puntos $A(k, 0)$ y $B(0, k)$.

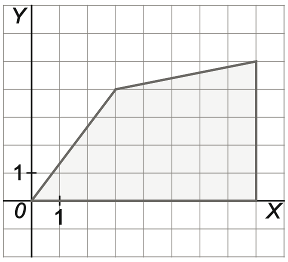
El área del triángulo OAB será $S=\dfrac{k^2}{2}=30 \Rightarrow k^2=60 \Rightarrow k=\pm\sqrt{60}=\pm 2\sqrt{15}$

Por tanto, hay dos soluciones: $\begin{cases} x+y=\sqrt{60} \\ x+y=-\sqrt{60} \end{cases}$

4. **Calcula el punto simétrico de *P*(5,–2) respecto del punto intersección de las rectas** $\begin{cases} \mathbf{2x + y = 5} \\ \mathbf{-x + 4y = 2} \end{cases}$.

El punto de intersección de las rectas es $Q(2, 1)$, por tanto, si $P'(a, b)$ es el simétrico de P, tenemos que Q debe ser el punto medio de PP', con lo que: $\begin{cases} \dfrac{5+a}{2} = 2 \\ \dfrac{-2+b}{2} = 1 \end{cases} \Rightarrow a = -1,\ b = 4 \Rightarrow P' = (-1, 4)$

5. **Calcula el área del cuadrilátero de la figura.**



Los vértices del cuadrilátero son $O(0, 0)$, $A(3, 4)$, $B(8, 5)$ y $C(8, 0)$.

Área del triángulo OAC: $S_1 = \dfrac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2} = \dfrac{d(A,C) \cdot d(A,OC)}{2} = \dfrac{8 \cdot 4}{2} = 16 \text{ u}^2$

Área del triángulo ACB: $S_2 = \dfrac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2} = \dfrac{d(B,C) \cdot d(A,BC)}{2} = \dfrac{5 \cdot 5}{2} = \dfrac{25}{2} \text{ u}^2$

Área del cuadrilátero: $S = S_1 + S_2 = \dfrac{57}{2} \text{ u}^2$

6. **Dado el triángulo de vértices *A*(–3, 2),*B*(1,4) y *C*(2,–1), calcula:**

a) Los ángulos

b) Las coordenadas de su ortocentro

c) La ecuación de la bisectriz del ángulo A

a) $AB: \dfrac{x+3}{4} = \dfrac{y-2}{2} \Rightarrow x - 2y + 7 = 0 \quad AC: \dfrac{x+3}{5} = \dfrac{y-2}{-3} \Rightarrow 3x + 5y - 1 = 0 \quad BC: \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-4}{-5} \Rightarrow 5x + y - 9 = 0$

Ángulo A: $\cos \hat{A} = \dfrac{|3-10|}{\sqrt{5}\sqrt{34}} = \dfrac{7}{\sqrt{170}} = \dfrac{7\sqrt{170}}{170} \Rightarrow \hat{A} = 57{,}53^\circ$

Ángulo B: $\cos \hat{B} = \dfrac{|5-2|}{\sqrt{5}\sqrt{26}} = \dfrac{3}{\sqrt{130}} = \dfrac{3\sqrt{130}}{130} \Rightarrow \hat{B} = 74{,}74^\circ$

Ángulo C: $\cos \hat{C} = \dfrac{|15+5|}{\sqrt{34}\sqrt{26}} = \dfrac{20}{2\sqrt{221}} = \dfrac{10\sqrt{221}}{221} \Rightarrow \hat{C} = 47{,}73^\circ$

b) Altura por A: $x - 5y + K = 0 \Rightarrow -3 - 10 + K = 0 \Rightarrow K = 13 \Rightarrow x - 5y + 13 = 0$

Altura por B: $5x - 3y + K = 0 \Rightarrow 5 - 12 + K = 0 \Rightarrow K = 7 \Rightarrow 5x - 3y + 7 = 0$

Ortocentro: $\begin{cases} x - 5y + 13 = 0 \\ 5x - 3y + 7 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = \dfrac{2}{11},\ y = \dfrac{29}{11} \Rightarrow H\left(\dfrac{2}{11}, \dfrac{29}{11}\right)$

c) $\dfrac{x - 2y + 7}{\sqrt{5}} = \dfrac{3x + 5y - 1}{\sqrt{34}} \Rightarrow \left(\sqrt{34} - 3\sqrt{5}\right)x - \left(2\sqrt{34} + 5\sqrt{5}\right)y + 7\sqrt{34} - \sqrt{5} = 0$

7. Dados la recta $r: x+y-1=0$ y los punto $A(4,-4)$ y $B(5,-1)$, calcula el punto intersección de la mediatriz del segmento AB con la recta perpendicular a r y que pasa por A.

Mediatriz del segmento *AB*: $\sqrt{(x-4)^2+(y+4)^2}=\sqrt{(x-5)^2+(y+1)^2} \Rightarrow x+3y+3=0$

Perpendicular a *r* por *A*: $x-y+K=0 \Rightarrow 4+4+K=0 \Rightarrow K=-8 \Rightarrow x-y-8=0$

Punto de intersección: $\begin{cases} x+3y+3=0 \\ x-y-8=0 \end{cases} \Rightarrow x=\frac{21}{4},\ y=-\frac{11}{4} \Rightarrow P\left(\frac{21}{4}, -\frac{11}{4}\right)$

Relaciona y contesta

Elige la única respuesta correcta en cada caso

1. Las rectas $r: \begin{cases} x=2-\lambda \\ y=3-2\lambda \end{cases}$ y $s: \begin{cases} x=1+\frac{1}{2}\lambda \\ y=1+\lambda \end{cases}$:

A. Son paralelas.

B. Son secantes y se cortan en el punto $Q(2, 3)$.

C. Son secantes y se cortan en el punto $R(1, 1)$.

D. Son la misma recta.

$r: \begin{cases} x=2-\lambda \\ y=3-2\lambda \end{cases} \Rightarrow \frac{x-2}{-1}=\frac{y-3}{-2} \Rightarrow 2x-y-1=0 \quad s: \begin{cases} x=1+\frac{1}{2}\lambda \\ y=1+\lambda \end{cases} \Rightarrow \frac{x-1}{\frac{1}{2}}=y-1 \Rightarrow 2x-y-1=0$

La respuesta correcta es D.

2. La proyección ortogonal del segmento de extremos $A(1, 5)$ y $B(3, 5)$ sobre la recta $y-x=0$ mide:

A. 2 u

B. $2\sqrt{2}$ u

C. $\sqrt{2}$ u

D. Ninguna de las anteriores.

Las recta perpendiculares a $x-y=0$ son de la forma $x+y+K=0$, la que pasa por *A* es $x+y-6=0$ y la que pasa por B es $x+y-8=0$.Intersecando estas rectas con $x-y=0$ obtenemos los extremos *A′* y *B′* de la proyección ortogonal del segmento *AB*.Así, $A'(3, 3)$ y $B'(4, 4)$, con lo que $d(A',B')=\sqrt{2}$, la respuesta C.

3. El área del triángulo determinado por el origen de coordenadas y las intersecciones de la recta $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ con los ejes coordenados es:

A. $A=ab$

B. $A=\frac{ab}{2}$

C. $A=2ab$

D. $A=\frac{a}{2}\cdot\frac{b}{2}$

Los puntos de intersección son $(a, 0)$ y $(0, b)$, por tanto, el área del triángulo es $A=\frac{ab}{2}$, la respuesta B.

Señala, en cada caso, las respuestas correctas

4. Se consideran los puntos del plano $A(a, 1)$, $B(a-1, 4)$ y $C(-1, a)$.

A. Para $a=-2$ los puntos están alineados.

B. Para $a=\frac{1}{2}$, ABC es un triángulo rectángulo en A.

C. Para $a=2$, ABC es un triángulo isósceles.

D. Para $a=-2$, B es el punto medio del segmento AC.

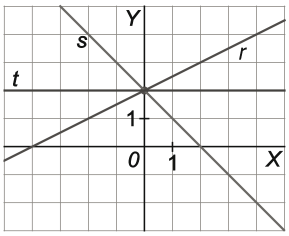
Se observa que $\overrightarrow{AB}=(-1, 3)$, $\overrightarrow{AC}=(-1-a, a-1)$, $\overrightarrow{BC}=(-a, a-4)$ y el punto medio de AC es $\left(\frac{a-1}{2}, \frac{1+a}{2}\right)$.

Si $a=-2$ se tiene que $\overrightarrow{AB}=(-1, 3)$ y $\overrightarrow{AC}=(1, -3)$ son proporcionales, por lo que la respuesta A es correcta, pero el punto medio de AC, $\left(\frac{-3}{2}, \frac{-1}{2}\right)$ no coincide con B, por lo que la respuesta D es incorrecta.

Si $a=\frac{1}{2}$ se tiene que $\overrightarrow{AB}=(-1, 3)$ y $\overrightarrow{AC}=\left(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ son perpendiculares, por lo que la respuesta B es correcta.

Si $a=2$ se tiene que $\overrightarrow{AB}=(-1, 3)$ y $\overrightarrow{AC}=(-3, -1)$ tienen la misma longitud, pero es distinta de la longitud de $\overrightarrow{BC}=(-2, -2)$, por lo que la respuesta C también es correcta.

5. Para r, s y t, sean m_r, m_s y m_t las pendientes y n_r, n_s y n_t las ordenadas en el origen.



A. $m_r=2, m_s=-2$ y $m_t=0$

B. $m_r=\frac{1}{2}, m_s=-1$ y $m_t=0$

C. $m_t=1$ y $n_t=2$

D. $m_r=\frac{1}{2}$ y $n_r=2$

$m_r=\frac{1}{2}, m_s=-1, m_t=0$ y $n_r=n_s=n_t=2$, por tanto, las respuestas correctas son B y D.

Elige la relación correcta entre las dos afirmaciones dadas

6. Se considera el haz de rectas $2x-y+\lambda(x+y-3)=0$ de vértice el punto (1, 2) y se consideran las afirmaciones:

1. La ecuación de la recta *r* se obtiene al sustituir algún valor real de λ en la expresión del haz.

2. La recta *r* pasa por el punto (1, 2)

A. $1 \Leftrightarrow 2$

B. $1 \Rightarrow 2$ pero $2 \not\Rightarrow 1$

C. $2 \Rightarrow 1$ pero $1 \not\Rightarrow 2$

D. Nada de lo anterior.

La ecuación del haz representa todas las rectas que pasan por (1, 2) salvo la recta $x+y-3=0$, por tanto, la relación correcta es B.

Señala el dato innecesario para contestar

7. **Para calcular la ecuación de una única recta *s* paralela a la recta *r* y que diste de ella *k* u se dan los siguientes datos:**

   1. **La ecuación general de *r* es $3x - 4y + 3 = 0$.**
   2. **$k = 3$ u**
   3. **La ordenada en el origen de *r* es mayor que la de *s*.**

   A. El dato 1 es innecesario.

   B. El dato 2 es innecesario.

   C. El dato 3 es innecesario.

   D. Ningún dato es innecesario.

   Obviamente necesitamos los datos 1 y 2, pero sólo con estos datos podemos encontrar dos rectas paralelas a *r* que disten de ella *k* u, una a cada lado de *r*. Para que haya una única solución también necesitamos el dato 3, por tanto, la respuesta correcta es D.

6 Cónicas

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Ejercicio resuelto.

2. Comprueba que la ecuación $3x^2+3y^2-6x+12y-14=0$ representa una circunferencia y determina su radio.

Tenemos $3x^2+3y^2-6x+12y-14=0 \Rightarrow x^2+y^2-2x+4y-\frac{14}{3}=0 \Rightarrow (x-1)^2+(y+2)^2=\frac{29}{3}$, ecuación de una circunferencia de centro $C(1, -2)$ y radio $r=\sqrt{\frac{29}{3}}$.

3. Estudia si el punto *P* es interior, exterior o perteneciente a la circunferencia $x^2+y^2-10x=0$.

a) $P(2, 4)$ **b)** $P(2, 2)$ **c)** $P(2, 5)$

La circunferencia tiene centro $C(5, 0)$ y radio $r=\sqrt{25}=5$.

a) $d(P, C)=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5=r \Rightarrow P$ pertenece a la circunferencia.

b) $d(P, C)=\sqrt{9+4}=\sqrt{13}<r \Rightarrow P$ es interior a la circunferencia.

c) $d(P, C)=\sqrt{9+25}=\sqrt{34}>r \Rightarrow P$ es exterior a la circunferencia.

4. Indica la posición relativa de la recta $3x+4y=25$ respecto de la circunferencia $x^2+y^2-6x+8y-25=0$.

La circunferencia tiene centro $C(3, -4)$ y radio $r=\sqrt{9+16+25}=\sqrt{50}=5\sqrt{2}$.

La distancia del centro *C* a la recta es $\frac{|9-16-25|}{\sqrt{9+16}}=\frac{32}{5}<r$, por tanto, la recta y la circunferencia son secantes.

5. Estudia la posición relativa de cada pareja de circunferencias.

a) $x^2+y^2=25$ y $2x^2+2y^2+3y-3=0$ **b)** $x^2+y^2+2x-16=0$ y $x^2+y^2+5x+3y-9=0$

a) La primera circunferencia tiene centro $C_1(0, 0)$ y radio $r_1=\sqrt{25}=5$, la segunda tiene centro $C_2\left(0, -\frac{3}{4}\right)$ y radio $r_2=\sqrt{\frac{33}{16}}=\frac{\sqrt{33}}{4}$. Como $d(C_1, C_2)=\sqrt{\frac{9}{16}}=\frac{3}{4}$, tenemos $d(C_1, C_2)<r_1-r_2$ y, por tanto, la segunda circunferencia es interior a la primera.

b) La primera circunferencia tiene centro $C_1(-1, 0)$ y radio $r_1=\sqrt{17}$, la segunda tiene centro $C_2\left(-\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}\right)$ y radio $r_2=\sqrt{\frac{35}{2}}$. Como $d(C_1, C_2)=\sqrt{\frac{9}{4}+\frac{9}{4}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$, tenemos $r_2-r_1<d(C_1, C_2)<r_2+r_1$ y, por tanto, las circunferencias son secantes.

6 y 7. Ejercicios resueltos.

8. En cada caso, halla la posición relativa entre el punto y la circunferencia $x^2+y^2-2x-2y+1=0$.

a) $P\left(1, \frac{3}{2}\right)$ **b)** $Q\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2}, \frac{2+\sqrt{2}}{2}\right)$ **c)** $R\left(\frac{8}{5}, \frac{1}{5}\right)$ **d)** $P\left(2, \frac{1}{4}\right)$

a) $Pot_{Cf}(P)=1^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2-2\cdot 1-2\cdot\frac{3}{2}+1=-\frac{3}{4}$. *P* es interior a la circunferencia.

b) $Pot_{Cf}(Q)=\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2}\right)^2-2\cdot\frac{2+\sqrt{2}}{2}-2\cdot\frac{2+\sqrt{2}}{2}+1=0$. *Q* pertenece a la circunferencia.

c) $Pot_{Cf}(R)=\left(\frac{8}{5}\right)^2+\left(\frac{1}{5}\right)^2-2\cdot\frac{8}{5}-2\cdot\frac{1}{5}+1=0$. *R* pertenece a la circunferencia.

d) $Pot_{Cf}(S)=2^2+\left(\frac{1}{4}\right)^2-2\cdot 2-2\cdot\frac{1}{4}+1=\frac{9}{16}$. *S* es exterior a la circunferencia.

9. Estudia la posición relativa del punto $P(m+1, m)$ respecto de las siguientes circunferencias, en función de los valores de *m*.

a) De centro el origen de coordenadas y radio 5

b) $(x-3)^2+(y+1)^2=9$

c) $x^2+y^2-2x+4y-4=0$

d) $9x^2+9y^2+36x-54y+117=9$

a) La ecuación de la circunferencia es $x^2+y^2=25$, por tanto, $Pot_{Cf}(P)=(m+1)^2+m^2-25=2m^2+2m-24$

P es exterior a la circunferencia si $2m^2+2m-24>0 \Rightarrow m\in(-\infty, -4)\cup(3, +\infty)$

P pertenece a la circunferencia si $2m^2+2m-24=0 \Rightarrow m=-4, m=3$

P es interior a la circunferencia si $2m^2+2m-24<0 \Rightarrow m\in(-4, 3)$

b) $Pot_{Cf}(P)=(m+1-3)^2+(m+1)^2-9=2m^2-2m-4$

P es exterior a la circunferencia si $2m^2-2m-4>0 \Rightarrow m\in(-\infty, -1)\cup(2, +\infty)$

P pertenece a la circunferencia si $2m^2-2m-4=0 \Rightarrow m=-1, m=2$

P es interior a la circunferencia si $2m^2-2m-4<0 \Rightarrow m\in(-1, 2)$

c) $Pot_{Cf}(P)=(m+1)^2+m^2-2(m+1)+4m-4=2m^2+4m-5$

P es exterior a la circunferencia si $2m^2+4m-5>0 \Rightarrow m\in\left(-\infty, \frac{-2-\sqrt{14}}{2}\right)\cup\left(\frac{-2+\sqrt{14}}{2}, +\infty\right)$

P pertenece a la circunferencia si $2m^2+4m-5=0 \Rightarrow m=\frac{-2-\sqrt{14}}{2}, m=\frac{-2+\sqrt{14}}{2}$

P es interior a la circunferencia si $2m^2+4m-5<0 \Rightarrow m\in\left(\frac{-2-\sqrt{14}}{2}, \frac{-2+\sqrt{14}}{2}\right)$

d) Simplificando la ecuación, $x^2+y^2+4x-6y+12=0$ y $Pot_{Cf}(P)=(m+1)^2+m^2+4(m+1)-6m+12=2m^2+17$, por tanto, *P* es exterior a la circunferencia para cualquier valor de *m*.

10. Ejercicio resuelto.

11. Calcula el eje radical de las circunferencias y comprueba que es perpendicular a la recta que pasa por los centros.

a) $C_1: x^2+y^2=9$ y $C_2: x^2+y^2-4x+2y+1=0$

b) $C_1: 12x^2+12y^2=27$ y $C_2: x^2+y^2+6x-6y+14=0$

c) $C_1: x^2+y^2-4x-2y=20$ y $C_2: (x-4)^2+(y-3)^2=4$

a) Eje radical: $4x-2y-10=0 \Rightarrow 2x-y-5=0$

Los centros son, respectivamente, $C_1(0, 0)$ y $C_2(2, -1)$, por tanto, la recta que los une es $x+2y=0$, perpendicular al eje radical.

b) Eje radical: $\begin{cases} 12x^2+12y^2-27=0 \\ 12x^2+12y^2+72x-72y+168=0 \end{cases} \Rightarrow 72x-72y+195=0 \Rightarrow 24x-24y+65=0$

Los centros son, respectivamente, $C_1(0, 0)$ y $C_2(-3, 3)$, por tanto, la recta que los une es $x+y=0$, perpendicular al eje radical.

c) Eje radical: $\begin{cases} x^2+y^2-4x-2y-20=0 \\ x^2+y^2-8x-6y+21=0 \end{cases} \Rightarrow 4x+4y-41=0$

Los centros son, respectivamente, $C_1(2, 1)$ y $C_2(4, 3)$, por tanto, la recta que los une es $x-y-1=0$, perpendicular al eje radical.

12. Sean $(x-2)^2+(y-4)^2=20$ y $(x-11)^2+(y-1)^2=50$. Halla los puntos de corte de ambas circunferencias y comprueba que pertenecen al eje radical de las mismas.

$$\begin{cases} (x-2)^2+(y-4)^2=20 \\ (x-11)^2+(y-1)^2=50 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+y^2-4x-8y=0 \\ x^2+y^2-22x-2y+72=0 \end{cases} \Rightarrow 18x-6y-72=0 \Rightarrow 3x-y-12=0 \Rightarrow y=3x-12$$

El eje radical es $y=3x-12$, además, sustituyendo esta ecuación en, por ejemplo, la primera ecuación, obtenemos los puntos de corte, que, obviamente, cumplirán la ecuación del eje radical y, por tanto, pertenecerán al mismo.

$$x^2+(3x-12)^2-4x-8(3x-12)=0 \Rightarrow 10x^2-100x+240=0 \Rightarrow x^2-10x+24=0 \Rightarrow \begin{cases} x=6,\ y=6 \Rightarrow P(6, 6) \\ x=4,\ y=0 \Rightarrow Q(4, 0) \end{cases}$$

13. Dadas las siguientes circunferencias:

$$C_1: x^2+(y-1)^2=4 \qquad C_2: x^2+y^2-8x-2y+16=0 \qquad C_3: x^2+y^2+2x-2y+1=0$$

a) Halla los ejes radicales de todas las posibles parejas entre las circunferencias dadas.

b) Razona si existe centro radical y, en su caso, hállalo.

a) Eje radical de C_1 y C_2: $8x-19=0 \Rightarrow x=\dfrac{19}{8}$ Eje radical de C_1 y C_3: $2x+4=0 \Rightarrow x=-2$

Eje radical de C_2 y C_3: $-10x+15=0 \Rightarrow x=\dfrac{3}{2}$

b) Los ejes radicales son rectas paralelas y, por tanto, no se cortan. No hay centro radical. También podríamos haber comprobado que los centros $C_1(0, 1)$, $C_2(4, 1)$ y $C_3(-1, 1)$ están alineados, ya que pertenecen a la recta $y=1$, por lo que no existe centro radical.

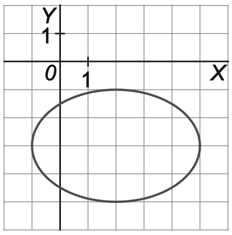
14. Ejercicio interactivo.

15 y 16. Ejercicios resueltos.

17. Dibuja e indica los elementos de las siguientes elipses.

a) $\dfrac{(x-2)^2}{9}+\dfrac{(y+3)^2}{4}=1$ **b)** $x^2+\dfrac{(y-1)^2}{4}=1$

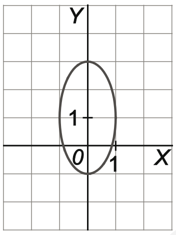
a) $a=3$, $b=2$, $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{5}$, $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$



Centro: $C(2, -3)$ Focos: $F\left(2+\sqrt{5}, -3\right)$, $F'\left(2-\sqrt{5}, -3\right)$

Vértices: $A(5, -3)$, $A'(-1, -3)$, $B(2, -1)$, $B'(2, -5)$

b) $a=2$, $b=1$, $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{3}$, $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$



Centro: $C(0, 1)$ Focos: $F\left(0, 1+\sqrt{3}\right)$, $F'\left(0, 1-\sqrt{3}\right)$

Vértices: $A(0, 3)$, $A'(0, -1)$, $B(-1, 1)$, $B'(1, 1)$

18. Halla la ecuación reducida de una elipse centrada en el origen, si un foco es *F*(12, 0) y su semieje mayor vale 13.

$a=13$, $c=d(O, F)=12$ y $b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{25}=5$. Por tanto, la ecuación es $\dfrac{x^2}{169}+\dfrac{y^2}{25}=1$.

19. Halla la ecuación de la elipse de centro (3, 4), $e=0{,}5$ y *F*(8, 4).

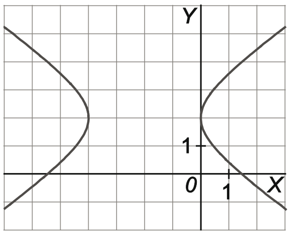
$c=d(C, F)=5$, $e=\dfrac{c}{a}\Rightarrow a=10$ y $b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{75}=5\sqrt{3}$. Por tanto, la ecuación es $\dfrac{(x-3)^2}{100}+\dfrac{(y-4)^2}{75}=1$.

20 y 21. Ejercicios resueltos.

22. Dibuja e indica los elementos de las siguientes hipérbolas.

a) $\dfrac{(x+2)^2}{4}-\dfrac{(y-2)^2}{2}=1$ **b)** $-\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{16}=1$

a) $a=2$, $b=\sqrt{2}$, $c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{6}$, $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

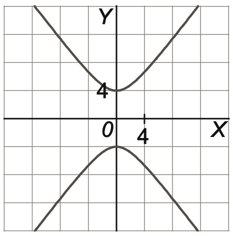


Centro: $C(-2, 2)$ Focos: $F\left(-2+\sqrt{6}, 2\right)$, $F'\left(-2-\sqrt{6}, 2\right)$

Vértices: $A(0, 2)$, $A'(-4, 2)$

Asíntotas: $y-2=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(x+2)$, $y-2=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}(x+2)$

b) $a=4$, $b=3$, $c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{25}=5$, $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{5}{4}$



Centro: $C(0, 0)$ Focos: $F(0, 5)$, $F'(0, -5)$ Vértices: $A(0, 4)$, $A'(0, -4)$

Asíntotas: $y=\dfrac{4}{3}x$, $y=-\dfrac{4}{3}x$

23. Halla la ecuación canónica de las siguientes hipérbolas:

a) Hipérbola con excentricidad 1,5 y semieje $a = 4$. **b)** Hipérbola con foco en $F(2, 0)$ y que pasa por $P(2, 3)$

a) $a = 4$, $e = \dfrac{c}{a} \Rightarrow c = 6$, $b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$, por tanto, la ecuación es $\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{20} = 1$.

b) $c = 2$, por tanto, la ecuación es de la forma $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{4 - a^2} = 1$. Imponiendo que la hipérbola pasa por P tenemos:

$$\frac{4}{a^2} - \frac{9}{4 - a^2} = 1 \Rightarrow 16 - 4a^2 - 9a^2 = 4a^2 - a^4 \Rightarrow a^4 - 17a^2 + 16 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a^2 = 16,\ b^2 = -12 \\ a^2 = 1,\ b^2 = 3 \end{cases}$$

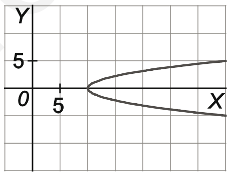
Obviamente la primera posibilidad no es válida, por tanto, la ecuación es $\dfrac{x^2}{1} - \dfrac{y^2}{3} = 1$.

24. Ejercicio resuelto.

25. Calcula las coordenadas del foco y del vértice, las ecuaciones del eje y de la directriz y dibuja las siguientes parábolas.

a) $x - 10 = y^2$ **b)** $y^2 + 4y = 2 - 3x$ **c)** $x^2 + 6y + 13 = -5$ **d)** $x^2 - 4x = 6y - 28$

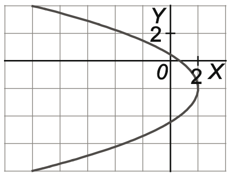
a) $x - 10 = y^2 \Rightarrow y^2 = x - 10$, parábola con apertura a la derecha.



Vértice: $V(10, 0)$ Eje: $y = 0$ $p = \dfrac{1}{2}$

Directriz: $x = \dfrac{39}{4}$ Foco: $F\left(\dfrac{41}{4}, 0\right)$

b) $y^2 + 4y = 2 - 3x \Rightarrow (y + 2)^2 - 4 = 2 - 3x \Rightarrow (y + 2)^2 = -3(x - 2)$,

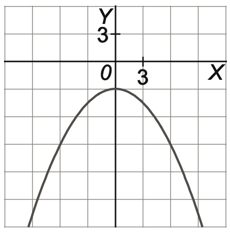


parábola con apertura hacia la izquierda.

Vértice: $V(2, -2)$ Eje: $y = -2$ $p = \dfrac{3}{2}$

Directriz: $x = \dfrac{11}{4}$ Foco: $F\left(\dfrac{5}{4}, -2\right)$

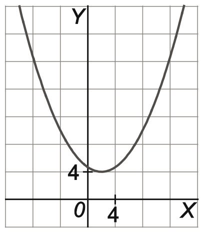
c) $x^2 + 6y + 13 = -5 \Rightarrow x^2 = -6(y + 3)$, apertura hacia abajo.



Vértice: $V(0, -3)$ Eje: $x = 0$ $p = 3$

Directriz: $y = -\dfrac{3}{2}$ Foco: $F\left(0, -\dfrac{9}{2}\right)$

d) $x^2 - 4x = 6y - 28 \Rightarrow (x - 2)^2 - 4 = 6y - 28 \Rightarrow (x - 2)^2 = 6(y - 4)$,



apertura hacia arriba.

Vértice: $V(2, 4)$ Eje: $x = 2$ $p = 3$

Directriz: $y = \dfrac{5}{2}$ Foco: $F\left(2, \dfrac{11}{2}\right)$

26. Encuentra la ecuación de una parábola, sabiendo que tiene su vértice en el punto (2, 4), y que su directriz es la recta $y = 2$.

$\dfrac{p}{2} = d(V, d) = 2 \Rightarrow p = 4$, por tanto, la ecuación es $(x - 2)^2 = 8(y - 4) \Rightarrow y = \dfrac{x^2}{8} - \dfrac{x}{2} + \dfrac{9}{2}$.

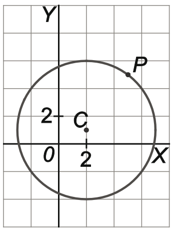
27. Ejercicio interactivo.

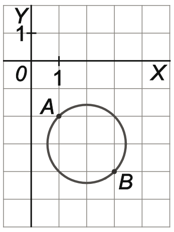
28 a 35. Ejercicios resueltos.

EJERCICIOS

Circunferencia

36. Calcula la ecuación de las siguientes circunferencias.

a) 

b) 

c) De centro, $C(2, –3)$, y pasa por el punto $P(5, 1)$.

d) De centro, el punto $C(5, –2)$, y tangente al eje de abscisas.

e) Pasa por los puntos $A(3, 2)$ y $B(1, –2)$, y tiene su centro en la recta $r: 3x - y = 6$.

f) Pasa por el punto $A(3, 4)$, su radio vale $r = 5$ y su centro se encuentra en el eje de abscisas.

g) El centro es $C(3, 6)$ y es tangente a la bisectriz del primer cuadrante.

h) Pasa por $A(7, –3)$, $B(5, 1)$ y $C(2, –8)$.

a) Centro $C(2, 1)$ y pasa por $P(5, 5)$. El radio es $d(C, P) = \sqrt{25} = 5$, y la ecuación, $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 25 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 + y^2 - 4x - 2y - 20 = 0$.

b) $A(1, –2)$ y $B(3, –4)$ son diametralmente opuestos, por tanto, el centro será el punto medio, $C(2, –3)$, y el radio, la mitad de $d(A, B)$, es decir, $\sqrt{2}$. La ecuación es $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 2 \Rightarrow x^2 + y^2 - 4x + 6y + 11 = 0$.

c) $r = d(C, P) = \sqrt{25} = 5 \Rightarrow (x-2)^2 + (y+3)^2 = 25 \Rightarrow x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0$.

d) El radio es la distancia del punto C a la recta $y = 0$, es decir, $r = 2$. La ecuación es $(x-5)^2 + (y+2)^2 = 4 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 + y^2 - 10x + 4y + 25 = 0$.

e) El centro es la intersección de la mediatriz del segmento AB y la recta r.

Mediatriz de AB: $d(X, A) = d(X, B) \Rightarrow \sqrt{(x-3)^2 + (y-2)^2} = \sqrt{(x-1)^2 + (y+2)^2} \Rightarrow x + 2y - 2 = 0$

Centro: $\begin{cases} x + 2y = 2 \\ 3x - y = 6 \end{cases} \Rightarrow C(2, 0)$ Radio: $r = d(A, C) = \sqrt{5}$

Ecuación: $(x-2)^2 + y^2 = 5 \Rightarrow x^2 + y^2 - 4x - 1 = 0$

f) El centro será de la forma $C(a, 0)$, así, $d(A, C) = 5 \Rightarrow (3-a)^2 + 4^2 = 25 \Rightarrow (3-a)^2 = 9 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3 - a = 3 \Rightarrow a = 0 \Rightarrow \text{ Ecuación: } x^2 + y^2 = 25 \\ 3 - a = -3 \Rightarrow a = 6 \Rightarrow \text{ Ecuación: } (x-6)^2 + y^2 = 25 \Rightarrow x^2 + y^2 - 12x + 11 = 0 \end{cases}$$

g) El radio es la distancia del punto C a la recta $y = x$, es decir, $r = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.

La ecuación es $(x-3)^2 + (y-6)^2 = \dfrac{9}{2} \Rightarrow 2x^2 + 2y^2 - 12x - 24y + 81 = 0$.

h) $$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0 \Rightarrow \begin{cases} 49 + 9 + 7A - 3B + C = 0 \\ 25 + 1 + 5A + B + C = 0 \\ 4 + 64 + 2A - 8B + C = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -4 \\ B = 6 \\ C = -12 \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0$$

37. Halla la ecuación de la circunferencia que pasando por el punto *P*(2, 9) es tangente a los dos ejes de coordenadas.

El centro es de la forma $C(r, r)$ donde r es el radio, por tanto la ecuación es $(x-r)^2+(y-r)^2=r^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2+y^2-2rx-2ry+r^2=0$. Imponiendo que pase por el punto P tenemos:

$$4+81-4r-18r+r^2=0 \Rightarrow r^2-22r+85=0 \Rightarrow \begin{cases} r=17 \Rightarrow \text{ Ecuación: } x^2+y^2-34x-34y+289=0 \\ r=5 \Rightarrow \text{ Ecuación: } x^2+y^2-10x-10y+25=0 \end{cases}$$

38. Calcula la ecuación de la circunferencia que tiene por centro el punto *C*(1, 4) y es tangente a la recta $3x+4y-4=0$.

$$r=\frac{|3+16-4|}{\sqrt{9+16}}=\frac{15}{5}=3 \Rightarrow (x-1)^2+(y-4)^2=9 \Rightarrow x^2+y^2-2x-8y+8=0.$$

39. Determina el centro y el radio de la circunferencia que pasa por los puntos *A*(0, 0), *B*(0, 2) y *C*(2, 4).

A partir de la ecuación de la circunferencia $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ tenemos:

$$\begin{cases} F=0 \\ 4+2E+F=0 \\ 4+16+2D+4E+F=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F=0 \\ 4+2E=0 \Rightarrow E=-2 \\ 20+2D+4(-2)=0 \Rightarrow D=-6 \end{cases} \Rightarrow \text{Ec. Circunferencia: } x^2+y^2-6x-2y=0$$

Así: $C(c_1, c_2)=\left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right) \Rightarrow C(3,1)$ y $r=\sqrt{\frac{D^2}{4}+\frac{E^2}{4}-F}=\sqrt{9+1}=\sqrt{10}$

40. Dada la circunferencia $4x^2+4y^2-24x+4y+33=0$, calcula la ecuación de otra concéntrica con ella y cuyo radio mida la mitad.

La circunferencia dada tiene centro $C\left(3, -\frac{1}{2}\right)$ y radio $r=\sqrt{9+\frac{1}{4}-\frac{33}{4}}=1$, por tanto, la ecuación buscada es:

$$(x-3)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4} \Rightarrow x^2+y^2-6x+y+9=0$$

41. Confirma si las siguientes ecuaciones representan una circunferencia. En caso afirmativo, dibújalas e indica el centro y el valor del radio.

a) $x^2+y^2-4x+6y+9=0$

b) $x^2+y^2-2x+2y+3=0$

c) $2x^2+2y^2-6x=0$

d) $x^2+y^2+2x+2y=0$

e) $2x^2+2y^2-2x+6y-3=0$

a) $C(2, -3)$ y $r=\sqrt{4+9-9}=2$

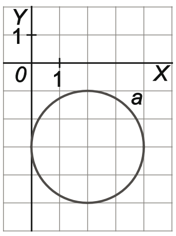
b) $C(1, -1)$ y $r=\sqrt{1+1-3}=\sqrt{-1}$ no es real.

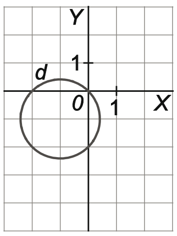
No representa una circunferencia.

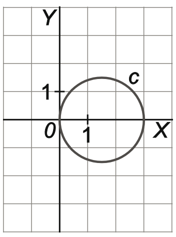
c) $C\left(\frac{3}{2}, 0\right)$ y $r=\sqrt{\frac{9}{4}}=\frac{3}{2}$

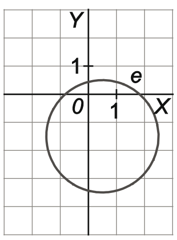
d) $C(-1, -1)$ y $r=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$

e) $C\left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right)$ y $r=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{9}{4}+\frac{3}{2}}=2$









42. Halla la posición relativa de cada punto y de la circunferencia $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 20 = 0$.

a) $A(5, 5)$ **b)** $B(3, 3)$ **c)** $C(-4, 3)$

a) $Pot_{Cf}(A) = 25 + 25 - 20 - 10 - 20 = 0$. El punto *A* pertenece a la circunferencia.

b) $Pot_{Cf}(B) = 9 + 9 - 12 - 6 - 20 = -20$. El punto *B* es interior a la circunferencia.

c) $Pot_{Cf}(C) = 16 + 9 + 16 - 6 - 20 = 15$. El punto *B* es exterior a la circunferencia.

43. Calcula la máxima y la mínima distancia del punto *P*(5, 2) a la circunferencia $x^2 + y^2 + 6x + 8y = 0$.

$Pot_{Cf}(P) = 25 + 4 + 30 + 16 = 75$, así, el punto es exterior a la circunferencia.

Por tanto, la recta que une *P* con el centro *C* cortará a la circunferencia primero a una distancia *x* y después a una distancia *x* + 2*r* que serán la distancia mínima y máxima buscadas.

Como *C*(–3, –4) y $r = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$, tenemos:

$$x(x+2r) = 75 \Rightarrow x^2 + 10x - 75 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 5 \\ x = -15 \text{ no válida} \end{cases} \Rightarrow \text{La distancia mínima es 5, y la máxima, 15.}$$

44. Para cada caso, estudia la posición relativa de la recta con la circunferencia que se indica.

a) $2x - y + 1 = 0$ con $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 9 = 0$.

b) $x - 2 = 0$ con $x^2 + y^2 - 2x + 2y + 1 = 0$.

c) $x + 7y = 30$ con $x^2 + y^2 - 10x = 0$.

d) $y = -3$ con $2x^2 + 2y^2 - 14x + 2y + 21 = 0$.

a) La circunferencia tiene centro *C*(2, –3) y radio $r = \sqrt{4+9-9} = 2$.

La distancia del centro *C* a la recta es $\dfrac{|4+3+1|}{\sqrt{4+1}} = \dfrac{8\sqrt{5}}{5} > r$, por tanto, la recta es exterior a la circunferencia.

b) La circunferencia tiene centro *C*(1, –1) y radio $r = \sqrt{1+1-1} = 1$.

La distancia del centro *C* a la recta es $\dfrac{|1-2|}{\sqrt{1}} = 1 = r$, por tanto, la recta es tangente a la circunferencia.

c) La circunferencia tiene centro *C*(5, 0) y radio $r = \sqrt{25} = 5$.

La distancia del centro *C* a la recta es $\dfrac{|5-30|}{\sqrt{1+49}} = \dfrac{5\sqrt{2}}{2} < r$, por tanto, la recta es secante a la circunferencia.

d) La circunferencia tiene centro $C\left(\dfrac{7}{2}, -\dfrac{1}{2}\right)$ y radio $r = \sqrt{\dfrac{49}{4} + \dfrac{1}{4} - \dfrac{21}{2}} = \sqrt{2}$.

La distancia del centro *C* a la recta es $\dfrac{\left|-\dfrac{1}{2} + 3\right|}{\sqrt{1}} = \dfrac{5}{2} > r$, por tanto, la recta es exterior a la circunferencia.

45. Estudia la posición relativa de la circunferencia $2x^2+2y^2-6x-6y+7=0$ con cada una de las siguientes circunferencias.

a) $x^2+y^2=\frac{1}{4}$

b) $2x^2+2y^2=5$

c) $8x^2+8y^2-16x-24y-25=0$

d) $x^2+y^2-2x-3y+3=0$

e) $x^2+y^2-3y+2=0$

f) $x^2+y^2-3x-3y+4=0$

La circunferencia $2x^2+2y^2-6x-6y+7=0$ tiene centro $C_1\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$ y radio $r_1=\sqrt{\frac{9}{4}+\frac{9}{4}-\frac{7}{2}}=1$.

a) La circunferencia $x^2+y^2=\frac{1}{4}$ tiene centro $C_2=(0, 0)$ y radio $r_2=\frac{1}{2}$.

Como $d(C_1, C_2)=\frac{3\sqrt{2}}{2}>r_1+r_2=\frac{3}{2}$, las circunferencias son exteriores.

b) La circunferencia $2x^2+2y^2=5$ tiene centro $C_2=(0, 0)$ y radio $r_2=\sqrt{\frac{5}{2}}=\frac{\sqrt{10}}{2}$.

Como $r_2-r_1=\frac{\sqrt{10}-2}{2}<d(C_1, C_2)=\frac{3\sqrt{2}}{2}<r_1+r_2=\frac{2+\sqrt{10}}{2}$, las circunferencias son secantes.

c) La circunferencia $8x^2+8y^2-16x-24y-25=0$ tiene centro $C_2=\left(1, \frac{3}{2}\right)$ y radio $r_2=\sqrt{\frac{51}{8}}=\frac{\sqrt{102}}{4}$.

Como $d(C_1, C_2)=\frac{1}{2}<r_2-r_1=\frac{\sqrt{102}-4}{4}$, la primera circunferencia es interior a la segunda.

d) La circunferencia $x^2+y^2-2x-3y+3=0$ tiene centro $C_2=\left(1, \frac{3}{2}\right)$ y radio $r_2=\frac{1}{2}$.

Como $d(C_1, C_2)=\frac{1}{2}=r_1-r_2$, las circunferencias son tangentes interiores.

e) La circunferencia $x^2+y^2-3y+2=0$ tiene centro $C_2=\left(0, \frac{3}{2}\right)$ y radio $r_2=\frac{1}{2}$.

Como $d(C_1, C_2)=\frac{3}{2}=r_1+r_2=\frac{3}{2}$, las circunferencias son tangentes exteriores.

f) La circunferencia $x^2+y^2-3x-3y+4=0$ tiene centro $C_1\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$ y radio $r_2=\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$, por tanto, las circunferencias son concéntricas estando $x^2+y^2-3x-3y+4=0$ en el interior de $2x^2+2y^2-6x-6y+7=0$.

46. Calcula la potencia de cada punto respecto de la circunferencia indicada y señala su posición relativa.

a) $P(1, 3)$ y $8x^2+8y^2-79x-32y+95=0$

b) $P(1, -1)$ y $2x^2+2y^2-x=0$

c) $P(5, 3)$ y $x^2+y^2-7x-8y=0$

a) $Pot_{Cf}(P)=8+72-79-96+95=0$. El punto pertenece a la circunferencia.

b) $Pot_{Cf}(P)=2+2-1=3$. El punto es exterior a la circunferencia.

c) $Pot_{Cf}(P)=25+9-35-24=-25$. El punto *es* interior a la circunferencia.

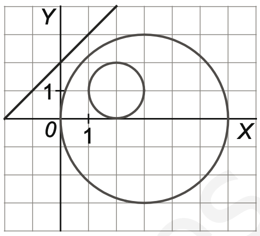
47. Calcula el eje radical de las siguientes parejas de circunferencias y representa gráficamente la situación en cada caso.

a) $x^2+y^2-4x-2y+4=0$ y $x^2+y^2-6x=0$

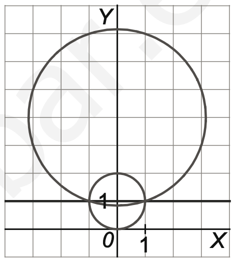
b) $x^2+y^2-8y+6=0$ y $2x^2+2y^2-4y=0$

c) $4x^2+4y^2-4x-8y+1=0$ y $4x^2+4y^2-4x-24y+1=0$

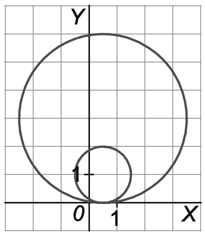
a) Eje radical: $\begin{cases} x^2+y^2-4x-2y+4=0 \\ x^2+y^2-6x=0 \end{cases} \Rightarrow 2x-2y+4=0 \Rightarrow x-y+2=0$.



b) Eje radical: $\begin{cases} x^2+y^2-8y+6=0 \\ x^2+y^2-2y=0 \end{cases} \Rightarrow 6y-6=0 \Rightarrow y=1$.



c) Eje radical: $\begin{cases} 4x^2+4y^2-4x-8y+1=0 \\ 4x^2+4y^2-4x-24y+1=0 \end{cases} \Rightarrow 16y=0 \Rightarrow y=0$.



48. Halla el centro radical de las circunferencias siguientes:

$$\boldsymbol{C_1: x^2+y^2=16 \qquad C_2: x^2+y^2-2x+4y-4=0 \qquad C_3: x^2+y^2+6x-6y+14=0}$$

Eje radical de C_1 y C_2: $x-2y-6=0$

Eje radical de C_1 y C_3: $x-y+5=0$

Centro radical: $\begin{cases} x-2y=6 \\ x-y=-5 \end{cases} \Rightarrow x=-16,\ y=-11 \Rightarrow P(-16,\ -11)$

49. Calcula las tangentes a las circunferencias siguientes en el punto dado.

a) $x^2+y^2=26$ en $P(-1, 5)$

b) $3x^2+3y^2-4x+17y+23=0$ en $P(1, -2)$

La tangente en un punto P es perpendicular al segmento CP, donde C es el centro de la circunferencia.

a) $C(0, 0)$, luego $\overrightarrow{CP}=(-1, 5)$ y la ecuación de la tangente es: $-1(x+1)+5(y-5)=0 \Rightarrow x-5y+26=0$.

b) $C\left(\frac{2}{3}, -\frac{17}{6}\right)$, luego $\overrightarrow{CP}=\left(\frac{1}{3}, \frac{5}{6}\right)$ y la ecuación de la tangente es: $\frac{1}{3}(x-1)+\frac{5}{6}(y+2)=0 \Rightarrow 2x+5y+8=0$.

50. Dada la circunferencia $(x+3)^2+(y-1)^2=25$, calcula las ecuaciones de sus tangentes paralelas a la recta $3x+4y-16=0$.

Las ecuaciones buscadas serán de la forma $3x+4y+K=0$, para que sean tangentes a la circunferencia, la distancia del centro a la recta debe coincidir con el radio, así:

$$\frac{|-9+4+K|}{\sqrt{9+16}}=5\Rightarrow|K-5|=25\Rightarrow\begin{cases}K-5=25\Rightarrow K=30\Rightarrow 3x+4y+30=0\\K-5=-25\Rightarrow K=-20\Rightarrow 3x+4y-20=0\end{cases}$$

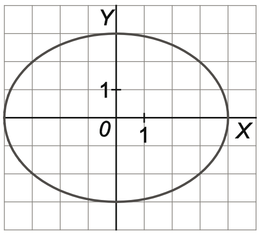
51. Calcula las ecuaciones de las tangentes a la circunferencia $x^2+y^2-4x+4y-17=0$ que sean perpendiculares a la recta de ecuación $3x-4y=14$.

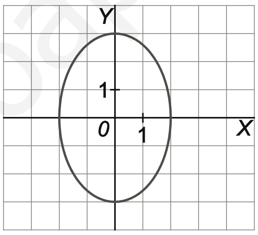
Las ecuaciones buscadas serán de la forma $4x+3y+K=0$, para que sean tangentes a la circunferencia, la distancia del centro a la recta debe coincidir con el radio, así, como $C(2, -2)$ y $r=\sqrt{4+4+17}=5$, tenemos:

$$\frac{|8-6+K|}{\sqrt{25}}=5\Rightarrow|2+K|=25\Rightarrow\begin{cases}2+K=25\Rightarrow K=23\Rightarrow 4x+3y+23=0\\2+K=-25\Rightarrow K=-27\Rightarrow 4x+3y-27=0\end{cases}$$

Elipse

52. Para cada una de las elipses, indica las medidas de sus semiejes y de su semidistancia focal, escribe las coordenadas de los vértices y de los focos, y calcula el valor de la excentricidad. Escribe su ecuación.

a) 

b) 

a) $a=4$, $b=3$, $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{7}$, $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{7}}{4}$

Vértices: $A(4, 0)$, $A'(-4, 0)$, $B(0, 3)$, $B'(0, -3)$

Focos: $F\left(\sqrt{7}, 0\right)$, $F'\left(-\sqrt{7}, 0\right)$

Ecuación: $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$

b) $a=3$, $b=2$, $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{5}$, $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{5}}{3}$

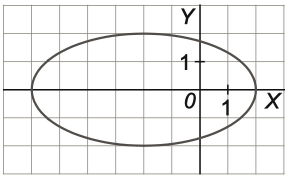
Vértices: $A(0, 3)$, $A'(0, -3)$, $B(2, 0)$, $B'(-2, 0)$

Focos: $F\left(0, \sqrt{5}\right)$, $F'\left(0, -\sqrt{5}\right)$

Ecuación: $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$

53. Dada la elipse $x^2+4y^2+4x-12=0$, dibújala, y calcula el centro, los semiejes, la semidistancia focal, los focos, los vértices y la excentricidad. ¿Cuál es la ecuación de la elipse que tiene los mismos elementos pero cuyo centro es el origen de coordenadas?

$$x^2+4y^2+4x-12=0 \Rightarrow (x+2)^2+4y^2=16 \Rightarrow \frac{(x+2)^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$$



$a=4$, $b=2$, $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$, $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

Centro: (–2, 0) Focos: $F\left(-2+2\sqrt{3},\, 0\right)$, $F'\left(-2-2\sqrt{3},\, 0\right)$ Vértices: $A(2, 0)$, $A'(-6, 0)$, $B(-2, 2)$, $B'(-2, -2)$

Ecuación reducida: $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$

54. Calcula la ecuación de las siguientes elipses. (Salvo indicación, el centro es el origen).

a) $a=5$, $c=3$

b) Los radios vectores de un punto miden 7 y 3, y $c=4$.

c) Foco, $F(3, 0)$, y vértice, $A(4, 0)$

d) Vértices, $A(6, 0)$ y $B(0, 3)$

e) Foco, $F'(-2, 0)$, y excentricidad, $e=0{,}4$

f) Pasa por los puntos $P(1, 2)$ y $Q(-2, 0)$.

g) Pasa por $P(5, 0)$ y su excentricidad es $e=\frac{3}{5}$.

h) Foco, $F'(0, 2)$, y semieje mayor, $a=3$

i) Centro, el punto $C(-2, 1)$, $a=13$ y $b=5$

a) $b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{16}=4 \Rightarrow \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$

b) $2a=7+3 \Rightarrow a=5,\ b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{9}=3 \Rightarrow \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$

c) $a=4,\ c=3,\ b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{7} \Rightarrow \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{7}=1$

d) $a=6,\ b=3 \Rightarrow \frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{9}=1$

e) $c=2,\ a=\frac{c}{e}=5,\ b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{21} \Rightarrow \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{21}=1$

f) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{a^2}+\frac{4}{b^2}=1 \\ \frac{4}{a^2}=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=\frac{4\sqrt{3}}{3} \end{cases} \Rightarrow \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{\frac{16}{3}}=1$

g) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \Rightarrow \frac{25}{a^2}=1 \Rightarrow a=5,\ c=a\cdot e=3,\ b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{16}=4 \Rightarrow \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$

h) $c=2,\ b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{5} \Rightarrow \frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{9}=1$

i) $\frac{(x+2)^2}{169}+\frac{(y-1)^2}{25}=1$

55. Para cada una de las siguientes elipses, indica las medidas de sus semiejes y de su semidistancia focal, escribe las coordenadas de los vértices y de los focos, y calcula el valor de la excentricidad. Dibújalas.

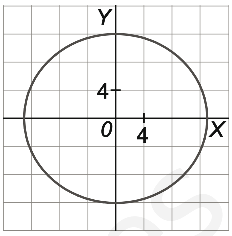
a) $\dfrac{x^2}{169}+\dfrac{y^2}{144}=1$ **c)** $\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{(y-5)^2}{8}=1$ **e)** $2(x-1)^2+y^2=2$

b) $16x^2+25y^2=400$ **d)** $\dfrac{(x-3)^2}{10}+\dfrac{(y+2)^2}{6}=1$ **f)** $9x^2+y^2-18x+6y+9=0$

a) $a=13$, $b=12$, $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{25}=5$, $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{5}{13}$

Vértices: $A(13, 0)$, $A'(-13, 0)$, $B(0, 12)$, $B'(0, -12)$

Focos: $F(5, 0)$, $F'(-5, 0)$

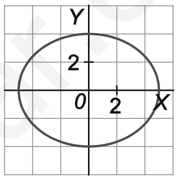


b) $16x^2+25y^2=400 \Rightarrow \dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$

$a=5$, $b=4$, $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{9}=3$, $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{3}{5}$

Vértices: $A(5, 0)$, $A'(-5, 0)$, $B(0, 4)$, $B'(0, -4)$

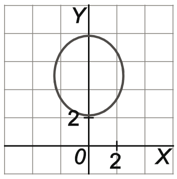
Focos: $F(3, 0)$, $F'(-3, 0)$



c) $a=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$, $b=\sqrt{6}$, $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{2}$, $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{1}{2}$

Vértices: $A\left(0, 5+2\sqrt{2}\right)$, $A'\left(0, 5-2\sqrt{2}\right)$, $B\left(\sqrt{6}, 5\right)$, $B'\left(-\sqrt{6}, 5\right)$

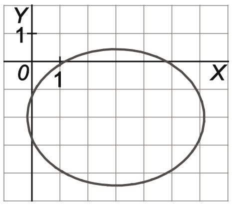
Focos: $F\left(0, 5+\sqrt{2}\right)$, $F'\left(0, 5-\sqrt{2}\right)$



d) $a=\sqrt{10}$, $b=\sqrt{6}$, $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{4}=2$, $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{2}{\sqrt{10}}=\dfrac{\sqrt{10}}{5}$

Vértices: $A\left(3+\sqrt{10}, -2\right)$, $A'\left(3-\sqrt{10}, -2\right)$, $B\left(3, -2+\sqrt{6}\right)$, $B'\left(3, -2-\sqrt{6}\right)$

Focos: $F(5, -2)$, $F'(1, -2)$

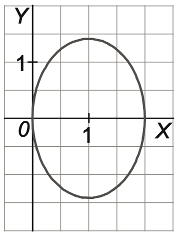


e) $2(x-1)^2+y^2=2 \Rightarrow (x-1)^2+\dfrac{y^2}{2}=1$

$a=\sqrt{2}$, $b=1$, $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{1}=1$, $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Vértices: $A\left(1, \sqrt{2}\right)$, $A'\left(1, -\sqrt{2}\right)$, $B(2, 0)$, $B'(0, 0)$

Focos: $F(1, 1)$, $F'(1, -1)$

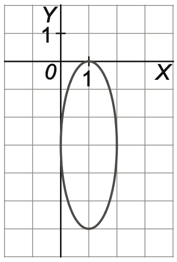


f) $9x^2+y^2-18x+6y+9=0 \Rightarrow 9(x-1)^2+(y+3)^2=9 \Rightarrow (x-1)^2+\dfrac{(y+3)^2}{9}=1$

$a=3$, $b=1$, $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$, $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

Vértices: $A(1, 0)$, $A'(1, -6)$, $B(0, -3)$, $B'(2, -3)$

Focos: $F\left(1, -3+2\sqrt{2}\right)$, $F'\left(1, -3-2\sqrt{2}\right)$



Hipérbola

56. Halla la ecuación de las siguientes hipérbolas. (Salvo indicación, el centro es el origen).

a) $a = 3$, $c = 5$

b) Semidistancia focal 5 y los radios vectores de un punto miden 10 y 2 .

c) Foco, $F(4, 0)$, y vértice, $A(2, 0)$

d) Vértices, $A(6, 0)$ y $B(0, 3)$

e) Foco, $F'(-6, 0)$, y excentricidad, $e = 1{,}25$

f) Pasa por los puntos $P(3, 0)$ y $Q(5, -3)$.

g) Pasa por $P(2, 0)$ y su excentricidad es $e = 1{,}5$.

h) Pasa por $P(15, 4)$, y su distancia focal vale $2\sqrt{90}$.

i) Centro, $C(2, -3)$, $a = 8$ y $c = 10$

a) $b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{16} = 4 \Rightarrow \dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{16} = 1$

b) $2a = 10 - 2 \Rightarrow a = 4,\ b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{9} = 3 \Rightarrow \dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{9} = 1$

c) $a = 2,\ c = 4,\ b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3} \Rightarrow \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{12} = 1$

d) $a = 6,\ b = 3 \Rightarrow \dfrac{x^2}{36} - \dfrac{y^2}{9} = 1$

e) $c = 6;\ a = \dfrac{c}{e} = \dfrac{24}{5};\ b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{36 - \dfrac{576}{25}} = \dfrac{18}{5} \Rightarrow \dfrac{x^2}{\frac{576}{25}} - \dfrac{y^2}{\frac{324}{25}} = 1$

f) $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{9}{a^2} = 1 \\ \dfrac{25}{a^2} - \dfrac{9}{b^2} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = \dfrac{9}{4} \end{cases} \Rightarrow \dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{\frac{81}{16}} = 1$

g) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \dfrac{4}{a^2} = 1 \Rightarrow a = 2,\ c = a \cdot e = 3,\ b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{5} \Rightarrow \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{5} = 1$

h) $\begin{cases} \dfrac{225}{a^2} - \dfrac{16}{b^2} = 1 \\ a^2 + b^2 = c^2 = 90 \end{cases} \Rightarrow a = 9,\ b = 3 \Rightarrow \dfrac{x^2}{81} - \dfrac{y^2}{9} = 1$

i) $b = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6 \Rightarrow \dfrac{(x-2)^2}{64} - \dfrac{(y+3)^2}{36} = 1$

57. Encuentra la ecuación de la hipérbola que tiene por focos los puntos $F(3, 0)$ y $F'(-3, 0)$ y que pasa por el punto $P\left(8, 5\sqrt{3}\right)$.

$$c = 3 \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{64}{a^2} - \dfrac{75}{b^2} = 1 \\ a^2 + b^2 = 9 \end{cases} \Rightarrow \dfrac{64}{9 - b^2} - \dfrac{75}{b^2} = 1 \Rightarrow b^4 + 130b^2 - 675 = 0 \Rightarrow \begin{cases} b^2 = 5 \Rightarrow a^2 = 4 \\ b^2 = -135 \Rightarrow \text{No válida} \end{cases} \Rightarrow \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{5} = 1$$

58. Calcula la ecuación de una hipérbola si un foco es el punto $F(0, 10)$ y una asíntota la recta $y = x$.

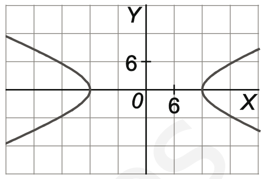
Tenemos $a = b$ y $c^2 = a^2 + b^2 = 100$, por tanto, $a^2 = b^2 = 50$ y la ecuación de la hipérbola es $\dfrac{x^2}{50} - \dfrac{y^2}{50} = 1$.

59. Para cada una de las siguientes hipérbolas, indica las medidas de sus semiejes y de su semidistancia focal, escribe las coordenadas de los vértices y de los focos, y calcula las ecuaciones de las asíntotas y el valor de la excentricidad. Dibújalas.

a) $\dfrac{x^2}{144}-\dfrac{y^2}{25}=1$ **c)** $\dfrac{(x+1)^2}{8}-\dfrac{(y-2)^2}{6}=1$ **e)** $4y^2-x^2=4$

b) $36x^2-64y^2=2304$ **d)** $\dfrac{y^2}{225}-\dfrac{x^2}{64}=1$ **f)** $2(y+1)^2-x^2=2$

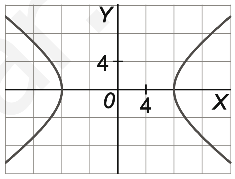
a) $a=12$, $b=5$, $c=\sqrt{a^2+b^2}=13$, $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{13}{12}$



Vértices: $A(12, 0)$, $A'(-12, 0)$ Focos: $F(13, 0)$, $F'(-13, 0)$

Asíntotas: $y=\dfrac{5}{12}x$, $y=-\dfrac{5}{12}x$

b) $36x^2-64y^2=2304 \Rightarrow \dfrac{x^2}{64}-\dfrac{y^2}{36}=1$

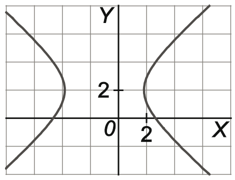


$a=8$, $b=6$, $c=\sqrt{a^2+b^2}=10$, $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{10}{8}$

Vértices: $A(8, 0)$, $A'(-8, 0)$ Focos: $F(10, 0)$, $F'(-10, 0)$

Asíntotas: $y=\dfrac{3}{4}x$, $y=-\dfrac{3}{4}x$

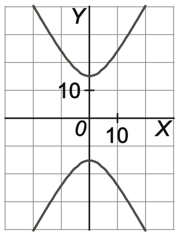
c) $a=\sqrt{8}$, $b=\sqrt{6}$, $c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{14}$, $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{14}}{\sqrt{8}}=\dfrac{\sqrt{7}}{2}$



Vértices: $A\left(-1+\sqrt{8}, 2\right)$, $A'\left(-1-\sqrt{8}, 2\right)$ Focos: $F\left(-1+\sqrt{14}, 2\right)$, $F'\left(-1-\sqrt{14}, 2\right)$

Asíntotas: $y=\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{8}}x \Rightarrow y=\dfrac{\sqrt{3}}{2}x$, $y=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}x$

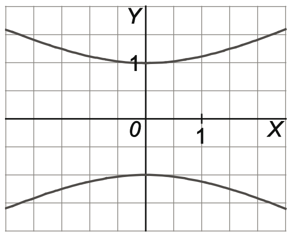
d) $a=15$, $b=8$, $c=\sqrt{a^2+b^2}=17$, $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{17}{15}$



Vértices: $A(0, 15)$, $A'(0, -15)$ Focos: $F(0, 17)$, $F'(0, -17)$

Asíntotas: $x=\dfrac{8}{15}y$, $x=-\dfrac{8}{15}y$

e) $4y^2-x^2=4 \Rightarrow y^2-\dfrac{x^2}{4}=1$

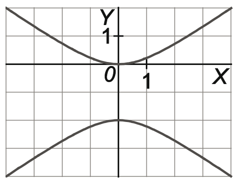


$a=1$, $b=2$, $c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{5}$, $e=\dfrac{c}{a}=\sqrt{5}$

Vértices: $A(0, 1)$, $A'(0, -1)$ Focos: $F\left(0, \sqrt{5}\right)$, $F'\left(0, -\sqrt{5}\right)$

Asíntotas: $x=2y$, $x=-2y$

f) $2(y+1)^2-x^2=2 \Rightarrow (y+1)^2-\dfrac{x^2}{2}=1$



$a=1$, $b=\sqrt{2}$, $c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{3}$, $e=\dfrac{c}{a}=\sqrt{3}$

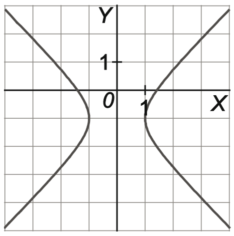
Vértices: $A(0, 0)$, $A'(0, -2)$ Focos: $F\left(0, -1+\sqrt{5}\right)$, $F'\left(0, -1-\sqrt{5}\right)$

Asíntotas: $x=\sqrt{2}(y+1)$, $x=-\sqrt{2}(y+1)$

60. Dada la hipérbola $x^2 - y^2 - 2y - 2 = 0$, dibújala, y calcula el centro, los semiejes, la semidistancia focal, los focos, los vértices y la excentricidad. ¿Cuál es la ecuación de la hipérbola que tiene los mismos elementos pero cuyo centro es el origen?

$x^2 - y^2 - 2y - 2 = 0 \Rightarrow x^2 - (y+1)^2 = 1$

$a = 1$, $b = 1$, $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{2}$, $e = \dfrac{c}{a} = \sqrt{2}$



Centro: $C(0, -1)$

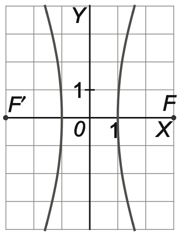
Vértices: $A(1, -1)$, $A'(-1, -1)$

Focos: $F\left(\sqrt{2}, -1\right)$, $F'\left(-\sqrt{2}, -1\right)$

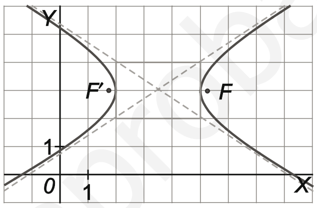
Ecuación reducida: $x^2 - y^2 = 1$

61. Para cada una de las hipérbolas, indica las medidas de sus semiejes y de su semidistancia focal, escribe las coordenadas de los vértices y de los focos, y el valor de la excentricidad. Halla su ecuación y las de sus asíntotas.

a)



b)



a) $a = 1$, $c = 3$, $b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$, $e = \dfrac{c}{a} = 3$

Ecuación: $x^2 - \dfrac{y^2}{8} = 1$

Vértices: $A(1, 0)$, $A'(-1, 0)$

Focos: $F(3, 0)$, $F'(-3, 0)$

Asíntotas: $y = 2\sqrt{2}x$, $y = -2\sqrt{2}x$

b) $a = \dfrac{3}{2}$, $b = 1$, $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \dfrac{\sqrt{13}}{2}$, $e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{\sqrt{13}}{3}$

Ecuación: $\dfrac{\left(x - \dfrac{7}{2}\right)^2}{\dfrac{9}{4}} - (y-3)^2 = 1$

Vértices: $A(5, 3)$, $A'(2, 3)$

Focos: $F\left(\dfrac{7}{2} + \dfrac{\sqrt{13}}{3}, 3\right)$, $F'\left(\dfrac{7}{2} - \dfrac{\sqrt{13}}{3}, 3\right)$

Asíntotas: $y - 3 = \dfrac{2}{3}\left(x - \dfrac{7}{2}\right)$, $y - 3 = -\dfrac{2}{3}\left(x - \dfrac{7}{2}\right)$

Parábola

62. Calcula la ecuación de las siguientes parábolas. (En *c*, *d*, *e* y *f*, el vértice es el origen).

a) Foco, $F(2, 0)$, y directriz, $x = 6$

b) Foco, $F(0, 4)$, y directriz, $y = 1$

c) Parámetro, $p = 2$ y abierta hacia la derecha

d) Parámetro, $p = 4$ y abierta hacia la izquierda

e) Parámetro, $p = 6$ y abierta hacia arriba

f) Parámetro, $p = 8$ y abierta hacia abajo

g) Vértice, $V(-2, 1)$, y directriz, $y = -2$

h) Vértice, $V(-2, -2)$, y foco, $F(-2, -6)$

i) Vértice, $V(0, 1)$, y directriz, $x = 7$

a) Abierta hacia la izquierda, $V(4, 0)$, $p = 4 \Rightarrow y^2 = -8(x-4)$

b) Abierta hacia arriba, $V\left(0, \frac{5}{2}\right)$, $p = 3 \Rightarrow x^2 = 6\left(y - \frac{5}{2}\right)$

c) $y^2 = 4x$

d) $y^2 = -8x$

e) $x^2 = 12y$

f) $x^2 = -16y$

g) Abierta hacia arriba, $p = 6 \Rightarrow (x+2)^2 = 12(y-1)$

h) Abierta hacia abajo, $p = 8 \Rightarrow (x+2)^2 = -16(y+2)$

i) Abierta hacia la izquierda, $p = 14 \Rightarrow (y-1)^2 = -28x$

63. Para las siguientes parábolas, halla el vértice, el foco y la ecuación de la directriz.

a) $y^2 = 10x$ **b)** $x^2 = 2y$ **c)** $(y-1)^2 = 8(x-1)$ **d)** $x^2 = -3y$

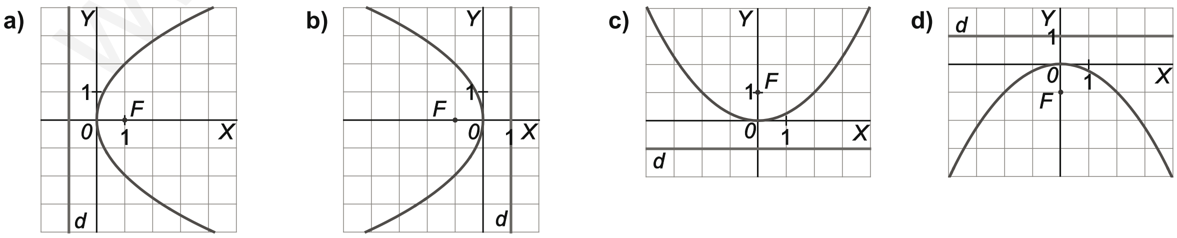
a) Vértice: $V(0, 0)$ Foco: $F\left(\frac{5}{2}, 0\right)$ Directriz: $x = -\frac{5}{2}$

b) Vértice: $V(0, 0)$ Foco: $F\left(0, \frac{1}{2}\right)$ Directriz: $y = -\frac{1}{2}$

c) Vértice: $V(1, 1)$ Foco: $F(3, 1)$ Directriz: $x = -1$

d) Vértice: $V(0, 0)$ Foco: $F\left(0, -\frac{3}{4}\right)$ Directriz: $y = \frac{3}{4}$

64. Para cada una de las siguientes parábolas, calcula su vértice, su foco y su directriz, el valor del parámetro *p* y su ecuación reducida.



a) Vértice: $V(0, 0)$ Foco: $F(1, 0)$ Directriz: $x = -1$ Parámetro: $p = 2$ Ecuación: $y^2 = 4x$

b) Vértice: $V(0, 0)$ Foco: $F(-1, 0)$ Directriz: $x = 1$ Parámetro: $p = 2$ Ecuación: $y^2 = -4x$

c) Vértice: $V(0, 0)$ Foco: $F(0, 1)$ Directriz: $y = -1$ Parámetro: $p = 2$ Ecuación: $x^2 = 4y$

d) Vértice: $V(0, 0)$ Foco: $F(0, -1)$ Directriz: $y = 1$ Parámetro: $p = 2$ Ecuación: $x^2 = -4y$

65. Halla el vértice, el foco y la ecuación de la directriz en cada una de las siguientes parábolas.

a) $y^2-4y-2x+2=0$ **b)** $x^2-2x-y+1=0$ **c)** $y^2-4y-6x-5=0$

a) $y^2-4y-2x+2=0 \Rightarrow (y-2)^2=2(x+1)$

Vértice: $V(-1, 2)$ Foco: $F\left(-\frac{1}{2}, 2\right)$ Directriz: $x=-\frac{3}{2}$

b) $x^2-2x-y+1=0 \Rightarrow (x-1)^2=y$

Vértice: $V(1, 0)$ Foco: $F\left(1, \frac{1}{4}\right)$ Directriz: $y=-\frac{1}{4}$

c) $y^2-4y-6x-5=0 \Rightarrow (y-2)^2=6\left(x+\frac{3}{2}\right)$

Vértice: $V\left(-\frac{3}{2}, 2\right)$ Foco: $F(0, 2)$ Directriz: $x=-3$

Síntesis

66. Calcula el valor de *m* para que el eje radical de las circunferencias dadas sea el eje de abscisas.

$$C_1: x^2+y^2-mx-6y=0 \qquad C_2: 2x^2+2y^2-8x+y=0$$

$$\begin{cases} x^2+y^2-mx-6y=0 \\ 2x^2+2y^2-8x+y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x^2+2y^2-2mx-12y=0 \\ 2x^2+2y^2-8x+y=0 \end{cases} \Rightarrow (2m-8)x+13y=0$$

Para que el eje radical sea el eje de abscisas debe verificarse que $2m-8=0 \Rightarrow m=4$.

67. Halla los siguientes lugares geométricos.

a) Puntos del plano que equidistan de las rectas paralelas $r: x+y=5$ y $s: x+y=9$.

b) Puntos del plano cuya distancia al origen de coordenadas es el doble que la distancia al punto (2, 0).

c) Puntos del plano cuya suma de cuadrados de distancias a $P(-4, 0)$ y $Q(4, 0)$ es 40.

d) Puntos del plano cuya distancia al punto $A(4, 0)$ es el doble que la distancia a la recta $x=1$.

Sea $X(x, y)$ un punto genérico del lugar geométrico solicitado:

a) $d(X,r)=d(X,s) \Rightarrow \frac{|x+y-5|}{\sqrt{2}}=\frac{|x+y-9|}{\sqrt{2}} \Rightarrow \begin{cases} x+y-5=x+y-9 \Rightarrow -5=-9 \text{ No válida} \\ x+y-5=-x-y+9 \Rightarrow x+y=7 \end{cases}$

Se obtiene la recta paralela a *r* y *s* que "está entre ambas".

b) $d(X, O)=2d(X, (2,0)) \Rightarrow \sqrt{x^2+y^2}=2\sqrt{(x-2)^2+y^2} \Rightarrow x^2+y^2=4(x-2)^2+4y^2 \Rightarrow 3x^2-16x+3y^2+16=0$

Se obtiene la circunferencia de centro $C\left(\frac{8}{3}, 0\right)$ y radio $r=\frac{4}{3}$.

c) $(d(X, P))^2+(d(X, Q))^2=40 \Rightarrow (x+4)^2+y^2+(x-4)^2+y^2=40 \Rightarrow x^2+y^2=4$

Se obtiene la circunferencia de centro $C(0, 0)$ y radio $r=2$.

d) $d(X, A)=2d(X, x=1) \Rightarrow \sqrt{(x-4)^2+y^2}=2\cdot\frac{|x-1|}{\sqrt{1}} \Rightarrow (x-4)^2+y^2=4(x-1)^2 \Rightarrow 3x^2-y^2-12=0$.

Se obtiene la hipérbola de centro $C(0, 0)$ y semiejes $a=2$ y $b=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$.

68. Halla, en función del parámetro positivo *a*, la posición relativa de la circunferencia de ecuación $(x-2)^2 + y^2 = a$ y la recta de ecuación $y = x$.

La circunferencia tiene centro $C(2, 0)$ y radio $r = \sqrt{a}$. La distancia del centro a la recta es $\frac{|2+0+0|}{\sqrt{1+1}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$, por tanto, si $a = 2$, la recta es tangente, si $a > 2$, es secante, y si $a < 2$, es exterior a la circunferencia.

69. Dados los puntos *A*(2, 3) y *B*(6, 1), halla la ecuación y describe el lugar geométrico de los puntos *P*(*x*, *y*) del plano tales que el triángulo *APB* es rectángulo en *P*.

Los vectores $\overrightarrow{AP} = (x-2,\ y-3)$ y $\overrightarrow{BP} = (x-6,\ y-1)$ deben ser perpendiculares, por tanto:

$(x-2)(x-6)+(y-3)(y-1)=0 \Rightarrow x^2+y^2-8x-4y+15=0 \Rightarrow (x-4)^2+(y-2)^2=5$

Se trata de una circunferencia de centro $C(4, 2)$ y radio $r = \sqrt{5}$.

70. Identifica cada una de las siguientes cónicas y establece sus elementos más importantes.

a) $x^2-4x-4y=0$

b) $x^2+y^2+6x-10y+33=0$

c) $9x^2-4y^2-24y-72=0$

d) $3x^2+4y^2-18x+16y+31=0$

e) $25x^2-144y^2+288y-3744=0$

a) $x^2-4x-4y=0 \Rightarrow (x-2)^2=4(y+1)$. Parábola abierta hacia arriba con vértice $V(2, -1)$.

b) $x^2+y^2+6x-10y+33=0 \Rightarrow (x+3)^2+(y-5)^2=1$. Circunferencia de centro $C(-3, 5)$ y radio $r=1$.

c) $9x^2-4y^2-24y-72=0 \Rightarrow 9x^2-4(y+3)^2=36 \Rightarrow \frac{x^2}{4}-\frac{(y+3)^2}{9}=1$. Hipérbola de centro $C(0, -3)$ y semiejes $a=2$ y $b=3$.

d) $3x^2+4y^2-18x+16y+31=0 \Rightarrow 3(x-3)^2+4(y+2)^2=12 \Rightarrow \frac{(x-3)^2}{4}+\frac{(y+2)^2}{3}=1$. Elipse de centro $C(3, -2)$ y semiejes $a=2$ y $b=\sqrt{3}$.

e) $25x^2-144y^2+288y-3744=0 \Rightarrow 25x^2-144(y-1)^2=3600 \Rightarrow \frac{x^2}{144}-\frac{(y-1)^2}{25}=1$. Hipérbola de centro $C(0, 1)$ y semiejes $a=12$ y $b=5$.

71. Calcula los puntos de intersección de las siguientes parejas de cónicas y verifica los resultados observando sus gráficas.

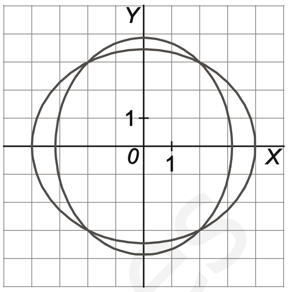
a) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$ con $\frac{x^2}{10}+\frac{y^2}{15}=1$

b) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$ con $x^2+y^2-6x-1=0$

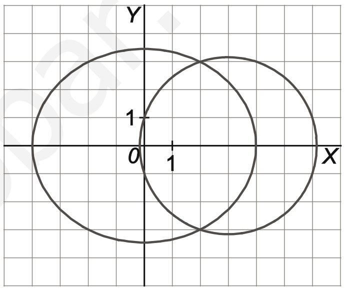
c) $9x^2-4y^2=36$ con $x^2+y^2=43$

d) $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{64}=1$ con $y^2-36x+144=0$

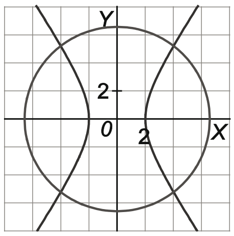
a) $\begin{cases}\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1\\ \frac{x^2}{10}+\frac{y^2}{15}=1\end{cases} \Rightarrow P_1(2,\ 3),\ P_2(-2,\ 3),\ P_3(2,\ -3),\ P_2(-2,\ -3)$



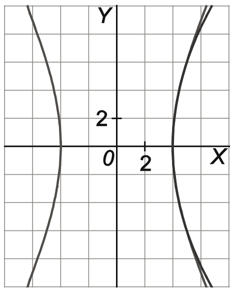
b) $\begin{cases}\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1\\ x^2+y^2-6x-1=0\end{cases} \Rightarrow P_1(2,\ 3),\ P_2(2,\ -3)$



c) $\begin{cases}9x^2-4y^2=36\\ x^2+y^2=43\end{cases} \Rightarrow P_1\left(4,\ 3\sqrt{3}\right),\ P_2\left(4,\ -3\sqrt{3}\right),\ P_3\left(-4,\ 3\sqrt{3}\right),\ P_4\left(-4,\ -3\sqrt{3}\right)$



d) $\begin{cases}\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{64}=1\\ y^2-36x+144=0\end{cases} \Rightarrow P_1(4,\ 0),\ P_2(5,\ 6),\ P_3(5,\ -6)$



72. ¿Para qué valores del parámetro k la ecuación $\frac{x^2}{25-k}+\frac{y^2}{16-k}=1$ representa una elipse? Comprueba que todas esas elipses tienen los mismos focos.

La ecuación representa un elipse si $\begin{cases}25-k>0\\ 16-k>0\end{cases} \Rightarrow k<16$.

En este caso tendríamos $a^2=25-k$ y $b^2=16-k$, con lo que $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{9}=3$ y los focos son $F(3,\ 0)$ y $F'(-3\ ,\ 0)$.

73. Se considera una varilla $\overline{AB}$ de longitud 1. El extremo *A* de esta varilla recorre completamente la circunferencia de ecuación: $x^2+y^2-4x-2y+1=0$; manteniéndose la varilla tangente a la circunferencia en todo momento.

a) Determina el lugar geométrico descrito por el extremo *B* de la varilla.

b) Obtén la ecuación de dicho lugar geométrico.

a) La circunferencia tiene centro *C*(2, 1) y radio $r=2$. Observemos que *CAB* es un triángulo rectángulo en *A*, por lo que la distancia entre *C* y *B* se mantiene constante e igual a $\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$, de este modo, el punto *B* describe una circunferencia de centro *C* y radio $\sqrt{5}$.

b) $(x-2)^2+(y-1)^2=5$.

74. Sean *A*(1, 1) y *B*(–1, 1) dos puntos del plano.

a) Determina las ecuaciones de todas las circunferencias que pasan por A y B razonando dónde están sus centros.

b) De entre las circunferencias del apartado anterior hallar:

I) El centro y el radio de la que es tangente a la recta $y=x$.

II) Los centros de las que tienen por radio 5.

a) Los centros de las circunferencias deben pertenecer a la mediatriz del segmento $\overline{AB}$ ya que los puntos de esta recta equidistan de *A* y *B*. Como la mediatriz del segmento $\overline{AB}$ es el eje ordenadas, los centros de las circunferencias son de la forma *C*(0, *c*) y, por tanto, el radio correspondiente es $r=\sqrt{1+(1-c)^2}$.

De este modo, las ecuaciones de las circunferencias que pasan por *A* y *B* son de la forma $x^2+(y-c)^2=1+(1-c)^2 \Rightarrow x^2+y^2-2yc+2c-2=0$.

b) I) El punto *A* pertenece a la circunferencia y a la tangente, por tanto debe ser el punto de tangencia. Así:

$$d(C,\ y=x)=r \Rightarrow \frac{|c|}{\sqrt{2}}=\sqrt{1+(1-c)^2} \Rightarrow \frac{c^2}{2}=1+(1-c)^2 \Rightarrow c^2-4c+4=0 \Rightarrow c=2$$

Por tanto, el centro y el radio de la circunferencia buscada son, respectivamente, *C*(0, 2) y $r=\sqrt{2}$.

II) $$r=\sqrt{1+(1-c)^2}=5 \Rightarrow (1-c)^2=24 \Rightarrow \begin{cases} c_1=1+\sqrt{24}=1+2\sqrt{6} \Rightarrow C_1\left(0,\ 1+2\sqrt{6}\right) \\ c_2=1-\sqrt{24}=1-2\sqrt{6} \Rightarrow C_2\left(0,\ 1-2\sqrt{6}\right) \end{cases}$$

CUESTIONES

75. Indica si las siguientes afirmaciones son ciertas o falsas.

a) La excentricidad de una circunferencia es 0.

b) Una circunferencia es una elipse en la que los dos semiejes miden igual.

c) Si $a<b$, la ecuación $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ representa una elipse cuyo eje mayor está contenido en el eje *Y*.

d) La ecuación $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$ representa una hipérbola cuyo eje real está contenido en el eje *Y*.

a) Verdadero, $e=\frac{c}{a}=\frac{0}{r}=0$.

b) Verdadero, $a=b=r$.

c) Verdadero.

d) Verdadero, $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1 \Rightarrow \frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1$.

76. Indica para qué valores de *a* la ecuación $y^2 + ay + x = 0$ representa una parábola.

$y^2 + ay + x = 0 \Rightarrow \left(y + \frac{a}{2}\right)^2 = -\left(x - \frac{a^2}{4}\right)$. Para cualquier valor real de *a* la ecuación representa una parábola abierta hacia la izquierda de vértice $V\left(\frac{a^2}{4}, -\frac{a}{2}\right)$ y directriz $x = \frac{a^2+1}{4}$.

77. Indica los puntos del plano desde los que se puede trazar al menos una tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$.

Se puede trazar al menos una tangente desde cualquier punto que no sea interior a la circunferencia.

PROBLEMAS

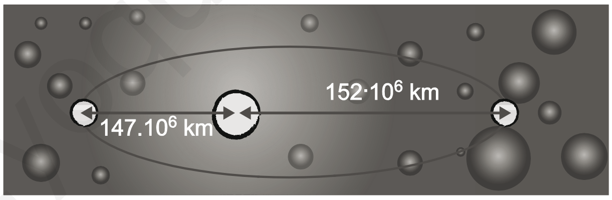
78. La máxima distancia que separa a la Tierra de la Luna es de 63 veces el radio terrestre. La excentricidad de la elipse de la órbita es muy baja, aproximadamente, *e* = 0,0678.

Calcula la distancia mínima, en kilómetros, que puede separar a la Tierra de la Luna. Considera que el radio terrestre mide aproximadamente 6357 km.

La distancia máxima y mínima de entre la Luna y la Tierra es, respectivamente, $a + c$ y $a - c$. Por tanto:

$$\begin{cases} a + c = 63 \cdot 6357 = 400\,491 \\ \frac{c}{a} = 0{,}0678 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 375\,062 \\ c = 25\,429 \end{cases} \Rightarrow a - c = 349\,633 \text{ km}.$$

79. La Tierra gira alrededor del Sol describiendo una elipse en uno de cuyos focos se encuentra el Sol. El punto en el que la distancia entre la Tierra y el Sol es máxima se denomina afelio, y el punto donde es mínima, perihelio.



Con los datos de la figura, calcula la excentricidad de la órbita de la Tierra e interprétala.

$$\begin{cases} a + c = 152 \cdot 10^6 \\ a - c = 147 \cdot 10^6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 149{,}5 \cdot 10^6 \\ c = 2{,}5 \cdot 10^6 \end{cases} \Rightarrow e = \frac{c}{a} = 0{,}0167.$$

La órbita es una elipse muy poco achatada, es casi una circunferencia.

80. Halla la longitud de una circunferencia que pasa por el origen de coordenadas y por el punto (2, 4) y tiene su centro en la recta determinada por los puntos (7, 2) y (3, –2).

El centro *C* de la circunferencia debe ser la intersección de la recta determinada por (7, 2) y (3, –2) y la mediatriz del segmento de extremos *O*(0, 0) y el punto (2, 4).

$$\begin{cases} x - y = 5 \\ x + 2y = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow C(5, 0),\ r = \sqrt{(2-5)^2 + (4-0)^2} = \sqrt{25} = 5$$

Por tanto, la longitud de la circunferencia es $2\pi r = 10\pi$ u.

81. Calcula las ecuaciones de las circunferencias circunscrita e inscrita al triángulo de vértices *A*(0, 1), *B*(3, –3) y *C*(4, 4).

Circunferencia circunscrita:

Observemos que se trata de un triángulo isósceles y rectángulo en *A*.

Por tanto, el circuncentro estará situado en el punto medio de la hipotenusa *BC*, $T\left(\frac{7}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Así, la ecuación de la circunferencia circunscrita es $\left(x-\frac{7}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{25}{2}$.

Circunferencia inscrita:

Bisectriz del ángulo *A*: $AT: \frac{x}{7}=\frac{y-1}{-1} \Rightarrow x+7y=7$

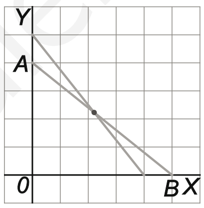
Bisectriz del ángulo *C*: $\frac{3x-4y+4}{5}=-\frac{7x-y-24}{5\sqrt{2}} \Rightarrow (3\sqrt{2}+7)x-(4\sqrt{2}+1)y+4\sqrt{2}-24=0$

Incentro: $\begin{cases} x+7y=7 \\ (3\sqrt{2}+7)-(4\sqrt{2}+1)y+4\sqrt{2}-24=0 \end{cases} \Rightarrow I\left(7-\frac{7\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

Radio: $5-\frac{5\sqrt{2}}{2}$

Ecuación: $\left(x-7+\frac{7\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(y-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=\left(5-\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)^2$

82. Un segmento *AB* de longitud 5 unidades se desliza de forma que el extremo *A* siempre está sobre el eje de ordenadas, y el extremo *B*, sobre el de abscisas.



a) Determina el lugar geométrico que describe el centro del segmento a lo largo de su deslizamiento.

b) Calcula el lugar geométrico que describe el punto del segmento que dista 2 unidades de *A* y 3 de *B*.

Sean *A*(0, *a*) y *B*(*b*, 0), de forma que $a^2+b^2=25$, y sea *X*(*x*, *y*) un punto genérico del lugar geométrico pedido.

a) $\begin{cases} x=\frac{a}{2} \\ y=\frac{b}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=2x \\ b=2y \end{cases} \Rightarrow 4x^2+4y^2=25$. Circunferencia de centro el origen y radio $\frac{5}{2}$.

b) $\begin{cases} x=\frac{2b}{5} \\ y=\frac{3a}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=\frac{5x}{2} \\ a=\frac{5y}{3} \end{cases} \Rightarrow \frac{25y^2}{9}+\frac{25x^2}{4}=25 \Rightarrow \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$. Elipse de centro el origen, $a=3$, $b=2$ y eje mayor situado en el eje de ordenadas.

83. Cuando se chuta un balón, la trayectoria que describe el mismo es una parábola que depende del ángulo con el que se golpea el balón y de la velocidad inicial con que se lanza el mismo.

Un jugador *A* ha golpeado un balón hacia su compañero *B* y ha conseguido las siguientes distancias.

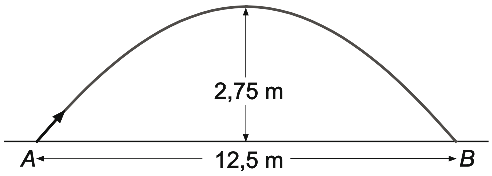
- **Altura máxima alcanzada por el balón: 2,75 m.**
- **Distancia hasta el punto donde el balón ha botado: 12,5 m.**

Con estos datos:

a) Escribe la ecuación de la trayectoria tomando una referencia adecuada.

b) Indica las coordenadas del foco y del vértice, y la ecuación de la directriz.

c) Si el jugador *B* se encuentra a 5 m del *A*, ¿a qué altura pasa el balón por su vertical?



a) Tomando como origen el punto *A* la ecuación es de la forma $(x-6,25)^2=-2p(y-2,75)$.

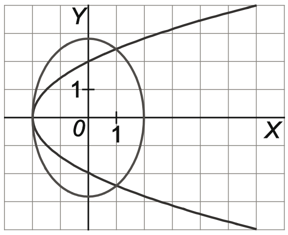
Como debe pasar por el origen, tenemos: $6,25^2=2p\cdot 2,75 \Rightarrow p=7,1 \Rightarrow (x-6,25)^2=-14,2(y-2,75)$

b) Vértice: *V*(6,25; 2,75) Foco: *F*(6,25; –0,8) Directriz: $y=6,3$

c) $x=5 \Rightarrow (5-6,25)^2=-14,2(y-2,75) \Rightarrow y=2,64$ m

PARA PROFUNDIZAR

84. Halla las longitudes de las cuerdas comunes a la parábola $y^2=2x+4$ y la elipse $2x^2+y^2=8$.

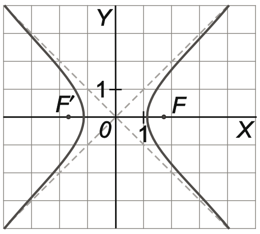


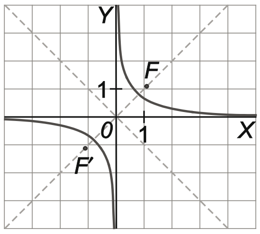
$$\begin{cases} y^2=2x+4 \\ 2x^2+y^2=8 \end{cases} \Rightarrow 2x^2+2x+4=8 \Rightarrow x^2+x-2=0 \Rightarrow \begin{cases} x=1,\ y=\pm\sqrt{6} \\ x=-2,\ y=0 \end{cases}$$

Los puntos comunes de las cónicas son: $A\left(1,\ \sqrt{6}\right)$, $B\left(1,\ -\sqrt{6}\right)$ y $C(-2,\ 0)$.

Las longitudes de las cuerdas serán, por tanto: $d(A,B)=2\sqrt{6}$ u, $d(A,C)=\sqrt{15}$ u y $d(B,C)=\sqrt{15}$ u.

85. Al girar una hipérbola equilátera, $x^2 - y^2 = a^2$, 45º según lo mostrado en las siguientes figuras, las asíntotas de la hipérbola coinciden con los ejes de coordenadas. Demuestra, utilizando las nuevas coordenadas de los focos y la definición de hipérbola como lugar geométrico, que, respecto de estos nuevos ejes, la ecuación de la hipérbola se escribe en la forma $xy = \frac{a^2}{2}$.





Como $c = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2}a$, las coordenadas de los nuevos focos serán $F(a, a)$ y $F'(-a, -a)$.

Por la definición de hipérbola:

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-a)^2} - \sqrt{(x+a)^2 + (y+a)^2} = 2a \Rightarrow \sqrt{(x-a)^2 + (y-a)^2} = 2a + \sqrt{(x+a)^2 + (y+a)^2} \Rightarrow$$

$$x^2 + y^2 - 2xa - 2ya + 2a^2 = 4a^2 + x^2 + y^2 + 2xa + 2ya + 2a^2 + 4a\sqrt{x^2 + y^2 + 2xa + 2ya + 2a^2} \Rightarrow$$

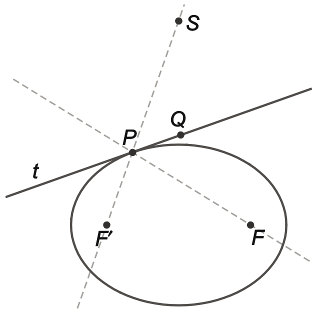
$$\sqrt{x^2 + y^2 + 2xa + 2ya + 2a^2} = -x - y - a \Rightarrow x^2 + y^2 + 2xa + 2ya + 2a^2 = x^2 + y^2 + a^2 + 2xy + 2ax + 2ay \Rightarrow$$

$$2xy = a^2 \Rightarrow xy = \frac{a^2}{2}.$$

86. Demuestra que la bisectriz exterior de los radios vectores de un punto de una elipse es la tangente a la misma en ese punto y calcula la tangente a $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ en el punto $P\left(3, \frac{16}{5}\right)$.

Consideremos la elipse de la figura, sea P uno de sus puntos y t la bisectriz exterior de los radio vectores PF y PF'.

Comprobemos que P es el único punto de intersección de t con la elipse, lo que probará que t es la tangente a la elipse por P. Para ello, consideremos S punto simétrico de F respecto a t y Q cualquier otro punto de t, entonces:



$$d(Q, F) + d(Q, F') = d(Q, S) + d(Q, F') > d(S, F') = d(P, S) + d(P, F') =$$

$$= d(P, F) + d(P, F') = 2a \Rightarrow Q \text{ no pertenece a la elipse.}$$

Para calcular la tangente a $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ en el punto P observemos en primer lugar que, efectivamente, P es un punto de la elipse, ya que verifica la ecuación.

Los focos de la elipse son $F(3, 0)$ y $F'(-3, 0)$, por tanto:

Recta PF: $\frac{x-3}{0} = \frac{y}{\frac{16}{5}} \Rightarrow x = 3$ Recta PF': $\frac{x+3}{6} = \frac{y}{\frac{16}{5}} \Rightarrow 8x - 15y + 24 = 0$

Bisectriz exterior (tangente a la elipse en P): Debe tener pendiente negativa, así,

$$x - 3 = \frac{8x - 15y + 24}{\sqrt{8^2 + 15^2}} \Rightarrow 17x - 51 = 8x - 15y + 24 \Rightarrow 9x + 15y - 75 = 0 \Rightarrow 3x + 5y - 25 = 0$$

87. De forma semejante a lo que ocurre en la elipse, la tangente a una hipérbola en uno de sus puntos es una de las dos bisectrices de sus radios vectores. Calcula la ecuación de la tangente a la hipérbola $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ en el punto $P\left(5,\ \frac{9}{4}\right)$. Calcula también la recta normal a la curva en ese punto.

Observemos que P pertenece a la hipérbola, ya que cumple su ecuación.

Los focos son $F(5, 0)$ y $F'(-5, 0)$, por tanto:

Recta PF: $\frac{x-5}{0}=\frac{y}{\frac{9}{4}} \Rightarrow x=5$ Recta PF': $\frac{x+5}{10}=\frac{y}{\frac{9}{4}} \Rightarrow \overline{FP} \equiv 9x-40y+45=0$

La bisectriz adecuada es, en este caso, la que tiene pendiente positiva:

$$x-5=-\frac{9x-40y+45}{\sqrt{9^2+40^2}} \Rightarrow 41x-205=-9x+40y-45 \Rightarrow 5x-4y-16=0$$

La recta normal será la otra bisectriz de los radios vectores en ese punto:

$$x-5=\frac{9x-40y+45}{\sqrt{9^2+40^2}} \Rightarrow 41x-205=9x-40y+45 \Rightarrow 16x+20y-125=0$$

88. Los tres tipos de cónicas se pueden definir todos a la vez de la siguiente manera: “Una cónica es el lugar geométrico de los puntos del plano tales que el cociente de distancias a un punto fijo llamado foco y a una recta fija llamada directriz es constante”.

- **Si la constante es menor que la unidad, la cónica es una elipse.**
- **Si la constante es igual a la unidad, la cónica es una parábola.**
- **Si la constante es mayor que la unidad, la cónica es una hipérbola.**

Comprueba lo anterior hallando:

a) El lugar geométrico de los puntos del plano tales que el cociente de distancias al punto $F(3, 0)$ y a la recta $x=\frac{25}{3}$ es 0,6.

b) El lugar geométrico de los puntos del plano tales que el cociente de distancias al punto $F(5, 0)$ y a la recta $x=\frac{16}{5}$ es 1,25.

a) $\frac{\sqrt{(x-3)^2+y^2}}{\left|x-\frac{25}{3}\right|}=\frac{3}{5} \Rightarrow \left(5\sqrt{(x-3)^2+y^2}\right)^2=(3x-25)^2 \Rightarrow 25\left(x^2-6x+9+y^2\right)=9x^2-150x+625 \Rightarrow$

$\Rightarrow 16x^2+25y^2=400 \Rightarrow \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$. Ecuación de una elipse.

b) $\frac{\sqrt{(x-5)^2+y^2}}{\left|x-\frac{16}{5}\right|}=\frac{5}{4} \Rightarrow \left(4\sqrt{(x-5)^2+y^2}\right)^2=(5x-16)^2 \Rightarrow 16\left(x^2-10x+25+y^2\right)=25x^2-160x+256 \Rightarrow$

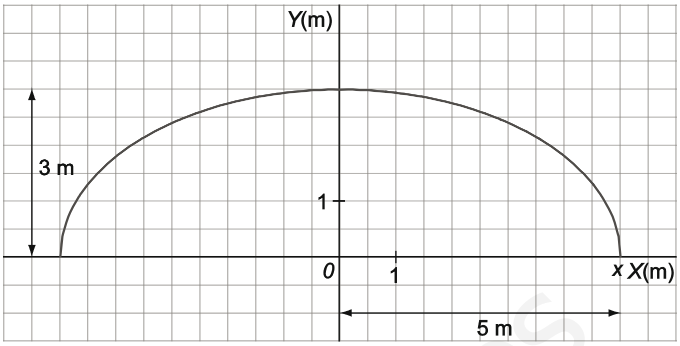
$\Rightarrow 9x^2-16y^2=144 \Rightarrow \frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$. Ecuación de una hipérbola.

ENTORNO MATEMÁTICO

El lugar adecuado para un cotilla

Elena y Eloísa están en el metro conversando animadamente mientras llega el tren. El techo de la estación tiene forma elíptica tal y como muestra el dibujo y las amigas están, curiosamente, colocadas justo en uno de los focos (*F*) de la sección elíptica.

Luis, un amigo de ellas un poco cotilla, quiere enterarse de la conversación y como este curso está estudiando las secciones cónicas en la clase de matemáticas, sabe que para escuchar bien lo que dicen debe colocarse en el otro foco (*F'*), de la elipse.



a) Suponiendo las distancias y el sistema de referencia que se indican en el dibujo, escribe la ecuación de la sección elíptica. ¿Cuáles son las coordenadas de los puntos donde se encuentran Eloísa, Elena y Luis?

b) Halla la ecuación de la recta tangente a la elipse en el punto $\left(4, \frac{9}{5}\right)$, sabiendo que coincide con una de las bisectrices de los radios vectores de la elipse que pasan por ese punto.

c) Comprueba que los ángulos que forman los radios vectores del punto anterior con la tangente hallada son iguales.

a) Ecuación: $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ Focos: $F(4, 0)$ y $F'(-4, 0)$

b) Los radio vectores son $PF: x=4$ y $PF': \frac{x+4}{8}=\frac{y}{9/5} \Rightarrow 9x-40y+36=0$.

Las bisectrices de los radios vectores son $\frac{9x-40y+36}{41}=\pm(x-4)$. Como la pendiente debe ser negativa, la bisectriz que nos interesa es $9x-40y+36=41(x-4) \Rightarrow 4x+5y-25=0$.

c) Ángulo formado por *PF* y la tangente: $\cos\alpha_1=\frac{|4|}{\sqrt{1}\sqrt{16+25}}=\frac{4}{\sqrt{41}} \Rightarrow \alpha_1=51{,}34°$

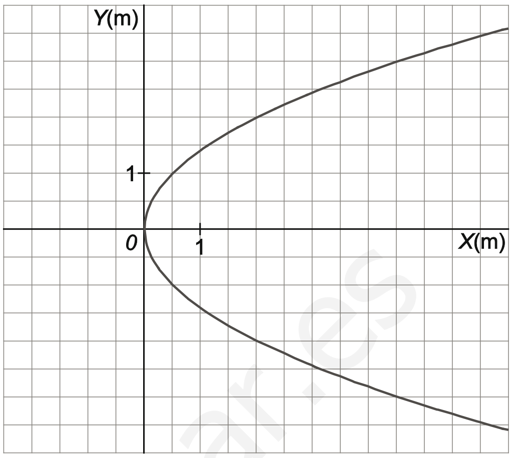
Ángulo formado por *PF'* y la tangente: $\cos\alpha_2=\frac{|9\cdot 4-40\cdot 5|}{\sqrt{81+1600}\sqrt{16+25}}=\frac{164}{41\sqrt{41}}=\frac{4}{\sqrt{41}} \Rightarrow \alpha_2=51{,}34°$

Los faros de los coches

Las secciones de los faros de los coches tienen forma parabólica ya que estas cónicas gozan de la propiedad de que todos los rayos rebotados de rayos que parten de su foco, salen en dirección siempre paralela al eje de la curva.

En la gráfica inferior aparece la sección de un faro de un coche con forma parabólica $y^2 = 2x$. La bombilla está situada en el foco *F* y emite rayos en todas las direcciones.

Comprueba que la dirección de cualquier rayo rebotado es paralela al eje de la parábola. Para ello:



a) Calcula las coordenadas del foco.

b) Considera, por ejemplo, el punto *S*(2, 2) de la parábola y halla la tangente a la elipse en dicho punto. Utiliza el hecho de que la tangente y la parábola tienen un único punto en común.

c) Comprueba que son iguales los ángulos que forma la tangente con la recta *FS* y la $y = 2$.

d) Con la ayuda de un programa de geometría dinámica comprueba que esta propiedad se verifica para todos los puntos de la parábola. ¿Te parece conveniente que las secciones de los faros de los coches tengan forma parabólica?

a) $F\left(\frac{1}{2},\ 0\right)$

b) La tangente en *S*(2, 2) será de la forma $y-2 = m(x-2)$ con $m \neq 0$. El sistema formado por las ecuaciones de la tangente y de la parábola debe tener solución única, así:

$$\begin{cases} y-2 = m(x-2) \\ y^2 = 2x \end{cases} \Rightarrow m^2(x^2-4x+4)+4m(x-2)+4 = 2x \Rightarrow m^2x^2-(4m^2-4m+2)x+(4m^2-8m+4) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta = b^2-4ac = 0 \Rightarrow (4m^2-4m+2)^2-4m^2(4m^2-8m+4) = 0 \Rightarrow 16m^2-16m+4 = 0 \Rightarrow m = \frac{1}{2}$$

Por tanto, la ecuación de la recta tangente es $y-2 = \frac{1}{2}(x-2) \Rightarrow x-2y+2 = 0$.

c) *FS*: $\dfrac{x-2}{\frac{3}{2}} = \dfrac{y-2}{2} \Rightarrow 4x-3y-2 = 0$

Ángulo formado por la tangente y *FS*: $\cos\alpha_1 = \dfrac{|4+6|}{\sqrt{1+4}\sqrt{16+9}} = \dfrac{2}{\sqrt{5}} \Rightarrow \alpha_1 = 26{,}57°$

Ángulo formado por la tangente y la recta $y = 2$: $\cos\alpha_2 = \dfrac{|-2|}{\sqrt{1+4}\sqrt{1}} = \dfrac{2}{\sqrt{5}} \Rightarrow \alpha_2 = 26{,}57°$

AUTOEVALUACION

Comprueba qué has aprendido

1. Calcula el centro y el radio de esta circunferencia.

$$\boldsymbol{x^2 + y^2 - 4x + 10y + 4 = 0}$$

La circunferencia tiene centro $C(2, -5)$ y radio $r = \sqrt{4 + 25 - 4} = \sqrt{25} = 5$.

2. Calcula la ecuación de la circunferencia que tiene su centro en la intersección de las rectas $2x + y = 5$ y $2x - y = 3$ y pasa por el punto $P(5,5)$.

Centro: $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ 2x - y = 3 \end{cases} \Rightarrow x = 2,\ y = 1 \Rightarrow C(2, 1)$ Radio: $r = d(C, P) = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$

Ecuación: $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 25 \Rightarrow x^2 + y^2 - 4x - 2y - 20 = 0$

3. Halla la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $A(0,0)$, $B(-1, 3)$ y $C(-8, -4)$. Calcula su centro y su radio.

La ecuación será de la forma $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$, por tanto:

$$\begin{cases} F = 0 \\ 1 + 9 - D + 3E + F = 0 \\ 64 + 16 - 8D - 4E + F = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F = 0 \\ -D + 3E = -10 \\ -8D - 4E = -80 \end{cases} \Rightarrow D = 10,\ E = 0,\ F = 0$$

La ecuación de la circunferencia es $x^2 + y^2 + 10x = 0$, su centro es $(-5, 0)$ y su radio $r = 5$.

4. Calcula la ecuación reducida de la elipse que pasa por los puntos $\left(3, -2\sqrt{3}\right)$ y $\left(-4, \frac{4\sqrt{5}}{3}\right)$. Halla sus semiejes, su semidistancia focal y sus vértices. ¿Cuál es su excentricidad?

La ecuación es de la forma $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, por tanto:

$$\begin{cases} \dfrac{9}{a^2} + \dfrac{12}{b^2} = 1 \\ \dfrac{16}{a^2} + \dfrac{\frac{80}{9}}{b^2} = 1 \end{cases} \Rightarrow a^2 = 36,\ b^2 = 16 \Rightarrow a = 6,\ b = 4$$

Ecuación: $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} = 1$ Semiejes: $a = 6$ y $b = 4$ Semidistancia focal: $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

Vértices: $A(6, 0)$, $A'(-6, 0)$, $B(0, 4)$ y $B'(0, -4)$ Excentricidad: $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{3}$

5. **Halla la ecuación y la excentricidad de la hipérbola de vértices (3, 0) y (–3, 0) y asíntotas $3y-4x=0$ y $3y+4x=0$.**

Tenemos $a=3$, $\frac{b}{a}=\frac{4}{3}\Rightarrow b=4$ y $c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{25}=5$, por tanto, la ecuación es $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$ y la excentricidad es $e=\frac{c}{a}=\frac{5}{3}$.

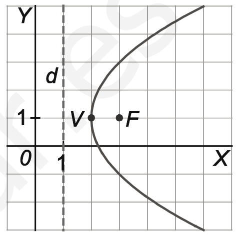
6. **Dada la parábola $y^2-2y-4x+9=0$:**

a) Calcula su foco y su directriz y dibújala.

b) Calcula la abscisa del punto cuya ordenada es $y=5$ y comprueba que la distancia de este punto al foco coincide con la distancia a la directriz.

a) $y^2-2y-4x+9=0\Rightarrow(y-1)^2=4(x-2)$

Parábola abierta hacia la derecha con vértice $V(2, 1)$ y parámetro $p=2$, por tanto, su foco es $F(3, 1)$ y la directriz es $d: x=1$.



b) $y=5\Rightarrow 25-10-4x+9=0\Rightarrow x=6\Rightarrow P(6, 5)$

$d(P, F)=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5$ $\qquad d(P, d)=\frac{|6-1|}{\sqrt{1}}=5$

7. **a)** Halla la ecuación del lugar geométrico de los puntos del plano tales que la distancia al punto fijo $P(6, 0)$ es igual a la tres quintas partes de la distancia a la recta $x=\frac{50}{3}$.

b) Describe el lugar geométrico hallado en el apartado anterior.

a) $\sqrt{(x-6)^2+y^2}=\frac{3}{5}\cdot\frac{\left|x-\frac{50}{3}\right|}{\sqrt{1}}\Rightarrow 5\sqrt{(x-6)^2+y^2}=|3x-50|\Rightarrow 25\left(x^2+36-12x+y^2\right)=9x^2+2500-300x\Rightarrow$

$\Rightarrow 16x^2+25y^2=1600\Rightarrow\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{64}=1$

b) Se trata de una elipse centrada en el origen de coordenadas, con ejes sobre los ejes de coordenadas y semiejes $a=10$ y $b=8$.

Relaciona y contesta

Elige la única respuesta correcta en cada caso

1. Elige la ecuación que no representa a una circunferencia:

A. $(x-3)^2+(y+1)^2=1$

B. $2x^2+2y^2-2x-3y=0$

C. $3x^2+3y^2-2x-3y+3=0$

D. $\dfrac{x^2}{-\frac{1}{2}}+\dfrac{y^2}{-\frac{1}{2}}=-\dfrac{1}{2}$

La ecuación A representa una circunferencia de centro (3, –1) y radio $r=1$.

La ecuación B representa una circunferencia de centro $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$ y radio $r=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{9}{16}}=\frac{\sqrt{13}}{4}$.

La ecuación C no representa una circunferencia, ya que su centro sería $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$ y su radio $r=\sqrt{\frac{1}{9}+\frac{1}{4}-1}=\frac{\sqrt{-23}}{6}$, que no es un número real.

La ecuación D, $\dfrac{x^2}{-\frac{1}{2}}+\dfrac{y^2}{-\frac{1}{2}}=-\dfrac{1}{2} \Rightarrow x^2+y^2=\dfrac{1}{4}$, representa una circunferencia de centro (0, 0) y radio $r=\frac{1}{2}$.

Por tanto, la respuesta correcta es C.

2. La ecuación de la elipse de focos los puntos (3, 2) y (–3, 2) y que pasa por el punto *P*(5, 2) es:

A. $16x^2+25y^2=500$

B. $16x^2+25(y-2)^2=1$

C. $16x^2+25(y-2)^2=500$

D. $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{(y-2)^2}{16}=1$

Los apartados B y C quedan descartados, ya que *P* no cumple las correspondientes ecuaciones. Por otro lado, la elipse debe tener centro *C*(0, 2), lo que descarta el apartado A, por tanto, la solución correcta debe ser D.

En efecto, el centro de la elipse $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{(y-2)^2}{16}=1$ es *C*, el punto *P* pertenece a la elipse y tenemos $a=5$ y $b=4$, con lo que $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{9}=3$ y los focos son (3, 2) y (–3, 2).

3. La parábola $y^2+\dfrac{1}{1+a^2}x=0$:

A. Tiene el foco en la parte positiva del eje *X*.

B. Tiene el foco en la parte positiva del eje *Y*.

C. Tiene el foco en la parte negativa del eje *X*.

D. Tiene el foco en la parte negativa del eje *Y*.

Es una parábola abierta hacia la izquierda, con vértice en el origen de coordenadas y eje el eje *X*, por tanto, la respuesta correcta es C, de hecho, el foco es $F\left(-\dfrac{1}{4\left(1+a^2\right)}, 0\right)$.

Señala, en cada caso, las respuestas correctas

4. La parábola $y^2 + y = 2x$ verifica que:

A. Su vértice es el punto $\left(\frac{1}{8}, \frac{1}{2}\right)$.

B. Su directriz es paralela al eje *Y*.

C. Su foco es el punto $\left(0, -\frac{1}{2}\right)$.

D. La distancia entre su foco y su directriz es 1.

$$y^2 + y = 2x \Rightarrow \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = 2\left(x + \frac{1}{8}\right)$$

La parábola está abierta hacia la derecha, su vértice es el punto $\left(-\frac{1}{8}, -\frac{1}{2}\right)$, tiene parámetro $p = 1$, foco $\left(\frac{3}{8}, -\frac{1}{2}\right)$ y directriz $x = -\frac{5}{8}$, por tanto, las respuestas correctas son B y D.

5. La elipse $2x^2 + y^2 - 4x - 4y = 0$ verifica que:

A. Su centro es el punto *C*(1, 2).

B. Su eje mayor es paralelo al eje *X*.

C. Su excentricidad vale $\sqrt{3}$.

D. Pasa por el punto (2, 4).

$$2x^2 + y^2 - 4x - 4y = 0 \Rightarrow \frac{(x-1)^2}{3} + \frac{(y-2)^2}{6} = 1$$

El centro es *C*(1, 2), $a = \sqrt{6}$, $b = \sqrt{3}$, $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{3}$ y $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, por tanto, las respuestas correctas son A y D.

Elige la relación correcta entre las dos afirmaciones dadas

6. Se considera el lugar geométrico de los puntos del plano tales que la suma de distancias a los puntos *F*(10, 0) y *F'*(–10, 0) es 2*a*, siendo *a* un número real positivo. Se consideran las afirmaciones:

1. El lugar geométrico es una elipse

2. $a > 10$

A. $1 \Leftrightarrow 2$

B. $1 \Rightarrow 2$ pero $2 \not\Rightarrow 1$

C. 1 y 2 son excluyentes entre sí.

D. Nada de lo anterior.

Obviamente, la relación correcta es A.

Señala el dato innecesario para contestar

7. Se considera la ecuación $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, donde *a* y *b* son números reales no nulos, y se quiere deducir que representa una elipse cuyo eje mayor está contenido en el eje *Y*. Se cuenta, además, con las siguientes afirmaciones:

1. $b \geq a$

2. La suma de distancias de un punto cualquiera de la elipse a los focos es $|2b|$.

A. Cada afirmación es suficiente por sí sola.

B. 1 es suficiente por sí sola, pero 2 no.

C. 2 es suficiente por sí sola, pero 1 no.

D. Son necesarias las dos afirmaciones.

La ecuación representa una elipse de ejes contenidos en los ejes de coordenadas. Para que el eje mayor este contenido en el eje *Y* es suficiente que se de 2, pero no basta con 1, por ejemplo, si $b = -1$ y $a = -2$ se cumple 1, pero el eje mayor de la elipse está contenido en el eje *X*.

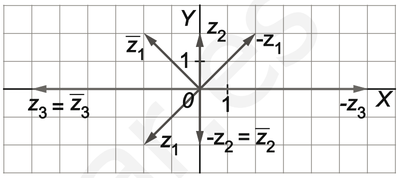
Por tanto, la respuesta correcta es C.

7 Números complejos

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Ejercicio resuelto.

2. Representa gráficamente los números $z_1 = -2-2i$, $z_2 = 2i$ y $z_3 = -6$. Halla su módulo y su argumento. Haz lo mismo con sus respectivos conjugados y opuestos.



$|z_1| = \sqrt{(-2)^2+(-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ $\quad$ $\text{tg}\,\alpha_1 = \frac{-2}{-2} = 1 \Rightarrow \text{Arg}\,z_1 = \alpha_1 = 225^\circ$

$|z_2| = \sqrt{0^2+2^2} = 2$ $\quad$ $\text{Arg}\,z_2 = 90^\circ$

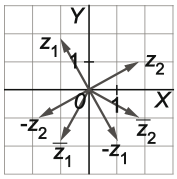
$|z_3| = \sqrt{(-6)^2+0^2} = 6$ $\quad$ $\text{Arg}\,z_3 = 180^\circ$

$|\overline{z_1}| = |-z_1| = |z_1| = 2\sqrt{2}$ $\quad$ $|\overline{z_2}| = |-z_2| = |z_2| = 2$ $\quad$ $|\overline{z_3}| = |-z_3| = |z_3| = 6$

$\text{Arg}\,\overline{z_1} = 360^\circ - \text{Arg}\,z_1 = 135^\circ$ $\quad$ $\text{Arg}\,\overline{z_2} = 360^\circ - \text{Arg}\,z_2 = 270^\circ$ $\quad$ $\text{Arg}\,\overline{z_3} = 360^\circ - \text{Arg}\,z_3 = 180^\circ$

$\text{Arg}(-z_1) = \text{Arg}\,z_1 - 180^\circ = 45^\circ$ $\quad$ $\text{Arg}(-z_2) = \text{Arg}\,z_2 + 180^\circ = 270^\circ$ $\quad$ $\text{Arg}(-z_3) = \text{Arg}\,z_3 - 180^\circ = 0^\circ$

3. Dados $z_1 = -1+\sqrt{3}i$ y $z_2 = \sqrt{3}+i$, represéntalos gráficamente y halla su módulo y su argumento. Haz lo mismo con sus respectivos conjugados y opuestos.



$|z_1| = \sqrt{(-1)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2} = 2$ $\quad$ $\text{tg}\,\alpha_1 = \frac{\sqrt{3}}{-1} = -\sqrt{3} \Rightarrow \text{Arg}\,z_1 = \alpha_1 = 120^\circ$

$|z_2| = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2+1^2} = 2$ $\quad$ $\text{tg}\,\alpha_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \text{Arg}\,z_2 = \alpha_2 = 30^\circ$

$|\overline{z_1}| = |-z_1| = |z_1| = 2$ $\quad$ $|\overline{z_2}| = |-z_2| = |z_2| = 2$

$\text{Arg}\,\overline{z_1} = 360^\circ - \text{Arg}\,z_1 = 240^\circ$ $\quad$ $\text{Arg}\,\overline{z_2} = 360^\circ - \text{Arg}\,z_2 = 330^\circ$

$\text{Arg}(-z_1) = \text{Arg}\,z_1 + 180^\circ = 300^\circ$ $\quad$ $\text{Arg}(-z_2) = \text{Arg}\,z_2 + 180^\circ = 210^\circ$

4. Ejercicio resuelto.

5. Si $z_1 = -1+\sqrt{3}i$ y $z_2 = \sqrt{3}+i$, halla el módulo y el argumento de los números:

a) $z_1 z_2$ **b)** z_1^2 **c)** $\dfrac{z_1}{z_2}$ **d)** z_2^{-1}

a) $z_1z_2 = \left(-1+\sqrt{3}i\right)\left(\sqrt{3}+i\right) = -\sqrt{3} - i + 3i + \sqrt{3}i^2 = -2\sqrt{3} + 2i$

$|z_1z_2| = \sqrt{\left(-2\sqrt{3}\right)^2 + 2^2} = 4$ $\quad\quad \text{tg}\,\alpha = \dfrac{2}{-2\sqrt{3}} = -\dfrac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \text{Arg}(z_1z_2) = \alpha = 150^\circ$

b) $z_1^2 = \left(-1+\sqrt{3}i\right)^2 = 1 - 2\sqrt{3}i + 3i^2 = -2 - 2\sqrt{3}i$

$|z_1^2| = \sqrt{(-2)^2 + \left(-2\sqrt{3}\right)^2} = 4$ $\quad\quad \text{tg}\,\alpha = \dfrac{-2\sqrt{3}}{-2} = \sqrt{3} \Rightarrow \text{Arg}\left(z_1^2\right) = 240^\circ$

c) $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{\sqrt{3}+i} = \dfrac{\left(-1+\sqrt{3}i\right)\left(\sqrt{3}-i\right)}{\left(\sqrt{3}+i\right)\left(\sqrt{3}-i\right)} = \dfrac{-\sqrt{3}+i+3i-\sqrt{3}i^2}{3+1} = \dfrac{4i}{4} = i$

$\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \sqrt{0^2+1^2} = 1$ $\quad\quad \text{Arg}\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right) = 90^\circ$

d) $z_2^{-1} = \dfrac{\overline{z_2}}{|z_2|^2} = \dfrac{\sqrt{3}-i}{4} = \dfrac{\sqrt{3}}{4} - \dfrac{1}{4}i$

$|z_2^{-1}| = \sqrt{\left(\dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)^2 + \left(-\dfrac{1}{4}\right)^2} = \dfrac{1}{2}$ $\quad\quad \text{tg}\,\alpha = \dfrac{-\frac{1}{4}}{\frac{\sqrt{3}}{4}} = -\dfrac{1}{\sqrt{3}} = -\dfrac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \text{Arg}\left(z_2^{-1}\right) = \alpha = 330^\circ$

6. Determina qué número real *a* sitúa el afijo del complejo $(2+i)(a-i)$ en la bisectriz del primer y tercer cuadrante. ¿Cuáles son su módulo y su argumento?

$(2+i)(a-i) = 2a - 2i + ai - i^2 = (2a+1) + (a-2)i$. Para que el afijo esté en la bisectriz del primer y tercer cuadrante, la parte real e imaginaria deben coincidir, por tanto, $2a+1 = a-2 \Rightarrow a = -3$.

El número complejo resulta ser $-5-5i$, de módulo $\sqrt{(-5)^2+(-5)^2} = 5\sqrt{2}$ y argumento $\text{tg}\,\alpha = \dfrac{-5}{-5} = 1 \Rightarrow \alpha = 225^\circ$.

7. Demuestra las propiedades 2, 4 y 6 de las operaciones con complejos conjugados.

Las demostraciones son directas sin más que escribir los complejos y sus conjugados en forma binómica y operar:

Propiedad 2: $z - \overline{z} = 2i\,\text{Im}\,z$

$z - \overline{z} = (a+bi) - (a-bi) = 2bi = 2i\,\text{Im}\,z$

Propiedad 4: $\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$

$\overline{z_1+z_2} = \overline{(a+bi)+(c+di)} = \overline{(a+c)+(b+d)i} = (a+c)-(b+d)i = (a-bi)+(c-di) = \overline{z_1}+\overline{z_2}$

$\overline{z_1-z_2} = \overline{(a+bi)-(c+di)} = \overline{(a-c)+(b-d)i} = (a-c)-(b-d)i = (a-bi)-(c-di) = \overline{z_1}-\overline{z_2}$

Propiedad 6: $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}};\ z_2 \neq 0$

$\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \overline{\left(\dfrac{z_1\overline{z_2}}{z_2\overline{z_2}}\right)} = \overline{\left(\dfrac{z_1\overline{z_2}}{|z_2|^2}\right)} = \dfrac{\overline{z_1\overline{z_2}}}{|z_2|^2} = \dfrac{\overline{z_1}\,\overline{\overline{z_2}}}{|z_2|^2} = \dfrac{\overline{z_1}z_2}{\overline{z_2}z_2} = \dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$, en donde se ha aplicado la propiedad 3 y 5.

8. Opera y escribe en forma binómica estos complejos:

a) $(1+i)(3-2i)$ **b)** $2i(3+4i)$ **c)** $\frac{1+i}{i}$ **d)** $\frac{2-3i}{4+2i}$ **e)** $\frac{2}{1+i}-\frac{3}{1-i}$ **f)** $\frac{1}{4+3i}\cdot\frac{1+i}{i}$

a) $(1+i)(3-2i)=3-2i+3i-2i^2=5+i$

b) $2i(3+4i)=6i+8i^2=-8+6i$

c) $\frac{1+i}{i}=\frac{(1+i)i}{i^2}=\frac{i+i^2}{-1}=1-i$

d) $\frac{2-3i}{4+2i}=\frac{(2-3i)(4-2i)}{(4+2i)(4-2i)}=\frac{8-4i-12i+6i^2}{16+4}=\frac{2-16i}{20}=\frac{1}{10}-\frac{4}{5}i$

e) $\frac{2}{1+i}-\frac{3}{1-i}=\frac{2(1-i)-3(1+i)}{(1+i)(1-i)}=\frac{2-2i-3-3i}{1+1}=\frac{-1-5i}{2}=-\frac{1}{2}-\frac{5}{2}i$

f) $\frac{1}{4+3i}\cdot\frac{1+i}{i}=\frac{1+i}{-3+4i}=\frac{(1+i)(-3-4i)}{(-3+4i)(-3-4i)}=\frac{-3-4i-3i-4i^2}{9+16}=\frac{1-7i}{25}=\frac{1}{25}-\frac{7}{25}i$

9. Calcula *a* para que $\frac{a+2i}{5+12i}$ sea imaginario puro.

$$\frac{a+2i}{5+12i}=\frac{(a+2i)(5-12i)}{(5+12i)(5-12i)}=\frac{5a-12ai+10i-24i^2}{25+144}=\frac{24+5a}{169}+\frac{10-12a}{169}i\Rightarrow\frac{24+5a}{169}=0\Rightarrow a=-\frac{24}{5}$$

10. Escribe en forma binómica $1+i+i^2+i^3+...+i^{100}$.

$$1+i+i^2+i^3+...+i^{100}=\frac{i^{101}-1}{i-1}=\frac{i^{4\cdot25+1}-1}{i-1}=\frac{i-1}{i-1}=1$$

11 a 13. Ejercicios resueltos.

14. Utilizando la forma polar, prueba que el inverso del complejo *z* es $z^{-1}=\frac{\bar{z}}{|z|^2}$.

Si $z=r_\alpha$, tenemos $\frac{\bar{z}}{|z|^2}=\frac{r_{-\alpha}}{r^2_{0^\circ}}=\left(\frac{1}{r}\right)_{-\alpha-0^\circ}=\left(\frac{1}{r}\right)_{-\alpha}$ y $z^{-1}=\frac{1}{z}=\frac{1_{0^\circ}}{r_\alpha}=\left(\frac{1}{r}\right)_{0^\circ-\alpha}=\left(\frac{1}{r}\right)_{-\alpha}$, por tanto, z^{-1} y $\frac{\bar{z}}{|z|^2}$ coinciden.

15. Expresa en las tres formas habituales los complejos:

a) $(1+i)^2$ **b)** $\frac{1}{i}$ **c)** i^7+i^{17} **d)** $\frac{1}{2}(1+i)\left(1+i^{-4}\right)$

a) $(1+i)^2=1+i^2+2i=2i=2_{90^\circ}=2(\cos 90^\circ+i\operatorname{sen}90^\circ)$

b) $\frac{1}{i}=\frac{i}{i^2}=-i=1_{270^\circ}=1(\cos 270^\circ+i\operatorname{sen}270^\circ)$

c) $i^7+i^{17}=i^3+i^1=-i+i=0$, no tiene forma polar ni trigonométrica.

d) $1+i^{-4}=1+\frac{1}{i^4}=1+\frac{1}{1}=2\Rightarrow\frac{1}{2}(1+i)\left(1+i^{-4}\right)=1+i=\sqrt{2}_{45^\circ}=\sqrt{2}(\cos 45^\circ+i\operatorname{sen}45^\circ)$

16. Resuelve las operaciones indicadas para los complejos: $z_1 = 2_{60^\circ}$, $z_2 = -1+i$ y $z_3 = 2(\cos 210^\circ + i\,\mathrm{sen}\,210^\circ)$.

a) $z_1 z_2 z_3$ **b)** $\dfrac{z_1\overline{z_2}}{z_3}$ **c)** $z_3^{\,4}$ **d)** $z_2^{\,-2}$

$z_1 = 2_{60^\circ}$, $z_2 = -1+i = \sqrt{2}_{135^\circ}$ y $z_3 = 2(\cos 210^\circ + i\,\mathrm{sen}\,210^\circ) = 2_{210^\circ}$

a) $z_1z_2z_3 = 2_{60^\circ}\cdot\sqrt{2}_{135^\circ}\cdot 2_{210^\circ} = \left(4\sqrt{2}\right)_{405^\circ} = \left(4\sqrt{2}\right)_{45^\circ} = 4\sqrt{2}(\cos 45^\circ + i\,\mathrm{sen}\,45^\circ) = 4\sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}i\right) = 4+4i$

b) $\dfrac{z_1\overline{z_2}}{z_3} = \dfrac{2_{60^\circ}\cdot\sqrt{2}_{-135^\circ}}{2_{210^\circ}} = \sqrt{2}_{-285^\circ} = \sqrt{2}_{75^\circ} = \sqrt{2}(\cos 75^\circ + \mathrm{sen}\,75^\circ) = \sqrt{2}\left[\cos(45^\circ+30^\circ) + i\,\mathrm{sen}(45^\circ+30^\circ)\right] =$

$= \sqrt{2}\left[(\cos 45^\circ\cos 30^\circ - \mathrm{sen}\,45^\circ\,\mathrm{sen}\,30^\circ) + i(\mathrm{sen}\,45^\circ\cos 30^\circ + \cos 45^\circ\,\mathrm{sen}\,30^\circ)\right] =$

$= \sqrt{2}\left[\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\dfrac{1}{2}\right) + i\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\dfrac{1}{2}\right)\right] = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}+1}{2}i$

c) $z_3^{\,4} = (2_{210^\circ})^4 = 16_{840^\circ} = 16_{120^\circ} = 16(\cos 120^\circ + i\,\mathrm{sen}\,120^\circ) = 16\left(-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right) = -8+8\sqrt{3}i$

d) $z_2^{\,2} = \left(\sqrt{2}_{135^\circ}\right)^2 = 2_{270^\circ} \Rightarrow z_2^{\,-2} = \dfrac{1}{z^2} = \dfrac{1_{0^\circ}}{2_{270^\circ}} = \left(\dfrac{1}{2}\right)_{-270^\circ} = \left(\dfrac{1}{2}\right)_{90^\circ} = \dfrac{1}{2}i$

17. Escribe en forma polar $z = -2(\cos 30^\circ + i\,\mathrm{sen}\,30^\circ)$.

$z = -2(\cos 30^\circ + i\,\mathrm{sen}\,30^\circ) = 2(-\cos 30^\circ - i\,\mathrm{sen}\,30^\circ) = 2(\cos 210^\circ + i\,\mathrm{sen}\,210^\circ) = 2_{210^\circ}$

También podríamos haber observado que z es el opuesto de $2(\cos 30^\circ + i\,\mathrm{sen}\,30^\circ) = 2_{30^\circ}$ y, por tanto, $z = 2_{180^\circ+30^\circ} = 2_{210^\circ}$.

18. Expresa en forma polar todos los complejos z que cumplen:

a) $(2z+3)(iz+5)=0$ **c)** $3\overline{z} = 1+i$ **e)** $\dfrac{z}{z-2i} = 1+i$

b) $2+3iz = 4iz+9$ **d)** $(1+2i)z = 3-5i$ **f)** $2z + i\overline{z} = 1$

a) $(2z+3)(iz+5)=0 \Rightarrow \begin{cases} 2z+3=0 \Rightarrow z = -\dfrac{3}{2} = \left(\dfrac{3}{2}\right)_{180^\circ} \\ iz+5=0 \Rightarrow z = -\dfrac{5}{i} = -\dfrac{5i}{i^2} = 5i = 5_{90^\circ} \end{cases}$

b) $2+3iz = 4iz+9 \Rightarrow iz = -7 \Rightarrow z = -\dfrac{7}{i} = 7i = 7_{90^\circ}$

c) $3\overline{z} = 1+i \Rightarrow \overline{z} = \dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}i \Rightarrow z = \dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{3}i = \left(\dfrac{\sqrt{2}}{3}\right)_{315^\circ}$

d) $(1+2i)z = 3-5i \Rightarrow z = \dfrac{3-5i}{1+2i} = \dfrac{(3-5i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)} = \dfrac{-7-11i}{5} = -\dfrac{7}{5}-\dfrac{11}{5}i = \left(\sqrt{\dfrac{34}{5}}\right)_{237,53^\circ}$

e) $\dfrac{z}{z-2i} = 1+i \Rightarrow z = (1+i)z - 2i(1+i) \Rightarrow iz = -2+2i \Rightarrow z = \dfrac{-2+2i}{i} = 2+2i = \left(2\sqrt{2}\right)_{45^\circ}$

f) $2z + i\overline{z} = 1 \Rightarrow 2(a+bi) + i(a-bi) = 1 \Rightarrow (2a+b)+(2b+a)i = 1 \Rightarrow \begin{cases} 2a+b=1 \\ a+2b=0 \end{cases} \Rightarrow a = \dfrac{2}{3},\ b = -\dfrac{1}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow z = \dfrac{2}{3}-\dfrac{1}{3}i = \left(\dfrac{\sqrt{5}}{3}\right)_{333,43^\circ}$

19. Halla todos los números reales *x* e *y* tales que $\dfrac{x+yi}{x-yi}=x-yi$. Expresa en forma polar y trigonométrica $x+yi$ y $x-yi$.

$$\frac{x+yi}{x-yi}=x-yi\Rightarrow x+yi=(x-yi)^2=x^2+y^2i^2-2xyi=(x^2-y^2)-2xyi\Rightarrow\begin{cases}x=x^2-y^2\\ y=-2xy\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=0,\ y=0\\ x=1,\ y=0\\ x=-\dfrac{1}{2},\ y=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\\ x=-\dfrac{1}{2},\ y=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$$

Se obtiene, por tanto, cuatro posibilidades para $z=x+yi$ y $\overline{z}=x-yi$:

$z=\overline{z}=0$, que no tiene forma polar ni trigonométrica.

$z=\overline{z}=1=1_{0^\circ}=1(\cos 0^\circ+i\,\text{sen}\,0^\circ)$

$z=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i=1_{120^\circ}=1(\cos 120^\circ+i\,\text{sen}\,120^\circ)$ y $\overline{z}=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}=1_{240^\circ}=1(\cos 240^\circ+i\,\text{sen}\,240^\circ)$

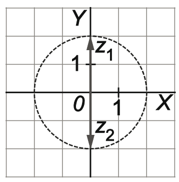
$z=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i=1_{240^\circ}=1(\cos 240^\circ+i\,\text{sen}\,240^\circ)$ y $\overline{z}=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}=1_{120^\circ}=1(\cos 120^\circ+i\,\text{sen}\,120^\circ)$

20 y 21. Ejercicios resueltos.

22. Calcula las raíces quintas de $\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ expresando el resultado en forma polar.

$\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i=1_{60^\circ}\Rightarrow\sqrt[5]{1_{60^\circ}}=s_\beta$, con $s=\sqrt[5]{1}=1$ y $\beta=\dfrac{60^\circ+360^\circ k}{5}=12^\circ+72^\circ k\ (k=0,1,2,3,4)$, así, las raíces quintas de $\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ son $z_1=1_{12^\circ}$, $z_2=1_{84^\circ}$, $z_3=1_{156^\circ}$, $z_4=1_{228^\circ}$ y $z_5=1_{300^\circ}$.

23. Calcula y representa gráficamente las raíces cuadradas de –4.

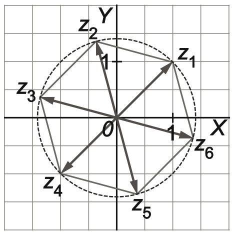


$-4=4_{180^\circ}\Rightarrow\sqrt{4_{180^\circ}}=s_\beta$, con $s=\sqrt{4}=2$ y $\beta=\dfrac{180^\circ+360^\circ k}{2}=90^\circ+180^\circ k\ (k=0,1)$, por tanto, las raíces cuadradas de –4 son $z_1=2_{90^\circ}=2i$ y $z_2=2_{270^\circ}=-2i$.

24. Halla los números complejos *z* que cumplen que: $z=\sqrt[4]{-16}$

$-16=16_{180^\circ}\Rightarrow\sqrt[4]{16_{180^\circ}}=s_\beta$, con $s=\sqrt[4]{16}=2$ y $\beta=\dfrac{180^\circ+360^\circ k}{4}=45^\circ+90^\circ k\ (k=0,1,2,3)$, por tanto, obtenemos cuatro soluciones: $z_1=2_{45^\circ}=\sqrt{2}+\sqrt{2}i$, $z_2=2_{135^\circ}=-\sqrt{2}+\sqrt{2}i$, $z_3=2_{225^\circ}=-\sqrt{2}-\sqrt{2}i$ y $z_4=2_{315^\circ}=\sqrt{2}-\sqrt{2}i$.

25. Si una raíz sexta de *z* es 1 + *i*, calcula y representa gráficamente las otras cinco raíces sextas de *z*.



Tenemos $z=(1+i)^6=\left(\sqrt{2}_{45^\circ}\right)^6=8_{270^\circ}$, por tanto, las raíces sextas de *z* son de la forma s_β con $s=\sqrt[6]{8}=\sqrt{2}$ y $\beta=\dfrac{270^\circ+360^\circ k}{6}=45^\circ+60^\circ k\ (k=0,1,2,3,4,5)$, obtenemos así las raíces sextas de *z*: $z_1=\sqrt{2}_{45^\circ}=1+i$, $z_2=\sqrt{2}_{105^\circ}$, $z_3=\sqrt{2}_{165^\circ}$, $z_4=\sqrt{2}_{225^\circ}$, $z_5=\sqrt{2}_{285^\circ}$ y $z_6=\sqrt{2}_{345^\circ}$.

Podemos resolver el problema de manera más simple recordando que si $1+i=\sqrt{2}_{45^\circ}$ es una raíz sexta de *z*, las otras cinco raíces se obtienen multiplicando $\sqrt{2}_{45^\circ}$ por 1_{60°, 1_{120°, 1_{180°, 1_{240° y 1_{300°, obteniéndose el mismo resultado que con el método anterior.

26. Un vértice de un octógono regular inscrito en una circunferencia centrada en el origen es el punto *A*(12, 5). Calcula los vértices adyacentes.

El ángulo central de un octógono regular es $\dfrac{360^\circ}{8}=45^\circ$, así, para encontrar los vértices adyacentes pedidos, basta girar el vértice *A* respecto del origen de coordenadas 45º y –45º.

Es decir, basta multiplicar $12+5i$ por $1_{45^\circ}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}i$ y $1_{-45^\circ}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}i$, siendo los vértices adyacentes los afijos de los números que se obtienen. De este modo:

$$(12+5i)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)=\frac{7\sqrt{2}}{2}+\frac{17\sqrt{2}}{2}i\Rightarrow \text{Vértice: }\left(\frac{7\sqrt{2}}{2},\frac{17\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$(12+5i)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)=\frac{17\sqrt{2}}{2}-\frac{7\sqrt{2}}{2}i\Rightarrow \text{Vértice: }\left(\frac{17\sqrt{2}}{2},-\frac{7\sqrt{2}}{2}\right)$$

27. Demuestra que si $k=cn+r$ con $r=0, 1, 2, \dots, n-1$ entonces las razones trigonométricas del ángulo $\dfrac{\alpha+360^\circ k}{n}$ coinciden con las del $\dfrac{\alpha+360^\circ r}{n}$.

Observemos que ambos ángulos se diferencian en un múltiplo de 360º, por lo que sus razones trigonométricas coincidirán.

En efecto: $\dfrac{\alpha+360^\circ k}{n}-\dfrac{\alpha+360^\circ r}{n}=\dfrac{360^\circ(k-r)}{n}=\dfrac{360^\circ cn}{n}=360^\circ c$.

28. Ejercicio interactivo.

29 y 30. Ejercicios resueltos.

31. Resuelve las siguientes ecuaciones dando las soluciones en forma binómica.

a) $x^2+ix+1=0$ **b)** $x^2+2ix-1=0$ **c)** $x^4+x^2+1=0$ **d)** $x^3-x^2-x-2=0$

a) $x^2+ix+1=0 \Rightarrow x=\dfrac{-i\pm\sqrt{i^2-4}}{2}=\dfrac{-i\pm\sqrt{-5}}{2}=\dfrac{-i\pm\sqrt{5}i}{2}=\begin{cases} x_1=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}i \\ x_2=-\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}i \end{cases}$

b) $x^2+2ix-1=0 \Rightarrow x=\dfrac{-2i\pm\sqrt{4i^2+4}}{2}=-i$

c) Haciendo el cambio $z=x^2$ tenemos $z^2+z+1=0 \Rightarrow z=\dfrac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}=\begin{cases} z_1=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i=1_{120^\circ} \\ z_2=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i=1_{240^\circ} \end{cases}$

Deshaciendo el cambio, haciendo las raíces cuadradas de z_1 y z_2, obtenemos las soluciones $x_1=1_{60^\circ}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$, $x_2=1_{240^\circ}=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$, $x_3=1_{120^\circ}=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ y $x_4=1_{300^\circ}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$.

d) Al ser una ecuación polinómica con coeficientes reales, para cada solución su conjugada también será solución, por tanto, una de las tres soluciones es un número real. Probando los divisores del término independiente obtenemos como solución $x_1=2$ y $x^3-x^2-x-2=(x-2)(x^2+x+1)$, por lo que las otras dos soluciones se obtienen resolviendo $x^2+x+1=0 \Rightarrow x_2=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i,\ x_3=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$.

32. Resuelve los siguientes sistemas.

a) $\begin{cases} ix-(1+i)y=3 \\ (2+i)x+iy=4 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x^2+4y^2=-1 \\ x-2y=2 \end{cases}$

a) $\begin{cases} ix-(1+i)y=3 \\ (2+i)x+iy=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} i^2x-(1+i)iy=3i \\ (1+i)(2+i)x+(1+i)iy=4(1+i) \end{cases}$

Sumando las ecuaciones tenemos: $-x+(1+3i)x=3i+4+4i \Rightarrow 3ix=4+7i \Rightarrow x=\dfrac{4+7i}{3i}=\dfrac{7}{3}-\dfrac{4}{3}i$.

Sustituyendo en la segunda ecuación: $(2+i)\left(\dfrac{7}{3}-\dfrac{4}{3}i\right)+iy=4 \Rightarrow \dfrac{18}{3}-\dfrac{1}{3}i+iy=4 \Rightarrow iy=-2+\dfrac{1}{3}i \Rightarrow y=\dfrac{1}{3}+2i$.

b) $x-2y=2 \Rightarrow x=2+2y$

$(2+2y)^2+4y^2=-1 \Rightarrow 8y^2+8y+5=0 \Rightarrow y=\dfrac{-8\pm\sqrt{-96}}{16}=-\dfrac{1}{2}\pm\dfrac{\sqrt{6}}{4}i \Rightarrow \begin{cases} y=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{6}}{4}i,\ x=1+\dfrac{\sqrt{6}}{2}i \\ y=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{6}}{4}i,\ x=1-\dfrac{\sqrt{6}}{2}i \end{cases}$

33. Factoriza completamente en $\mathbb{R}$ y en $\mathbb{C}$ los polinomios:

a) $P(x)=x^3-2x^2+9x-18$ **b)** $Q(x)=x^4+x^3-3x^2-4x-4$

a) $P(x)=(x-2)(x^2+9)$ en $\mathbb{R}$ $P(x)=(x-2)(x+3i)(x-3i)$ en $\mathbb{C}$

b) $Q(x)=(x+2)(x-2)(x^2+x+1)$ en $\mathbb{R}$ $Q(x)=(x+2)(x-2)\left(x+\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(x+\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)$ en $\mathbb{C}$

34. Determina los números reales *b* y *c* sabiendo que una raíz del polinomio $P(z)=2z^3+bz^2-4z+c$ es $1-i$.

$$P(1-i)=0 \Rightarrow 2(1-i)^3+b(1-i)^2-4(1-i)+c=0 \Rightarrow -4-4i+2bi-4+4i+c=0 \Rightarrow \begin{cases}-8+c=0\\ 2b=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}b=0\\ c=8\end{cases}$$

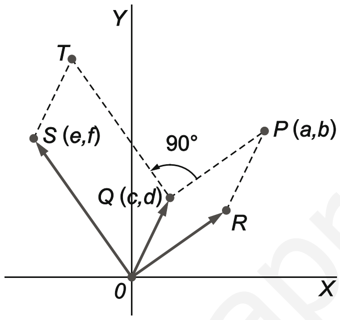
35. Ejercicio interactivo.

36 a 43. Ejercicios resueltos.

EJERCICIOS

Los números complejos

44. Sean los números complejos señalados en la figura.



a) Halla su forma binómica.

b) Calcula su módulo.

c) Determina su argumento.

d) ¿Hay algún par que sean conjugados entre sí?

Identificamos puntos y vectores con el número complejo correspondiente.

a) $P=a+bi$, $Q=c+di$ y $S=e+fi$. Observemos que R se obtiene trasladando P según el vector $-\overrightarrow{OQ}$, por tanto, $R=(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i$. Análogamente, T se obtiene trasladando S según el vector $\overrightarrow{OQ}$, por tanto, $T=(e+fi)+(c+di)=(e+c)+(f+d)i$

b) $|P|=\sqrt{a^2+b^2}$, $|Q|=\sqrt{c^2+d^2}$, $|R|=\sqrt{(a-c)^2+(b-d)^2}$, $|S|=\sqrt{e^2+f^2}$ y $|T|=\sqrt{(e+c)^2+(f+d)^2}$

c) $\text{Arg}\,P=\text{arctg}\left(\dfrac{b}{a}\right)$, hay que tomar la solución del primer cuadrante.

$\text{Arg}\,Q=\text{arctg}\left(\dfrac{d}{c}\right)$, hay que tomar la solución del primer cuadrante.

$\text{Arg}\,R=\text{arctg}\left(\dfrac{b-d}{a-c}\right)$, hay que tomar la solución del primer cuadrante.

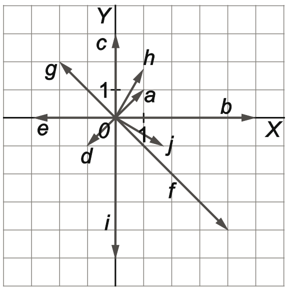
$\text{Arg}\,S=\text{arctg}\left(\dfrac{f}{e}\right)=90^\circ+\text{Arg}\,R$ $\qquad$ $\text{Arg}\,T=\text{arctg}\left(\dfrac{f+d}{e+c}\right)=90^\circ+\text{Arg}\,R=\text{Arg}\,S$

e) Si hubiera algún par conjugados entre sí serían simétricos respecto del eje *X*, lo que no ocurre.

45. Representa los siguientes números complejos y, sin ningún cálculo, obtén sus argumentos.

a) $1+i$ **c)** $3i$ **e)** -3 **g)** $-2+2i$ **i)** $-5i$

b) 5 **d)** $-1-i$ **f)** $4-4i$ **h)** $1+\sqrt{3}i$ **j)** $\sqrt{3}-i$



a) $\operatorname{Arg}(1+i)=45^\circ$ **f)** $\operatorname{Arg}(4-4i)=315^\circ$

b) $\operatorname{Arg}(5)=0^\circ$ **g)** $\operatorname{Arg}(-2+2i)=135^\circ$

c) $\operatorname{Arg}(3i)=90^\circ$ **h)** $\operatorname{Arg}\left(1+\sqrt{3}i\right)=60^\circ$

d) $\operatorname{Arg}(-1-i)=225^\circ$ **i)** $\operatorname{Arg}(-5i)=270^\circ$

e) $\operatorname{Arg}(-3)=180^\circ$ **j)** $\operatorname{Arg}\left(\sqrt{3}-i\right)=330^\circ$

46. Sean los números complejos: $z_1=-2+i$ **,** $z_2=1+4i$ **,** $z_3=-3-2i$ **,** $z_4=-5i$ **,** $z_5=4$ **,** $z_6=2-3i$ **.**

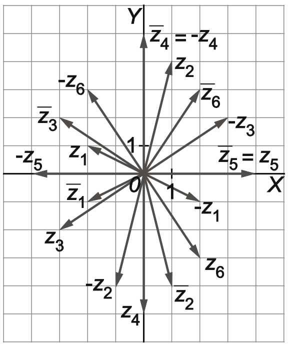
a) Represéntalos junto con sus opuestos y conjugados.

b) Halla su módulo y su argumento.

c) Determina el módulo y el argumento de sus opuestos.

d) Determina el módulo y el argumento de sus conjugados.

a)



b) $|z_1|=\sqrt{5}$, $|z_2|=\sqrt{17}$, $|z_3|=\sqrt{13}$, $|z_4|=5$, $|z_5|=4$ y $|z_6|=\sqrt{13}$

$\operatorname{Arg} z_1=\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{2}\right)=153{,}43^\circ$, $\operatorname{Arg} z_2=\operatorname{arctg}(4)=75{,}96^\circ$, $\operatorname{Arg} z_3=\operatorname{arctg}\left(\frac{2}{3}\right)=213{,}69^\circ$, $\operatorname{Arg} z_4=270^\circ$,

$\operatorname{Arg} z_5=0^\circ$ y $\operatorname{Arg} z_6=\operatorname{arctg}\left(-\frac{3}{2}\right)=303{,}69^\circ$

c) El módulo de cada opuesto coincide con el módulo del número complejo del que es opuesto y los argumentos se diferencian en 180º:

$|-z_1|=|z_1|=\sqrt{5}$, $|-z_2|=|z_2|=\sqrt{17}$, $|-z_3|=|z_3|=\sqrt{13}$, $|-z_4|=|z_4|=5$, $|-z_5|=|z_5|=4$ y $|-z_6|=|z_6|=\sqrt{13}$

$\operatorname{Arg}(-z_1)=\operatorname{Arg}(z_1)+180^\circ=333{,}43^\circ$, $\operatorname{Arg}(-z_2)=\operatorname{Arg}(z_2)+180^\circ=225{,}96^\circ$, $\operatorname{Arg}(-z_3)=\operatorname{Arg}(z_3)-180^\circ=33{,}69^\circ$

$\operatorname{Arg}(-z_4)=\operatorname{Arg}(z_4)-180^\circ=90^\circ$, $\operatorname{Arg}(-z_5)=\operatorname{Arg}(z_5)+180^\circ=180^\circ$ y $\operatorname{Arg}(-z_6)=\operatorname{Arg}(z_6)-180^\circ=123{,}69^\circ$

d) El módulo de cada conjugado coincide con el módulo del número complejo del que es conjugado y los argumentos suman 360º:

$\left|\overline{z_1}\right|=|z_1|=\sqrt{5}$, $\left|\overline{z_2}\right|=|z_2|=\sqrt{17}$, $\left|\overline{z_3}\right|=|z_3|=\sqrt{13}$, $\left|\overline{z_4}\right|=|z_4|=5$, $\left|\overline{z_5}\right|=|z_5|=4$ y $\left|\overline{z_6}\right|=|z_6|=\sqrt{13}$

$\operatorname{Arg}\left(\overline{z_1}\right)=360^\circ-\operatorname{Arg}(z_1)=206{,}57^\circ$, $\operatorname{Arg}\left(\overline{z_2}\right)=360^\circ-\operatorname{Arg}(z_2)=314{,}04^\circ$, $\operatorname{Arg}\left(\overline{z_3}\right)=360-\operatorname{Arg}(z_3)=146{,}31^\circ$,

$\operatorname{Arg}\left(\overline{z_4}\right)=360^\circ-\operatorname{Arg}(z_4)=90^\circ$, $\operatorname{Arg}\left(\overline{z_5}\right)=360^\circ-\operatorname{Arg}(z_5)=360^\circ=0^\circ$ y $\operatorname{Arg}\left(\overline{z_6}\right)=360^\circ-\operatorname{Arg}(z_6)=56{,}31^\circ$

47. Escribe en la forma $a+bi$, con a y b reales, los siguientes números complejos:

a) $z=12-3i-4(-5+8i)$

b) $z=\left(3+i\sqrt{5}\right)\left(3-i\sqrt{5}\right)$

c) $z=(4+3i)^2$

d) $z=(2+i)^2(1-2i)$

e) $z=\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

f) $z=\frac{5+15i}{1+2i}$

g) $z=\frac{3-6i}{3+i}+\frac{4}{3-4i}$

h) $z=\frac{1-2i}{5+3i}+\left(\frac{3}{1-i}\right)^2$

i) $z=\left(\frac{4-6i}{2-3i}\right)\left(\frac{1+3i}{3+2i}\right)$

a) $z=12-3i-4(-5+8i)=12-3i+20-32i=32-35i$

b) $z=\left(3+i\sqrt{5}\right)\left(3-i\sqrt{5}\right)=9-5i^2=9+5=14$

c) $z=(4+3i)^2=16+9i^2+24i=16-9+24i=7+24i$

d) $z=(2+i)^2(1-2i)=\left(4+i^2+4i\right)(1-2i)=(3+4i)(1-2i)=3-6i+4i-8i^2=11-2i$

e) $z=\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i^2+i\right)=-i$

f) $z=\frac{5+15i}{1+2i}=\frac{(5+15i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)}=\frac{5-10i+15i-30i^2}{1+4}=\frac{35+5i}{5}=7+i$

g) $z=\frac{3-6i}{3+i}+\frac{4}{3-4i}=\frac{(3-6i)(3-i)}{(3+i)(3-i)}+\frac{4(3+4i)}{(3-4i)(3+4i)}=\frac{3-21i}{10}+\frac{12+16i}{25}=\frac{3}{10}-\frac{21}{10}i+\frac{12}{25}+\frac{16}{25}i=\frac{39}{50}-\frac{73}{50}i$

h) $z=\frac{1-2i}{5+3i}+\left(\frac{3}{1-i}\right)^2=\frac{(1-2i)(5-3i)}{(5+3i)(5-3i)}+\left(\frac{3(1+i)}{(1-i)(1+i)}\right)^2=\frac{-1-13i}{34}+\left(\frac{3+3i}{2}\right)^2=-\frac{1}{34}-\frac{13}{34}i+\frac{9}{4}+\frac{9}{4}i^2+\frac{9}{2}i=$

$=-\frac{1}{34}+\frac{70}{17}i$

i) $z=\left(\frac{4-6i}{2-3i}\right)\left(\frac{1+3i}{3+2i}\right)=\left(\frac{2(2-3i)}{2-3i}\right)\left(\frac{1+3i}{3+2i}\right)=2\frac{(1+3i)(3-2i)}{(3+2i)(3-2i)}=2\frac{9+7i}{13}=\frac{18}{13}+\frac{14}{13}i$

48. Si $z_1=3+2i$, $z_2=-1+3i$ y $z_3=1-i$, calcula:

a) $\text{Re}\left(\frac{z_1}{z_2}\right)$

b) $\text{Im}\left(z_1-2z_2+\frac{1}{2}z_3\right)$

a) $\frac{z_1}{z_2}=\frac{3+2i}{-1+3i}=\frac{(3+2i)(-1-3i)}{(-1+3i)(-1-3i)}=\frac{3-11i}{10}=\frac{3}{10}-\frac{11}{10}i\Rightarrow\text{Re}\left(\frac{z_1}{z_2}\right)=\frac{3}{10}$

b) $z_1-2z_2+\frac{1}{2}z_3=3+2i+2-6i+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i=\frac{11}{2}-\frac{9}{2}i\Rightarrow\text{Im}\left(z_1-2z_2+\frac{1}{2}z_3\right)=-\frac{9}{2}$

49. Justifica que $(1+i)^8$ es un número real positivo.

$(1+i)^2=2i\Rightarrow(1+i)^8=(2i)^4=16i^4=16$

Otra posible respuesta sería:

$\text{Arg}(1+i)=45°\Rightarrow\text{Arg}\left((1+i)^8\right)=8\cdot45°=360°=0°\Rightarrow(1+i)^8$ es un número real positivo.

50. Para cada complejo $z = x + iy$, definimos el complejo $Z = z^2 - z$. Prueba que $\operatorname{Re} Z = x^2 - y^2 - x$ y que $\operatorname{Im} Z = y(2x-1)$.

$$Z = (x+iy)^2 - (x+iy) = x^2 + i^2y^2 + 2xyi - x - iy = (x^2 - y^2 - x) + y(2x-1)i \Rightarrow \operatorname{Re} Z = x^2 - y^2 - x, \operatorname{Im} Z = y(2x-1)$$

51. Resuelve las ecuaciones siguientes de incógnita *z*.

a) $(1+i)z = 3-i$

b) $2z + 1 - i = iz + 2$

c) $(2z+1-i)(z+3) = 0$

d) $\dfrac{z+1}{z-1} = 2i$

a) $(1+i)z = 3-i \Rightarrow z = \dfrac{3-i}{1+i} = \dfrac{(3-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \dfrac{2-4i}{2} = 1-2i$

b) $2z+1-i = iz+2 \Rightarrow (2-i)z = 1+i \Rightarrow z = \dfrac{1+i}{2-i} = \dfrac{(1+i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \dfrac{1+3i}{5} = \dfrac{1}{5} + \dfrac{3}{5}i$

c) $(2z+1-i)(z+3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2z+1-i = 0 \Rightarrow z = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}i \\ z+3 = 0 \Rightarrow z = -3 \end{cases}$

d) $\dfrac{z+1}{z-1} = 2i \Rightarrow z+1 = 2iz - 2i \Rightarrow (1-2i)z = -1-2i \Rightarrow z = \dfrac{-1-2i}{1-2i} = \dfrac{(-1-2i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)} = \dfrac{3-4i}{5} = \dfrac{3}{5} - \dfrac{4}{5}i$

52. Considera el polinomio: $P(z) = z^3 + (-2+3i)z^2 + (13-i)z - 6 - 10i$

¿Son los números complejos *i*, 3 y $1+i$ raíces de $P(z)$?

$P(i) = i^3 + (-2+3i)i^2 + (13-i)i - 6 - 10i = -i + 2 - 3i + 13i + 1 - 6 - 10i = -3 - i \neq 0 \Rightarrow$ *i* no es raíz de *P*.

$P(3) = 3^3 + (-2+3i)\cdot 3^2 + (13-i)\cdot 3 - 6 - 10i = 27 - 18 + 27i + 39 - 3i - 6 - 10i = 42 + 14i \neq 0 \Rightarrow$ 3 no es raíz de *P*.

$P(1+i) = (1+i)^3 + (-2+3i)(1+i)^2 + (13-i)(1+i) - 6 - 10i = -2 + 2i - 4i - 6 + 14 + 12i - 6 - 10i = 0 \Rightarrow 1+i$ es raíz de *P*.

53. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones de incógnitas z_1 y z_2:

a) $\begin{cases} 3z_1 + z_2 = 2-5i \\ z_1 - z_2 = -2+i \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3z_1 + z_2 = 5+2i \\ -z_1 + z_2 = 1-2i \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2iz_1 + z_2 = 2i \\ 3z_1 - iz_2 = 1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 3z_1 + 2iz_2 = 3+11i \\ z_1 - (i-1)z_2 = -3+5i \end{cases}$

a) Sumando las ecuaciones tenemos $4z_1 = -4i \Rightarrow z_1 = -i$ y, sustituyendo, $-i - z_2 = -2 + i \Rightarrow z_2 = 2 - 2i$.

b) Restando las ecuaciones tenemos $4z_1 = 4 + 4i \Rightarrow z_1 = 1 + i$ y, sustituyendo, $-1 - i + z_2 = 1 - 2i \Rightarrow z_2 = 2 - i$.

c) Multiplicando la primera ecuación por i y sumándole la segunda ecuación tenemos $z_1 = -1$ y, sustituyendo, $-2i + z_2 = 2i \Rightarrow z_2 = 4i$.

d) Restándole a la primera ecuación el triple de la segunda tenemos

$(-3+5i)z_2 = 12 - 4i \Rightarrow z_2 = \dfrac{12-4i}{-3+5i} = \dfrac{(12-4i)(-3-5i)}{(-3+5i)(-3-5i)} = \dfrac{-56-48i}{34} = -\dfrac{28}{17} - \dfrac{24}{17}i$ y, sustituyendo,

$z_1 - (i-1)\left(-\dfrac{28}{17} - \dfrac{24}{17}i\right) = -3 + 5i \Rightarrow z_1 - \dfrac{52}{17} + \dfrac{4}{17}i = -3 + 5i \Rightarrow z_1 = \dfrac{1}{17} + \dfrac{81}{17}i$.

54. En cada uno de los casos siguientes, representa el conjunto de afijos de los números complejos *z* que verifican las siguientes condiciones:

a) $|z| = 3$

b) $\operatorname{Re} z = -2$

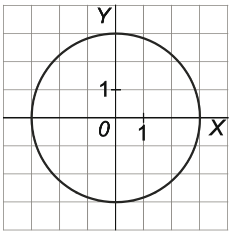
c) $\operatorname{Im} z = 1$

d) $\operatorname{Im} z > 2$

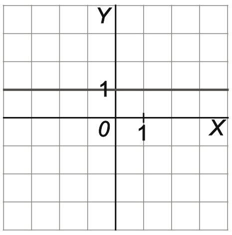
e) $\operatorname{Re} z = \operatorname{Im} z$

f) $\operatorname{Re} z < -1$

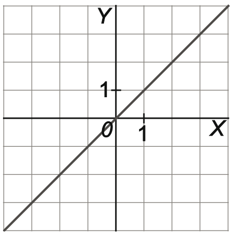
a)



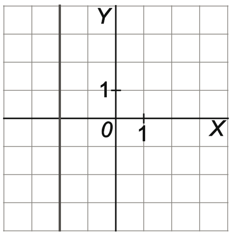
c)



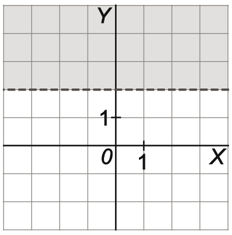
e)



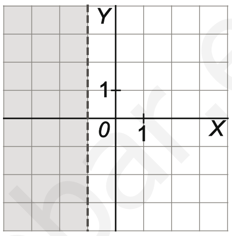
b)



d)

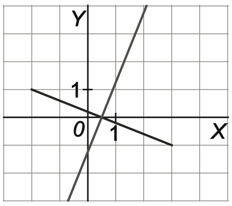


f)

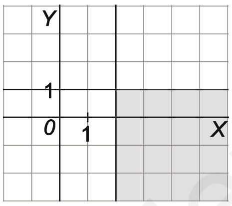


55. Escribe la condición que cumplen los números complejos cuyos afijos se encuentran en la región representada en cada caso.

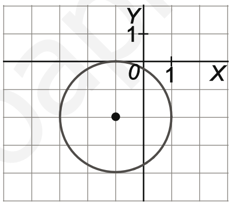
a)



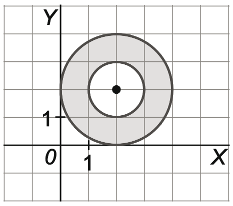
b)



c)



d)



a) $|z-(3-i)| = |z-(-2+i)|$

b) $\operatorname{Re} z \geq 2$ e $\operatorname{Im} z \leq 1$

c) $|z-(-1-2i)| = 2$

d) $1 \leq |z-(2+2i)| \leq 2$

56. Escribe en función de $\overline{z}$ el conjugado de los complejos *w* siguientes.

a) $w = 2+3z$

b) $w = (1+iz)(1+2z)$

c) $w = \dfrac{1+iz}{3+z}$

d) $w = z^3 + 2iz^2 + 1 - 3i$

a) $\overline{w} = 2+3\overline{z}$

b) $\overline{w} = (1-i\overline{z})(1+2\overline{z})$

c) $\overline{w} = \dfrac{1-i\overline{z}}{3+\overline{z}}$

d) $\overline{w} = \overline{z}^3 - 2i\overline{z}^2 + 1 + 3i$

57. Sea $z = x+iy$ y $w = iz + \overline{z} - z - 2i$.

a) Comprueba que $w - \overline{w} = 2i(x-2y-2)$.

b) Demuestra que la afirmación "el afijo de *w* está sobre el eje de abscisas" es equivalente a "el afijo de *z* está en la recta $2y = x-2$".

a) $\overline{w} = -i\overline{z} + z - \overline{z} + 2i \Rightarrow w - \overline{w} = i\left(z+\overline{z}\right) + 2\left(\overline{z}-z\right) - 4i = 2i\operatorname{Re} z - 4i\operatorname{Im} z - 4i = 2i\left(\operatorname{Re} z - 2\operatorname{Im} z - 2\right) = 2i\left(x-2y-2\right)$

b) Si el afijo de *w* está sobre el eje de abscisas tenemos $w = \overline{w}$ y, por tanto, $x-2y-2=0$, es decir, el afijo de *z* está en la recta $2y = x-2$. Recíprocamente, si el afijo de *z* está en la recta $2y = x-2$ tenemos $w - \overline{w} = 0$, es decir, $w = \overline{w}$ y, por tanto, el afijo de *w* está sobre el eje de abscisas.

58. Determina todos los complejos *z* que hagan que $\frac{iz}{z-2}$ sea un número imaginario puro.

Si $z = a + bi$ tenemos $\frac{iz}{z-2} = \frac{-b+ai}{(a-2)+bi} = \frac{(-b+ai)\left((a-2)-bi\right)}{\left((a-2)+bi\right)\left((a-2)-bi\right)} = \frac{2b+(b^2+a^2-2a)i}{(a-2)^2+b^2}$, que será imaginario puro si y solo si $b = 0$, por tanto, los complejos *z* buscados son los números reales.

Formas polar y trigonométrica. Operaciones

59. Escribe en forma polar los complejos siguientes.

a) $z = 2 + 2\sqrt{3}i$

b) $z = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i$

c) $z = 4 - 4i$

d) $z = -2i$

e) $z = -\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i$

f) $z = \frac{4}{1-i}$

g) $z = -2\left(\cos 150^\circ + i \operatorname{sen} 150^\circ\right)$

h) $z = \sqrt{2}\left(-\cos 45^\circ - i \operatorname{sen} 45^\circ\right)$

i) $z = \cos 60^\circ + i \operatorname{sen} 30^\circ$

j) $z = \operatorname{sen}(\alpha + \pi) + i\cos(\pi - \alpha)$

a) $|z| = \sqrt{4+12} = 4$, $\operatorname{Arg} z = \operatorname{arctg}\sqrt{3} = 60^\circ \Rightarrow z = 4_{60^\circ}$

b) $|z| = \sqrt{2+2} = 2$, $\operatorname{Arg} z = \operatorname{arctg}(-1) = 135^\circ \Rightarrow z = 2_{135^\circ}$

c) $|z| = \sqrt{16+16} = 4\sqrt{2}$, $\operatorname{Arg} z = \operatorname{arctg}(-1) = 315^\circ \Rightarrow z = \left(4\sqrt{2}\right)_{315^\circ}$

d) $|z| = \sqrt{0+4} = 2$, $\operatorname{Arg} z = 270^\circ \Rightarrow z = 2_{270^\circ}$

e) $|z| = \sqrt{\frac{1}{16}+\frac{3}{16}} = \frac{1}{2}$, $\operatorname{Arg} z = \operatorname{arctg}\left(-\sqrt{3}\right) = 120^\circ \Rightarrow z = \left(\frac{1}{2}\right)_{120^\circ}$

f) $z = \frac{4}{1-i} = \frac{4_{0^\circ}}{\sqrt{2}_{315^\circ}} = \left(\frac{4}{\sqrt{2}}\right)_{0^\circ-315^\circ} = \left(2\sqrt{2}\right)_{-315^\circ} = \left(2\sqrt{2}\right)_{45^\circ}$

g) *z* es el opuesto de 2_{150°, por tanto, $z = 2_{150^\circ+180^\circ} = 2_{330^\circ}$.

h) *z* es el opuesto de $\sqrt{2}_{45^\circ}$, por tanto, $z = \sqrt{2}_{45^\circ+180^\circ} = \sqrt{2}_{225^\circ}$.

i) $z = \cos 60^\circ + i \operatorname{sen} 30^\circ = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)_{45^\circ}$

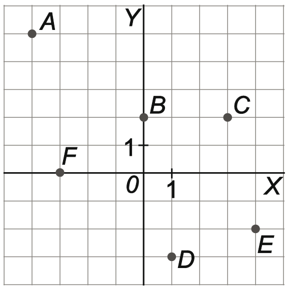
j) $z = \operatorname{sen}(\alpha+\pi) + i\cos(\pi-\alpha) = -\operatorname{sen}\alpha - i\cos\alpha = 1_\beta$, donde $\operatorname{tg}\beta = \frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} = \operatorname{cotg}\alpha$, por tanto, $\beta = 90^\circ - \alpha$ o $\beta = 270^\circ - \alpha$.

Observemos que el primer caso no es posible, ya que entonces la parte real de *z* sería $\cos(90^\circ - \alpha) = \operatorname{sen}\alpha$, que no coincide con $\operatorname{sen}(\alpha+\pi) = -\operatorname{sen}\alpha$ salvo que $\alpha = 0^\circ$.

Así, debe ser $z = 1_{270^\circ-\alpha}$, y, en efecto, $1_{270^\circ-\alpha} = \cos(270^\circ-\alpha) + i\operatorname{sen}(270^\circ-\alpha) = -\cos(90^\circ-\alpha) - i\operatorname{sen}(90^\circ-\alpha) =$

$-\operatorname{sen}\alpha - i\cos\alpha = z$.

60. Escribe en forma binómica, polar y trigonométrica los números complejos cuyos afijos se señalan en la figura.



$A = -4 + 5i = \sqrt{41}_{128,66^\circ} = \sqrt{41}\left(\cos 128,66^\circ + i \operatorname{sen} 128,66^\circ\right)$

$B = 2i = 2_{90^\circ} = 2\left(\cos 90^\circ + i \operatorname{sen} 90^\circ\right)$

$C = 3 + 2i = \sqrt{13}_{33,69^\circ} = \sqrt{13}\left(\cos 33,69^\circ + i \operatorname{sen} 33,69^\circ\right)$

$D = 1 - 3i = \sqrt{10}_{288,43^\circ} = \sqrt{10}\left(\cos 288,43^\circ + i \operatorname{sen} 288,43^\circ\right)$

$E = 4 - 2i = \left(2\sqrt{5}\right)_{333,43^\circ} = 2\sqrt{5}\left(\cos 333,43^\circ + i \operatorname{sen} 333,43^\circ\right)$

$F = -3 = 3_{180^\circ} = 3\left(\cos 180^\circ + i \operatorname{sen} 180^\circ\right)$

61. Escribe en forma trigonométrica el complejo: $z = \dfrac{3-7i}{2+5i}$.

$$z = \frac{3-7i}{2+5i} = \frac{(3-7i)(2-5i)}{(2+5i)(2-5i)} = \frac{-29-29i}{29} = -1 - i = \sqrt{2}\left(\cos 225^\circ + i \operatorname{sen} 225^\circ\right)$$

62. Dados los complejos: $z_1 = \sqrt{2}(1+i)$ y $z_2 = \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{i}{2}$.

a) Escribe z_1 y z_2 en forma trigonométrica.

b) Si $w = \dfrac{z_1}{z_2}$, escribe w en forma binómica y trigonométrica y deduce el valor exacto de cos 75º y sen 75º.

a) $z_1 = \sqrt{2}(1+i) = \sqrt{2} + \sqrt{2}i = 2\left(\cos 45^\circ + i \operatorname{sen} 45^\circ\right)$ $\qquad z_2 = 1\left(\cos 330^\circ + i \operatorname{sen} 330^\circ\right)$

b) $w = \dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{2\left(\cos 45^\circ + i \operatorname{sen} 45^\circ\right)}{1\left(\cos 330^\circ + i \operatorname{sen} 330^\circ\right)} = 2\left(\cos(-285^\circ) + i \operatorname{sen}(-285^\circ)\right) = 2\left(\cos 75^\circ + i \operatorname{sen} 75^\circ\right)$

$$w = \frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{2}i}{\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i} = \frac{\left(\sqrt{2}+\sqrt{2}i\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)} = \frac{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}i}{1} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}i$$

Por tanto se deduce que $2\cos 75^\circ = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \cos 75^\circ = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ y $2 \operatorname{sen} 75^\circ = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \operatorname{sen} 75^\circ = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

63. Si $z = \sqrt{3} - i$, calcula z^2, $\left|z^2\right|$ y $|z|^2$.

$z = \sqrt{3} - i = 2_{330^\circ} \Rightarrow z^2 = 4_{660^\circ} = 4_{300^\circ}$, $\left|z^2\right| = 4$ y $|z|^2 = 2^2 = 4$

64. Si $z=\sqrt{6}+\sqrt{2}-i\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)$, escribe en forma binómica los complejos z^2, z^6, z^9 y z^{12}.

Se escribe *z* en forma polar:

$|z|=\sqrt{\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)^2+\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)^2}=\sqrt{6+2+2\sqrt{12}+6+2-2\sqrt{12}}=\sqrt{16}=4$, por otra parte, en el ejercicio 62 se ha probado que $\operatorname{sen}75^\circ=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ y $\cos 75^\circ=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$, de donde $\operatorname{tg}75^\circ=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}$. Así, si $\operatorname{Arg} z=\alpha$, se tiene $\operatorname{tg}\alpha=-\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}=-\dfrac{1}{\operatorname{tg}75^\circ}=-\operatorname{cotg}75^\circ\Rightarrow\alpha=345^\circ$, por tanto, $z=4_{345^\circ}$.

De este modo:

$$z^2=\left(4_{345^\circ}\right)^2=16_{690^\circ}=16_{330^\circ}=16\left(\cos 330^\circ+i\operatorname{sen}330^\circ\right)=16\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)=8\sqrt{3}-8i$$

$$z^6=\left(4_{345^\circ}\right)^6=4096_{2070^\circ}=4096_{270^\circ}=-4096i$$

$$z^9=\left(4_{345^\circ}\right)^9=\left(2^{18}\right)_{3105^\circ}=\left(2^{18}\right)_{225^\circ}=2^{18}\left(\cos 225^\circ+i\operatorname{sen}225^\circ\right)=2^{18}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)=-2^{17}\sqrt{2}-2^{17}\sqrt{2}i$$

$$z^{12}=\left(z^6\right)^2=(-4096i)^2=\left(-2^{12}i\right)^2=2^{24}i^2=-2^{24}$$

65. Calcula el siguiente número complejo: $\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1+i}\right)^{30}$.

$1+i\sqrt{3}=2_{60^\circ}$ y $1+i=\sqrt{2}_{45^\circ}$, por tanto, $\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1+i}=\dfrac{2_{60^\circ}}{\sqrt{2}_{45^\circ}}=\left(\dfrac{2}{\sqrt{2}}\right)_{15^\circ}=\sqrt{2}_{15^\circ}$ y $\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1+i}\right)^{30}=\left(\sqrt{2}_{15^\circ}\right)^{30}=\left(2^{15}\right)_{450^\circ}=$

$=\left(2^{15}\right)_{90^\circ}=2^{15}i$

66. Decide los valores del entero *n* para que el complejo $\left(\sqrt{3}+i\right)^n$ sea:

a) Un número real **b)** Un número real positivo **c)** Un número imaginario puro

$$\sqrt{3}+i=2_{30^\circ}\Rightarrow\left(\sqrt{3}+i\right)^n=\left(2_{30^\circ}\right)^n=\left(2^n\right)_{30^\circ n}$$

a) $30^\circ n=180^\circ k\Rightarrow n=6k$ para algún entero *k*.

b) $30^\circ n=360^\circ k\Rightarrow n=12k$ para algún entero *k*.

c) $30^\circ n=90^\circ+180^\circ k\Rightarrow n=3+6k$ para algún entero *k*.

67. Resuelve la siguiente ecuación: $2z-(1+i)\overline{z}=-1+5i$.

Sea $z=a+bi$:

$$2(a+bi)-(1+i)(a-bi)=-1+5i\Rightarrow 2a+2bi-a+bi-ai-b=-1+5i\Rightarrow(a-b)+(3b-a)i=-1+5i\Rightarrow\begin{cases}a-b=-1\\-a+3b=5\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}a-b=-1\\-a+3b=5\end{cases}\Rightarrow a=1,\ b=2\Rightarrow z=1+2i$$

Otra manera de resolver la ecuación es tomar conjugados, obteniendo un sistema lineal con incógnitas z y $\overline{z}$.

68. **a)** Determina el conjunto de los afijos de los complejos z tales que $|z-1| = |\bar{z}+1|$.

b) Sea n un entero positivo. Encuentra los complejos z tales que $(z-1)^n = (\bar{z}+1)^n$.

a) Si $z = a + bi$ tenemos:

$$|z-1| = |\bar{z}+1| \Rightarrow \sqrt{(x-1)^2 + y^2} = \sqrt{(x+1)^2 + y^2} \Rightarrow (x-1)^2 = (x+1)^2 \Rightarrow x^2 + 1 - 2x = x^2 + 1 + 2x \Rightarrow x = 0$$

Por tanto, los complejos buscados son los imaginarios puros, es decir, los afijos son el eje Y.

b) Tomando módulos y usando el apartado previo deducimos que z debe ser imaginario puro, digamos $z = bi$.

Entonces $z - 1 = -1 + bi$ y $\bar{z} + 1 = 1 - bi$ son opuestos, con lo que si $\text{Arg}(z-1) = \alpha$ tendremos $\text{Arg}(\bar{z}+1) = 180^\circ + \alpha$ y, por tanto, $n\alpha = 180^\circ n + n\alpha \Rightarrow 180^\circ n = 0^\circ \Rightarrow n$ par.

En conclusión, si n es impar la ecuación no tiene solución, y si n es par, las soluciones son los complejos imaginarios puros.

Radicación de números complejos

69. **Resuelve las siguientes ecuaciones y escribe sus soluciones en forma binómica.**

a) $z^3 - i = 0$ **c)** $z^4 + 1 = 0$ **e)** $z^6 - 1 = 0$

b) $z^6 - 64 = 0$ **d)** $z^4 + 81 = 0$ **f)** $z^4 - 81 = 0$

a) $z^3 - i = 0 \Rightarrow z = \sqrt[3]{i} = \sqrt[3]{1_{90^\circ}} = s_\beta$, con $s = \sqrt[3]{1} = 1$ y $\beta = \dfrac{90^\circ + 360^\circ k}{3} = 30^\circ + 120^\circ k \ (k = 0, 1, 2)$, así:

$z_1 = 1_{30^\circ} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i$, $z_2 = 1_{150^\circ} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i$ y $z_3 = 1_{270^\circ} = -i$.

b) $z^6 - 64 = 0 \Rightarrow z = \sqrt[6]{64} = \sqrt[6]{64_{0^\circ}} = s_\beta$, con $s = \sqrt[6]{64} = 2$ y $\beta = \dfrac{0^\circ + 360^\circ k}{6} = 60^\circ k \ (k = 0, 1, 2, 3, 4, 5)$, así:

$z_1 = 2_{0^\circ} = 2$, $z_2 = 2_{60^\circ} = 1 + \sqrt{3}i$, $z_3 = 2_{120^\circ} = -1 + \sqrt{3}i$, $z_4 = 2_{180^\circ} = -2$, $z_5 = 2_{240^\circ} = -1 - \sqrt{3}i$ y $z_6 = 2_{300^\circ} = 1 - \sqrt{3}i$.

c) $z^4 + 1 = 0 \Rightarrow z = \sqrt[4]{-1} = \sqrt[4]{1_{180^\circ}} = s_\beta$, con $s = \sqrt[4]{1} = 1$ y $\beta = \dfrac{180^\circ + 360^\circ k}{4} = 45^\circ + 90^\circ k \ (k = 0, 1, 2, 3)$, obteniendo:

$z_1 = 1_{45^\circ} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}i$, $z_2 = 1_{135^\circ} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}i$, $z_3 = 1_{225^\circ} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}i$ y $z_4 = 1_{315^\circ} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}i$.

d) $z^4 + 81 = 0 \Rightarrow z = \sqrt[4]{-81} = \sqrt[4]{81_{180^\circ}} = s_\beta$, con $s = \sqrt[4]{81} = 3$ y $\beta = \dfrac{180^\circ + 360^\circ k}{4} = 45^\circ + 90^\circ k \ (k = 0, 1, 2, 3)$, así:

$z_1 = 3_{45^\circ} = \dfrac{3\sqrt{2}}{2} + \dfrac{3\sqrt{2}}{2}i$, $z_2 = 3_{135^\circ} = -\dfrac{3\sqrt{2}}{2} + \dfrac{3\sqrt{2}}{2}i$, $z_3 = 3_{225^\circ} = -\dfrac{3\sqrt{2}}{2} - \dfrac{3\sqrt{2}}{2}i$ y $z_4 = 3_{315^\circ} = \dfrac{3\sqrt{2}}{2} - \dfrac{3\sqrt{2}}{2}i$.

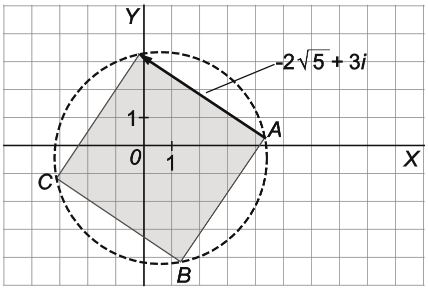
e) $z^6 - 1 = 0 \Rightarrow z = \sqrt[6]{1} = \sqrt[6]{1_{0^\circ}} = s_\beta$, con $s = \sqrt[6]{1} = 1$ y $\beta = \dfrac{0^\circ + 360^\circ k}{6} = 60^\circ k \ (k = 0, 1, 2, 3, 4, 5)$, obteniendo:

$z_1 = 1_{0^\circ} = 1$, $z_2 = 1_{60^\circ} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$, $z_3 = 1_{120^\circ} = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$, $z_4 = 1_{180^\circ} = -1$, $z_5 = 1_{240^\circ} = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ y $z_6 = 1_{300^\circ} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$.

f) $z^4 - 81 = 0 \Rightarrow z = \sqrt[4]{81} = \sqrt[4]{81_{0^\circ}} = s_\beta$, con $s = \sqrt[4]{81} = 3$ y $\beta = \dfrac{0^\circ + 360^\circ k}{4} = 90^\circ k \ (k = 0, 1, 2, 3)$, por tanto:

$z_1 = 3_{0^\circ} = 3$, $z_2 = 3_{90^\circ} = 3i$, $z_3 = 3_{180^\circ} = -3$ y $z_4 = 3_{270^\circ} = -3i$.

70. A partir de los datos de la figura, calcula de forma exacta y razonada, la forma binómica de los afijos correspondientes a los vértices del cuadrado que se representa.



Se identifican puntos y vectores con el complejo correspondiente.

Calculando en primer lugar el centro de la circunferencia se observa que los puntos $P=-1+3i$ y $Q=2-4i$ son los extremos de un diámetro, por lo que el centro será el punto medio del segmento *PQ*, $R=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$.

Haciendo una traslación que lleve el punto *R* al origen de coordenadas *O*, es decir, una traslación de vector $\overrightarrow{RO}=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$ los puntos *A*, *B*, *C* y *D* se trasforman en los puntos *A'*, *B'*, C' y *D'*, vértices de un cuadrado centrado en *O*, por tanto, $D'=iA'$, $C'=iD'=-A'$ y $B'=iC'=-D'$. Además, $D'=-2\sqrt{5}+3i+A'$, por tanto:

$iA'=-2\sqrt{5}+3i+A'\Rightarrow(-1+i)A'=-2\sqrt{5}+3i\Rightarrow A'=\frac{-2\sqrt{5}+3i}{-1+i}=\frac{2\sqrt{5}+3}{2}+\frac{2\sqrt{5}-3}{2}i$, $D'=-\frac{2\sqrt{5}-3}{2}+\frac{2\sqrt{5}+3}{2}i$,

$C'=-\frac{2\sqrt{5}+3}{2}-\frac{2\sqrt{5}-3}{2}i$ y $B'=\frac{2\sqrt{5}-3}{2}-\frac{2\sqrt{5}+3}{2}i$.

Finalmente, deshaciendo la traslación anterior, obtenemos $A=\left(\sqrt{5}+2\right)+\left(\sqrt{5}-2\right)i$, $D=\left(2-\sqrt{5}\right)+\left(\sqrt{5}+1\right)i$, $C=-\left(1+\sqrt{5}\right)+\left(1-\sqrt{5}\right)i$ y $B=\left(\sqrt{5}-1\right)-\left(\sqrt{5}-2\right)i$.

71. Si $P\left(\sqrt{3},1\right)$ es un vértice de un hexágono regular inscrito en la circunferencia centrada en el origen y de radio 2, calcula los restantes de las dos formas siguientes.

a) Multiplicando $z=\sqrt{3}+i$ por determinados números complejos.

b) Calculando las raíces sextas de $\left(\sqrt{3}+i\right)^6$.

a) Los restantes vértices se obtienen girando *P* 60º reiteradamente respecto del origen de coordenadas, es decir, multiplicando $z=\sqrt{3}+i=2_{30^\circ}$ por 1_{60°, 1_{120°, 1_{180°, 1_{240° y 1_{300°, obteniéndose los puntos:

$2_{30^\circ}\cdot1_{60^\circ}=2_{90^\circ}=2i\Rightarrow(0,2)$, $2_{30^\circ}\cdot1_{120^\circ}=2_{150^\circ}=-\sqrt{3}+i\Rightarrow\left(-\sqrt{3},1\right)$, $2_{30^\circ}\cdot1_{180^\circ}=2_{210^\circ}=-\sqrt{3}-i\Rightarrow\left(-\sqrt{3},-1\right)$,

$2_{30^\circ}\cdot1_{240^\circ}=2_{270^\circ}=-2i\Rightarrow(0,-2)$ y $2_{30^\circ}\cdot1_{300^\circ}=2_{330^\circ}=\sqrt{3}-i\Rightarrow\left(\sqrt{3},-1\right)$

b) Los vértices del hexágono son los afijos de las raíces sextas de $\left(\sqrt{3}+i\right)^6=\left(2_{30^\circ}\right)^6=64_{180^\circ}$, es decir, son los afijos de los complejos s_β con $s=\sqrt[6]{64}=2$ y $\beta=\frac{180^\circ+360^\circ k}{6}=30^\circ+60^\circ k$ $(k=0,1,2,3,4,5)$:

$2_{30^\circ}=\sqrt{3}+i\Rightarrow P\left(\sqrt{3},1\right)$, $2_{90^\circ}=2i\Rightarrow(0,2)$, $2_{150^\circ}=-\sqrt{3}+i\Rightarrow\left(-\sqrt{3},1\right)$, $2_{210^\circ}=-\sqrt{3}-i\Rightarrow\left(-\sqrt{3},-1\right)$,

$2_{270^\circ}=-2i\Rightarrow(0,-2)$ y $2_{330^\circ}=\sqrt{3}-i\Rightarrow\left(\sqrt{3},-1\right)$

72. Encuentra los números reales *a* y *b* para que se cumpla la relación $(a+bi)^2 = i$ de dos formas:

a) Calculando las raíces cuadradas de *i*.

b) Desarrollando $(a+bi)^2$.

a) $a+bi = \sqrt{i} = \sqrt{1_{90^\circ}} = 1_{\frac{90^\circ+360^\circ k}{2}} = 1_{45^\circ+180^\circ k} = \begin{cases} k=0 \Rightarrow 1_{45^\circ} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \Rightarrow a = \frac{\sqrt{2}}{2},\ b = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ k=1 \Rightarrow 1_{225^\circ} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i \Rightarrow a = -\frac{\sqrt{2}}{2},\ b = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$

b) $(a+bi)^2 = a^2 + b^2i^2 + 2abi = (a^2-b^2) + 2abi \Rightarrow \begin{cases} a^2-b^2=0 \\ 2ab=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=\pm b \\ 2ab=1 \end{cases}$

Si $a=b$ obtenemos $2a^2 = 1 \Rightarrow a^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow a = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$, es decir, obtenemos dos soluciones, $a=b=\frac{\sqrt{2}}{2}$ y $a=b=-\frac{\sqrt{2}}{2}$. Si $a=-b$ obtenemos $-2a^2=1$, que no tiene solución real.

73. Sea *z* un número complejo.

a) Calcula los números reales, *a*, *b*, *c*, para que se verifique la igualdad: $z^3+8=(z+2)(az^2+bz+c)$.

b) Halla de dos formas distintas las raíces cúbicas de –8.

a) $(z+2)(az^2+bz+c) = az^3+(2a+b)z^2+(c+2b)z+2c \Rightarrow a=1,\ 2a+b=0,\ c+2b=0,\ 2c=8 \Rightarrow a=1,\ b=-2,\ c=4$

b) $\sqrt[3]{-8} = \sqrt[3]{8_{180^\circ}} = s_\beta$, con $s=\sqrt[3]{8}=2$ y $\beta = \frac{180^\circ+360^\circ k}{3} = 60^\circ+120^\circ k\ (k=0,1,2)$, por tanto, las raíces cúbicas de –8 son $2_{60^\circ} = 1+\sqrt{3}i$, $2_{180^\circ}=-2$ y $2_{300^\circ} = 1-\sqrt{3}i$.

Otra manera de calcular las raíces cúbicas de –8 es observar que son las soluciones de $z^3+8=0$, es decir, según el apartado anterior, $z+2=0 \Rightarrow z=-2$ y $z^2-2z+4=0 \Rightarrow z = \frac{2\pm\sqrt{-12}}{2} = \frac{2\pm 2\sqrt{3}i}{2} = 1\pm\sqrt{3}i$.

74. a) Justifica que $(1+i)^6 = -8i$.

b) Considera la ecuación $z^2=-8i$:

i) Deduce del aparado a) una solución de la ecuación.

ii) Deduce del apartado a) una solución de $z^3=-8i$.

a) $(1+i)^6 = \left(\sqrt{2}_{45^\circ}\right)^6 = 8_{270^\circ} = -8i$

b) i) Según el apartado a), una solución es $z=(1+i)^3 = \left(\sqrt{2}_{45^\circ}\right)^3 = \left(2\sqrt{2}\right)_{135^\circ} = 2\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = -2+2i$.

ii) Según el apartado a), una solución es $z=(1+i)^2=2i$.

Teorema fundamental del álgebra. Raíces de una ecuación polinómica

75. Calcula las raíces de los siguientes polinomios.

a) $x^4 - x^3 + 9x^2 - 9x$

b) $x^4 + 26x^2 + 25$

c) $x^5 + 5x^4 + 7x^3 + 35x^2 + 12x + 60$

d) $x^5 + x^4 + 25x^3 + 25x^2 + 144x + 144$

a) $x^4 - x^3 + 9x^2 - 9x = x\left(x^3 - x^2 + 9x - 9\right)$, por tanto una raíz es $x = 0$ y las otras tres son las raíces del polinomio $x^3 - x^2 + 9x - 9$.

Al ser $x^3 - x^2 + 9x - 9$ un polinomio con coeficientes reales, para cada raíz su conjugada también será raíz, por tanto, una de las tres raíces es un número real. Probando los divisores del término independiente obtenemos como raíz $x = 1$ y $x^3 - x^2 + 9x - 9 = (x-1)(x^2+9)$, por lo que las otras dos raíces se obtienen resolviendo $x^2 + 9 = 0 \Rightarrow x = 3i,\ x = -3i$.

b) Resolvemos $x^4 + 26x^2 + 25 = 0$ haciendo el cambio $z = x^2$:

$$z^2 + 26z + 25 = 0 \Rightarrow z = \frac{-26 \pm \sqrt{576}}{2} = \frac{-26 \pm 24}{2} = \begin{cases} z = -1 \\ z = -25 \end{cases}.$$

Deshaciendo el cambio obtenemos las cuatro raíces $x = i$, $x = -i$, $x = 5i$ y $x = -5i$.

c) Al ser $x^5 + 5x^4 + 7x^3 + 35x^2 + 12x + 60$ un polinomio con coeficientes reales, para cada raíz su conjugada también será raíz, por tanto, una de las cinco raíces es un número real. Probando los divisores del término independiente obtenemos como raíz $x = -5$ y $x^5 + 5x^4 + 7x^3 + 35x^2 + 12x + 60 = (x+5)(x^4 + 7x^2 + 12)$, por lo que las otras cuatro raíces se obtienen resolviendo $x^4 + 7x^2 + 12 = 0$.

Haciendo el cambio $z = x^2$ tenemos $z^2 + 7z + 12 = 0 \Rightarrow z = \dfrac{-7 \pm 1}{2} = \begin{cases} z = -3 \\ z = -4 \end{cases}$.

Deshaciendo el cambio obtenemos las cuatro raíces restantes: $x = \sqrt{3}i$, $x = -\sqrt{3}i$, $x = 2i$ y $x = -2i$.

d) Al ser $x^5 + x^4 + 25x^3 + 25x^2 + 144x + 144$ un polinomio con coeficientes reales, para cada raíz su conjugada también será raíz, por tanto, una de las cinco raíces es un número real. Probando los divisores del término independiente obtenemos como raíz $x = -1$ y $x^5 + x^4 + 25x^3 + 25x^2 + 144x + 144 = 0 = (x+1)(x^4 + 25x^2 + 144)$, por lo que las otras cuatro raíces se obtienen resolviendo $x^4 + 25x^2 + 144 = 0$.

Haciendo el cambio $z = x^2$ tenemos $z^2 + 25z + 144 = 0 \Rightarrow z = \dfrac{-25 \pm \sqrt{49}}{2} = \dfrac{-25 \pm 7}{2} = \begin{cases} z = -9 \\ z = -16 \end{cases}$.

Deshaciendo el cambio obtenemos las cuatro raíces restantes: $x = 3i$, $x = -3i$, $x = 4i$ y $x = -4i$.

76. a) Resuelve en $\mathbb{C}$ la ecuación $z^2 - 2\sqrt{2}z + 4 = 0$.

b) Si representamos por z_1 la solución en las que la parte imaginaria es positiva y por z_2 la otra solución, escribe en forma polar z_1, z_2 y $\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)^2$.

a) $z^2 - 2\sqrt{2}z + 4 = 0 \Rightarrow z = \dfrac{2\sqrt{2} \pm \sqrt{-8}}{2} = \dfrac{2\sqrt{2} \pm 2\sqrt{2}i}{2} = \begin{cases} z = \sqrt{2} + \sqrt{2}i \\ z = \sqrt{2} - \sqrt{2}i \end{cases}$

b) $z_1 = \sqrt{2} + \sqrt{2}i = 2_{45^\circ}$, $z_2 = \sqrt{2} - \sqrt{2}i = 2_{315^\circ}$ y $\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)^2 = \left(\dfrac{2_{45^\circ}}{2_{315^\circ}}\right)^2 = \left(1_{-270^\circ}\right)^2 = \left(1_{90^\circ}\right)^2 = 1_{180^\circ}$

77. **a)** Escribe en forma polar las soluciones de la ecuación: $z^2-2z+2=0$.

b) Deduce del aparatado anterior las soluciones de la ecuación: $(-iz+3i+3)^2-2(-iz+3i+3)+2=0$.

a) $z^2-2z+2=0\Rightarrow z=\dfrac{2\pm\sqrt{-4}}{2}=\dfrac{2\pm 2i}{2}=\begin{cases} z=1+i=\sqrt{2}_{45^\circ} \\ z=1-i=\sqrt{2}_{315^\circ}\end{cases}$

b) Por el apartado anterior $-iz+3i+3=1+i$ o $-iz+3i+3=1-i$, obtenemos, por tanto, dos soluciones:

$-iz+3i+3=1+i\Rightarrow iz=2+2i\Rightarrow z=\dfrac{2+2i}{i}=2-2i$ y $-iz+3i+3=1-i\Rightarrow iz=2+4i\Rightarrow z=\dfrac{2+4i}{i}=4-2i$.

78. **Para cada número complejo *z* escribimos:**

$$\boldsymbol{P(z)=z^4-3z^3+\frac{9}{2}z^2-3z+1}$$

a) Obtén $P(1+i)$.

b) Demuestra que si z_0 es solución de la ecuación $P(z)=0$, entonces $z_0\neq 0$ y $\dfrac{1}{z_0}$ también es solución de dicha ecuación.

c) Obtén las cuatro soluciones de la ecuación $P(z)=0$.

a) $P(1+i)=(1+i)^4-3(1+i)^3+\dfrac{9}{2}(1+i)^2-3(1+i)+1=-4-3(-2+2i)+\dfrac{9}{2}2i-3(1+i)+1=0$

b) Si $P(z_0)=0$ no puede ser $z_0=0$, ya que $P(0)=1$.

Además, si $P(z_0)=0$ tenemos $P\left(\dfrac{1}{z_0}\right)=\dfrac{1}{z_0^{\,4}}-\dfrac{3}{z_0^{\,3}}+\dfrac{9}{2z_0^{\,2}}-\dfrac{3}{z_0}+1=\dfrac{1-3z_0+\frac{9}{2}z_0^{\,2}-3z_0^{\,3}+z_0^{\,4}}{z_0^{\,4}}=\dfrac{P(z_0)}{z_0^{\,4}}=0$.

c) Según los apartados anteriores $z_1=1+i$ y $z_2=\dfrac{1}{1+i}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}i$ son soluciones, además, como se trata de una ecuación polinómica con coeficientes reales, el conjugado de cualquier solución también será solución, por lo que las dos raíces restantes son $z_3=1-i$ y $z_4=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}i$.

79. **Sea *z* un número complejo.**

a) Desarrolla el producto: $(z^2-6z+13)(z^2+4z+13)$

b) Resuelve en $\mathbb{C}$: $z^4-2z^3+2z^2-26z+169=0$

c) Si representamos por z_1 la solución en la que las partes real e imaginaria son positivas, demuestra que las otras soluciones de dicha ecuación son: $\overline{z_1}$, $z_1 i$ y $-\overline{z_1}i$

a) $(z^2-6z+13)(z^2+4z+13)=z^4+4z^3+13z^2-6z^3-24z^2-78z+13z^2+52z+169=z^4-2z^3+2z^2-26z+169$

b) $z^4-2z^3+2z^2-26z+169=0\Rightarrow(z^2-6z+13)(z^2+4z+13)=0\Rightarrow z^2-6z+13=0$ o $z^2+4z+13=0$.

De $z^2-6z+13=0$ obtenemos dos soluciones $z=\dfrac{6\pm\sqrt{-16}}{2}=\dfrac{6\pm 4i}{2}=\begin{cases} z=3+2i \\ z=3-2i\end{cases}$

De $z^2+4z+13=0$ obtenemos las otras dos soluciones $z=\dfrac{-4\pm\sqrt{-36}}{2}=\dfrac{-4\pm 6i}{2}=\begin{cases} z=-2+3i \\ z=-2-3i\end{cases}$

c) $z_1=3+2i$, por tanto, $\overline{z_1}=3-2i$, $z_1 i=-2+3i$ y $-\overline{z_1}i=-2-3i$.

80. **a)** Resuelve la ecuación $z^2+z+1=0$ y deduce las soluciones de la ecuación $z^3-1=0$.

b) Si designamos por *w* al número complejo $-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$,

i) Calcula w^2, w^3 y w^{2000}.

ii) Calcula $S=1+w+w^2+...+w^{2000}$.

a) $z^2+z+1=0 \Rightarrow z=\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}=\begin{cases} z=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i \\ z=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i \end{cases}$

$z^3-1=0 \Rightarrow (z-1)(z^2+z+1)=0 \Rightarrow z=1,\ z^2+z+1=0 \Rightarrow z=1,\ z=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,\ z=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$

b) **i)** Observemos que $w=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ es una de las soluciones de $z^2+z+1=0$ y $z^3-1=0$, por tanto,

$w^2=-w-1=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$, $w^3=1$ y $w^{2000}=w^{1998}w^2=\left(w^3\right)^{666}w^2=w^2=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$.

ii) Observemos que la suma $1+w+w^2=0$ se repite 667 veces en los 2001 sumandos de *S*, por tanto,

$S=667(1+w+w^2)=0$.

81. **Considera la ecuación $z^2-4z+a=0$ donde *a* es un número complejo. Determina el valor de *a* para que el número complejo $2+i$ sea solución de dicha ecuación y, sin hacer ningún calculo más, escribe la otra solución de dicha ecuación.**

Si $2+i$ es solución de la ecuación, tenemos $(2+i)^2-4(2+i)+a=0 \Rightarrow 3+4i-8-4i+a=0 \Rightarrow a=5$.

Como los coeficientes de la ecuación son reales, si $2+i$ es una solución, su conjugado, $2-i$ es la otra solución.

82. **Para cada número complejo *z*: $P(z)=z^4-10z^3+38z^2-90z+261$**

a) Si *b* es un número real, escribe en función de *b* las partes real e imaginaria de $P(ib)$.

b) Deduce que la ecuación $P(z)=0$ admite como soluciones dos números que son imaginarios puros.

c) Encuentra los números reales α y β para los que: $P(z)=(z^2+9)(z^2+\alpha z+\beta)$.

d) Resuelve la ecuación $P(z)=0$.

a) $P(ib)=b^4+10b^3i-38b^2-90bi+261=\left(b^4-38b^2+261\right)+\left(10b^3-90b\right)i$, por tanto, $\text{Re}\left[P(ib)\right]=b^4-38b^2+261$ e $\text{Im}\left[P(ib)\right]=10b^3-90b$.

b) Si $b=3$ o $b=-3$ tenemos $\text{Re}\left[P(ib)\right]=\text{Im}\left[P(ib)\right]=0$, por tanto $z=3i$ y $z=-3i$ son soluciones de $P(z)=0$.

c) $(z^2+9)(z^2+\alpha z+\beta)=z^4+\alpha z^3+(\beta+9)z^2+9\alpha z+9\beta \Rightarrow \alpha=-10,\ \beta=29$

d) $P(z)=0 \Rightarrow (z^2+9)(z^2-10z+29)=0 \Rightarrow z^2+9=0$ o $z^2-10z+29=0$. De $z^2+9=0$ obtenemos las soluciones ya encontradas en b), $z=3i$ y $z=-3i$, de $z^2-10z+29=0$ encontramos las dos soluciones restantes, $z=5+2i$ y $z=5-2i$.

CUESTIONES

83. Si z es un número complejo tal que $|1+iz| = |1-iz|$, ¿puedes asegurar que z es un número real?

Si $z = a+bi$ tenemos $|1+iz| = |1-iz| \Rightarrow \sqrt{(1-y)^2+x^2} = \sqrt{(1+y)^2+x^2} \Rightarrow (1-y)^2 = (1+y)^2 \Rightarrow -2y = 2y \Rightarrow y = 0$, por lo que, efectivamente, z es un número real.

84. Justifica que si $z \neq 0$ y $z + \frac{1}{z} = 1$, entonces $\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}$.

$z + \frac{1}{z} = 1 \Rightarrow z^2 + 1 = z \Rightarrow z^2 - z + 1 = 0 \Rightarrow z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i,\ z = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$, en cualquier caso, $\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}$.

85. Si z es real, ¿es cierto que $|z| = z$?

No, sólo es cierto si $z > 0$.

86. Para cualquier complejo z, ¿se verifica que $\operatorname{Re}(z^4) = 4\operatorname{Re} z$?

No, por ejemplo, si $z = i$ tenemos $\operatorname{Re}(z^4) = 1$ y $4\operatorname{Re} z = 0$.

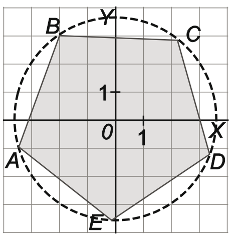
87. Si $z - \bar{z}$ es un número real, ¿qué puedes decir de z?

Recordemos que $z - \bar{z} = 2i\operatorname{Im} z$, por tanto, si es un número real debe ser $\operatorname{Im} z = 0$, es decir, z es real.

88. Un polinomio de grado 3, ¿puede tener las tres raíces imaginarias puras?

Sí, por ejemplo, el polinomio $P(z) = (z-i)(z+i)(z-2i) = z^3 - 2iz^2 + z - 2i$. La respuesta sería negativa si quisiéramos que además los coeficientes fueran reales, ya que entonces una de las raíces debería ser real.

89. Observa la figura y razona si los afijos correspondientes a los vértices del pentágono pueden corresponder a las raíces quintas de un número real.



Las raíces quintas de un número real positivo tienen como argumento $\frac{0^\circ + 360^\circ k}{5} = 72^\circ k\ (k = 0, 1, 2, 3, 4)$ y las raíces quintas de un número real negativo tienen como argumento $\frac{180^\circ + 360^\circ k}{5} = 36^\circ + 72^\circ k\ (k = 0, 1, 2, 3, 4)$. En ninguno de los casos se corresponden con los argumentos de los vértices del pentágono de la figura, por tanto, estos no pueden ser las raíces quintas de un número real.

90. ¿Es cierto que si $z^4 = 1$, entonces $z = 1$ o $z = -1$?

Si $z^4 = 1$, z es una de las raíces cuartas de 1, pero no necesariamente $z = 1$ o $z = -1$, también podría ser $z = i$ o $z = -i$.

91. Justifica que si $w = 2iz$, entonces $\left|\dfrac{w}{z}\right| = 2$ y $\operatorname{Arg}\left(\dfrac{w}{z}\right) = 90°$.

$\dfrac{w}{z} = \dfrac{2iz}{2} = 2i$, por tanto, $\left|\dfrac{w}{z}\right| = |2i| = 2$ y $\operatorname{Arg}\left(\dfrac{w}{z}\right) = \operatorname{Arg}(2i) = 90°$.

92. Si $\left|\dfrac{w}{z}\right| = 2$ y $\operatorname{Arg}\left(\dfrac{w}{z}\right) = 90°$, ¿es necesario que $w = 2iz$?

Sí es necesario, ya que si $\left|\dfrac{w}{z}\right| = 2$ y $\operatorname{Arg}\left(\dfrac{w}{z}\right) = 90°$ entonces $\dfrac{w}{z} = 2_{90°} = 2i$, es decir, $w = 2iz$.

93. ¿Es cierto que si *n* es un entero positivo, el complejo $z = \dfrac{(1+i)^n - (1-i)^n}{2}$ es un número real?

No, de hecho, z es siempre imaginario puro, ya que $(1+i)^n$ y $(1-i)^n$ son conjugados, por lo tanto, $z = \dfrac{(1+i)^n - (1-i)^n}{2} = \dfrac{2i\operatorname{Im}\left[(1+i)^n\right]}{2} = i\operatorname{Im}\left[(1+i)^n\right]$.

PROBLEMAS

94. Sean *a*, *b*, *c*, *d* números reales. Si $z_1 = a + bi$ y $z_2 = c + di$:

a) Calcula el módulo z_1z_2 de dos formas diferentes y demuestra que $(ac - bd)^2 + (ad + bc)^2 = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$.

b) Demuestra que 34 · 122 puede escribirse como la suma de dos cuadrados de números enteros.

a) $|z_1z_2| = |z_1||z_2| = \sqrt{a^2 + b^2}\sqrt{c^2 + d^2}$

$z_1z_2 = (ac - bd) + (ad + bc)i \Rightarrow |z_1z_2| = \sqrt{(ac - bd)^2 + (ad + bc)^2}$

Por tanto, $\sqrt{(ac - bd)^2 + (ad + bc)^2} = \sqrt{a^2 + b^2}\sqrt{c^2 + d^2} \Rightarrow (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2 = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$

b) $34 \cdot 122 = (5^2 + 3^2)(11^2 + 1^2) = (5 \cdot 11 - 3 \cdot 1)^2 + (5 \cdot 1 + 3 \cdot 11)^2 = 52^2 + 38^2$

95. **a)** Demuestra que el polinomio $P(z)=2z^4+3z^2+3\sqrt{3}z+9$ admite una raíz de la forma $\alpha(1+i)$ siendo α un número real. Determina el valor de α.

b) Demuestra que: $P(z)=2\left(z-\alpha(1+i)\right)\left(z-\alpha(1-i)\right)\left(z^2-\sqrt{3}z+3\right)$.

c) Escribe en forma polar todas las raíces de $P(z)$.

a) $P[\alpha(1+i)]=2[\alpha(1+i)]^4+3[\alpha(1+i)]^2+3\sqrt{3}[\alpha(1+i)]+9=\left(-8\alpha^4+3\sqrt{3}\alpha+9\right)+\left(6\alpha^2+3\sqrt{3}\alpha\right)i$

La parte imaginaria se anula si $\alpha=0$ o $\alpha=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, en el primer caso la parte real no se anula, pero sí en el segundo, ya que $-8\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^4+3\sqrt{3}\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)+9=-\dfrac{9}{2}-\dfrac{9}{2}+9=0\Rightarrow -\dfrac{\sqrt{3}}{2}(1+i)$ es una raíz de $P(z)$ y $\alpha=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

b) Al ser los coeficientes de $P(z)$ números reales, también $\alpha(1-i)$ es raíz de $P(z)$, con lo que se tendrá $P(z)=2\left(z-\alpha(1+i)\right)\left(z-\alpha(1-i)\right)\left(z^2+bz+c\right)$. Para calcular b y c, en vez de multiplicar e identificar coeficientes, es mejor dividir $P(z)$ entre $2\left(z-\alpha(1+i)\right)\left(z-\alpha(1-i)\right)=2z^2+2\sqrt{3}z+3$ para obtener que $z^2+bz+c=z^2-\sqrt{3}z+3$, lo que demuestra b).

c) Las raíces de $P(z)$ son $z=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}(1+i)=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i=\left(\dfrac{\sqrt{6}}{2}\right)_{225^\circ}$, $z=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}(1-i)=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i=\left(\dfrac{\sqrt{6}}{2}\right)_{135^\circ}$ y

$$z^2-\sqrt{3}z+3=0\Rightarrow z=\frac{\sqrt{3}\pm\sqrt{-9}}{2}=\frac{\sqrt{3}\pm 3i}{2}=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{3}{2}i=\sqrt{3}_{60^\circ}\\[2mm]\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{3}{2}i=\sqrt{3}_{300^\circ}\end{cases}.$$

96. En cada uno de los casos siguientes, halla el conjunto de afijos de los z que verifican las condiciones dadas:

a) $|z-2|=3$

b) $|z-1|=|z+2i|$

c) $|\bar{z}+i|=\sqrt{2}$

d) $|z+4i+iz|=1$

e) $|z+i|=1$

f) $|z|=|2+z|$

g) $|z-3i|=|\bar{z}+1|$

h) $|z-1+i|=2$

i) $|\bar{z}-1+i|=2$

a) Puntos cuya distancia al punto (2, 0) es 3, es decir, la circunferencia de centro (2, 0) y radio 3.

b) Puntos que equidistan de (1, 0) y de (0, –2), es decir, la mediatriz del segmento de extremos (1, 0) y (0, –2).

c) $|\bar{z}+i|=|\overline{\bar{z}+i}|=|z-i|$, luego la condición dada equivale a $|z-i|=\sqrt{2}$, que representa la circunferencia de centro (0, 1) y radio $\sqrt{2}$.

d) $|z+4i+iz|=|z(1+i)+4i|=\left|(1+i)\left(z+\dfrac{4i}{1+i}\right)\right|=|1+i||z+2+2i|=\sqrt{2}\,|z+2+2i|$, luego la condición dada equivale a $|z+2+2i|=\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, que representa la circunferencia de centro (–2, –2) y radio $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

e) Circunferencia de centro (0, –1) y radio 1.

f) Mediatriz del segmento de extremos (0, 0) y (–2, 0).

g) $|\bar{z}+1|=|z+1|$, luego la condición dada equivale a $|z-3i|=|z+1|$, que representa la mediatriz del segmento de extremos (0, 3) y (–1, 0).

h) Circunferencia de centro (1, –1) y radio 2.

i) $|\bar{z}-1+i|=|\overline{\bar{z}-1+i}|=|z-1-i|$, luego la condición dada equivale a $|z-1-i|=2$, que representa la circunferencia de centro (1, 1) y radio 2.

97. Para todo número complejo $z \neq 1$, se considera el siguiente complejo $w = \frac{z+1}{z-1}$.

Demuestra que $|z| = 1 \Leftrightarrow w$ es imaginario puro.

Pongamos $z = a + bi$, entonces $w = \frac{(a+1)+bi}{(a-1)+bi} = \frac{[(a+1)+bi][(a-1)-bi]}{[(a-1)+bi][(a-1)-bi]} = \frac{(a^2+b^2-1)-2bi}{(a-1)^2+b^2}$.

Si $|z| = 1 \Rightarrow a^2+b^2 = 1 \Rightarrow a^2+b^2-1 = 0 \Rightarrow w = -\frac{2b}{(a-1)^2+b^2}i$ es imaginario puro.

Recíprocamente, si w es imaginario puro, tenemos $\frac{a^2+b^2-1}{(a-1)^2+b^2} = 0 \Rightarrow a^2+b^2-1 = 0 \Rightarrow a^2+b^2 = 1 \Rightarrow |z| = 1$.

98. Para cada número complejo $z \neq 2i$ consideramos el número complejo $w = \frac{z+1}{z-2i}$. Determina el conjunto de los afijos de los z tales que:

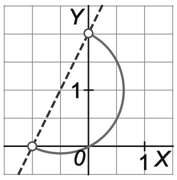
a) w es imaginario puro. **b)** w es un número real. **c)** $\text{Arg}\,w = \frac{\pi}{2}$ **d)** $\text{Arg}\,w = \frac{\pi}{4}$

Pongamos $z = x + yi$, entonces $w = \frac{(x+1)+yi}{x+(y-2)i} = \frac{[(x+1)+yi][x-(y-2)i]}{[x+(y-2)i][x-(y-2)i]} = \frac{(x^2+y^2+x-2y)+(2x-y+2)i}{x^2+(y-2)^2}$.

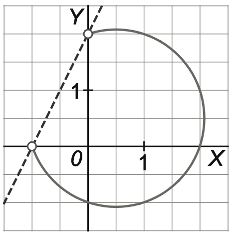
a) Si w es imaginario puro tenemos $x^2+y^2+x-2y = 0$, ecuación de la circunferencia de centro $\left(-\frac{1}{2}, 1\right)$ y radio $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

b) Si w es un número real tenemos $2x-y+2 = 0$, ecuación de la recta que pasa por los puntos (0, 2) y (–1, 0).

c) Si $\text{Arg}\,w = \frac{\pi}{2}$, w es imaginario puro y su parte real es positiva, es decir, los afijos buscados son los puntos (x, y) de la circunferencia hallada en a) que además cumplen $2x-y+2 > 0$, es decir, forman el arco de circunferencia representados en la figura.

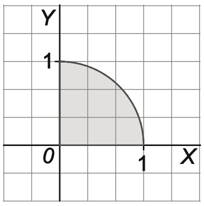


d) Si $\text{Arg}\,w = \frac{\pi}{4}$, la parte real e imaginaria de w coinciden y son positivas, es decir, los afijos buscados son los puntos (x, y) que cumplen $x^2+y^2+x-2y = 2x-y+2 \Rightarrow$ $\Rightarrow x^2+y^2-x-y-2 = 0$ y, además, $2x-y+2 > 0$, es decir, forman el arco de circunferencia representados en la figura, de centro $C\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ y radio $r = \sqrt{\frac{5}{2}}$

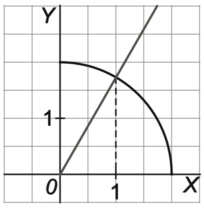


99. *Expresa en forma polar los afijos que están en las zonas coloreadas (excluidas las fronteras).

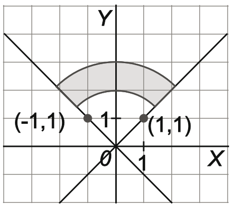
a)



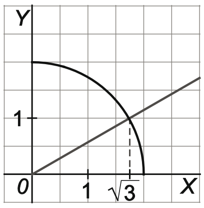
c)



b)



d)



a) r_α con $0 < r < 1$ y $0° < \alpha < 90°$

c) $r_{60°}$ con $r > 0$

b) $1_{45°}$, $1_{135°}$ y r_α con $2 < r < 3$ y $45° < \alpha < 135°$

d) $r_{30°}$ con $r > 2$

100. Al plantearle a un estudiante que resolviera la ecuación $(1+i)z-(3+2i)\bar{z}=1+5i$, el estudiante respondió así:

"Si $z = a + bi$, $\bar{z} = a - bi$, por lo que:

$$(1+i)z = (3+2i)(a-bi)+1+5i$$

de donde $z = \frac{5a-b+6}{2} + \frac{4-a-5b}{2}i$, con lo que, dando a a y b cualesquiera valores reales, obtenemos infinitos complejos z soluciones de dicha ecuación".

a) ¿Qué puedes decir sobre la respuesta del estudiante?

b) Prosigue sus cálculos y halla la respuesta correcta.

a) La respuesta es incorrecta, ya que $z = \frac{5a-b+6}{2} + \frac{4-a-5b}{2}i$ debe ser precisamente $z = a + bi$, por lo que no vale cualquier par (a, b) sino aquellos que verifiquen $\frac{5a-b+6}{2} = a$ y $\frac{4-a-5b}{2} = b$.

b) Continuando el razonamiento anterior:

$$\begin{cases} \frac{5a-b+6}{2} = a \\ \frac{4-a-5b}{2} = b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3a-b=-6 \\ a+7b=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -\frac{19}{11} \\ b = \frac{19}{11} \end{cases} \Rightarrow z = -\frac{19}{11} + \frac{19}{11}i$$

PARA PROFUNDIZAR

101. Si el afijo de $z = x + iy$ está alineado con los afijos de i y de iz, ¿qué relación existe entre x e y?

$z = x + iy \Rightarrow iz = -y + ix$ y nos piden la relación entre x e y sabiendo que los puntos $A(x, y)$, $B(0, 1)$ y $C(-y, x)$ están alineados.

De este modo, $\frac{-x}{-y-x} = \frac{1-y}{x-y} \Rightarrow x^2 + y^2 - x - y = 0$, es decir, ($x$, y) son las coordenadas de un punto de la circunferencia de centro $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ y radio $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

102. Si z y w son dos números complejos cualesquiera, demuestra que $|z+w|^2+|z-w|^2=2\left(|z|^2+|w|^2\right)$ e interpreta geométricamente el resultado.

$$|z+w|^2=(z+w)\left(\overline{z+w}\right)=(z+w)\left(\overline{z}+\overline{w}\right)=z\overline{z}+z\overline{w}+w\overline{z}+w\overline{w}=|z|^2+z\overline{w}+w\overline{z}+|w|^2$$

$$|z-w|^2=(z-w)\left(\overline{z-w}\right)=(z-w)\left(\overline{z}-\overline{w}\right)=z\overline{z}-z\overline{w}-w\overline{z}+w\overline{w}=|z|^2-z\overline{w}-w\overline{z}+|w|^2$$

Sumando se obtiene $|z+w|^2+|z-w|^2=2\left(|z|^2+|w|^2\right)$

Como $|z-w|$ representa la distancia entre los afijos de z y w y $|z+w|$ representa la distancia entre los afijos de z y $-w$, $|z+w|^2+|z-w|^2$ representa la suma de los cuadrados de las diagonales del paralelogramo cuyos lados son $|z|$ y $|w|$. Así pues, en cualquier paralelogramo la suma de los cuadrados de las diagonales es igual a la suma de los cuadrados de los cuatro lados.

103. Encuentra los menores enteros positivos m y n que verifican que $\left(1+i\sqrt{3}\right)^m=(1-i)^n$.

$$1+i\sqrt{3}=2_{60^\circ}\Rightarrow\left(1+i\sqrt{3}\right)^m=\left(2^m\right)_{60^\circ m}\ \text{ y }\ 1-i=\sqrt{2}_{315^\circ}\Rightarrow(1-i)^n=\left(\sqrt{2}^n\right)_{315^\circ n}$$

Para que ambos números sean iguales debe verificarse que $2^m=\sqrt{2}^n\Rightarrow n=2m$ y que $315^\circ n-60^\circ m$ sea múltiplo de 360º, es decir, $630^\circ m-60^\circ m=570^\circ m$ debe ser múltiplo de 360º, el menor entero para el que esto sucede es $m=12$ y, por tanto, $n=24$.

104. Si z_1 y z_2 son dos números complejos de módulo 1, demuestra que $\dfrac{(z_1+z_2)^2}{z_1z_2}$ es un número real no negativo.

Como $\dfrac{(z_1+z_2)^2}{z_1z_2}=\dfrac{z_1^{\,2}+z_2^{\,2}+2z_1z_2}{z_1z_2}=\dfrac{z_1}{z_2}+\dfrac{z_2}{z_1}+2$, basta demostrar que $\dfrac{z_1}{z_2}+\dfrac{z_2}{z_1}$ es un número real mayor o igual que –2.

Para ello observemos que $\dfrac{z_1}{z_2}$ y $\dfrac{z_2}{z_1}$ son dos números complejos inversos y de módulo 1, por lo que deben ser conjugados, pongamos $\dfrac{z_1}{z_2}=w$ y $\dfrac{z_2}{z_1}=\overline{w}$, así $\dfrac{z_1}{z_2}+\dfrac{z_2}{z_1}=2\operatorname{Re}w$ es un número real.

Por otra parte, como w tiene módulo 1, tenemos $\operatorname{Re}w\geq-1$, por lo que $\dfrac{z_1}{z_2}+\dfrac{z_2}{z_1}=2\operatorname{Re}w\geq-2$.

105. Demuestra que para cualquier entero positivo n se verifican estas dos igualdades:

$$\binom{n}{0}-\binom{n}{2}+\binom{n}{4}-\ldots=2^{\frac{n}{2}}\cos\frac{n\pi}{4}\qquad\qquad\binom{n}{1}-\binom{n}{3}+\binom{n}{5}-\ldots=2^{\frac{n}{2}}\,sen\frac{n\pi}{4}$$

Sea el número complejo $z=1+i=\sqrt{2}_{\frac{\pi}{4}}$. Por un lado, $z^n=\left(\sqrt{2}_{\frac{\pi}{4}}\right)^n=\left(\sqrt{2}^n\right)_{\frac{n\pi}{4}}=2^{\frac{n}{2}}\left(\cos\frac{n\pi}{4}+i\operatorname{sen}\frac{n\pi}{4}\right)$.

Por otra parte, desarrollando por el binomio de Newton:

$$z^n=(1+i)^n=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}i+\binom{n}{2}i^2+\binom{n}{3}i^3+\binom{n}{4}i^4+\ldots+\binom{n}{n}i^n=\left[\binom{n}{0}-\binom{n}{2}+\binom{n}{4}-\ldots\right]+\left[\binom{n}{1}-\binom{n}{3}+\binom{n}{5}-\ldots\right]i$$

Igualando las partes reales e imaginarias de ambas expresiones obtenemos las igualdades deseadas:

$$\binom{n}{0}-\binom{n}{2}+\binom{n}{4}-\ldots=2^{\frac{n}{2}}\cos\frac{n\pi}{4}\qquad\qquad\binom{n}{1}-\binom{n}{3}+\binom{n}{5}-\ldots=2^{\frac{n}{2}}\,sen\frac{n\pi}{4}$$

106. Si z no es 1 y verifica la ecuación $z^3 = 1$, calcula $(1 - z + z^2)(1 + z - z^2)$.

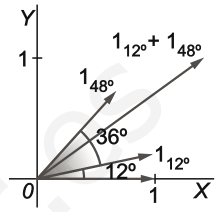
Como $z^3 - 1 = (z-1)(z^2 + z + 1)$, si $z^3 = 1$ y $z \neq 1$ tendemos $z^2 + z + 1 = 0$, por tanto, $1 - z + z^2 = -2z$ y $1 + z - z^2 = -2z^2$, con lo que $(1 - z + z^2)(1 + z - z^2) = 4z^3 = 4$.

107. Calcula la parte imaginaria del complejo:

$$z = (\cos 12^\circ + i \operatorname{sen} 12^\circ + \cos 48^\circ + i \operatorname{sen} 48^\circ)^6$$

Queremos calcular la parte imaginaria de $z = (1_{12^\circ} + 1_{48^\circ})^6$, para ello, observemos que $48^\circ - 12^\circ = 36^\circ$, por lo que el argumento de $1_{12^\circ} + 1_{48^\circ}$ es $12^\circ + \frac{36^\circ}{2} = 30^\circ$ (ver figura).

Por tanto, $1_{12^\circ} + 1_{48^\circ} = r_{30^\circ}$ y $z = (r_{30^\circ})^6 = (r^6)_{180^\circ}$, con lo que $\operatorname{Im} z = 0$.



108. Sea $z_0 = \cos 72^\circ + i \operatorname{sen} 72^\circ$.

a) Comprueba que z_0 es raíz del polinomio $P(z) = z^5 - 1$.

b) Prueba la relación:

$$\left(z_0 + \frac{1}{z_0}\right)^2 + \left(z_0 + \frac{1}{z_0}\right) - 1 = 0$$

c) Comprueba que $z_0 + \frac{1}{z_0} = 2\cos 72^\circ$ y demuestra que $\cos 72^\circ = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}$.

d) Construye un pentágono regular utilizando solamente el compás y una regla no graduada, basándote en los resultados de los apartados anteriores.

a) $z_0 = \cos 72^\circ + i \operatorname{sen} 72^\circ = 1_{72^\circ} \Rightarrow P(z_0) = z_0^5 - 1 = 1_{360^\circ} - 1 = 1 - 1 = 0$

b) Como $P(z) = z^5 - 1 = (z-1)(z^4 + z^3 + z^2 + z + 1)$ y $z_0 \neq 1$, tenemos $z_0^4 + z_0^3 + z_0^2 + z_0 + 1 = 0$.

Como $z_0 \neq 0$ podemos dividir por z_0^2 para obtener:

$$z_0^2 + z_0 + 1 + \frac{1}{z_0} + \frac{1}{z_0^2} = 0 \Rightarrow z_0^2 + \frac{1}{z_0^2} + z_0 + \frac{1}{z_0} + 1 = 0 \Rightarrow \left(z_0 + \frac{1}{z_0}\right)^2 + \left(z_0 + \frac{1}{z_0}\right) - 1 = 0$$

c) Como $|z_0| = 1$ tenemos $\frac{1}{z_0} = \overline{z_0}$ y, por tanto, $z_0 + \frac{1}{z_0} = (\cos 72^\circ + i \operatorname{sen} 72^\circ) + (\cos 72^\circ - i \operatorname{sen} 72^\circ) = 2\cos 72^\circ$.

De este modo, según el apartado anterior, $2\cos 72^\circ$ es la solución positiva de la ecuación $z^2 + z - 1 = 0$, es decir, $2\cos 72^\circ = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$, de donde $\cos 72^\circ = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}$.

d) Una vez que tenemos que $\cos 72^\circ = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}$ y, dado que el ángulo central en un pentágono regular es $\alpha = 72^\circ$, tomando como un vértice del pentágono regular el punto $A(1, 0)$, la construcción de un vértice adyacente es inmediata sin más que construir con el compás $\sqrt{5} = \sqrt{2^2 + 1^2}$ y posteriormente $\sqrt{5} - 1$ sobre el eje X.

Dividiendo este último segmento en cuatro partes iguales, levantamos una perpendicular por la primera división y el punto donde corte a la circunferencia centrada en el origen y radio 1 es el vértice buscado.

ENTORNO MATEMÁTICO

Peleas matemáticas

Hoy en clase, Iván y Sara han tenido una fuerte discusión porque ambos decían haber resuelto antes un difícil problema de geometría. El profesor ve que su alta competitividad puede eclipsar su talento para las matemáticas y, a pesar de que a ellos no les hace ninguna gracia, les propone un ejercicio:

Estamos trabajando con números que son una herramienta fundamental en multitud de campos científicos y técnicos. En sus inicios, produjeron una amarga pelea entre dos grandes matemáticos del renacimiento italiano: Cardano y Tartaglia que, a pesar de su ingenio, no supieron reconocer en el otro a un matemático equiparable a ellos. Quiero que reflexionéis sobre esto y que trabajéis sobre el siguiente problema:

Un buen ejemplo de la utilidad de estos números, que llamamos imaginarios, es la resolución de la ecuación cúbica $x^3 + px = q$ que Tartaglia enunció así:

"Para resolver la ecuación $x^3 + px = q$, halla dos números cuya resta sea q y cuyo producto sea $\left(\frac{p}{3}\right)^3$. La solución será la diferencia de las raíces cúbicas de ambos."

En efecto, dados dos números cualesquiera u y v, tenemos que:

$$u^3 - v^3 = (u-v)^3 + 3(u-v)^2 v + 3(u-v)v^2$$

Extrayendo factor común y operando resulta:

$$u^3 - v^3 = (u-v)^3 + 3(u-v)v\left[(u-v)+v\right] = (u-v)^3 + 3(u-v)uv$$

y llamando $x = u - v$, se llega a $x^3 + 3uvx = u^3 - v^3$, que se parece mucho a nuestra ecuación. Basta elegir u y v con la condición: $\begin{cases} 3uv = p \\ u^3 - v^3 = q \end{cases}$. De esta manera, $x = u - v$ será la solución buscada.

Vuestra tarea es revisar el método de Tartaglia, aplicarlo a la resolución de la ecuación $x^3 - 15x = 4$, identificar esos números imaginarios y explicar a vuestros compañeros como lo habéis manejado.

¿Eres capaz de resolver el problema que han planteado a Iván y Sara?

Se quiere resolver el sistema $\begin{cases} 3uv = -15 \\ u^3 - v^3 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} uv = -5 \\ u^3 - v^3 = 4 \end{cases}$, para ello, se despeja en la primera ecuación $v = -\frac{5}{u}$ y se sustituye en la segunda para obtener $u^3 - \left(-\frac{5}{u}\right)^3 = 4 \Rightarrow u^3 + \frac{125}{u^3} = 4$.

Llamando $z = u^3$ tenemos $z + \frac{125}{z} = 4 \Rightarrow z^2 - 4z + 125 = 0$ y es al resolver esta ecuación cuando aparecen los números complejos, ya que las soluciones son $z = 2 + 11i$ y $z = 2 - 11i$.

Tomando, por ejemplo, $z = 2 + 11i$ (si se tomara $z = 2 - 11i$ el resultado final sería el mismo), se tiene $u^3 = 2 + 11i$, con lo que se pueden calcular las tres raíces cúbicas de $2 + 11i$, u_1, u_2 y u_3, calcular los correspondientes $v_1 = -\frac{5}{u_1}$, $v_2 = -\frac{5}{u_2}$ y $v_3 = -\frac{5}{u_3}$ y encontrar así las tres soluciones $x_1 = u_1 - v_1$, $x_2 = u_2 - v_2$ y $x_3 = u_3 - v_3$.

Para simplificar los cálculos basta observar que $|2 + 11i| = \sqrt{125} = 5^{\frac{3}{2}}$, por lo que las raíces cúbicas de $2 + 11i$ tienen módulo $5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5}$. Así, si u es una de estas raíces cúbicas, tendremos $v = -\frac{5}{u} = -\frac{5\bar{u}}{|u|^2} = -\bar{u}$ y $u - v = u + \bar{u} = 2\text{Re}(u)$.

Esto prueba, en particular, que las tres soluciones de $x^3 - 15x = 4$ van a ser reales.

Solo se necesita encontrar una raíz cúbica u_1 de $2+11i$, ya que entonces se tendrá $u_2 = u_1 \cdot 1_{120^\circ} = \left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)u_1$ y $u_3 = u_2 \cdot 1_{240^\circ} = \left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)u_1$.

Se calcula por tanto una raíz cúbica u_1 de $2+11i$, para ello sea $\alpha = \mathrm{Arg}(2+11i)$ el ángulo del primer cuadrante tal que $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{11}{2}$ ($\alpha \simeq 79{,}695^\circ$), entonces $u_1 = \sqrt{5}_{\frac{\alpha}{3}} = \sqrt{5}\left(\cos\frac{\alpha}{3}+i\,\mathrm{sen}\frac{\alpha}{3}\right) = 2+i$.

Estos cálculos, que son los que hay que realizar con más cuidado si se desea obtener la respuesta correcta, se pueden evitar si se tiene en cuenta que $z_1 = 2+i$ es una raíz cúbica de $2+11i$, ya que $(2+i)^3 = 2^3+3\cdot 2^2\cdot i+3\cdot 2^2\cdot i^2+i^3 = 2+11i$.

Las soluciones de $x^3-15x=4$ son, por tanto: $x_1 = 2\mathrm{Re}\,u_1 = 2\mathrm{Re}(2+i) = 4$, $x_2 = 2\mathrm{Re}\,u_2 = 2\mathrm{Re}\left[\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(2+i)\right] = -2-\sqrt{3}$ y $x_3 = 2\mathrm{Re}\,u_3 = 2\mathrm{Re}\left[\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(2+i)\right] = -2+\sqrt{3}$.

El conjunto más bello de las matemáticas

Ana está preocupada, tiene que estudiar para el examen de matemáticas y debe hacer una composición para la asignatura de dibujo, pero no sabe si le va a dar tiempo. De camino al instituto se lo comenta a su compañero Javier, un "friki" de los ordenadores. Sorprendentemente, Javier se echa a reír y le dice "no te preocupes, puedes hacer las dos cosas a la vez". Ana cree que se está riendo de ella y está a punto de dejarle con la palabra en la boca, pero Javier comenta: "Lo digo en serio, se pueden conseguir gráficos espectaculares utilizando los números complejos que tienes que estudiar para mates". Y comienza a explicarle como hacerlo:

A partir de un número complejo *z* debes hacer dos sucesiones: $\begin{cases} z_1 = z \\ z_{n+1} = z_n^{\,2} + z \end{cases}$, y la que forman sus módulos $|z_1|, |z_2|, |z_3|, \ldots$

Para un número inicial *z*, puede ocurrir que la sucesión de módulos esté acotada o no lo esté. En el primer caso *z* pertenece al llamado conjunto de Mandelbrot y su afijo correspondiente se colorea de negro. En el segundo caso, *z* no pertenece a dicho conjunto y el punto no se colorea.

Por ejemplo, para $z = 1$ la sucesión de los módulos es 1, 2, 5, 26, 677,… que no es acotada y, por tanto, el punto (1, 0) es blanco. Sin embargo, si se toma $z = -1$, la sucesión de módulos es 1, 0, 1, 0, 1,… que sí es acotada y el afijo de *z*, (–1, 0), es negro. Repitiendo este proceso para un número suficiente de puntos iniciales llegarías a la figura de la derecha.

Si quieres dibujos con distintas tonalidades, como el de la izquierda, puedes dar una coloración distinta según la velocidad a la que crecen los módulos de los términos de la sucesión. En la figura, los valores de *z* para los que la sucesión crece más rápido son de un rojo más intenso que aquellos que llevan a un crecimiento más lento.

Ana decide hacer un gráfico con el conjunto de Mandelbrot. Ayúdala hallando los tres primeros términos de la sucesión para $z = 1+2i$, $z = 3i$ y $z = -1-2i$ y decide cuál de ellos tendrá un rojo más oscuro en la representación.

Si $z = 1+2i$ obtenemos $|z_1| = |1+2i| = \sqrt{5}$, $|z_2| = |-2+6i| = \sqrt{40}$ y $|z_3| = |-31-22i| = \sqrt{1445}$

Si $z = 3i$ obtenemos $|z_1| = |3i| = \sqrt{9}$, $|z_2| = |-9+3i| = \sqrt{90}$ y $|z_3| = |72-51i| = \sqrt{7785}$

Si $z = -1-2i$ obtenemos $|z_1| = |-1-2i| = \sqrt{5}$, $|z_2| = |-4+2i| = \sqrt{20}$ y $|z_3| = |11-18i| = \sqrt{445}$

Ninguna de las tres sucesiones está acotada, la que crece más rápido y se representará con un rojo más intenso es la correspondiente a $z = 3i$, la que crece más despacio y se representará con un rojo menos intenso es la correspondiente a $z = -1-2i$.

AUTOEVALUACION

Comprueba qué has aprendido

1. Escribe en forma binómica el complejo $z=\dfrac{4-i}{1+2i}$.

$$z=\frac{4-i}{1+2i}=\frac{(4-i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)}=\frac{2-9i}{5}=\frac{2}{5}-\frac{9}{5}i$$

2. Calcula el módulo y el argumento de $z=\dfrac{-1+i}{-3\sqrt{3}+3i}$.

$-1+i=\sqrt{2}_{135^\circ}$ y $-3\sqrt{3}+3i=6_{150^\circ}$, por tanto, $z=\dfrac{\sqrt{2}_{135^\circ}}{6_{150^\circ}}=\left(\dfrac{\sqrt{2}}{6}\right)_{-15^\circ}=\left(\dfrac{\sqrt{2}}{6}\right)_{345^\circ}$, es decir, el módulo de z es $\dfrac{\sqrt{2}}{6}$ y su argumento es 345º.

3. Si $z=x+iy$, calcula en términos de x e y el conjugado de: $w=\dfrac{1-z}{1+i}$.

$$w=\frac{1-x-iy}{1+i}=\frac{(1-x-iy)(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\frac{(1-x-y)-(1-x+y)}{2}=\frac{1-x-y}{2}-\frac{1-x+y}{2}i\Rightarrow\overline{w}=\frac{1-x-y}{2}+\frac{1-x+y}{2}i$$

4. Determina el conjunto M de los afijos de los $z=x+iy$ tales que $w=iz^2-(1+i)z+1$ es un número real.

Tenemos $w=i(x+iy)^2-(1+i)(x+iy)+1=(-2xy-x+y+1)+(x^2-y^2-x-y)i$, por tanto, w será un número real si $x^2-y^2-x-y=0\Rightarrow(x+y)(x-y-1)=0$, es decir, el conjunto M está formado por los puntos de las rectas $x+y=0$ y $x-y-1=0$.

5. Si $z_1=\dfrac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{4}$ y $z_2=1-i$, escribe en forma trigonométrica z_1, z_2 y $\dfrac{z_1}{z_2}$.

$z_1=\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)_{330^\circ}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(\cos 330^\circ+i\operatorname{sen}330^\circ)$, $z_2=\left(\sqrt{2}\right)_{315^\circ}=\sqrt{2}(\cos 315^\circ+i\operatorname{sen}315^\circ)$ y $\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{1}{2}(\cos 15^\circ+i\operatorname{sen}15^\circ)$.

6. Escribe, en forma polar, las raíces cúbicas de *i*.

$i=1_{90^\circ}$, por tanto, las raíces cúbicas de son $z_1=1_{30^\circ}$, $z_2=1_{150^\circ}$ y $z_3=1_{270^\circ}$.

7. Describe el conjunto de los números complejos *z* tales que $|z-i|=\sqrt{10}$.

Es una circunferencia de centro (0, 1) y radio $\sqrt{10}$.

8. Desarrolla el producto $(z^2+2z-3)(z^2+2z+5)$ y resuelve la ecuación $z^4+4z^3+6z^2+4z=15$.

$(z^2+2z-3)(z^2+2z+5)=z^4+4z^3+6z^2+4z-15$, por tanto, las soluciones de $z^4+4z^3+6z^2+4z=15$ son las soluciones de $z^2+2z-3=0$ y $z^2+2z+5=0$, es decir, $z=1$, $z=-3$, $z=-1+2i$ y $z=-1-2i$.

9. Si un vértice de un triángulo equilátero inscrito en una circunferencia centrada en el origen es el punto $A\left(6,\dfrac{7}{4}\right)$, calcula los otros dos.

Los otros dos vértices se obtienen girando A respecto del origen 120º y 240º, es decir, son los afijos de los complejos que se obtienen al multiplicar $6+\dfrac{7}{4}i$ por $1_{60^\circ}=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ y por $1_{120^\circ}=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$. Así:

$$\left(6+\frac{7}{4}i\right)\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=\left(-3-\frac{7\sqrt{3}}{8}\right)+\left(3\sqrt{3}-\frac{7}{8}\right)i\Rightarrow B\left(-3-\frac{7\sqrt{3}}{8},\ 3\sqrt{3}-\frac{7}{8}\right)$$

$$\left(6+\frac{7}{4}i\right)\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=\left(-3+\frac{7\sqrt{3}}{8}\right)+\left(-3\sqrt{3}-\frac{7}{8}\right)i\Rightarrow C\left(-3+\frac{7\sqrt{3}}{8},\ -3\sqrt{3}-\frac{7}{8}\right)$$

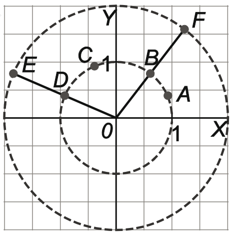
10. Si $q(z)=2z^2-12z+26$, ¿puedes afirmar que para todo $z\in\mathbb{C}$ se verifica que $q(z)$ es siempre positivo como ocurre con $p(x)=2x^2-12x+26$ si x es cualquier número real?

No, ya que $q(z)$ puede tomar valores complejos, por ejemplo, $q(i)=2i^2-12i+26=24-12i$, y para estos números no tiene sentido hablar de si son positivos o negativos.

Relaciona y contesta

Elige la única respuesta correcta en cada caso

1. El producto de los números complejos cuyos afijos son los puntos *A* y *C* del dibujo es el complejo de afijo:



A. *E* **B.** *B* **C.** *F* **D.** *D*

Como *A* y *C* tienen módulo 1, su producto tendrá también módulo 1 y el argumento del producto será la suma de los argumentos de *A* y *C*, es decir, la respuesta correcta es D.

2. Si $S=\{z\in\mathbb{C}$ tales que $(3+4i)z\in\mathbb{R}\}$, los afijos de z constituyen:

A. Un triángulo equilátero
B. Una circunferencia
C. Una recta
D. Una parábola

Si $z=x+iy$ tenemos $(3+4i)z=(3+4i)(x+iy)=(3x-4y)+(3y+4x)i$, que será un número real si $3y+4x=0$, es decir, la respuesta correcta es C.

3. **El valor de $(1+i)^{20}-(1-i)^{20}$ es:**

A. 0 **B.** –1 **C.** –*i* **D.** *i*

$(1+i)^{20}-(1-i)^{20}=\left(\sqrt{2}_{45^\circ}\right)^{20}-\left(\sqrt{2}_{315^\circ}\right)^{20}=\left(2^{10}\right)_{900^\circ}-\left(2^{10}\right)_{6300^\circ}=\left(2^{10}\right)_{180^\circ}-\left(2^{10}\right)_{180^\circ}=0$, es decir, la respuesta correcta es A.

Señala, en cada caso, las respuestas correctas

4. **Si z_0 es una solución de la ecuación $z^2-(1+i)=0$, entonces:**

A. $|z_0|^2=2$

B. $|z_0|^2=\sqrt{2}$

C. $(\operatorname{Re} z_0)^2-(\operatorname{Im} z_0)^2=1$

D. $\overline{z_0}$ también es solución de dicha ecuación.

Como z_0 es una raíz cuadrada de $1+i=\sqrt{2}_{45^\circ}$, tenemos que $z_0=\sqrt[4]{2}_{\frac{45^\circ}{2}}$ o $z_0=\sqrt[4]{2}_{\frac{45^\circ}{2}+180^\circ}$.

En ambos casos, $|z_0|^2=\sqrt{2}$, es decir, A es falsa y B verdadera. Además, al ser $\cos\left(\frac{45^\circ}{2}\right)=-\cos\left(\frac{45^\circ}{2}+180^\circ\right)$ y $\operatorname{sen}\left(\frac{45^\circ}{2}\right)=\operatorname{sen}\left(\frac{45^\circ}{2}+180^\circ\right)$, en los dos casos el valor de $(\operatorname{Re} z_0)^2-(\operatorname{Im} z_0)^2$ es el mismo, en concreto $(\operatorname{Re} z_0)^2-(\operatorname{Im} z_0)^2=\left(\sqrt[4]{2}\cos\frac{45^\circ}{2}\right)^2-\left(\sqrt[4]{2}\operatorname{sen}\frac{45^\circ}{2}\right)^2=\sqrt{2}\left(\cos^2\frac{45^\circ}{2}-\operatorname{sen}^2\frac{45^\circ}{2}\right)=\sqrt{2}\cos 45^\circ=1$, por lo que C también es cierta.

Finalmente, D es falsa, ya que las dos soluciones de la ecuación, $\sqrt[4]{2}_{\frac{45^\circ}{2}}$ y $\sqrt[4]{2}_{\frac{45^\circ}{2}+180^\circ}$ no son conjugadas.

5. **Para cada entero positivo *n* consideremos el número complejo $z_n=(1+i\sqrt{3})^n-(1-i\sqrt{3})^n$. Entonces, para cualquier valor de *n* podemos asegurar que:**

A. z_n es un número real.

B. z_n es un número imaginario puro.

C. $z_n=2^n$

D. $z_n=-\overline{z_n}$

Como $1+i\sqrt{3}$ y $1-i\sqrt{3}$ son conjugados, también lo son $(1+i\sqrt{3})^n$ y $(1-i\sqrt{3})^n$ y, por tanto, z_n es un número imaginario puro, es decir, A y C son falsas y B verdadera.

Por otro lado, $\overline{z_n}=\overline{\left(1+i\sqrt{3}\right)^n-\left(1-i\sqrt{3}\right)^n}=\left(\overline{1+i\sqrt{3}}\right)^n-\left(\overline{1-i\sqrt{3}}\right)^n=\left(1-i\sqrt{3}\right)^n-\left(1+i\sqrt{3}\right)^n=-z_n$, es decir, D también es verdadera.

Elige la relación correcta entre las dos afirmaciones dadas

6. Considera la ecuación $P(z) = 0$, donde $P(z)$ es un polinomio de grado tres con coeficientes reales y las dos afirmaciones siguientes:

1. $2-3i$ es solución de dicha ecuación.

2. $-2+3i$ es solución de dicha ecuación.

Entonces:

A. $1 \Rightarrow 2$ pero $2 \not\Rightarrow 1$

B. $2 \Rightarrow 1$ pero $1 \not\Rightarrow 2$

C. $1 \Leftrightarrow 2$

D. 1 y 2 se excluyen entre sí.

Si se verifica 1, entonces $2+3i$ también será solución de la ecuación y la tercera solución será un número real, por lo que no se cumple 2.

Análogamente, si se verifica 2, entonces $-2-3i$ también será solución de la ecuación y la tercera solución será un número real, por lo que no se cumple 1.

Es decir, la relación correcta es D.

Señala el dato innecesario para contestar

7. Sea $P(z) = z^3 + az^2 + bz + c$ un polinomio con coeficientes reales. Para determinar los números *a*, *b* y *c* nos dan los siguientes datos:

1. $z_1 = 2+i$ es una raíz de $P(z)$.

2. $c = 5a + 20$.

3. Si z_1, z_2 y z_3 son las raíces de $P(z)$ entonces $(z_1z_2z_3)^2 = 100$.

4. Una de las raíces es un número positivo.

A. Puede eliminarse el dato 1.

B. Puede eliminarse el dato 2.

C. Puede eliminarse el dato 3.

D. Puede eliminarse el dato 4.

El dato 2 se deduce del dato 1, por lo que puede eliminarse. En efecto, si $z_1 = 2+i$ es una raíz de $P(z)$ tenemos:

$$P(z_1) = 0 \Rightarrow (2+i)^3 + a(2+i)^2 + b(2+i) + c = 0 \Rightarrow (2+3a+2b+c) + (11+4a+b)i = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2+3a+2b+c=0 \\ 11+4a+b=0 \end{cases}$$

Multiplicando la segunda ecuación por 2 y restándole la primera ecuación obtenemos $c = 5a + 20$.

Veamos que los datos 1, 3 y 4 permiten calcular *a*, *b* y *c*. En efecto:

Como los coeficientes de $P(z)$ son reales, por el dato 1 las soluciones serán $2+i$, $2-i$ y r real. Del dato 3 deducimos que $[(2+i)(2-i)r]^2 = 100 \Rightarrow 25r^2 = 100 \Rightarrow r^2 = 4$, con lo que, según el dato 4, $r = 2$.

Por tanto, $P(z) = (z-2-i)(z-2+i)(z-2) = z^3 - 6z^2 + 13z - 10$, es decir, $a = -6$, $b = 13$ y $c = -10$.

notas

notas

El solucionario de **Matemáticas I de 1.º de Bachillerato** forma parte del Proyecto Editorial de Educación de SM. En su realización ha participado el siguiente equipo:

Autoría
Fernando Alcaide, Joaquín Hernández, María Moreno, Esteban Serrano

Edición
José Miguel Gómez, Arturo García

Corrección científica
Juan Jesús Donaire

Corrección
Javier López

Ilustración
Juan Antonio Rocafort, Bartolomé Seguí

Fotografía
THINKSTOCK, 123RF

Diseño de cubierta e interiores
Estudio SM

Responsable de proyecto
Arturo García

Coordinación editorial de Matemáticas
Josefina Arévalo

Dirección de Arte del proyecto
Mario Dequel

Dirección editorial
Aída Moya