

Examen de Matemáticas II – 2º de Bachillerato

1. **[4 puntos; 2 puntos por apartado]** Resuelve las siguientes integrales usando o bien el método de integración por cambio de variable, o bien el método de integración por partes.

a) $\int \sqrt{x-4}(x+5) dx$

b) $\int \ln(1+x^2) dx$

2. **[3 puntos; 1,5 puntos por apartado]** Resuelve las siguientes integrales racionales.

a) $\int \frac{1}{x^3 - 2x^2 - x + 2} dx$

b) $\int \frac{2x-1}{x^3 + 2x^2 + x} dx$

3. Dadas las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} m & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}; C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

a) **[1 punto]** ¿Para qué valores de m existe A^{-1} ?

b) **[2 puntos]** Para $m=1$, halla la matriz X tal que $XA+B=C$

Soluciones

1. **[4 puntos; 2 puntos por apartado]** Resuelve las siguientes integrales usando o bien el método de integración por cambio de variable, o bien el método de integración por partes.

$$a) \int \sqrt{x-4}(x+5) dx = \left[\begin{array}{l} x-4=t^2 \Rightarrow dx=2tdt \\ x=t^2+4 \Rightarrow x+5=t^2+9 \end{array} \right] = \int \sqrt{t^2}(t^2+9)2t dt = \int 2t^2(t^2+9) dt =$$

$$= \int (2t^4 + 18t^2) dt = \frac{2t^5}{5} + \frac{18t^3}{3} + C = \frac{2t^5}{5} + 6t^3 + C = \frac{2\sqrt{(x-4)^5}}{5} + 6\sqrt{(x-4)^3} + C$$

$$b) \int \ln(1+x^2) dx = \left[\begin{array}{l} u = \ln(1+x^2) \quad dv = dx \\ du = \frac{2x}{1+x^2} \quad v = x \end{array} \right] = x \ln(1+x^2) - \int \frac{2x^2}{1+x^2} dx$$

La integral $\int \frac{2x^2}{1+x^2} dx$ es racional. Haciendo la división se tiene que $2x^2 = 2(x^2+1) - 2$ y de aquí obtenemos $\frac{2x^2}{x^2+1} = 2 - \frac{2}{x^2+1}$. Por tanto, $\int \frac{2x^2}{1+x^2} dx = \int \left(2 - \frac{2}{x^2+1} \right) dx = 2x - 2 \arctg x + C$. Así pues:

$$\int \ln(1+x^2) dx = x \ln(1+x^2) - \int \frac{2x^2}{1+x^2} dx = x \ln(1+x^2) - 2x + 2 \arctg x + C$$

2. **[3 puntos; 1,5 puntos por apartado]** Resuelve las siguientes integrales racionales.

$$a) \int \frac{1}{x^3 - 2x^2 - x + 2} dx$$

Como $x^3 - 2x^2 - x + 2 = (x+1)(x-1)(x-2)$, tenemos que: $\frac{1}{x^3 - 2x^2 - x + 2} = \frac{1}{(x+1)(x-1)(x-2)} =$

$$= \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x-2} = \frac{A(x-1)(x-2) + B(x+1)(x-2) + C(x+1)(x-1)}{(x+1)(x-1)(x-2)}. \text{ Entonces:}$$

$$1 = A(x-1)(x-2) + B(x+1)(x-2) + C(x+1)(x-1)$$

Para $x=1$ se tiene que $1 = -2B \Rightarrow B = -\frac{1}{2}$. Para $x=-1$ tenemos $1 = 6A \Rightarrow A = \frac{1}{6}$. Y, finalmente, para

$x=2$ se obtiene $1 = 3C \Rightarrow C = \frac{1}{3}$. Por tanto:

$$\int \frac{1}{x^3 - 2x^2 - x + 2} dx = \int \frac{1/6}{x+1} dx + \int \frac{-1/2}{x-1} dx + \int \frac{1/3}{x-2} dx = \frac{1}{6} \ln(x+1) - \frac{1}{2} \ln(x-1) + \frac{1}{3} \ln(x-2) + C$$

b) $\int \frac{2x-1}{x^3+2x^2+x} dx$

Como $x^3+2x^2+x = x(x^2+2x+1) = x(x+1)^2$, tenemos que $\frac{2x-1}{x^3+2x^2+x} = \frac{2x-1}{x(x+1)^2} =$

$$= \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2} = \frac{A(x+1)^2 + Bx(x+1) + Cx}{x(x+1)^2} \Rightarrow 2x-1 = A(x+1)^2 + Bx(x+1) + Cx.$$

Para $x=-1$ se obtiene $-3 = -C \Rightarrow C=3$. Para $x=0$ tenemos $A=-1$. Y para $x=1$ se tiene que $1 = 4A + 2B + C \Rightarrow 1 = -4 + 2B + 3 \Rightarrow 1 = -1 + 2B \Rightarrow 2B = 2 \Rightarrow B=1$. Por tanto:

$$\int \frac{2x-1}{x^3+2x^2+x} dx = \int \frac{-1}{x} dx + \int \frac{1}{x+1} dx + \int \frac{3}{(x+1)^2} dx = -\ln|x| + \ln|x+1| - \frac{3}{x+1} + C$$

3. Dadas las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} m & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}; C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

a) [1 punto] ¿Para qué valores de m existe A^{-1} ?

Sabemos que existe la inversa de una matriz cuadrada si, y sólo si, su determinante es distinto de cero. En este caso, como $|A| = 2m$, tenemos que $|A| = 0 \Leftrightarrow m = 0$. Por tanto existe A^{-1} siempre y cuando $m \neq 0$.

b) [2 puntos] Para $m=1$, halla la matriz X tal que $XA+B=C$.

$$XA+B=C \Rightarrow XA=C-B \Rightarrow X=(C-B)A^{-1}$$

Si $m=1$ la matriz es $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, cuyo determinante es $|A|=2$.

La matriz adjunta es $A^d = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 8 & -4 & 2 \end{pmatrix}$. Por tanto, $A^{-1} = \frac{1}{|A|}(A^d)^d = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & -4 & 8 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & \frac{1}{2} & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Entonces } X = (C-B)A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & \frac{1}{2} & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -9 \\ 0 & 1 & -6 \end{pmatrix}.$$