

Examen de Matemáticas II – 2º de Bachillerato

1. **[2 puntos; 1 punto por apartado]** Resuelve las siguientes integrales. Son inmediatas, pero puedes calcularlas por cualquier otro método.

a) $\int \frac{5x + \sqrt{3x}}{x^2} dx$

b) $\int \frac{x}{3x^2 + 1} dx$

2. **[2 puntos; 1 punto por apartado]** Resuelve las siguientes integrales. En la primera de ellas tendrás que aplicar el método de integración por partes dos veces. La segunda es una integral racional.

a) $\int 2x(\ln x)^2 dx$

b) $\int \frac{3x}{x^2 + 3x - 10} dx$

3. Dadas las funciones $f(x) = x^2 - 1$ y $g(x) = 1 - x$:

a) **[1 punto]** Dibujar el recinto limitado por las gráficas de ambas funciones.

b) **[1 punto]** Calcular el área de dicho recinto.

4. **[2 puntos]** Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, resuelve la siguiente

ecuación matricial: $ABX - CX = 2C$.

5. **[2 puntos]** Utiliza las propiedades de los determinantes para calcular el valor del siguiente determinante:

$$\begin{vmatrix} x & 2x+1 & 3x+2 \\ x & 2x+3 & 3x+4 \\ x & 2x+5 & 3x+4 \end{vmatrix}$$

Soluciones

1. [2 puntos; 1 punto por apartado] Resuelve las siguientes integrales. Son inmediatas, pero puedes calcularlas por cualquier otro método.

$$\begin{aligned} \text{a) } \int \frac{5x + \sqrt{3x}}{x^2} dx &= \int \frac{5x}{x^2} dx + \int \frac{\sqrt{3x}}{x^2} dx = 5 \int \frac{x}{x^2} dx + \sqrt{3} \int \frac{\sqrt{x}}{x^2} dx = 5 \int \frac{1}{x} dx + \sqrt{3} \int x^{-\frac{3}{2}} dx = \\ &= 5 \ln x + \sqrt{3} \frac{x^{-1/2}}{-1/2} + C = 5 \ln x - \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{x}} + C = \end{aligned}$$

$$\text{b) } \int \frac{x}{3x^2 + 1} dx = \frac{1}{6} \int \frac{6x}{3x^2 + 1} dx = \frac{1}{6} \ln(3x^2 + 1) + C$$

2. [2 puntos; 1 punto por apartado] Resuelve las siguientes integrales. En la primera de ellas tendrás que aplicar el método de integración por partes dos veces. La segunda es una integral racional.

$$\text{a) } \int 2x(\ln x)^2 dx = \left[\begin{array}{l} u = (\ln x)^2 \quad du = 2 \ln x \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{2 \ln x}{x} dx \\ 2x dx \quad v = x^2 \end{array} \right] = x^2 (\ln x)^2 - \int x^2 \frac{2 \ln x}{x} dx =$$

$$= x^2 (\ln x)^2 - \int 2x \ln x dx = \left[\begin{array}{l} u = \ln x \quad du = \frac{1}{x} dx \\ dv = 2x dx \quad v = x^2 \end{array} \right] = x^2 (\ln x)^2 - \left(x^2 \ln x - \int x^2 \frac{1}{x} dx \right) =$$

$$= x^2 (\ln x)^2 - x^2 \ln x + \int x dx = x^2 (\ln x)^2 - x^2 \ln x + \frac{x^2}{2} + C.$$

$$\text{b) } \int \frac{3x}{x^2 + 3x - 10} dx. \text{ Como } x^2 + 3x - 10 = (x - 2)(x + 5), \text{ tenemos:}$$

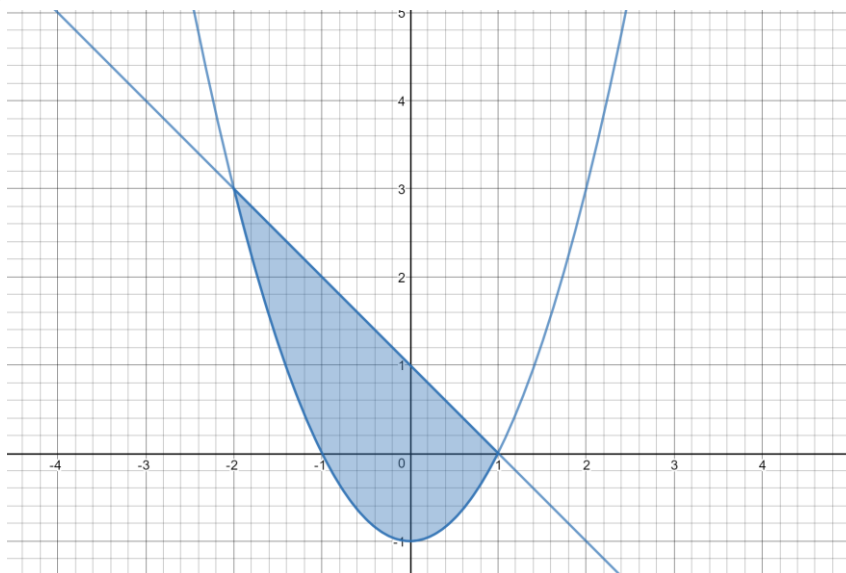
$$\frac{3x}{x^2 + 3x - 10} = \frac{3x}{(x - 2)(x + 5)} = \frac{A}{x - 2} + \frac{B}{x + 5} = \frac{A(x + 5) + B(x - 2)}{(x - 2)(x + 5)} \Rightarrow 3x = A(x + 5) + B(x - 2)$$

$$\text{Si } x = -5 \Rightarrow -15 = -7B \Rightarrow B = \frac{15}{7}. \text{ Si } x = 2 \Rightarrow 6 = 7A \Rightarrow A = \frac{6}{7}. \text{ Por tanto:}$$

$$\int \frac{3x}{x^2 + 3x - 10} dx = \int \frac{6/7}{x - 2} dx + \int \frac{15/7}{x + 5} dx = \frac{6}{7} \ln(x - 2) + \frac{15}{7} \ln(x + 5) + C.$$

3. Dadas las funciones $f(x) = x^2 - 1$ y $g(x) = 1 - x$:

a) [1 punto] Dibujar el recinto limitado por las gráficas de ambas funciones.



b) [1 punto] Calcular el área de dicho recinto.

$$A = \int_{-2}^1 \left((1-x) - (x^2 - 1) \right) dx = \int_{-2}^1 (-x^2 - x + 2) dx = \left[-\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x \right]_{-2}^1 =$$

$$= \left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2 \right) - \left(\frac{8}{3} - 2 - 4 \right) = \frac{-2-3+12}{6} - \frac{8-6-12}{3} = \frac{7}{6} + \frac{10}{3} = \frac{7}{6} + \frac{20}{6} = \frac{27}{6} \text{ uds}^2$$

4. [2 puntos] Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, resuelve la siguiente

ecuación matricial: $ABX - CX = 2C$.

$ABX - CX = 2C \Rightarrow (AB - C)X = 2C \Rightarrow X = (AB - C)^{-1} 2C$. Si llamamos $D = AB - C$, $X = D^{-1} \cdot 2C$.

$$\text{Así: } D = AB - C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -1 & 3 \\ 8 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 3 \\ 9 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

El determinante de la anterior es $|D| = -4 - (-3) = -1$, luego tiene inversa por ser distinto de cero.

$$D^d = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -2 \\ -1 & 15 & 12 \end{pmatrix}; (D^d)^t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 2 & -3 & 15 \\ 1 & -2 & 12 \end{pmatrix}. \text{ Por tanto, la matriz inversa de la matriz } D \text{ es}$$

$$D^{-1} = \frac{1}{|D|} \cdot (D^d)^t = \frac{1}{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 2 & -3 & 15 \\ 1 & -2 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & -15 \\ -1 & 2 & -12 \end{pmatrix}. \text{ Finalmente:}$$

$$X = D^{-1} \cdot 2C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & -15 \\ -1 & 2 & -12 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -2 & 4 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -40 & 38 & -24 \\ -30 & 30 & -20 \end{pmatrix}$$

5. [2 puntos] Utiliza las propiedades de los determinantes para calcular el valor del siguiente determinante:

$$\begin{vmatrix} x & 2x+1 & 3x+2 \\ x & 2x+3 & 3x+4 \\ x & 2x+5 & 3x+4 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} x & 2x+1 & 3x+2 \\ x & 2x+3 & 3x+4 \\ x & 2x+5 & 3x+4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 2x & 3x+2 \\ x & 2x & 3x+4 \\ x & 2x & 3x+4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & 1 & 3x+2 \\ x & 3 & 3x+4 \\ x & 5 & 3x+4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 2x & 3x \\ x & 2x & 3x \\ x & 2x & 3x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & 2x & 2 \\ x & 2x & 4 \\ x & 2x & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & 1 & 3x \\ x & 3 & 3x \\ x & 5 & 3x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ x & 3 & 4 \\ x & 5 & 4 \end{vmatrix} =$$

[los tres primeros determinantes anteriores son cero por poseer al menos una columna proporcional a la

$$\text{primera}] = \begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 2 \end{vmatrix} = x \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = x(4-8) = -4x.$$